3 Processos Estocásticos

Ao contrário dos processos determinísticos que são facilmente modelados e previsíveis, os processos estocásticos são regidos por fenômenos aleatórios, ou seja, as variáveis que seguem este tipo de processo mudam imprevisivelmente de trajetória no tempo, dificultando dessa forma a modelagem.

Os processos estocásticos podem ser ainda divididos em processos de tempo contínuo e processos em tempo discreto. No caso de o processo ser de tempo contínuo, as mudanças podem ocorrer em qualquer tempo. Já no de tempo discreto, ela ocorre somente em determinados pontos fixos no tempo. Quanto à classificação da variável, as contínuas podem variar em um intervalo de tempo infinitesimal, já as discretas podem ser observadas somente em valores discretos

Nesta dissertação, para facilitar a análise dos dados será considerado a variável como sendo contínua em tempo contínuo.

De acordo com Dixit e Pindyck (1994), o processo estocástico pode ser definido, mais formalmente, por uma lei da probabilidade para a evolução de x_t (variável x no tempo t). Ou seja, dados os tempos $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$, é possível calcular a probabilidade correspondente aos valores x_1, x_2, x_3, ..., estarem em um intervalo específico, por exemplo:

$$prob(a_1 < x_1 \leq b_1, a_2 < x_2 \leq b_2, \dots).$$

Quando o tempo está em t_1, pode-se observar o valor de x_1, e, a partir desta informação, se faz possível o cálculo de eventos futuros condicionados a ela.

3.1 Processo de Markov

O processo de Markov é um processo estocástico em particular. Neste tipo de processo, somente o valor corrente é relevante para se prever o futuro. O histórico de uma variável e todo seu comportamento anterior é irrelevante para a previsão.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

Isto significa que a distribuição de probabilidade para os valores futuros depende somente do valor hoje, e que não é afetado pelos valores passados do processo ou por qualquer outra informação atual. Como resultado, somente o valor de hoje é necessário para fazer a melhor previsão para amanhã.

De acordo com Hull (2000), processos de Markov são consistentes com a forma fraca de eficiência de mercado. Na forma fraca, o preço atual de uma ação encerra todas as informações contidas em seu histórico de preços. Não se requer que eles incorporem informações de balanço ou informações privadas.

Preços de ações são normalmente modelados como processos Markovianos. Caso o preço das ações incorporasse o seu comportamento histórico, a metodologia chamada de análise técnica poderia funcionar, pois seria possível obter excesso de retorno na compra de ações somente pela interpretação e análise do gráfico do histórico de preços.

3.2 Processo de Wiener

Também conhecido como Movimento Browniano, é um tipo específico de processo estocástico de Markov, que tem sido utilizado pela física para descrever o movimento de uma partícula sujeita a uma grande quantidade de pequenos choques moleculares.

Este processo é um processo estocástico de tempo contínuo com três propriedades. A primeira delas se refere ao fato de ser um processo de Markov, e, portanto o preço futuro de uma *commodity* depende do preço corrente, mas independe da trajetória dos preços no passado. A segunda se refere ao fato de ter incrementos independentes. Isto significa que a variação ocorrida num intervalo de tempo é independente da ocorrida em qualquer outro intervalo de tempo. E, a terceira e última, se refere ao fato de que estes incrementos seguem uma distribuição normal com parâmetros que dependem só do intervalo de tempo (incrementos estacionários).

Formalizando tudo o que foi dito anteriormente, se $z(t)$ for um processo de Wiener, então, qualquer mudança em z, Δz, no intervalo de tempo Δt, deve satisfazer as seguintes condições:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

1. A relação entre Δz e Δt deve ser dada por: $\Delta z = \epsilon_t \sqrt{\Delta t}$, onde $\epsilon_t \sim N(0,1)$.
2. A variável aleatória ϵ_t é descorrelacionada, ou seja, $\varepsilon[\epsilon_t \epsilon_s] = 0$ para $t \neq s$. Isso significa que os valores de Δz para dois intervalos de tempo diferentes são independentes. E assim, $z(t)$ segue um processo de Markov com incrementos independentes.

A partir da condição 1, é possível notar que $\Delta z \sim N(0, \Delta t)$ e portanto, a variância de um processo de Wiener cresce linearmente com o horizonte de tempo. O processo de Wiener é, portanto, um processo não-estacionário e no longo prazo sua variância tende a infinito

Já quando se faz Δt ser um número infinitesimalmente pequeno, ou melhor, Δt tender a zero, pode-se representar este incremento do processo de Wiener, dz, em tempo contínuo como:

$$dz = \epsilon_t \sqrt{dt}.$$

Visto que $\epsilon_t \sim N(0,1)$, então $E(dz) = 0$ e $Var(dz) = E[(dz)^2] = dt$.

O termo $dz = \epsilon_t \sqrt{dt}$ implica em mudanças bruscas de trajetória. Para um pequeno intervalo Δt, o movimento do desvio-padrão será muito maior que o movimento do termo de tendência (se Δt é pequeno, $\sqrt{\Delta t}$ é muito maior que Δt). Isso determina um comportamento serrilhado dos caminhos do processo de Wiener. Por razões similares, o processo de Wiener não tem derivada em relação ao tempo no sentido convencional, ${}^{\Delta z}\!/_{\Delta t} = \epsilon_t (\Delta t)^{-1/2}$ torna-se infinito quando Δt se aproxima de zero.

3.3 Movimento Aritmético Browniano

O Movimento Aritmético Browniano (MAB) ou movimento Browniano com *drift* é o caso particular mais simples de processo de Itô, pois os termos a e b são constantes: $a(x,t) = \alpha$ e $b(x,t) = \sigma$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

$$dx = \alpha dt + \sigma dz$$

Onde a parte determinística é representada pelo termo αdt e a parte estocástica por σdz. Neste caso, x é dito seguir um MAB com termo de *drift*, ou tendência, α e volatilidade σ.

Possui como valor esperado $E(dx) = \alpha dt$ e variância, $Var(dx) = \sigma^2 dt$ conforme pode ser observado abaixo:

$$E(dx) = E(\alpha dt + \sigma dz) = E(\alpha dt) + E(\sigma dz) = \alpha E(dt) + \sigma E(dz) = \alpha dt$$

$$\begin{aligned} Var(dx) &= E((dx - E(dx))^2) = E((dx - \alpha dt)^2) = E((\alpha dt + \sigma dz - \alpha dt)^2) \\ &= E((\sigma dz)^2) = \sigma^2 dz^2 = \sigma^2 dt \end{aligned}$$

Este processo é apropriado especificamente para variáveis econômicas que crescem numa taxa linear e mostram um aumento de incerteza. Como propriedades, esse movimento possui as seguintes:

1. Devido à distribuição normal, x pode ser tanto positivo quanto negativo;
2. Se $t + dt > t$, então x_{t+dt} é um valor futuro do processo relativo ao tempo t e sua distribuição segue $x_{t+dt} \sim N(x_t + \alpha dt, \sigma^2 dt)$;
3. A variância da previsão x_{t+dt} tende a infinito se $t + dt$ também tender.

Este processo pode ser apropriado para modelar fluxo de caixa líquido. Foi o primeiro modelo matemático usado para valorar opções como pode ser visto na em Bachelier (1900). Samuelson (1965) propôs o movimento geométrico browniano para evitar os preços negativos do MAB.

O movimento aritmético browniano é um processo de Markov:

$$dx = x(t + dt) - x(t) = \alpha dt + \sigma dz$$
$$x(t + dt) = x(t) + \alpha dt + \sigma dz$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

Isto significa que $x(t+dt)$ depende do valor corrente $x(t)$, mas não dos preços passados $x(ts)$, onde $s < t$.

Pode-se observar ainda que no longo prazo a tendência de crescimento é dominante, já no curto prazo, a volatilidade é a dominante. Isso ocorre pelo fato de o desvio-padrão ser $\sigma\sqrt{t}$ e para um t grande, ou melhor, no longo prazo, $\sqrt{t} \ll t$, entretanto para um t pequeno, ocorre o contrário.

3.4 Movimento Browniano Generalizado – Processo de Ito

O movimento browniano generalizado, também conhecido como processo de Ito, é dado pela seguinte equação:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

Onde é $a(x,t)$ e $b(x,t)$ são funções não aleatórias e conhecidas. Sendo a parte determinística representada pelo termo $a(x,t)dt$ e a parte estocástica por $b(x,t)dz$. Neste caso, x é dito seguir um processo de itô com termo de *drift*, ou tendência $a(x,t)$ e volatilidade $b(x,t)$.

Seu valor esperado é $E(dx) = a(x,t)dt$ e variância, $Var(dx) = [b(x,t)]dt$, conforme pode ser observado abaixo:

$$\begin{aligned} E(dx) &= E(a(x,t)dt + b(x,t)dz) = E(a(x,t)dt) + E(b(x,t)dz) \\ &= a(x,t)E(dt) + b(x,t)E(dz) = a(x,t)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(dx) &= E((dx - E(dx))^2) = E((dx - a(x,t)dt)^2) \\ &= E((a(x,t)dt + b(x,t)dz - a(x,t)dt)^2) = E((b(x,t)dz)^2) \\ &= b(x,t)^2dz^2 = [b(x,t)]^2dt \end{aligned}$$

Os parâmetros $a(x,t)$ e $b(x,t)$ são também conhecidos como taxa de crescimento esperado instantâneo e taxa de variância instantânea do processo de Ito.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

3.4.1 Movimento Geométrico Browniano

O Movimento Geométrico Browniano (MGB) é um dos casos mais utilizados do processo de Itô. Neste movimento, os termos a e b são: $a(x,t) = \alpha x$ e $b(x,t) = \sigma x$. Portanto, sabendo que o processo de Itô é representado por $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$, o MGB será escrito da seguinte forma:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz,$$

Ou, simplesmente, por:

$$\frac{dx}{x} = \alpha dt + \sigma dz$$

Neste caso, x é dito seguir um MGB com *drift* c e volatilidade σ.

Pode-se observar na segunda fórmula anterior, que a razão $\frac{dx}{x}$ segue um MAB. E sabe-se que $\frac{dx}{x}$, ou melhor, a mudança percentual em x, segue uma normal. Isso pode ser observado da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx}(lnx) = \frac{1}{x}dx = \frac{dx}{x}$$

Sendo assim, nota-se que $log\ x$ tem uma distribuição normal e x terá uma distribuição log-normal. Isso se deve ao fato de ao fato de $\frac{dx}{x}$ ser o incremento no $log\ x$ e ter uma distribuição normal, pois seu processo é um MAB.

O MGB se tornou mais difundido e conhecido ao ser utilizado como premissa da famosa fórmula de precificação de opções de Black&Scholes. Nesse modelo afirma-se que o log do preço de ações segue um movimento geométrico browniano.

Este processo é apropriado para variáveis econômicas que crescem exponencialmente a uma taxa média α e com volatilidade proporcional ao nível da variável.

Neste processo, dx possui como valor esperado $E(dx) = \alpha dt$ e variância, $Var(dx) = \sigma^2 dt$ conforme pode ser observado abaixo:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

$$E(dx) = E(\alpha xdt + \sigma xdz) = E(\alpha xdt) + E(\sigma xdz) = \alpha E(xdt) + \sigma E(xdz)$$
$$= \alpha xdt$$

$$Var(dx) = E((dx - E(dx))^2) = E((dx - \alpha xdt)^2)$$
$$= E((\alpha xdt + \sigma xdz - \alpha xdt)^2) = E((\sigma xdz)^2) = (\sigma x)^2 dz^2$$
$$= \sigma^2 x^2 dt$$

Já para o cálculo do valor esperado da variável $x(t)$, sabendo que a mesma tem uma distribuição log-normal, devemos fazer $F(x) = lnx$ que possuirá uma distribuição normal. Utilizando o lema de Itô temos:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2$$

Temos que: $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x}$; $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$.

E também que: $dx^2 = (\alpha xdt + \sigma xdz)^2 = (\alpha x)^2 dt^2 + (\sigma x)^2 dz^2 + 2\alpha\sigma x^2 dtdz = (\sigma x)^2 dt$

Logo:

$$dF = \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2x^2}(\sigma x)^2 dt = \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$
$$dF = \alpha dt + \sigma dz + \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$dF = \left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz$$

Sendo assim, temos que $dF \sim N\left[\left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\right), \sigma^2 dt\right]$, após algumas manobras chegaremos a $E(x_T) = x_0 e^{\alpha T}$ e que sua variância é $Var(x_T) = x_0^2 e^{2\alpha T}\left(e^{\sigma^2 T} - 1\right)$.

Como propriedades, esse movimento possui as seguintes:

1. Se x começa sendo positivo, ele sempre será positivo, ou seja, ele não varia de positivo a negativo;
2. x tem uma barreira absorvente em zero, ou seja, se x chega a zero (um evento com probabilidade zero), então x permanece nesse valor. Ou

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

melhor, por exemplo: se o preço de uma ação chegar a zero, significa que a mesma virou “pó”, que não tem mais valor algum;

3. Sabendo que x_t segue uma distribuição log-normal e quando $u > t$, $E(lnx_u) = lnx_t + \alpha(u-t) - {}^1/_2\,\sigma^2(u-t)$, $Var(lnx_u) = \sigma(u-t)$. Logo, lnx_u tem distribuição normal com média $x_t \exp\,[\alpha(u-t)]$;
4. A variância da previsão de x_u tende a infinito quando u tende a infinito.

Devido às suas características, o MGB pode ser usado para qualquer modelo que se comporte sempre positivamente, e que cresça na média a uma taxa exponencial constante. Como exemplo de uma série com estas características temos as séries de preços de commodities. Também há casos em que uma taxa de crescimento negativa é desejada para uma variável positiva, o MGB também se adequa a este caso.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

3.5 Movimento de Reversão à Média

O Movimento de Reversão à Média, MRM, é amplamente utilizado para a modelagem de séries de preço de *commodities* e de taxas de juros. Entretanto, não é recomendável sua utilização para séries de curto prazo.

O MRM é um processo de Markov cujo sentido e a intensidade do desvio são dependentes do preço corrente, o que não ocorre com o MGB. Isso significa que esse movimento não possui incrementos independentes.

Sua forma mais simples é conhecida como processo de *Ornstein-Uhlenbeck* e dado pela seguinte equação:

$$dx = \eta\left(\bar{x} - x\right)dt + \sigma dz$$

Onde η é a velocidade de reversão e $\bar{x}$ é a média de longo prazo, que é o nível ao qual x tende a reverter. Caso x seja uma *commodity*, $\bar{x}$ representa o custo marginal de longo prazo de produção da mesma.

Este processo modela bem as séries de *commodities* devido ao fato de que as commodities tem uma tendência muito natural de reverter ao seu preço médio de longo prazo, que é justamente sua média de equilíbrio de mercado, e este processo de reversão tende a ser lento.

Generalizando a equação do MRM para qualquer que seja o caso, sem ser especificamente o de *Ornstein-Uhlenbeck*, temos:

$$dx = \eta(\mu - x)dt + \sigma x^{\gamma} dz$$

A escolha do parâmetro γ é arbitrária, e pode dar uma interpretação à volatilidade do processo. Segundo Shimko (1992), este processo exibe, como principais características, as seguintes propriedades:

1. x será positivo desde que comece positivo;
2. Ao se aproximar x de zero, o *drift* é positivo e a volatilidade desaparece;
3. Quando u se tornar infinito, a variância de uma previsão de x_u é finita.

Este processo é apropriado principalmente para variáveis econômicas positivas, que tendem a um preço médio de longo prazo, mas que sofrem perturbações de curto prazo. Ou melhor, isso significa que no curto prazo o preço pode subir e descer aleatoriamente, mas no longo prazo ele tende a voltar para o custo marginal de produção.

Já no processo de *Ornstein-Uhlenbeck*, considerando o valor atual de x como sendo igual a x_0, μ sendo igual a $\bar{x}$ e, $\gamma = 0$, então seu valor esperado e a variância de $x_t - \bar{x}$ em qualquer tempo t, é deterrminada como abaixo:

$$E(x_t) = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta t}$$

$$Var(x_t - \bar{x}) = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta t})$$

A partir das equações anteriores pode-se comprovar que no longo prazo, ou melhor, fazendo t tender a infinito, $e^{-\eta t}$ vai tender a zero e,

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

conseqüentemente, o valor esperado vai tender a $\bar{x}$. Enquanto isso, a variância converge em $\frac{\sigma^2}{2\eta}$ quando $t \to \infty$.

O que ocorre por trás de variáveis que seguem este movimento também pode ser explicado pela teoria microeconômica. Ou seja, quando os preços estão baixos, ou melhor, abaixo do preço de mercado, a demanda tende a aumentar e naturalmente a oferta, a diminuir. Esse aumento de demanda ocorre pois os consumidores destes produtos tendem a querer comprar mais do mesmo quando eles estão baratos. Em contrapartida, a oferta cai porque com os preços mais baixos, o retorno obtido pelas unidades produtoras diminui, a margem diminui, e, com isso, investimentos passam a ser postergados e unidades menos eficientes são fechadas para evitar um prejuízo ainda maior, diminuindo, assim, a disponibilidade do produto e forçando um aumento de preço. Já caso os preços estiverem acima do preço de mercado, ocorre o oposto, a demanda diminui e a os preços caem devido à oferta estar maior que a procura. Entretanto, a velocidade com que esses preços revertem à média é lenta, não é um processo instantâneo, ainda mais porque se tratando de *commodities*, investimentos de porte altíssimo estarão envolvidos e tudo move mais lentamente.

Analiticamente, na fórmula do processo de *Ornstein-Uhlenbeck*, sabendo que variação esperada de x depende da diferença entre x e $\bar{x}$, se x estiver acima de $\bar{x}$ é mais provável que x caia no próximo intervalo de tempo. Caso esteja abaixo, a tendência é de subida. Esse processo, além de satisfazer a propriedade de Markov, não possui incrementos independentes.

Já avaliando as variações de velocidade de reversão à média η, mantendo t constante, quando $\eta \to \infty$: $e^{-\eta t} \to 0$ e $\frac{\sigma^2}{2\eta} \to 0$, e por conseqüência $E(x_t) \to \bar{x}$ e $Var(x_t) \to 0$. Isso significa que se a velocidade de reversão tende a infinito, o valor de x nunca se desviará de $\bar{x}$, mesmo que momentaneamente. Agora, se $\eta \to 0$, sabendo que $dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz$, com η tendendo a zero, essa fórmula se transformará em $dx = \sigma dz$, o que se resume a um movimento browniano simples, e, o valor esperado de x_t passará a ser zero e sua variância $Var(dx) = Var(\sigma dz) = \sigma^2 t$, ou seja, $Var(x_t) \to \sigma^2 t$. O que significa que um

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

processo de reversão extremamente lento tende a se transformar num movimento browniano.

Outro conceito importante da reversão à média está na presença de uma medida mais gerencial da velocidade de reversão η. Esta medida é o conceito de *half-life*, ou seja, da meia-vida da reversão, H. Ele nos dá uma medida da lentidão do processo. É o tempo em que a variável estocástica leva para percorrer a metade do caminho entre o seu valor corrente e a média de longo prazo. A relação entre η e H para o logaritmo do preço P é dada por $H = \frac{ln2}{\eta}$. É possível reparar nesta equação que o valor corrente do preço e a média de longo prazo não são importantes para esta medida, somente é necessário conhecer a velocidade de reversão.

Será demonstrado abaixo como chegar nesta fórmula em um processo de *Ornstein-Uhlenbeck*. A metade do caminho entre o seu valor corrente e a média de longo prazo é dados por: $x_0 + \frac{(\bar{x}-x_0)}{2} = \frac{\bar{x}+x_0}{2}$. De posse desta informação e do valor esperado do processo, podemos encontrar o valor da meia-vida a seguir:

$$E(x_t) = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta t}$$

$$\frac{\bar{x} + x_0}{2} = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta H}$$

$$\frac{\bar{x} - 2\bar{x} + x_0}{2} = (x_0 - \bar{x})e^{-\eta H}$$

$$\frac{x_0 - \bar{x}}{2} = (x_0 - \bar{x})e^{-\eta H}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\eta H}$$

$$\eta H = ln2$$

$$H = \frac{ln2}{\eta}$$

Ainda sabendo que o MRM é mais adequado para a modelagem de taxa de juros e *commodities*, não é fácil rejeitar a hipótese de que eles seguem um MGB, principalmente se a série for curta. Ou melhor, como já dito anteriormente, se a mesma for de curto prazo, a modelagem em MRM pode ser prejudicada tendo em vista que o MGB é um processo de mais fácil modelagem, e teste estatísticos somente rejeitam o MGB para séries extremamente longas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

Ao analisar a convergência de longo prazo, nota-se que a grande diferença entre o MGB e o MRM é que enquanto o MRM converge à média de longo prazo, o MGB, quando o tempo tende a infinito, dependendo de seu *drift* ser positivo ou negativo, ele apresentará um crescimento ou uma queda e não convergirá à média de longo prazo.

Para se diminuir a previsibilidade de um processo de Ornstein-Uhlenbeck, pode ser mais realista a combinação de um MRM com um MGB para o nível de equilíbrio, ou então, adicionar um processo de salto como o de Poisson. Caso contrário, o MRM pode ser uma escolha de modelagem pior, e obter um resultado menos realista, que o MGB.

Estudos empíricos (Pindyck & Rubinfeld, 1991) demonstraram que com preços de petróleo, a lógica da microeconomia indica que o processo estocástico inclui um componente MRM. No entanto, testes estatísticos somente rejeitam o MGB para séries extremamente longas.

Um fator que indica a presença do processo de reversão à média, pelo menos dentro do horizonte de aproximadamente dois anos, é a existência de um mercado futuro com estrutura a termo, ou melhor, quando duas partes combinam e fixam um preço hoje a ser pago e entregue numa data futura. Isto ocorre pelo fato de os investidores concordarem com que o preço estará girando em torno de uma média de longo prazo. Nestes casos ainda é possível perceber uma volatilidade maior dos preços spot e menor para preços futuros, o que também é mais coerente com a reversão à média.

Para estimar os parâmetros do MRM será necessário a utilização de um processo auto-regressivo de primeira ordem, AR(1), dado que a equação $dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz$ é a versão em tempo contínuo para um processo auto-regressivo de primeira ordem AR(1). Essa equação é o caso limite quando $\Delta t \to 0$ para o seguinte AR(1):

$$x_t - x_{t-1} = \bar{x}\left(1 - e^{-\eta}\right) + \left(e^{-\eta} - 1\right)x_{t-1} + \varepsilon_t \, ,$$

Onde $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ e $\sigma_\varepsilon^2 = \dfrac{\sigma^2}{2\eta}\left(1 - e^{-2\eta}\right)$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

Logo, para que seja possível estimar os parâmetros da equação do MRM utilizando dados em tempo discreto deve-se rodar a regressão:

$$x_t - x_{t-1} = a + bx_{t-1} + \varepsilon_t$$

Com os resultados da regressão, o cálculo dos parâmetros do MRM é feito da seguinte forma:

$$\bar{x} = -\hat{a}/\hat{b}, \quad \hat{\eta} = -\log(1+\hat{b}), \quad \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{\frac{\log(1+\hat{b})}{(1+\hat{b})^2 - 1}},$$

onde $\hat{\sigma}_\varepsilon$ é o erro padrão da regressão.

Para saber se o preço de uma *commodity* é melhor modelado por um MBG ou por um MRM deve-se, primeiramente, examinar os dados, estimar a equação auto-regressiva de primeira ordem mostrada anteriormente, e testar se o coeficiente de x_{t-1} no lado direito da equação é significativamente diferente de zero. Entretanto, para Dixit e Pyndick (1994), existem dois problemas gerados por isso, o primeiro diz respeito à hipótese nula de que o coeficiente deve ser zero, para que seja possível dizer que x_t segue um passeio aleatório. Seu estimador de mínimos quadrados ordinários é enviesado em torno de zero, sendo assim, não se faz possível a utilização do teste t para se determinar onde a estimativa é significativamente diferente de zero. No entanto, há uma segunda alternativa de teste que pode ser facilmente aplicada em vez do teste t. Essa alternativa se chama *unit root tests*, ou, em português, teste de raiz unitário, desenvolvido inicialmente por Dickey e Fuller (1981) e mais tarde ampliado e refinado. Já o segundo problema é ainda mais sério: a necessidade de uma série longa, com muitos anos para que seja possível determinar com algum grau de confiança, quando uma variável segue um Movimento de Reversão à Média.

3.5.1 Outros Modelos de Reversão à Média

No seu famoso artigo Schwartz (1997) apresenta três modelos de comportamento estocástico para os preços das *commodities*, que levam em

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

consideração a reversão à média em termos de sua habilidade em precificar contratos futuros e sua implicação com relação a outras instituições financeiras e ativos reais.

- **Primeiro modelo**: modelo simples de apenas um fator no qual supõe-se que o logaritmo do preço *spot* da *commodity* segue um processo de reversão à média do tipo Ornstein-Uhlenbeck;
- **Segundo modelo**: é uma variação do modelo de dois fatores de Gibson e Schwartz (1990). Leva em consideração um segundo fator estocástico, a taxa de conveniência da *commodity*, presumida como um processo de reversão à média e positivamente correlacionada com o preço *spot*[1];
- **Terceiro modelo**: é uma versão extendida do modelo de dois fatores de Gibson e Schwartz (1990). Inclui, além dos dois fatores anteriores, taxas de juros estocásticas. Neste modelo de três fatores, a taxa de juros instantânea é pressuposta como seguindo um processo de reversão à média similar ao proposto por Vasicek (1977).

A seguir serão descritos os três modelos propostos por Schwartz (1997).

3.5.1.1 Primeiro Modelo: Ornstein-Uhlenbeck

Neste primeiro modelo, o preço à vista da *commodity*segue um processo estocástico similar ao proposto por Ross (1995):

$$dS = k(\mu - lnS)Sdt + \sigma Sdz$$

onde:

S – preço à vista da *commodity*

k - velocidade de reversão à média ($k > 0$)

μ - média de longo prazo do preço

σ - volatilidade do preço do ativo

dt - variação do tempo

dz - processo de Wiener

[1] A correlação positive entre as variações do preço à vista e as variações na taxa de conveniência da *commodity* é deduzida pelo nível de estoque. Quando os estoques diminuem, o preço *spot* deve aumentar, já que a produção é escassa e a taxa de conveniência aumenta dado que os preços futuros não vão aumentar tanto quanto o preço à vista, e vice-versa quando os estoques aumentam.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

Fazendo $X = lnS$ e aplicando o lema de Itô:

$$dX = \frac{\partial X}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial S^2} dS^2$$

$$dS^2 = (k(\mu - lnS)S)^2 dt^2 + (\sigma S)^2 dz^2 + 2k(\mu - lnS)\sigma S^2 dtdz$$

Sabe-se que $dt^2 = 0$, $dt, dz = 0$ e que $dz^2 = dt$. Logo,

$$dS^2 = (\sigma S)^2 dt$$

$$\frac{dS^2}{S^2} = \sigma^2 dt$$

Voltando ao lema de Itô:

$$dX = \frac{\partial X}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial S^2} dS^2$$

$$dX = \frac{dS}{S} + \frac{1}{2}(-1) \frac{dS^2}{S^2}$$

$$dX = k(\mu - lnS)dt + \sigma dz - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$dX = k\left(\mu - lnS - \frac{\sigma^2}{2k}\right) dt + \sigma dz$$

$$dX = k\left(\mu - X - \frac{\sigma^2}{2k}\right) dt + \sigma dz$$

Fazendo $\alpha = \mu - \frac{\sigma^2}{2k}$:

$$dX = k(\alpha - X)dt + \sigma dz$$

Sob medida de *martingale*:

$$dX = k(\alpha^* - X)dt + \sigma dz^*,$$

onde $\alpha^* = \alpha - \lambda$, com λ representando o preço de risco do mercado (assumido constante).

Já o valor esperado é o seguinte:

$$F(S,T) = E[S(T)] = exp\left\{e^{-kT} lnS + (1 - e^{-kT})\alpha^* + \frac{\sigma^2}{4k}(1 - e^{-2kT})\right\}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

E a equação diferencial parcial é:

$$^{1}/_{2}\,\sigma^2 S^2 F_{SS} + k(\mu - \lambda - lnS)SF_S - F_T = 0$$

Com equação de contorno igual a: $\mathrm{F(S,0) = S}$.

3.5.1.2 Segundo Modelo: Variação Modelo de dois fatores de Gibson e Schwartz

Neste segundo modelo, baseado no modelo de Gibson e Schwartz (1990), são dois os fatores estocásticos: o preço à vista da *commodity* e a taxa de conveniência instantânea, δ. A taxa de conveniência nada mais é do que o fluxo de benefícios de possuir estoque físico da *commodity*. Deve-se ao fato da existência de risco de escassez, e é líquido do custo de estocagem (Kaldor, 1939; Working, 1948, 1949; Brennan, 1958). Esses fatores assumem os seguintes processos estocásticos:

$$dS = (\mu - \delta)Sdt + \sigma_1 S dz_1$$
$$d\delta = k(\alpha - \delta)dt + \sigma_2 dz_2$$
$$dz_1 dz_2 = \rho dt$$

Definindo $X = lnS$ e aplicando o lema de Itô:

$$dX = \frac{\partial X}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X}{\partial S^2}dS^2$$
$$dS^2 = \big((\mu - \delta)S\big)^2 dt^2 + (\sigma_1 S)^2 dz_1^2 + 2(\mu - \delta)S\sigma_1 dtdz_1$$

Sabe-se que $dt^2 = 0$, $dtdz = 0$ e que $dz^2 = dt$. Logo,

$$dS^2 = (\sigma_1 S)^2 dt$$
$$\frac{dS^2}{S^2} = \sigma_1^2 dt$$

Voltando ao lema de Itô:

$$dX = \frac{\partial X}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X}{\partial S^2}dS^2$$
$$dX = \frac{dS}{S} + \frac{1}{2}(-1)\frac{dS^2}{S^2}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

$$dX = (\mu - \delta)dt + \sigma_1 dz_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 dt$$

$$dX = \left(\mu - \delta - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)dt + \sigma_1 dz_1$$

Neste modelo a *commodity* é tratada como um ativo que paga taxa de dividendos δ. Logo, a tendência do processo, ajustada ao risco, será dada por $r - \delta$. Sabendo que o risco da taxa de conveniência não pode ser *hedgeado*, o processo de ajuste ao risco da taxa de conveniência terá um preço de mercado de risco associado a ele.

3.5.1.3 Terceiro Modelo: Modelo de Três Fatores

Os fatores estocásticos neste modelo são: o preço à vista da *commodity*, a taxa de conveniência instantânea e a taxa de juros instantânea. Assume-se que a taxa de juros instântanea para o ativo livre de risco segue um processo estocástico de Ornstein-Uhlenbeck, tal como o proposto por Vasicek (1977). Isto permite a extensão do modelo de dois fatores, resultando em um modelo de três. Sob medida de *martingale*, temos que:

$$dS = (r - \delta)Sdt + \sigma_1 S dz_1^*$$
$$d\delta = k(\hat{\alpha} - \delta)dt + \sigma_2 dz_2^*$$
$$dr = a(m^* - r)dt + \sigma_3 S dz_3^*$$
$$dz_1^* dz_2^* = \rho_1 dt$$
$$dz_2^* dz_3^* = \rho_2 dt$$
$$dz_1^* dz_3^* = \rho_3 dt$$

Onde a e m^* são, respectivamente, a velocidade de reversão à média e a taxa média de curto prazo, ajustada ao risco do processo que segue a taxa de juros. Logo, os preços futuros devem satisfazer a seguinte equação diferencial parcial:

$$\begin{aligned} {}^1\!/_2\,\sigma_1^2 S^2 F_{SS} + {}^1\!/_2\,\sigma_2^2 S^2 F_{\delta\delta} + {}^1\!/_2\,\sigma_3^2 S^2 F_{rr} + \sigma_1\sigma_2\rho_1 S F_{S\delta} + \sigma_2\sigma_3\rho_2 S F_{\delta r} \\ + \sigma_1\sigma_3\rho_3 S F_{Sr} + (r - \delta)S F_S + k(\hat{\alpha} - \delta)S F_\delta + a(m^* - r)F_r - F_T \\ = 0 \end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

Com condição de contorno: $F(S, \delta, r, 0) = S$.

3.6 Movimento de Reversão à Média com saltos de Poisson

O movimento de reversão à média com saltos de Poisson, MRMSP, é um modelo mais realista para variáveis econômicas que realizam saltos infreqüentes e discretos. Ou seja, essas séries inesperadamente podem sofrer saltos ou quedas em alguns momentos. Normalmente, o interesse é sobre grandes salto de baixa freqüência.

O processo de Poisson é um processo sujeito a eventos, no caso saltos de tamanho fixo ou aleatório, com uma freqüência que segue uma distribuição de Poisson.

O barril de petróleo do tipo Brent é um excelente exemplo de série que segue este tipo de movimento, apresentando tanto saltos para cima, *jumps up*, quanto para baixo, *jumps-down*. Esses saltos são reações do mercado a alguma crise e/ou notícia.

Segundo Dias e Rocha (1999), neste tipo de processo, o preço tende a reverter a uma média de longo prazo, e esta tendência de reversão é maior quanto mais afastado da média de longo prazo estiver o preço atual. Seria um movimento análogo ao caso da força de uma mola, quanto mais estendida ele está, com mais força ela volta à posição inicial.

Por ser mais realísta, esse processo explica fenômenos empíricos encontrados em séries temporais, tais como assimetria de retornos (*skewness*) e maior probabilidade de eventos extremos (distribuição com *fatter tails*). Além disso, do ponto de vista econômico, quando comparado com a reversão à média, ele evita o excesso de previsibilidade.

Entretanto, ele também apresenta desvantagens tais como a dificuldade de modelagem, tendo em vista o aumento do número e complexidade dos parâmetros a serem estimados no modelo. Outra implicação deste modelo é que na teoria não se faz possível ter um portfólio com retorno livre de risco, caso existam saltos. Isso só ocorre se o risco dos saltos tem prêmio de risco igual à zero, que foi justamente o que Merton (1976) assumiu. Mas, para tal suposição, deve-se

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

analisar se é razoável dizer que os saltos em um certo modelo têm correlação zero com a economia ou não.

Sendo λ a taxa média de chegada de um evento (salto), em um determinado intervalo infinitesimal de tempo, dt, a probabilidade de este salto ocorrer é dada por λdt. Já a probabilidade de não-ocorrência do evento é dada pelo seu complemento, ou seja, $1-\lambda dt$. Sendo a variável aleatória u o tamanho do salto, e q um processo de Poisson, análogo ao processo de Wiener, em termos matemáticos temos o seguinte:

$$dq = \begin{cases} 0 \;, & com\ probabilidade\ 1-\lambda dt \\ u \;, & com\ probabilidade\ \lambda dt \end{cases}$$

Reescrevendo este processo estocástico para a variável x como uma equação diferencial de Poisson, ou melhor, utilizando dq, teremos uma equação que corresponde a um processo de Itô abaixo:

$$dx = f(x,t)dt + g(x,t)dq\,,$$

onde $f(x,t)$ e $g(x,t)$ são funções conhecidas e determinísticas.

Considerando $H(x,t)$ como uma função diferenciável, temos que:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t}dt + \frac{\partial H}{\partial x}dx$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t}dt + \frac{\partial H}{\partial x}\left[f(x,t)dt + g(x,t)dq\right]$$

Ao contrário do que se tem em um processo de Itô, o termo dx não depende de $\sqrt{dt}$. Então, as variações de dx alteram $H(x,t)$ de duas maneiras. As mudanças em $H(x,t)$ ocorrerão contínua e deterministicamente em resposta ao *drift* em x, e se houver a possibilidade de um evento de Poisson ocorrer, x se

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

modificará aleatoriamente de acordo com $ug(x,t)$, e $H(x,t)$ variará na mesma proporção. Sabendo que a probabilidade de ocorrência de um evento em um intervalo dt é de λdt, temos que:

$$E\left(\frac{\partial H}{\partial x}g(x,t)dq)\right)=E_u\{\lambda[H(x+ug(x,t),t)-H(x,t)]\}dt\,,$$

Onde o valor esperado que se encontra no lado direito da fórmula diz respeito ao tamanho do salto u. Para o cálculo de $E(dH)$ temos:

$$E[dH]=\left(\frac{\partial H}{\partial t}+f(x,t)\frac{\partial H}{\partial x}\right)dt+E_u\{\lambda[H(x+ug(x,t),t)-H(x,t)]\}dt$$

Algumas vezes pode-se notar a combinação de um processo de Itô com um processo de saltos, ou seja, ele possui mudanças contínuas e discretas. O primeiro acontece o tempo todo, já este último ocorre com pouca freqüência. Para isso, a versão apropriada do lema de Ito também combina esses dois efeitos:

$$dx=a(x,t)dt+b(x,t)dz+g(x,t)dq\,,$$

Ou melhor,

$$dx=dx_{\substack{CONTÍNUO\\ Determinístico}}+dx_{\substack{CONTÍNUO\\ Estocástico}}+dx_{DISCRETO}$$

Onde,

$$dx_{\substack{CONTÍNUO\\ Determinístico}}=a(x,t)dt$$

$$dx_{\substack{CONTÍNUO\\ Estocástico}}=b(x,t)dz$$

$$dx_{DISCRETO}=g(x,t)dq$$

Assim o valor esperado de dH é dado por:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

$$E[dH]=\left(\frac{\partial H}{\partial t}+a(x,t)\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{1}{2}b^{2}(x,t)\frac{\partial^{2}H}{\partial x^{2}}\right)dt+E_{u}\{\lambda[H(x+ug(x,t),t)-H(x,t)]\}dt$$

Sendo assim, isso pode ser interpretado da seguinte forma:

$$dH = dH_{CONTÍNUA} + dH_{DISCRETA}$$
$$E(dH) = E(dH_{CONTÍNUA}) + E(dH_{DISCRETA})$$

Note-se que a derivada de segunda ordem é relevante somente para a contribuição na variação da parte contínua do processo. A contribuição dos saltos é dada pelo segundo termo do lado direto da equação em diferentes pontos discretamente.

Os processos de Poisson podem ser ainda de dois tipos: homogêneos e não-homogêneos, os homogêneos possuem incrementos independentes e estacionários, e com o número de saltos no tempo tendo uma distribuição de Poisson. Já um processo não homogêneo não requer a premissa de incrementos estacionários e a freqüência destes saltos é uma função do tempo.

Como demonstrado anteriormente, estes processos de Poisson podem gerar processos mistos de difusão com saltos, com o processo de Wiener, dz e Poisson composto, dq, independentes. Pode-se utilizar, dessa forma, combinações como MGB com saltos de Poisson, ou MRM com saltos de Poisson.

No modelo proposto por Dias e Rocha (1999), supôs-se que o preço de petróleo (P) seguia o seguinte processo geométrico de reversão à média com saltos:

$$\frac{dP}{P}=\left[\eta\left(P-\overline{P}\right)-\lambda k\right]dt+\sigma dz+dq$$

Onde,

$$dq=\begin{cases}0 \ , & com\ probabilidade\ 1-\lambda dt\\ u \ , & com\ probabilidade\ \lambda dt\end{cases}$$
$$k = E[u-1]$$

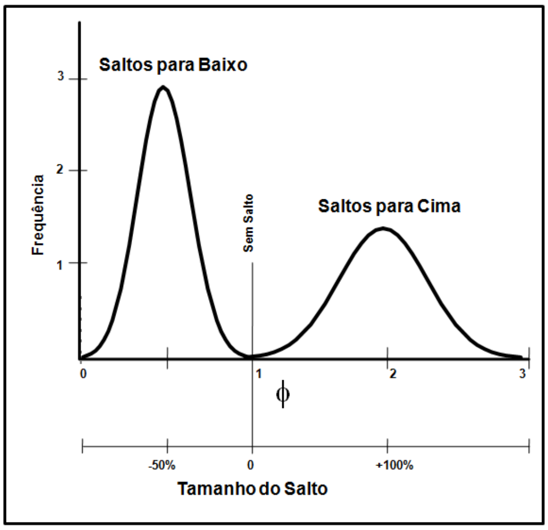
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA

Com isso,

$$E\left[\frac{dP}{P}\right]=\eta\left(P-\overline{P}\right)$$

Segundo os autores, o tamanho e o sentido dos saltos são incertos e têm como distribuição de probabilidade duas normais truncadas. Em caso de ocorrer uma notícia anormal, existe 50% de chance de ocorrer um *jump-up* e 50% de um *jump-down*. Ainda, no caso de *jump-up*, o preço deverá dobrar, enquanto no caso de *jump-down*, o preço deverá cair pela metade. Conforme pode ser verificado na figura a seguir:

Figura 3.1 - Distribuição Aleatória do Tamanho dos Saltos



Fonte: Dias e Rocha (1999)

Os saltos podem ainda ser classificados como sistemáticos ou não-sistemáticos. No caso de saltos sistemáticos, não seria possível construir um portfólio sem risco. Entretanto, no caso de saltos não-sistemático poderia-se usar *contingent claim analysis*. Os autores analisaram ambos os casos.

Por seguir um movimento de reversão à média, um MRMSP também necessita de séries longas, para que seja adequadamente modelado com um bom grau de confiança.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0913441/CA