

2

O caso de não linearidade Lipschitz

Na Seção 2.1, demonstramos o teorema de Dolph-Hammerstein: se f é Lipschitz, $\overline{f'(\mathbb{R})} \subset [a, b]$ e $\sigma(-\Delta) \cap [a, b] = \emptyset$, então a função

$$F : X \rightarrow Y, \quad u \rightarrow -\Delta u - f(u) \quad (2-1)$$

é um homeomorfismo bi-Lipschitz, isto é, Lipschitz com inversa Lipschitz. Na seção seguinte, apresentamos o teorema de Ambrosetti-Prodi, seguindo a abordagem geométrica de Berger e Podolak, e demonstramos um primeiro resultado sobre existência de soluções quando $[a, b]$ é o fecho convexo de $f'(\mathbb{R})$ e $a < \lambda_1 < b < \lambda_2$.

Antes de mais nada, é preciso mostrar que a função F está bem definida. Para isso, basta verificar que $f(u)$ está em Y para toda $u \in X$. Em verdade, a propriedade vale para toda $u \in Y$ e f Lipschitz. Pelo teorema fundamental do cálculo, se f é M -Lipschitz, para $x \in \Omega$,

$$|f(u(x))| = |f(0) + u(x) \int_0^1 f'(tu(x)) dt| \leq |f(0)| + M|u(x)|.$$

Como $\mu(\Omega) < \infty$, $|f(0)| + M|u| \in Y$, donde $f(u) \in Y$ e F está bem definida.

Denotamos por $\|\cdot\|_0$ a norma de $L^2(\Omega)$.

2.1

O Teorema de Dolph-Hammerstein

Teorema 2.1.1 *Seja f Lipschitz e $\overline{f'(\mathbb{R})} \subset [a, b]$. Se $[a, b] \cap \sigma(-\Delta) = \emptyset$, então a função F definida em (2-1) é um homeomorfismo bi-Lipschitz.*

Prova: De duas uma: existe k tal que $\lambda_k < a \leq b < \lambda_{k+1}$, ou $a \leq b < \lambda_1$. Provamos o teorema apenas para a primeira situação, uma vez que a demonstração para a segunda é análoga. Suponha, sem perda de generalidade, que $k = 1$.

Seja $\gamma = (a + b)/2$ e defina $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = f(x) - \gamma x$. Então

$$-(b - \gamma) = a - \gamma \leq \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)}{x - y} \leq b - \gamma. \quad (2-2)$$

Para

$$T : X \rightarrow Y, \quad u \mapsto -\Delta u - \gamma u$$

vale $F(u) = Tu - \tilde{f}(u)$.

Como $\gamma \notin \sigma(-\Delta)$, T é um isomorfismo linear. Se demonstrarmos que a composição

$$Y \xrightarrow{T^{-1}} X \xrightarrow{F} Y, \quad w \mapsto w - \tilde{f}(T^{-1}w)$$

é um homeomorfismo bi-Lipschitz, então F também o é. Observamos que $F \circ T^{-1}$ é da forma $I - K$. Primeiro demonstramos que $K(w) = \tilde{f}(T^{-1}w)$ é uma contração, donde $I - K$ é uma bijeção Lipschitz. Por último demonstramos que sua inversa é Lipschitz.

Sabe-se que $T^{-1} : Y \rightarrow Y$ é um operador auto-adjunto, compacto, cujo espectro é dado por

$$\sigma(T^{-1}) = \{(\lambda_2 - \gamma)^{-1} \geq (\lambda_3 - \gamma)^{-1} \geq \dots > 0 > (\lambda_1 - \gamma)^{-1}\},$$

donde $\alpha = \sup |\sigma(T^{-1})| = (\min |\sigma(T)|)^{-1} = (\min\{|\lambda_1 - \gamma|, |\lambda_2 - \gamma|\})^{-1}$ e

$$\|T^{-1}w\|_0 \leq \alpha \|w\|_0, \tag{2-3}$$

pelo Lema A.0.6.

As desigualdades (2-2) e (2-3) implicam que:

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(T^{-1}w) - \tilde{f}(T^{-1}\bar{w})\|_0 &\leq (b - \gamma) \|T^{-1}w - T^{-1}\bar{w}\|_0 \\ &\leq (b - \gamma)\alpha \|w - \bar{w}\|_0. \end{aligned}$$

Agora verificamos que $(b - \gamma)\alpha < 1$. Como $\lambda_1 < a \leq b < \lambda_2$,

$$\begin{aligned} |\lambda_2 - \gamma| &= \lambda_2 - \gamma > b - \gamma \\ |\lambda_1 - \gamma| &= -\lambda_1 + \gamma > -a + \gamma = b - \gamma, \end{aligned}$$

donde $c := (b - \gamma)\alpha < 1$, isto é, K é contração e, portanto, $I - K$ é uma bijeção Lipschitz.

Resta ver que sua inversa também é Lipschitz:

$$\begin{aligned} \|(I - K)w - (I - K)\bar{w}\|_0 &= \|I(w - \bar{w}) - (K(w) - K(\bar{w}))\|_0 \\ &\geq \|w - \bar{w}\|_0 - \|(K(w) - K(\bar{w}))\|_0 \\ &\geq (1 - c)\|w - \bar{w}\|_0. \end{aligned}$$

■

2.2

A geometria subjacente a Ambrosetti-Prodi

São conhecidos os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ e $W_0^{k,p}(\Omega)$. Como sempre, $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$. Em $X = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, usamos o produto interno $\langle \Delta \cdot, \Delta \cdot \rangle$. Além disso, $Y = L^2(\Omega)$, com o produto interno habitual. Como na introdução, seja $\varphi_1 > 0$ tal que $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$, $\|\varphi_1\|_0 = 1$. As autofunções $\{\varphi_i\}$ são ortogonais nos dois produtos internos.

A abordagem geométrica sugerida por Berger e Podolak foi delineada na introdução, e leva ao teorema 1.0.1 — a semelhança entre esse resultado e o teorema de Dolph-Hammerstein salta aos olhos.

Definimos os *subespaços verticais*

$$V_X = V_Y = \langle \varphi_1 \rangle,$$

e os *horizontais*

$$W_X = \langle \varphi_1 \rangle^\perp \subset X \quad W_Y = \langle \varphi_1 \rangle^\perp \subset Y,$$

aonde as ortogonalidades se referem aos produtos internos em X e Y . Assim,

$$X = W_X \oplus V_X, \quad Y = W_Y \oplus V_Y.$$

Defina ainda as projeções ortogonais P_Y e Q_Y de Y sobre W_Y e V_Y , respectivamente.

Agora, demonstramos o teorema 1.0.1. Recordamos que

$$\overline{f'(\mathbb{R})} \subset [a, b], \quad a < \lambda_1 < b < \lambda_2.$$

Novamente, para $\gamma = (a + b)/2$, a função $x \mapsto \tilde{f}(x) = f(x) - \gamma x$ satisfaz

$$-(b - \gamma) = a - \gamma \leq \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)}{x - y} \leq b - \gamma.$$

Fixe $v \in V_X$. Então

$$\begin{aligned} F_v(u) &= P_Y[-\Delta(u + v) - f(u + v)] \\ &= P_Y[(-\Delta - \gamma)(u + v) - (f(u + v) - \gamma(u + v))] \\ &= (-\Delta - \gamma)u - P_Y\tilde{f}(u + v). \end{aligned}$$

O operador

$$T : W_X \rightarrow W_Y, \quad u \rightarrow -\Delta u - \gamma u,$$

está bem definido, pois, para todo $u \in W_X$, $Tu \in W_Y$, além de ser inversível, pois $\gamma < \lambda_2 = \min\{\sigma(-\Delta|_{W_X})\}$. Assim,

$$F_v(u) = Tu - P_Y \tilde{f}(u + v).$$

Novamente, a composição

$$W_Y \xrightarrow{T^{-1}} W_X \xrightarrow{F_v} W_Y, \quad w \mapsto w - P_Y \tilde{f}(T^{-1}w + v).$$

é da forma $F_v \circ T^{-1} = I - K$ com $K(w) = P_Y \tilde{f}(T^{-1}w + v)$. Como T é um isomorfismo linear, se mostrarmos que $I - K$ é um homeomorfismo bi-Lipschitz, F_v também o será. Para isso, basta provar que K é uma contração.

É claro que $\max\{\sigma(T^{-1})\} = (\lambda_2 - \gamma)^{-1}$ e $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq (b - \gamma)|x - y|$. Para $w, \bar{w} \in W_Y$,

$$\begin{aligned} & \|P_Y[\tilde{f}(T^{-1}w + v) - \tilde{f}(T^{-1}\bar{w} + v)]\|_0 \\ & \leq \|\tilde{f}(T^{-1}w + v) - \tilde{f}(T^{-1}\bar{w} + v)\|_0 \\ & \leq (b - \gamma)\|T^{-1}w + v - (T^{-1}\bar{w} + v)\|_0 \\ & = (b - \gamma)\|T^{-1}(w - \bar{w})\|_0 \\ & \leq \frac{b - \gamma}{\lambda_2 - \gamma}\|w - \bar{w}\|_0. \end{aligned}$$

Como $\gamma < b < \lambda_2$,

$$c := \frac{b - \gamma}{\lambda_2 - \gamma} < 1,$$

isto é, K é contração, o que termina a demonstração.

O que fazer para estudar a dimensão faltante? Um primeiro passo, que tomaremos, é empregar a família de homeomorfismos F_v como uma troca de variável. O diagrama abaixo serve de orientação.

$$\begin{array}{ccc} W_X \oplus V_X & \xrightarrow{F} & W_Y \oplus V_Y \\ \Phi^{-1}=(F_v, Id) \searrow & & \nearrow F \circ \Phi=(id, \phi) \\ & & W_Y \oplus V_Y \end{array}$$

Como uma aplicação do teorema anterior, demonstramos, no Lema A.0.7, que a função Φ^{-1} é um homeomorfismo bi-Lipschitz, e é tomada como troca

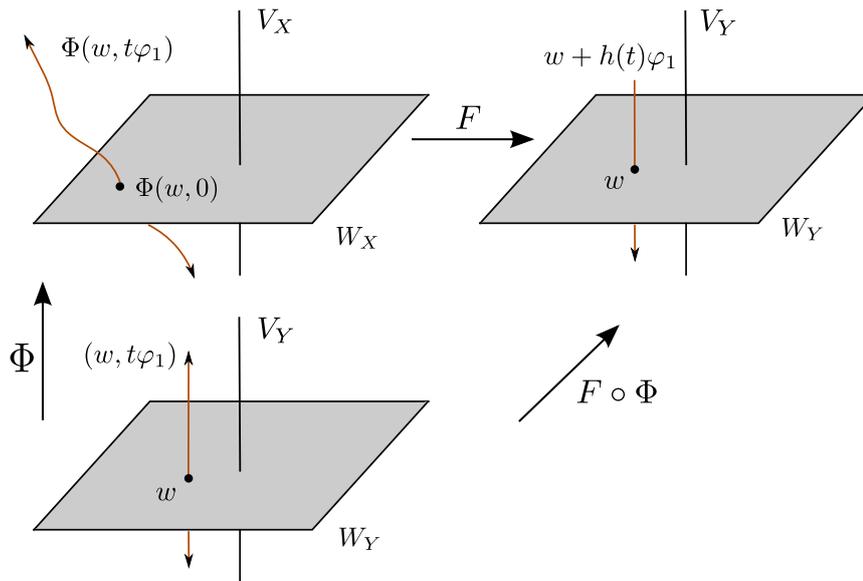


Figura 2.1: A composição $F \circ \Phi$ preserva a componente horizontal. Além disso, o conjunto $\{w + h(t)\varphi_1\}$ é uma semi-reta, conforme demonstramos na próxima seção.

de variável. Assim, estudar F é equivalente a estudar a diagonal $F \circ \Phi$, que é da forma

$$F \circ \Phi(w, v) = w + \phi(w, v).$$

Em particular, retas verticais vão sobre si mesmas.

Assim, cada reta $\{w + t\varphi_1 : t \in \mathbb{R}\}$ tem uma função altura natural,

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \langle \varphi_1, \phi(w, t\varphi_1) \rangle, \tag{2-4}$$

de modo que

$$F \circ \Phi(w, t\varphi_1) = w + h(t)\varphi_1. \tag{2-5}$$

Em suma, estudar o número de soluções da equação original $F(u) = g$ se reduz a estudar a função altura restrita à reta $\{g + t\varphi_1\}$.

Uma consequência geométrica simples do teorema 1.0.1 combinado com a troca de variável é o fato que a inversa por F de cada reta vertical é uma curva Lipschitz que encontra cada subespaço afim $v + W_X$ uma única vez. Pela troca de variável, essa curva, chamada de *fibra* em (8), é levada a uma reta vertical.

Existem extensões naturais do teorema 1.0.1 para a situação em que a não linearidade interage com um número finito de autovalores λ_i . O resultado tem uma demonstração absolutamente análoga à apresentada aqui para o caso mais simples.

2.3

Comportamento assintótico da função altura

Proposição 2.3.1 *Seja $F(u) = -\Delta u - f(u)$, f Lipschitz com $\overline{f'(\mathbb{R})} \subset [a, b]$, satisfazendo*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) = a < \lambda_1 < b = \lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) < \lambda_2.$$

Então, para cada $w \in W_Y$, a função altura $h(t) = \langle \varphi_1, F \circ \Phi(w, t\varphi_1) \rangle$ satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} h(t) = -\infty.$$

Prova: Considere a função altura h correspondente à reta por w . Como Φ e F são Lipschitz, h é contínua. Parametrize a fibra associada à reta por w por altura, isto é, escreva $u(t) = w(t) + t\varphi_1$, uma decomposição em vetores horizontal e vertical, aonde o vetor vertical tem tamanho t em $L^2(\Omega)$. Assim, $h(t) = \langle \varphi_1, F(u(t)) \rangle$.

Pelo lema A.0.8

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)/t, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)/t.$$

Vamos estudar o comportamento assintótico de h quando $t \rightarrow \infty$, o outro caso sendo análogo. Este, por sua vez, segue da existência de $c_- < 0$ tal que, para toda sequência $(t_n) \in \mathbb{R}$ com $t_n \rightarrow \infty$, existe uma subsequência (t_k) tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(t_k)}{t_k} \leq c_-.$$

Nosso primeiro objetivo é obter, para toda sequência $t_n \rightarrow \infty$, uma subsequência (t_k) tal que $\|w(t_k)/t_k - \omega\|_0 \rightarrow 0$ para algum $\omega \in Y$. Seja $t_n \rightarrow \infty$, e assim, sem perda, $|t_n| \geq 1$. Como a função $t \mapsto w(t)$ é Lipschitz,

$$\begin{aligned} \|w(t_n) - w(0)\|_{H^2(\Omega)} \leq M|t_n| &\implies \|w(t_n)\|_{H^2(\Omega)} \leq \|w(0)\|_{H^2(\Omega)} + M|t_n| \\ &\implies \left\| \frac{w(t_n)}{t_n} \right\|_{H^2(\Omega)} \leq \overline{M}, \end{aligned}$$

Pelo teorema de Rellich-Kondrachov, existe uma subsequência $(w(t_k)/t_k)_k$ convergente a $\omega \in L^2(\Omega)$, que pode ser tomada convergindo *q.t.p.* a ω .

Da definição,

$$\begin{aligned} h(t) &= \langle \varphi_1, F(u(t)) \rangle = \langle \varphi_1, -\Delta w(t) - \Delta t\varphi_1 - f(u(t)) \rangle \\ &= t\lambda_1 - \int_{\Omega} f(u(t))\varphi_1. \end{aligned}$$

Sejam Ω_+ , Ω_0 e Ω_- os subconjuntos de Ω onde $u = \omega + \varphi_1$ é positivo,

zero ou negativo, respectivamente. Assim, usando funções características,

$$\frac{h(t_k)}{t_k} = \lambda_1 - \int_{\Omega} \frac{f(u(t_k))}{t_k} \varphi_1(\mathcal{X}_{\Omega_+} + \mathcal{X}_{\Omega_0} + \mathcal{X}_{\Omega_-}).$$

Estimamos a integral acima fazendo uso dos Lemas A.0.8, A.0.9.

Em Ω vale a convergência *q.t.p.*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u(t_k)(x)}{t_k} = u(x)$$

que, restrita a cada subconjunto Ω_+ , Ω_0 e Ω_- , tem por limites valores positivos, nulos e negativos.

Se $x \in \Omega_+$, $u(t_k)(x) \rightarrow \infty$ e obtemos a convergência *q.t.p.*

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(u(t_k)(x))}{t_k} \varphi_1(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(t_k \frac{u(t_k)(x)}{t_k})}{t_k} \varphi_1(x) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(t_k \frac{u(t_k)(x)}{t_k})}{t_k \frac{u(t_k)(x)}{t_k}} \left[\frac{u(t_k)(x)}{t_k} \right] \varphi_1(x) \\ &= b u(x) \varphi_1(x). \end{aligned}$$

Analogamente, para $x \in \Omega_-$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(u(t_k)(x))}{t_k} \varphi_1(x) = a u(x) \varphi_1(x).$$

Para $x \in \Omega_0$, como f é Lipschitz,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(u(t_k)(x))}{t_k} \right| &\leq \left| \frac{f(u(t_k)(x))}{t_k} - \frac{f(0)}{t_k} \right| + \left| \frac{f(0)}{t_k} \right| \\ &= \max\{|a|, |b|\} \left| \frac{u(t_k)(x)}{t_k} \right| + \left| \frac{f(0)}{t_k} \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(u(t_k)(x))}{t_k} \varphi_1(x) = 0.$$

Concluimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(u(t_k)(x))}{t_k} \varphi_1(x) = b u(x) \varphi_1(x) \mathcal{X}_{\Omega_+} + a u(x) \varphi_1(x) \mathcal{X}_{\Omega_-}.$$

Queremos demonstrar que

$$\left| \int_{\Omega} \frac{f(u(t_k))}{t_k} \varphi_1 - b \int_{\Omega_+} u \varphi_1 - a \int_{\Omega_-} u \varphi_1 \right| \rightarrow 0.$$

Se obtivermos uma sequência (g_k) que domine $f(u(t_k))\varphi_1/t_k$ e convirja em $L^1(\Omega)$, o Lema A.0.9 garante a convergência acima.

Como φ_1 é positiva (5, Teorema 8.38) e limitada (5, Teorema 8.37); $0 < \varphi_1 < s$. Além disso, como f é Lipschitz, f é absolutamente contínua. Aplicando o teorema fundamental do cálculo obtemos, para cada $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(u(t_k)(x))}{t_k} \varphi_1(x) \right| &\leq s \left| \frac{f(0)}{t_k} \right| + s \left| \int_0^{u(t_k)(x)} \frac{f'(s)}{t_k} ds \right| \\ &\leq s \left| \frac{f(0)}{t_k} \right| + sM \left| \frac{u(t_k)(x)}{t_k} \right| = g_k(x). \end{aligned}$$

Seja $g = sM|u|$. Como $\| \frac{u(t_k)}{t_k} - u \|_0 \rightarrow 0$, então $\int_{\Omega} |g_k - g| \rightarrow 0$, pois Ω tem medida finita. Assim, o Lema A.0.9 garante que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(t_k)}{t_k} = \lambda_1 - b \int_{\Omega_+} u \varphi_1 - a \int_{\Omega_-} u \varphi_1.$$

Por fim, como $\varphi_1 > 0$ e $\omega \in \langle \varphi_1 \rangle^{\perp}$,

1. $a < b, 0 < - \int_{\Omega_-} u \varphi_1 \implies -a \int_{\Omega_-} u \varphi_1 < -b \int_{\Omega_-} u \varphi_1.$
2. $\int_{\Omega} u \varphi_1 = \int_{\Omega} \omega \varphi_1 + \int_{\Omega} \varphi_1^2 = 1.$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(t_k)}{t_k} &= \lambda_1 - b \int_{\Omega_+} u \varphi_1 - a \int_{\Omega_-} u \varphi_1 \\ &\leq \lambda_1 - b \int_{\Omega_+} u \varphi_1 - b \int_{\Omega_-} u \varphi_1 \\ &= \lambda_1 - b = c_- < 0. \end{aligned}$$

como gostaríamos. ■

Assim, em cada reta vertical do contradomínio, a função altura atinge um valor máximo. Para obter um comportamento parecido com o de uma parábola, que é o que se descreve no teorema de Ambrosetti-Prodi, são necessárias hipóteses adicionais.