2
Referencial teórico

2.1.
Modelo de Black

O modelo de Black (1976), uma variação do modelo de Black & Scholes – B&S (1973), não só é amplamente utilizado no apreçamento de opções européias de futuros de *commodities*, índices etc., como também pode ser utilizado para o apreçamento de opções sobre títulos pré-fixados.

Ao contrário do modelo de B&S, que tem como ativo objeto o preço à vista, no modelo de Black o ativo objeto é representado pelo preço a termo do contrato futuro. Isto posto, no caso de apreçamento de opções de taxa de juros, o modelo de Black considera o preço a termo do título como ativo objeto.

Tal como no modelo B&S, no modelo de Black o ativo objeto possui distribuição lognormal no vencimento, enquanto que os retornos (ou crescimento) do ativo objeto possuem distribuição normal, a taxa de juros é constante durante o período de vida da opção e a volatilidade do ativo objeto é constante. Contudo, o modelo de Black se depara com algumas limitações.

Quando se trata de títulos pré-fixados, quanto mais próximo do vencimento, menor a sua volatilidade. No Brasil, geralmente é utilizada uma volatilidade média a fim de diminuir o efeito negativo desse problema.

Outro problema é que o modelo de Black pode gerar taxas de juros nominais negativas, visto que o ativo objeto, que possui distribuição lognormal, pode ter um valor no vencimento menor do que ele tem no início (instante zero). Ao pressupor uma taxa de juros constante, tal modelo não permite considerar uma estrutura a termo com diferentes taxas de juros ao longo do tempo. Além disso, este modelo não deve ser utilizado para opções americanas, cujo exercício pode ser efetivado a qualquer momento da vida da opção.

Apesar das limitações do modelo de Black e do posterior surgimento de modelos mais sofisticados, atualmente, este modelo continua sendo o mais utilizado no mercado para precificar opções de taxas de juros.

Isto se deve ao fato de que é um modelo com fórmula fechada, de fácil implementação, que não demanda grandes esforços computacionais, com premissas em linha com a moderna teoria de finanças e que fornece resultados satisfatórios.

Pelo modelo, o preço da call européia é expresso como segue:

$$c(t,T,s) = P(t,T)[P(T,s)N(d_1) - KN(d_2)]$$

(1)

Analogamente, o preço da put européia é expresso por:

$$p(t,T,s) = P(t,T)[KN(d_1) - P(T,s)N(d_2)]$$

(2)

Onde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{P(T,s)}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

T: Vencimento da opção

s: Vencimento do título

P(T,s): Preço do futuro do título entre T e s

σ : Volatilidade do Preço do futuro do título

K: Preço de Exercício

2.2. Principais modelos de equilíbrio geral

2.2.1. Modelo de Vasicek

O modelo de Vasicek (1977) é um modelo de Equilíbrio Geral, com estrutura temporal de taxas de juros endógena. Destaque-se que o primeiro artigo a propor o comportamento de reversão à média foi o de Vasicek (1977), que apresentou o seguinte processo para taxa de juros de curto prazo:

$$dr_t = \alpha(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

(3)

Onde:

θ: taxa de juros média de longo prazo

r_t: taxa de juros de curto prazo

α: velocidade de reversão à média

σ: volatilidade da taxa de juros de curto prazo

W_t: processo de Wiener

A reversão à média incorpora no modelo o fato observado de que os governos não sustentam taxas de juros tão elevadas (ou baixas) *ad eternum*. Dessa maneira, verifica-se que após um período de alta (ou baixa) de taxa de juros, existe uma tendência de queda (ou alta) dessa taxa, retornando para uma média de longo prazo a uma determinada velocidade.

Outra importante qualidade deste modelo é que ele permite a elaboração de fórmulas fechadas para opções européias.

Contudo, por ser um modelo onde a determinação da estrutura de taxa de juros é endógena, por definição, faz-se necessária a custosa calibração dos resultados do modelo para se chegar à mesma estrutura de taxas de juros vigente no mercado. Além disso, o modelo de Vasicek permite que taxas de juros nominais venham a ser negativas. Neste modelo a volatilidade é considerada como constante.

2.2.2. Modelo CIR

O modelo Cox-Ingersoll-Ross (1985), ou CIR, é um modelo de equilíbrio geral, com reversão à média, que pode ser considerado como uma extensão do modelo de Vasicek (1977) ao acrescentar $\sqrt{r_t}$ multiplicando σdW_t, e com isso, portanto, não permitindo taxas de juros nominais negativas, desde que seja atendida a condição de que $2\alpha\theta \geq \sigma^2$.

Segue abaixo o processo para taxa de juros de curto prazo do modelo CIR:

$$dr_t = \alpha(\theta - r_t)dt + \sqrt{r_t}\sigma dW_t$$

(4)

Uma fórmula fechada para opções européias também podem ser gerada a partir deste modelo.

Sendo um modelo com estrutura de taxas de juros endógena, também deve ser realizada a custosa calibração dos resultados obtidos para ajustá-los à estrutura de taxas de juros de mercado. Neste modelo também é considerada a volatilidade constante.

2.3. Principais modelos de não-arbitragem

2.3.1. Modelo Ho-Lee

Ho e Lee (1986) criaram o primeiro modelo de não-arbitragem, que tem como principal característica considerar a estrutura de taxas de juros exógena. Ou seja, este modelo traz como grande virtude o ajuste automático da estrutura de taxa de juros do modelo com a do mercado.

Neste modelo não há reversão à média, porém, houve a evolução de considerar o *drift* θ variando com o tempo. Segue abaixo o processo de taxa de juros de curto prazo de Ho-Lee:

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t$$

(5)

Devido ao fato de este processo ser um processo de Markov, o que possibilita que se construa uma árvore binomial recombinante, tem-se considerável diminuição de esforço computacional. O modelo permite ainda a elaboração de uma fórmula fechada para opções européias. Neste modelo também é considerada a volatilidade constante.

Como já foi dito anteriormente, pode-se considerar o modelo Ho-Lee como um caso particular do modelo geral do HJM (1992).

2.3.1. Modelo Hull-White

O modelo de Hull-White (1990) pode ser interpretado como uma extensão do modelo de Vasicek (1977) com o *drift* θ variando com o tempo ou até mesmo o modelo de Ho-Lee (1986) incorporando reversão à média. Segue abaixo o processo de taxa de juros de curto prazo de Hull-White:

$$dr_t = (\theta_t - \alpha r_t)dt + \sigma dW_t$$

(6)

Sendo um modelo de não-arbitragem, sua estrutura de taxas de juros é exógena e, conseqüentemente, apresenta ajuste automático da estrutura de taxa de juros do modelo com a do mercado.

Como o modelo possui o processo de Markov, pode-se gerar uma árvore recombinante, acarretando em considerável diminuição de esforço computacional. A volatilidade neste modelo é considerada como constante e, para opções européias, pode-se chegar a uma fórmula fechada. No caso de opções americanas, Hull e White (1996) utilizam árvores trinomiais.

O modelo Hull-White também é um caso particular do modelo geral HJM (1992).

2.3.3. Modelo Black-Derman-Toy

O modelo Black-Derman-Toy (1990), ou BDT, é um modelo de não-arbitragem que, além de possuir reversão à média, considera que a taxa de juros de curto prazo tem distribuição lognormal, o que acarreta na não negatividade das taxas de juros nominais. Segue abaixo o processo de taxa de juros de curto prazo de BDT:

$$d\ln(r_t) = (\theta_t - \alpha \ln(r_t))dt + \sigma dW_t$$

(7)

Com uma estrutura de taxas de juros exógena, o modelo possui ajuste automático da estrutura de taxa de juros do modelo com a do mercado. O modelo também apresenta o processo de Markov e, portanto, é possível construir uma árvore recombinante, o que implica em considerável diminuição de esforço computacional. Sua volatilidade é tida como constante.

Destaque-se que, para o modelo de BDT, não há uma fórmula fechada.

O modelo BDT também é considerado um caso particular do modelo geral HJM (1992).

2.3.4.
Modelo HJM

O modelo Heath-Jarrow-Morton (1992) é tido como o caso geral dos modelos de não-arbitragem, visto que a partir dele é possível derivar os demais modelos, como Ho-Lee (1986), Hull-White (1990) e BDT (1990). Entre suas peculiaridades, destaca-se o fato de sua modelagem ser derivada a partir da evolução de taxas de juros a termo instantâneas, ao invés de utilizar a taxa de juros de curto prazo, apresentada nos modelos anteriores, e também apresentar volatilidade instantânea, como pode ser observado abaixo:

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t)$$

(8)

Outra particularidade é que seu *drift* está em função de uma estrutura a termo da volatilidade da taxa a termo, como expresso abaixo:

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,u)du$$

(9)

Com isso, é possível perceber que o processo estocástico das taxas a termo é caracterizado totalmente pela estrutura a termo da volatilidade das taxas de juros, como apresentado abaixo:

$$df(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,u)dudt + \sigma(t,T)dW(t)$$

(10)

Ressalte-se que o ativo objeto no modelo HJM é a curva inteira e atual das taxas de juros.

Com uma estrutura de taxas de juros exógena, o modelo possui ajuste automático da estrutura de taxa de juros do modelo com a estrutura do mercado.

Com um processo não-Markov, o modelo gera uma árvore não-recombinante, o que significa um grande esforço computacional.

Para o modelo HJM, não há fórmula fechada.