

4

Vibrações Estocásticas em Sistemas com Um Grau Liberdade

4.1

Introdução

Este capítulo da dissertação é dedicado ao estudo de sistemas de um grau de liberdade sujeitos a um forçamento caracterizado como um processo estocástico $F(t)$, como mostra a figura (4.1). O parâmetro t representa o tempo. Considera-se o sistema possui propriedades determinísticas, sendo composto por uma massa m , uma mola com constante de rigidez k e um amortecedor com constante de amortecimento c .

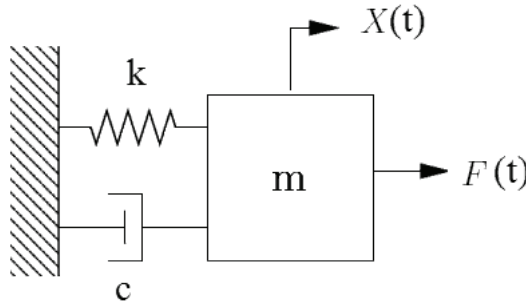


Figura 4.1: Sistema massa-mola-amortecedor submetido a uma força estocástica $F(t)$.

Conhecendo-se a média em função do tempo do forçamento ($\mu_F(t)$), a variância ($\sigma_F^2(t)$) e a autocorrelação ($R_F(t)$), deseja-se determinar as características estatísticas do processo estocástico que caracteriza a resposta do sistema $X(t)$.

O ponto de partida do estudo é a equação (4-1), que permite calcular para cada realização do forçamento $F(t)$ (representado pela letra minúscula f) a resposta determinística do sistema, ou seja x [20].

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \theta)g(\theta)d\theta \quad t \geq 0 \quad (4-1)$$

onde $f(t - \theta) = 0$ para $\theta > t$, e a função g representa a resposta do sistema ao impulso unitário (4-67) com condições iniciais de deslocamento e velocidade nulas. Supõe-se que $f(t) = 0$ para $t < 0$.

$$g(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \quad (4-2)$$

Para o sistema mecânico considerado, ω_n representa frequência natural de vibração (4-3), c_c o coeficiente de amortecimento crítico (4-4), ζ o fator de amortecimento (4-5) e ω_d a frequência natural amortecida (4-6).

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4-3)$$

$$c_c = 2 m \omega_n \quad (4-4)$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad (4-5)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (4-6)$$

Para trabalhar-se com vibrações estocásticas, é indispensável estudar-se previamente:

- processos estocásticos definidos no domínio da frequência; e
- função de resposta do sistema mecânico ao impulso unitário, no domínio da frequência, h , chamada também de função resposta em frequência.

Por isso, as próximas duas seções deste capítulo são dedicadas a esses dois temas. Somente nas seções posteriores, o assunto de vibrações estocásticas volta a ser tratado. Dois tipos de forçamento são analisados: quando $F(t)$ é caracterizado por um processo estocástico estacionário e quando é caracterizado por um ruído branco.

4.2

Processos Estocásticos no Domínio da Frequência

É usual representar-se processos estocásticos estacionários no domínio da frequência ao invés de no domínio do tempo [22]. Por isso, a Transformada de Fourier (capaz de transformar uma função no domínio do tempo para o domínio da frequência) torna-se uma poderosa ferramenta de trabalho.

Na primeira parte desta seção, são mostradas as definições básicas da Transformada de Fourier. Posteriormente, a transformada é aplicada a função de autocorrelação de um processo estocástico estacionário no sentido amplo, resultando na função densidade espectral.

4.2.1

A Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier originou-se a partir das séries de Fourier, em que uma função periódica q (com período T) pode ser representada através de um somatório de senos e cossenos, de acordo com (4-7):

$$q(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{T}t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi}{T}t. \quad (4-7)$$

O coeficiente a_0 representa o valor médio de q ao longo de um período $(-T/2$ a $T/2)$ e, os coeficientes a_n e b_n representam a amplitude dos termos seno e cosseno. Eles são calculados por (4-9) para $n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q(t) \cos \left(\frac{2n\pi}{T}t \right) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q(t) \sin \left(\frac{2n\pi}{T}t \right) dt. \end{aligned} \quad (4-8) \quad (4-9)$$

A série de Fourier também pode ser escrita na forma de uma exponencial complexa:

$$q(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left(\frac{i2n\pi}{T}t \right) \quad (4-10)$$

com o coeficiente c_n definido em (4-11) para $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q(t) \exp \left(-\frac{i2n\pi}{T}t \right) dt. \quad (4-11)$$

Os coeficientes a_n , b_n e c_n são relacionados por:

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} & \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) & \text{para } n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4-12)$$

e

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & , \quad n > 0 \\ \frac{1}{2}a_0 & , \quad n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & , \quad n < 0 \end{cases} \quad (4-13)$$

Fazendo algumas manipulações matemáticas e considerando o caso em que o período T se aproxima do infinito, pode-se definir através da série de Fourier um par de funções que caracterizam a Transformada de Fourier (4-14) e (4-15). Fazendo a Transformada de Fourier de uma função q definida no domínio do tempo, obtém-se a função q definida no domínio da frequência. Fazendo-se a Transformada Inversa de Fourier de uma função q definida no domínio da frequência, obtém-se a função q definida no domínio do tempo.

$$q(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (4-14)$$

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (4-15)$$

Em algumas situações é necessário calcular-se a Transformada de Fourier da derivada de uma função no tempo (por exemplo quando deseja-se escrever a equação uma equação diferencial no domínio da frequência). Tomando-se dq/dt e aplicando a definição (4-14), tem-se que [20]:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dq}{dt}\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{dt} \exp(-i\omega t) dt. \quad (4-16)$$

Integrando por partes:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dq}{dt}\right\} = \frac{1}{2\pi} \exp(-i\omega t) q(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2\pi} (i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} q(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (4-17)$$

Assumindo que q é uma função integrável, valerá zero em $-\infty$ e em ∞ . Dessa forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{dq}{dt}\right\} &= \frac{1}{2\pi} (i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} q(t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= (i\omega) \mathcal{F}\{q(t)\}. \end{aligned} \quad (4-18)$$

Fazendo uma procedimento semelhante para d^2q/dt^2 , pode-se determinar:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{d^2q}{dt^2}\right\} &= \frac{1}{2\pi} (-\omega^2) \int_{-\infty}^{\infty} q(t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= (-\omega^2) \mathcal{F}\{q(t)\}. \end{aligned} \quad (4-19)$$

Exemplo 4.2.1 (Transformada de Fourier). A Transformada de Fourier da função:

$$q(t) = 2\pi e^{-\alpha|t|} \quad (4-20)$$

é determinada por (4-14) como:

$$q(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi e^{-\alpha|t|} \exp(-i\omega t) dt = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (4-21)$$

Exemplo 4.2.2 (Transformada de Fourier). Aplicando-se a Transformada de Fourier à função $q(t) = 1$, obtém-se a função delta de Dirac $\delta(\omega)$. Tem-se assim o seguinte par de funções:

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \exp(-i\omega t) dt \quad (4-22)$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (4-23)$$

Exemplo 4.2.3 (Transformada de Fourier). Aplicando-se a Transformada de Fourier à função delta de Dirac $q(t) = \delta(t)$, obtém-se o valor $1/2\pi$. Tem-se assim o seguinte par de funções:

$$\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (4-24)$$

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp(i\omega t) d\omega \quad (4-25)$$

4.2.2

Função Densidade Espectral

A Função Densidade Espectral (S_X) descreve como a potência de um processo estocástico $X(t)$ se distribui em função da frequência. Dessa forma, torna-se uma importante ferramenta para analisar processos estocásticos estacionários [23] [8].

Sendo $X(t)$ um processo estocástico estacionário no sentido amplo, pode-se afirmar que tanto a média quanto a variância de $X(t)$ são constantes (4-26). Além disso, a função de autocorrelação R_{XX} depende apenas da diferença entre dois valores de parâmetro t , ou seja depende apenas de $\tau = t_2 - t_1$, como indicado em (4-27).

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= \mu_X \\ \sigma_X^2(t) &= \sigma_X^2 \end{aligned} \quad (4-26)$$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t, t + \tau) = E[X(t)X(t + \tau)] = R_X(\tau) \quad (4-27)$$

A autocovariância e o coeficiente de autocorrelação também dependem apenas $\tau = t_2 - t_1$:

$$\sigma_{XX}(\tau) = R_X(\tau) - \mu_X^2 \quad (4-28)$$

$$\rho_{XX}(\tau) = \frac{\sigma_{XX}(\tau)}{\sigma_X^2}. \quad (4-29)$$

Assim:

$$R_X(\tau) = \sigma_{XX}(\tau) + \mu_X^2 = \rho_{XX}(\tau)\sigma_X^2 + \mu_X^2. \quad (4-30)$$

Como o valor do coeficiente de autocorrelação está sempre entre $+1$ e -1 , ou seja, $|\rho_{XX}(\tau)| \leq 1$, tem-se que:

$$-\sigma_X^2 + \mu_X^2 \leq R_X(\tau) \leq \sigma_X^2 + \mu_X^2. \quad (4-31)$$

Observando que em $\tau = 0$, $R_X(0) = \sigma_X^2 + \mu_X^2$, pode-se afirmar:

$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0). \quad (4-32)$$

Aplicando a Transformada de Fourier à função de autocorrelação de um processo estocástico estacionário no sentido amplo, obtém-se a função densidade espectral, S_X , definida no domínio da frequência. Aplicando a Transformada Inversa Fourier à S_X , obtém-se a função de autocorrelação R_X .

Assim, pode-se definir o par de funções (4-33) e (4-34):

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4-33)$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{+i\omega\tau} d\omega. \quad (4-34)$$

É importante ressaltar que a existência de (4-33) e (4-34) depende da integrabilidade da função de autocorrelação ($\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)| d\tau < \infty$).

Porém, na maioria dos processos estocásticos estacionários no sentido amplo de interesse em vibrações estocásticas, o coeficiente de autocorrelação tende a zero para grandes valores de τ . Ou seja, $X(t)$ e $X(t + \tau)$ se tornam descorrelacionados quando τ é grande. O limite de R_X quando $\tau \rightarrow \infty$ é então o quadrado da média do processo estocástico:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = \mu_X^2. \quad (4-35)$$

Dessa forma, somente tem-se $\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)| d\tau < \infty$ quando a média do processo valer zero.

Caso deseje-se analisar o espectro de um processo estacionário no sentido amplo $Y(t)$ com média $\mu_Y \neq 0$, $Y(t)$ deve ser transformado em um processo estocástico $X(t)$ de média nula. Para isso, basta subtrair μ_Y de cada uma das realizações do processo $Y(t)$ e, conseqüentemente o novo processo $X(t)$ poderá ser submetido a Transformada de Fourier.

Exemplo 4.2.4 (Processo estocástico estacionário de média não nula). Considere um processo estocástico estacionário no sentido amplo $Y(t)$ com média $\mu_Y \neq 0$. Defina um processo $X(t) = Y(t) - \mu_Y$, tal que a média de $X(t)$ seja nula. Compare as funções densidade espectral de $X(t)$ e $Y(t)$.

A função de autocorrelação do processo $Y(t)$ é segundo (4-27):

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E[Y(t) Y(t + \tau)] \\ &= E[\{X(t) + \mu_Y\} \{X(t + \tau) + \mu_Y\}] \\ &= E[X(t) X(t + \tau)] + \mu_Y E[X(t)] + \mu_Y E[X(t + \tau)] + \mu_Y^2 \\ &= R_X(\tau) + \mu_Y^2. \end{aligned} \quad (4-36)$$

Assim, a densidade espectral de $Y(t)$ é:

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{R_X(\tau) + \mu_Y^2\} e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= S_X(\omega) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_Y^2 e^{-i\omega\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (4-37)$$

De acordo com o par de funções da Transformada de Fourier do exemplo 4.2.2, a expressão (4-37) pode ser escrita como:

$$S_Y(\omega) = S_X(\omega) + \mu_Y^2 \delta(\omega). \quad (4-38)$$

A função densidade espectral assume valores reais não negativos para todo ω , é simétrica e sendo integrada de menos infinito a mais infinito apresenta área igual à variância do processo estocástico de média nula.

Abaixo segue uma explicação mais detalhada dessas propriedades [8]:

– **Simetria:**

A função de autocorrelação é uma função real par, $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$. Assim a Transformada de Fourier de R_X também deve ser uma função real par, ou seja:

$$S_X(\omega) = S_X(-\omega) \quad (4-39)$$

Essa simetria pode ser utilizada para simplificar o cálculo S_X . Pois, o par de transformadas de Fourier dado por (4-33) e (4-34) pode ser substituído por:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_X(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (4-40)$$

$$R_X(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_X(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (4-41)$$

– **Variância:**

A integral da função de densidade espectral de menos infinito a mais infinito é igual à variância do processo estocástico de média nula. Essa propriedade pode ser verificada fazendo-se $\tau = 0$ na equação (4-34):

$$R_X(0) = E[X^2(t)] = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^0 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega. \quad (4-42)$$

Quando trabalha-se com a a função de densidade espectral, é muito comum:

1. adotar-se como unidade de frequência hertz ao invés de radianos por segundo, ou seja, faz-se: $f = \omega/2\pi$. Nesse caso, para manter a área sob a curva de S_X igual a variância do processo estocástico (4-42), a função de densidade espectral deve ser multiplicada por 2π .

$$S_X(\omega) = 2\pi S_X(f) \quad (4-43)$$

2. descartarem-se as frequências negativas, ou seja, considera-se $\omega \in (0, \infty)$. Nesse caso, a função de densidade espectral deve ser multiplicada por 2, para manter a área sob a curva de S_X igual a variância do processo estocástico.

$$R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (4-44)$$

A indicação W_X é utilizada para representar a densidade espectral quando considera-se $\omega \in (0, \infty)$:

$$W_X(\omega) = \begin{cases} 2 S_X(\omega) & , \omega \geq 0 \\ 0 & , \omega < 0 \end{cases} . \quad (4-45)$$

Na figura (4.2) são mostradas quatro representações da função de densidade espectral no domínio da frequência em rad/s e em Hz .

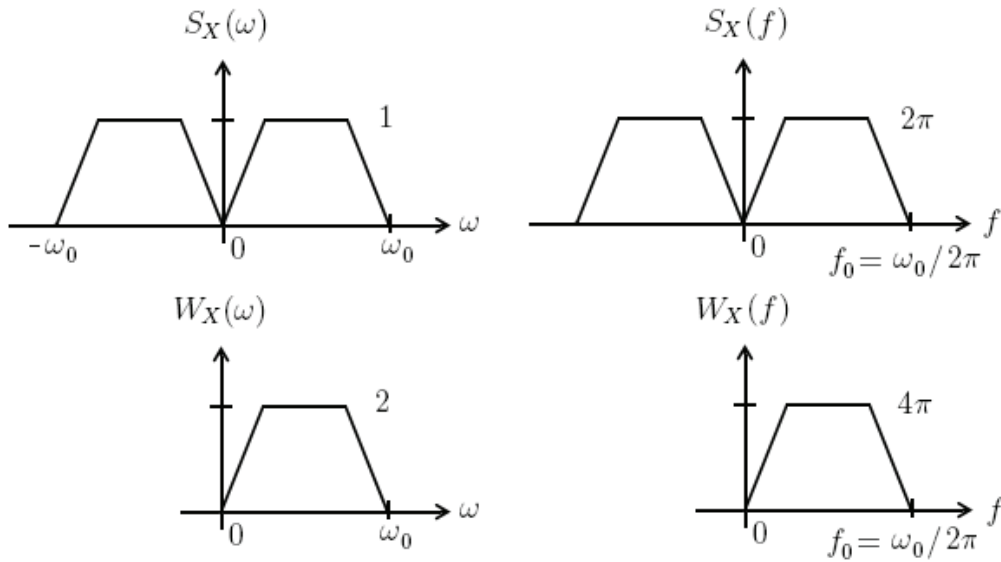


Figura 4.2: Representações da função densidade espectral.

4.2.3

Ruído Branco

O ruído branco é um processo estocástico idealizado, presente em muitos estudos e análises teóricas de vibrações estocásticas [8]. Ele é definido por uma função de densidade espectral constante para todas as frequências de $-\infty$ até $+\infty$.

$$S_X(\omega) = S_0 \quad -\infty < \omega < +\infty \quad (4-46)$$

O espectro de um ruído branco S_0 é esquematizado na figura (4.3).

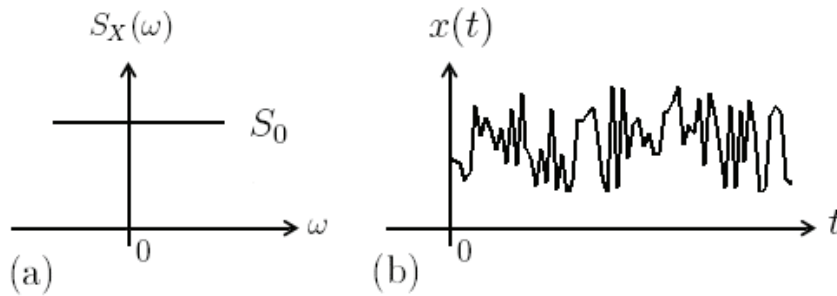


Figura 4.3: Representação (a) do espectro de um ruído branco $S_X(\omega) = S_0$ e (b) de uma realização do processo estocástico $X(t)$ ao longo do tempo.

Aplicando a Inversa da Transformada de Fourier (4-34) à função densidade espectral de um ruído branco, obtém-se a função de autocorrelação:

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{+i\omega\tau} d\omega = 2\pi S_0 \delta(\tau). \quad (4-47)$$

onde $\delta(\tau)$ é a função delta de Dirac.

O ruído branco possui variância infinita. Dessa forma, para poder gerar realizações do ruído e utilizá-las em simulações numéricas, é necessário transformá-lo em um processo de variância finita. Costuma-se trabalhar com a definição:

$$S_X(\omega) = \begin{cases} S_0 & , \quad |\omega| < \omega_c \\ S_0/2 & , \quad |\omega| = \omega_c \\ 0 & , \quad |\omega| > \omega_c. \end{cases} \quad (4-48)$$

O intervalo de frequências em que a função densidade espectral vale S_0 é limitado, ou seja, é como se o ruído branco fosse submetido a um filtro passa baixa com frequência de corte ω_c . O processo estocástico resultante possui

função densidade espectral uniforme para todas as frequências abaixo de ω_c como mostra a figura (4.4).

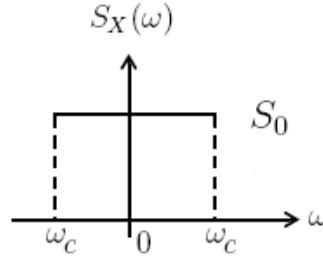


Figura 4.4: Representação do espectro de um ruído branco $S_X(\omega) = S_0$ submetido à um filtro passa baixa com frequência de corte ω_c .

A função de autocorrelação correspondente a (4-48) vale:

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{+i\omega\tau} d\omega = 2 \int_0^{\omega_c} \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (4-49)$$

Resolvendo a integral:

$$R_X(\tau) = \begin{cases} \sigma_X^2 & , \tau = 0 \\ 2 \frac{S_0}{\tau} \sin(\omega_c \tau) & , \tau \neq 0. \end{cases} \quad (4-50)$$

Como a área sob a curva da função densidade espectral é igual a variância do processo estocástico (4-42), tem-se que:

$$\sigma_X^2 = 2\omega_c S_0. \quad (4-51)$$

Assim, a função de autocorrelação do ruído branco vale:

$$R_X(\tau) = \begin{cases} \sigma_X^2 & , \tau = 0 \\ \sigma_X^2 \frac{\sin(\omega_c \tau)}{\omega_c \tau} & , \tau \neq 0. \end{cases} \quad (4-52)$$

Exemplo 4.2.5 (Ruído branco). A simulação de processo estocástico $X(t)$ caracterizado por um ruído branco, com densidade espectral dada por (4-48) pode ser feita através de realizações de $X(t)$. Utilizam-se, por exemplo, as funções densidade de probabilidade normal ou uniforme.

Em cada instante de uma realização, o processo $X(t)$ assume valor igual a uma amostra da função densidade de probabilidade escolhida. Devido a

condição (4-51), é necessário garantir que a variância dessa densidade de probabilidade seja igual a $2\omega_c S_0$.

Como nas próximas seções do trabalho o ruído branco é utilizado para caracterizar o processo estocástico da força $F(t)$ que atua sobre o sistema massa-mola-amortecedor, foi desenvolvido um programa em MATLAB capaz de gerar realizações desse processo estocástico (GERADOR_RUIDOBRANCO).

Esse gerador fornece duas opções para a escolha da função densidade de probabilidade utilizada para gerar as realizações de $X(t)$: normal (com média nula e variância igual a $2\omega_c S_0$) e uniforme no intervalo $[a, b]$. Os valores de a e b estão relacionados ao valor S_0 definido para o ruído branco.

Sabe-se que a variância da densidade de probabilidade uniforme em $[a, b]$ é igual a $1/12 (b - a)^2$. Assim, para gerar realizações de um ruído branco S_0 através de uma distribuição uniforme em $[a, b]$, deve-se ter que:

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{12}(b - a)^2 = 2\omega_c S_0 \quad (4-53)$$

Fixando $a = 0$, o valor de b deve ser:

$$b = \sqrt{12(2\omega_c S_0)} \quad (4-54)$$

Na figura (4.6) mostra-se duas realizações de dois ruídos brancos com $S_0 = 1$ e frequência de corte 10π [rad/s]. Um deles foi simulado a partir de uma densidade de probabilidade uniforme em $[0, \sqrt{12(2\omega_c S_0)}]$. O outro foi simulado a partir da distribuição normal (média nula e variância $2\omega_c S_0$).

Verifica-se que apesar dos dois processos terem densidade espectral constante igual a $S_0 = 1$, as suas realizações ao longo do tempo são completamente diferentes.

4.2.4

Estimativa da Função Densidade Espectral

A partir de realizações de um processo estocástico $X(t)$ é possível estimar-se a sua função densidade espectral. Para isso, parte-se da definição da Transformada de Fourier para um processo estocástico $X(t)$, representado por $X(\omega)$:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4-55)$$

Porém, se $X(t)$ for estacionário, $\int_{-\infty}^{\infty} |X(t)| dt$ é indefinido e assim, a Transformada de Fourier $X(\omega)$ não existe. Nesse caso, uma opção é utilizar a definição Transformada de Fourier truncada:

$$X(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4-56)$$

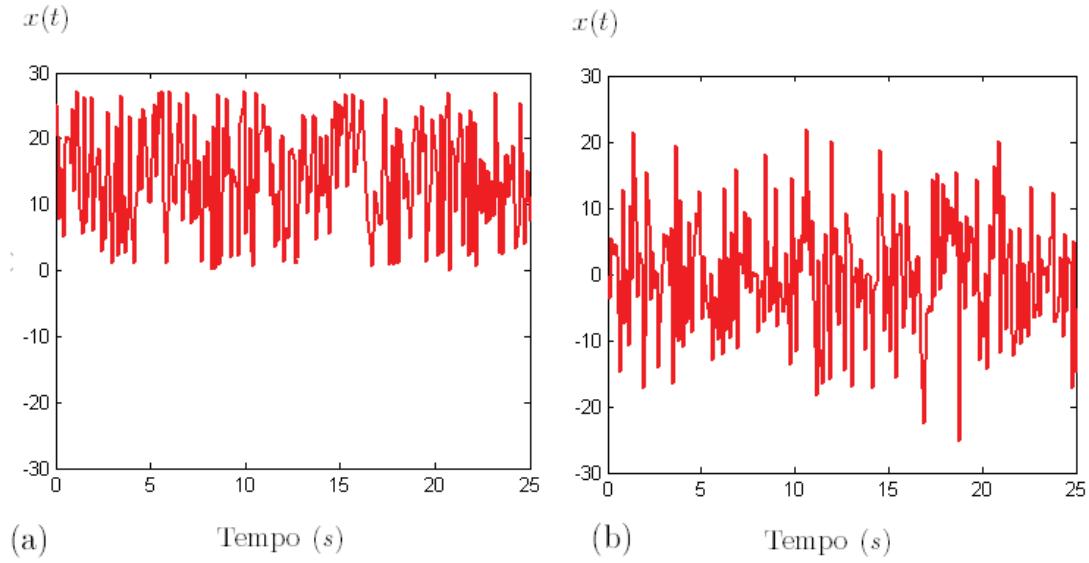


Figura 4.5: Realização ao longo do tempo de um ruído branco simulado a partir da função densidade de probabilidade: (a) uniforme (b) normal.

Calculando-se a variância de $X(\omega, T)$ para dois valores de ω_1 e ω_2 , tem-se:

$$E[X(\omega_1, T)\bar{X}(\omega_2, T)] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} R_X(t_2 - t_1) \cdot \exp[-i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)] dt_1 dt_2 \quad (4-57)$$

onde $\bar{X}(\omega, T)$ representa o complexo conjugado de $X(\omega, T)$. Supondo que $\tau = t_2 - t_1$ e que $\omega = \omega_1 = \omega_2$, (4-57) torna-se:

$$E[|X(\omega, T)|^2] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-T/2-t_2}^{T/2-t_2} \left[\int_{-T/2}^{T/2} R_X(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \right] dt_2. \quad (4-58)$$

Resolvendo a integral, chega-se a:

$$E[|X(\omega, T)|^2] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-T}^T (T - |\tau|) R_X(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (4-59)$$

Multiplicando (4-59) por $2\pi/T$ e tomando o limite quando $T \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} E[|x(\omega, T)|^2] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) R_X(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T R_X(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \\
&= S_X(\omega).
\end{aligned} \tag{4-60}$$

Assim, uma estimativa da função densidade espectral ($\hat{S}_X$) de um processo estocástico $X(t)$ pode ser obtida a partir de realizações desse processo com uma longa duração T . Para n realizações, a estimativa será:

$$\hat{S}_X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=1}^n |x(\omega, T)|^2. \tag{4-61}$$

Exemplo 4.2.6 (Estimativa da função densidade espectral). Uma rotina MATLAB (ESTIMATIVA_DENESPEC) foi desenvolvida para estimar a função densidade espectral de um processo estocástico $X(t)$. Supondo que esse processo é um ruído branco, a estimativa $\hat{S}_X$ é feita através da expressão (4-61).

Para gerar as amostras do ruído branco necessárias a estimativa, utiliza-se a rotina GERADOR_RUIDOBRANCO já explicada no exemplo anterior 4.2.5.

Na figura (4.6) mostram-se as estimativas das densidades espectrais de dois ruídos brancos com $S_0 = 1$ e frequência de corte 10π [rad/s]. Um deles foi estimado a partir de realizações segundo uma densidade de probabilidade uniforme em $[0, \sqrt{12(2\omega_c S_0)}]$. O outro foi estimado a partir da distribuição normal (média nula e variância $2\omega_c S_0$).

Como esperado, as estimativas de $\hat{S}_X$ coincidem com o valor especificado para $S_0 = 1$.

4.3

Resposta ao Impulso Unitário no Domínio da Frequência

Para determinar a resposta do sistema mostrado na figura (4.1) ao impulso unitário no domínio da frequência, parte-se da equação de movimento determinística:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = f(t) \tag{4-62}$$

onde f representa uma realização do forçamento $F(t)$, e x a resposta determinística do sistema.

Utilizando as expressões (4-14), (4-18) e (4-19) pode-se determinar a Transformada de Fourier de (4-62):

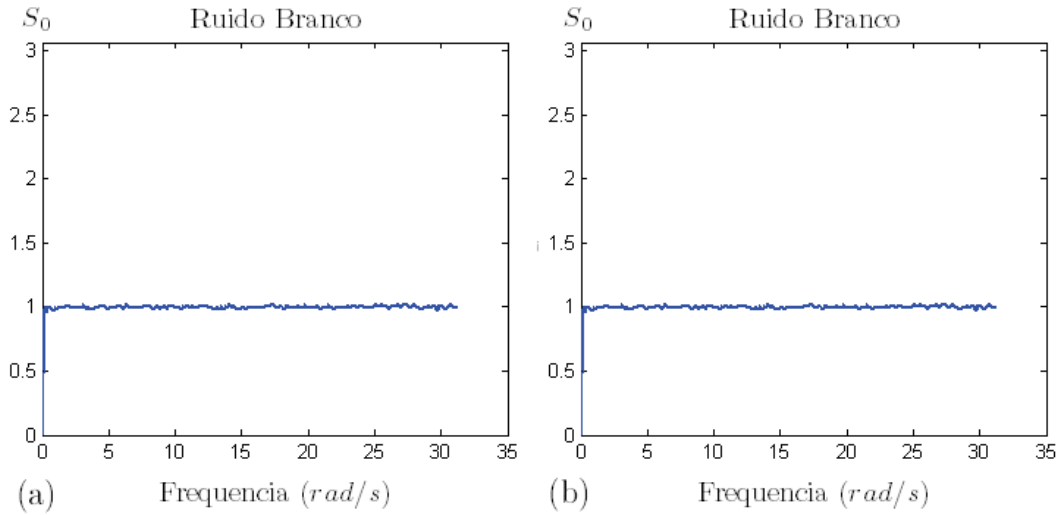


Figura 4.6: Estimativa da função densidade espectral de ruído branco simulado a partir da função densidade de probabilidade: (a) uniforme (b) normal.

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k)\chi(\omega) = f(\omega) \quad (4-63)$$

onde f e χ representam a Transformada de Fourier da força f e deslocamento x respectivamente.

$$\chi(\omega) = (-\omega^2 m + i\omega c + k)^{-1} f(\omega) = h(\omega) f(\omega) \quad (4-64)$$

A função de resposta em frequência, h , define a relação entre o forçamento e o deslocamento (4-65). Ela é usualmente chamada de função de transferência [8].

$$h(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega c + k} \quad (4-65)$$

Considerando que o forçamento é um impulso unitário δ aplicado no instante t (4.7), equação de movimento do sistema é escrita como (4-66), onde a função g indica a resposta em deslocamento da massa.

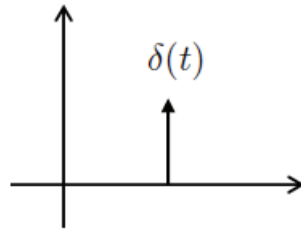


Figura 4.7: Representação da função impulso.

$$\ddot{g}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{g}(t) + \omega_n^2 g(t) = \delta(t). \quad (4-66)$$

A solução dessa equação diferencial ((4-66)) é conhecida [20]:

$$g(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t. \quad (4-67)$$

Representando por $\mathcal{G}$ a Transformada de Fourier de g e sendo a Transformada de Fourier de $\delta(t)$ igual a $1/2\pi$ (segundo o exemplo 4.2.3), tem-se que:

$$\mathcal{G}(\omega) = \frac{1}{2\pi [-\omega^2 m + i\omega c + k]}. \quad (4-68)$$

Assim, a equação (4-64) pode ser reescrita como:

$$\chi(\omega) = 2\pi \mathcal{G}(\omega) f(\omega). \quad (4-69)$$

Comparando (4-64) e (4-69), verifica-se que as funções $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ estão relacionadas por (4-70):

$$\mathcal{H}(\omega) = 2\pi \mathcal{G}(\omega). \quad (4-70)$$

Dessa forma, $g(t)$ e $\mathcal{H}(\omega)$ formam um par de transformadas de Fourier (4-71) e (4-72):

$$\mathcal{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4-71)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4-72)$$

Com as definições apresentadas nesta seção do trabalho, a equação (4-1) pode ser verificada. Para isso, aplica-se a Transformada de Fourier inversa na equação (4-69) e a partir do teorema da convolução, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \{ \chi(t) \} &= 2\pi \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{G}(\omega) f(\omega) \} \\ x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4-73)$$

Esse resultado é idêntico a expressão (4-1). Sabendo-se que tanto g quanto f valem zero para $t < 0$, a equação (4-73) pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4-74)$$

Além disso, supondo que a força é somente aplicada a partir do instante zero, uma forma alternativa de (4-74) é:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (4-75)$$

4.4

Resposta do Sistema para um Forçamento caracterizado como Processo Estocástico Estacionário

Nesta seção da dissertação é mostrado como podemos obter informações da resposta $X(t)$ de um sistema massa-mola-amortecedor quando ele está submetido a um forçamento $F(t)$ caracterizado por um processo estocástico estacionário no sentido amplo (média constante μ_F e função de autocorrelação R_F dependente apenas da diferença entre dois valores do parâmetro t , ou seja $\tau = t_2 - t_1$) [19].

4.4.1

Média do Deslocamento

Como dito anteriormente, o ponto de partida do estudo é a equação (4-1), que permite calcular a resposta x do sistema para cada realização f do forçamento. Dessa forma, para obter-se a média do processo estocástico $X(t)$, pode-se fazer:

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= E[X(t)] = E \left[\int_{-\infty}^t F(\tau)g(t-\tau) d\tau \right] \\ &= \int_{-\infty}^t E[F(\tau)]g(t-\tau) d\tau \\ &= \mu_F \int_{-\infty}^t g(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4-76)$$

Observando-se a expressão (4-71), verifica-se que a integral de (4-76) quando $t \rightarrow \infty$ equivale ao valor da função h avaliada em $\omega = 0$, ou seja, $h(0)$. Assim:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_X(t) = \mu_F h(0) = \frac{\mu_F}{k}. \quad (4-77)$$

Dessa forma, quando $t \rightarrow \infty$ a média μ_X pode ser calculada de uma forma muito simples, e o resultado está de acordo com a Lei de Hooke para uma análise estática (deslocamento proporcional ao forçamento).

Exemplo 4.4.1 (Média do deslocamento μ_X). Suponha que deseja-se calcular a média da resposta de um sistema massa-mola-amortecedor com equação de movimento dada por:

$$\ddot{X}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{X}(t) + \omega_n^2 X(t) = F(t) \quad (4-78)$$

onde $F(t)$ é um processo estocástico estacionário. Suponha que as condições iniciais de todas as realizações de $X(t)$ sejam nulas e que a massa, rigidez e amortecimento sejam determinísticos.

Solução:

A resposta do sistema em deslocamento é dado pela soma da solução da equação homogênea e particular. Dessa forma, para cada realização x de X , tem-se:

$$\begin{aligned} x(t) = & x(0)e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \\ & + \int_0^t g(t-\tau) f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4-79)$$

onde g é dado por (4-67). Dessa forma, o valor esperado de $X(t)$ será:

$$\begin{aligned} E[X(t)] = & E[X(0)] e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \\ & + E[\dot{X}(0)] \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t + \int_0^t g(t-\tau) E[F(\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (4-80)$$

com:

$$\begin{aligned} & \int_0^t g(t-\tau) E[F(\tau)] d\tau \\ = & \frac{\mu_F}{k} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \right]. \end{aligned} \quad (4-81)$$

Como foi suposto que as condições iniciais de posição e velocidade são nulas em todas as realizações: $E[X(0)] = 0$ e $E[\dot{X}(0)] = 0$.

Tomando o limite da expressão (4-81) quando $t \rightarrow \infty$, a média μ_X converge para μ_F/k (resultado de acordo com a média de $X(t)$ no regime estacionário calculada previamente (4-77)).

Além disso, com o aumento de t , μ_X se aproxima de um valor limite com uma taxa de convergência dependente do valor do amortecimento do sistema ζ .

Para verificar essas duas propriedades, foi implementada uma rotina em MATLAB (CONVER_MEDIA) que calcula a média do deslocamento $X(t)$ de um sistema massa-mola-amortecedor submetido a forçamento $F(t)$ (processo estocástico estacionário) para diferentes valores de ζ .

Nessa rotina, μ_X é estimado através do método de Monte Carlo, considerando-se 10^4 realizações da resposta de deslocamento de $X(t)$ para cada valor de ζ . Em cada uma dessas realizações, $x(t)$ é calculado através das equações (4-1) e (4-67). A figura (4.8) mostra os resultados obtidos. Percebe-se que quanto maior o amortecimento, mais rapidamente a solução entra em regime permanente.

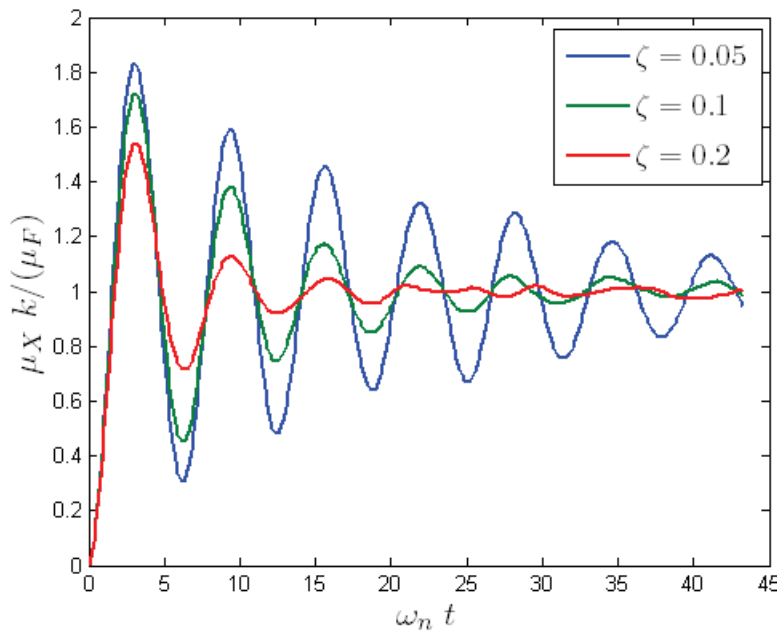


Figura 4.8: Média μ_X para vários valores de amortecimento do sistema ζ .

Exemplo 4.4.2 (Média do deslocamento ao quadrado). Considere o sistema mecânico do exemplo anterior 4.4.1. Deseja-se determinar a média da resposta em deslocamento ao quadrado, ou seja $E[X^2(t)]$.

Lembrando que equação (4-1) permite calcular a resposta x do sistema para cada realização f do forçamento $F(t)$, tem-se que:

$$E[X^2(t)] = \int_0^t \int_0^t g(t - \tau_1)g(t - \tau_2)R_F(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1 d\tau_2. \quad (4-82)$$

A função R_F em (4-82) pode ser substituída por:

$$R_F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_F(\omega) \cos(\omega t) d\omega. \quad (4-83)$$

Assim:

$$E[X^2(t)] = \int_0^t \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S_F(\omega) \cos(\omega(\tau_2 - \tau_1)) \cdot g(t - \tau_1)g(t - \tau_2) d\omega d\tau_1 d\tau_2. \quad (4-84)$$

Aplicando a função g definida em (4-67), resolvendo as integrais e assumindo que o processo estocástico $F(t)$ é um ruído branco, ou seja, $S_F(\omega) = S_0$:

$$E[X^2(t)] = \frac{S_0\pi}{2\zeta\omega_n^3} \left(1 - e^{-2\omega_n\zeta t} \left(1 + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin 2\omega_d t + 2\frac{\zeta^2}{1-\zeta^2} \sin^2 \omega_d t \right) \right). \quad (4-85)$$

Tomando-se o limite de (4-85) quando $t \rightarrow \infty$, verifica-se que $E[X^2(t)]$ converge para um regime estacionário [8] [19], assim como μ_X .

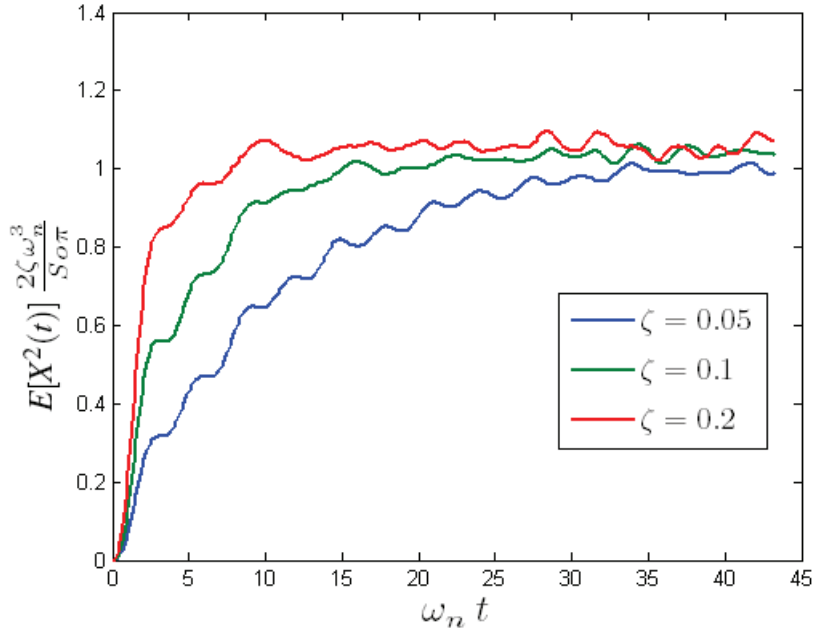
$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[X^2(t)] = \frac{S_0\pi}{2\zeta\omega_n^3}. \quad (4-86)$$

Esse resultado foi verificado através de uma simulação feita em MATLAB (CONVER_AUTOCORRELACAO). Nessa simulação, $E[X^2(t)]$ é estimado através do método de Monte Carlo, considerando-se 10^4 realizações da resposta de deslocamento de $X(t)$ para diferentes valores de amortecimento ζ . Percebe-se que quanto maior o amortecimento, mais rapidamente a solução entra em regime permanente.

4.4.2

Função de Autocorrelação

Uma análise semelhante a feita para a média m_X pode ser desenvolvida a autocorrelação do processo estocástico $X(t)$. A seguir é mostrado como conhecendo-se a função de autocorrelação do forçamento $F(t)$, ou seja, R_F , pode-se determinar a função de autocorrelação R_X .


 Figura 4.9: para vários valores de amortecimento ζ .

Primeiro, é necessário determinar a correlação cruzada entre o forçamento $F(t)$ e a resposta $X(t)$, R_{XF} . Para isso, a equação (4-1) é aplicada na expressão de correlação cruzada, obtendo:

$$\begin{aligned}
 R_{XF}(\alpha_1) &= R_{XF}(-\alpha_1) = E[X(t)F(t - \alpha_1)] \\
 &= E \left[\int_{-\infty}^t F(t - \tau_1) g(\tau_1) d\tau_1 \cdot F(t - \alpha_1) \right] \\
 &= \int_{-\infty}^t g(\tau_1) E[F(t - \tau_1)F(t - \alpha_1)] d\tau_1 \\
 &= \int_{-\infty}^t g(\tau_1) R_F(\tau_1 - \alpha_1) d\tau_1.
 \end{aligned} \tag{4-87}$$

A próxima etapa para determinar-se R_X é multiplicar ambos os lados da expressão (4-1) por $X(t + \alpha_2)$ e tomar-se o valor esperado.

$$\begin{aligned}
R_X(\alpha_2) &= E[X(t)X(t + \alpha_2)] \\
&= \int_{-\infty}^t g(\tau_2) E[F(t - \tau_2)X(t + \alpha_2)] d\tau_2 \\
&= \int_{-\infty}^t g(\tau_2) R_{XF}(\tau_2 + \alpha_2) d\tau_2.
\end{aligned} \tag{4-88}$$

Substituindo a expressão encontrada para R_{XF} (4-87) em (4-88):

$$R_X(\alpha_2) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t g(\tau_2)g(\tau_1)R_F(\tau_1 - (\tau_2 + \alpha_2)) d\tau_1 d\tau_2 \tag{4-89}$$

e fazendo a seguinte mudança de variáveis: $\tau = \alpha_2$, $\alpha = \tau_1$ e $\beta = \tau_2$, chega-se a seguinte função para R_X :

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t g(\alpha)g(\beta)R_{FF}(\tau + \beta - \alpha)d\alpha d\beta. \tag{4-90}$$

A partir dessa expressão da autocorrelação, a variância de $X(t)$, definida em (3-4), quando $t \rightarrow \infty$ pode ser aproximada por:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= E[X^2(t)] - (E[X(t)])^2 \\
&= R_{XX}(0) - \left[\frac{\mu_F}{k} \right]^2.
\end{aligned} \tag{4-91}$$

4.4.3

Função Densidade Espectral

Assim como a média e a autocorrelação do processo estocástico $X(t)$, a densidade espectral, S_X , também é uma importante ferramenta na análise das vibrações aleatórias.

Para determiná-la, substitui-se a equação (4-90) em (4-33) com $\lambda = \tau + \beta - \alpha$:

$$\begin{aligned}
S_X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)g(\beta)R_{FF}(\tau + \beta - \alpha)d\alpha d\beta \right] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)e^{-i\omega\alpha}d\alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(\beta)e^{+i\omega\beta}d\beta \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_F(\lambda)e^{-i\omega\lambda}d\lambda \\
&= \hbar(\omega) \hbar(-\omega) S_F(\omega).
\end{aligned} \tag{4-92}$$

Sendo $\hbar(-\omega) = \bar{\hbar}(\omega)$, onde $\bar{\hbar}$ é o complexo conjugado de $\hbar$, a densidade espectral $S_X(\omega)$ é definida por [19] [31][23]:

$$S_X(\omega) = |\hbar(\omega)|^2 S_F(\omega). \tag{4-93}$$

4.5

Resposta do Sistema para um Forçamento caracterizado como um Ruído Branco

Quando o forçamento a que está submetido o sistema da figura (4.1) é um ruído branco, tem-se que:

$$S_F(\omega) = S_0 \quad -\infty < \omega < \infty. \tag{4-94}$$

Dessa forma, a densidade espectral $S_X(\omega)$ é expressa por:

$$S_X(\omega) = |\hbar(\omega)|^2 S_F(\omega) = \frac{S_0}{(k - m\omega^2)^2 + c\omega^2}. \tag{4-95}$$

Exemplo 4.5.1. Para verificar esse resultado, foi implementada uma rotina em MATLAB (DENSESPECX_FRUIDOBRANCO) capaz de calcular a densidade espectral da resposta um sistema massa-mola-amortecedor quando submetido a um forçamento caracterizado como ruído branco. O cálculo foi feito de duas formas diferentes, a fim de poder-se comparar os resultados. O primeiro modo foi através da expressão analítica (4-95), e o segundo foi fazendo-se uma estimativa com 10^4 realizações do deslocamento $X(t)$ [8] [33].

Em cada simulação do sistema, uma realização do forçamento f é obtida através da rotina GERADOR_RUIDOBRANCO e o deslocamento correspondente, x , é calculado através das equações (4-1) e (4-67). Para estimar a função densidade espectral S_X , utiliza-se a expressão (4-61).

Os resultados obtidos pela rotina MATLAB são mostrados nas figuras (4.10) e (4.11). Como esperado, S_X calculado através da expressão analítica

coincide com o estimado através das realizações de $X(t)$. Nas simulações foram utilizados os seguintes valores para massa, rigidez e amortecimento: $m = 1$ [Kg], $k = 3$ [N/m] e $c = 0.8$ [kg/s].

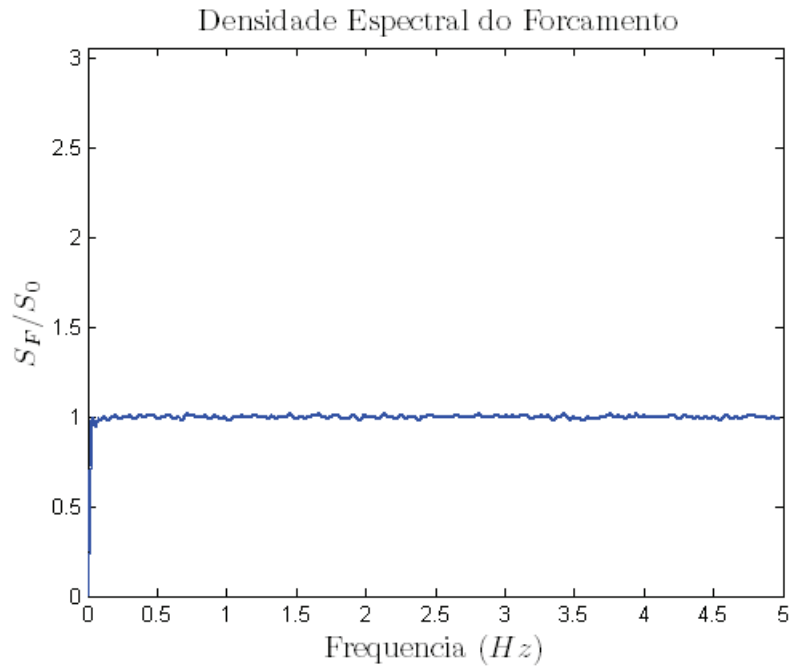


Figura 4.10: Densidade espectral do forçamento (ruído branco).

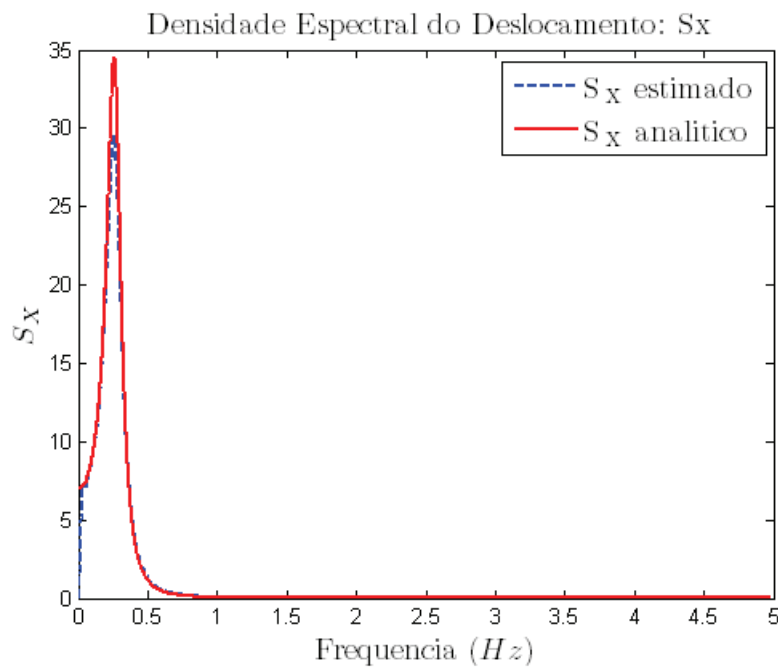


Figura 4.11: Densidade espectral da resposta em deslocamento (força modelada como ruído branco).