2
Referencial teórico

Desde o desenvolvimento do modelo de Black & Scholes em 1973 diversos outros pesquisadores vem propondo modificações e adequações para melhor adaptá-lo ao mercado. Ao propor uma fórmula de apreçamento para opções européias sobre ações que não pagam dividendos ele rapidamente despertou o interesse dos agentes econômicos. Entretanto, aos poucos, foi identificada a existência de grandes limitações a este modelo, que residiam no fato de suas hipóteses serem frequentemente violadas quando eram analisados dados reais de mercado. Este modelo serviu então de base para o desenvolvimento de diversos novos modelos, que procuravam se adaptar e visavam contornar suas limitações. Garman e Kohlagen (GARMAN; KOHLAGEN, 1983) estenderam o modelo de Black & Scholes para as opções de moedas. Black (1976) desenvolveu as fórmulas analíticas que permitem a avaliação sobre contratos futuros. Corrado e Su em 1996 incorporaram assimetria e curtose na fórmula de apreçamento de opções e Merton (MERTON, 1976) considerou a possibilidade de saltos nas séries de preços.

2.1.
Modelos

2.1.1.
Modelo de Garman Kohlhagen

O modelo de Garman Kohlhagen ainda é considerado pelo mercado financeiro como padrão para o apreçamento de opções cambiais, apesar de já se perceber um descontentamento cada vez maior com seu desempenho limitado. Diversos estudos já mostraram evidências de erros em apreçamentos de opções de câmbio realizadas pelo modelo de Garman Kohlhagen e uma das razões pela qual o modelo talvez não seja totalmente satisfatório deriva do fato dele ser apenas uma adaptação o modelo de Black & Scholes para opções de ação. (EKVALL et al., 1997).

O modelo de Black-Scholes apreça opções européias de compra e venda que não pagam dividendos nem possuem quaisquer outros tipos de distribuição. Sua formula assume que o ativo objeto segue um movimento geométrico browniano com volatilidade constante. As equações que definem o preço da opção são apresentadas a seguir:

$$c = S_0 N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \tag{1}$$

$$p = Xe^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \tag{2}$$

$$d_1 = \frac{\ln {S_0}/{X} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{3}$$

$$d_2 = \frac{\ln {S_0}/{X} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{4}$$

Onde: c é o prêmio da opção de compra; p é o prêmio da opção de venda; S_0 é o preço do ativo objeto na data zero; X é o preço de exercício do ativo objeto; T é o tempo para o vencimento da opção; σ é volatilidade do ativo objeto; r é a taxa de juros livre de risco no regime de capitalização contínua, projetada até o vencimento da opção; $N(d_1)$ é a probabilidade acumulada da distribuição normal até d_1; $N(d_2)$ é a probabilidade acumulada da distribuição normal até d_2; (BLACK e SCHOLES, 1973; HULL,2006).

O modelo de Garman Kohlhagen utiliza as mesmas fórmulas expostas acima, porém a variável r neste caso é calculada por meio da subtração de duas taxas, ou seja, $r = b = r_L - r_f$ onde r_L é a taxa de juros local (brasileira) no regime de capitalização contínua e projetada até o vencimento da opção e r_fé a taxa de juros estrangeira também no regime de capitalização contínua e projetada até o vencimento da opção. (EKVALL et al., 1997).

2.1.2. Modelo Corrado-Su Modificado

O modelo original de Corrado-Su, proposto em 1996, propunha a derivação de um método simples para estender a fórmula de Black&Scholes, incorporando uma parcela de assimetria e curtose referente às séries de retornos dos ativos considerados.

Neste artigo iremos adotar o modelo de Corrado-Su Modificado (JURCZENKO *et al*. 2004), no qual a fórmula original foi ligeiramente modificada no intuito de prover consistência com uma restrição de *martingale*. O modelo de Corrado-Su Modificado fornece uma fórmula de apreçamento intuitiva, baseada na expansão de uma série de Gram-Charlier. Essa fórmula contém um erro tipográfico que pode ser significativo, e que foi corrigido mais tarde (BROWN; ROBINSON, 2002). Apesar das diferenças entre os resultados dos modelos propostos em Jurczenko et al, (o original, o corrigido e o modificado) ser muito pequena na maioria dos casos, ela pode ser economicamente significativa para casos específicos como opções com data de vencimento distante ou muito fora do dinheiro, principalmente quando o mercado estiver turbulento (JURCZENKO *et al*. 2004).

As equações que definem o preço da opção são apresentadas a seguir:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) + \mu_3 Q_3 + (\mu_4 - 3) Q_4 \tag{5}$$

$$p = c - S_0 e^{(b-r_1)T} + X e^{-rT} \tag{6}$$

$$Q_3 = \frac{1}{6(1+w)} S_0 \sigma \sqrt{T} \left(2\sigma\sqrt{T} - d\right) N(d) \tag{7}$$

$$Q_4 - \frac{1}{(24(1+w))} S_0 \sigma \sqrt{T} \left(d^2 - 3d\sigma\sqrt{T} + 3\sigma^2 T - 1\right) N(d) \tag{8}$$

$$w = \frac{\mu_3}{6}\sigma^3 T^{1,5} + \frac{\mu_4}{24}\sigma^4 T^2 \tag{9}$$

$$\mathrm{d} = \frac{\left[\log\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left[b + \frac{\sigma^2}{2}\right] T - \log(1+w)\right]}{\sigma\sqrt{T}} \tag{10}$$

Onde: μ_3 é o coeficiente de assimetria, μ_4 é o coeficiente de curtose e todos os demais termos seguem as mesmas descrições listadas antes no modelo de Black-Scholes.

2.1.3. Modelo de Difusão de Saltos de Merton

Para que o modelo clássico de Black-Scholes seja válido, uma das condições básicas que devem ser atendidas é que a dinâmica do retorno do ativo objeto siga um caminho contínuo. Tal premissa nem sempre representa a realidade, e o retorno de um determinado ativo objeto, como, por exemplo, uma *commodity*, muitas vezes apresenta um comportamento composto de processos contínuos e saltos. O modelo de difusão de saltos de Merton propõe uma fórmula, baseada no modelo de Black-Scholes, que contempla esses casos mais genéricos (MERTON, 1976).

Admitindo-se, portanto, que existe uma descontinuidade na distribuição dos retornos do ativo objeto, percebe-se então existência de dois componentes distintos afetando o preço do ativo. O componente contínuo é modelado por um processo padrão de Wiener, enquanto o componente discreto (saltos) é modelado por um processo de Poisson, com taxa que reflete o número de saltos por unidade de tempo (MERTON, 1976).

Segundo Ball e Torous (*apud* CANABARRO, 1988), após a realização de diversos testes empíricos referentes ao apreçamento de opções pelo modelo de Merton e de Black-Scholes, não foi possível constatar vantagem significativa do primeiro sobre o segundo. O modelo de Merton, apesar de mais complexo e refinado, apresentou um nível de precisão muito pouco superior ao obtido por meio do modelo de Black-Scholes. O mesmo teste realizado para três ações no mercado brasileiro encontrou os mesmos resultados (CANABARRO, 1988). As equações que definem o preço da opção são apresentadas a seguir:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^i}{i!}\left[S_0 N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)\right] \qquad (11)$$

$$d_1 = \frac{\ln S_0/X - \left(r + \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (12)$$

$$d_2 = \frac{\ln S_0/X + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T}{\sigma_i\sqrt{T}} = d_1 - \sigma_i\sqrt{T} \qquad (13)$$

$$\sigma_i = \left(z^2 + \delta^2\left(\frac{i}{T}\right)\right)^{0,5} \qquad (14)$$

$$z = \left(\sigma^2 - \lambda * \delta^2\right)^{0,5} \qquad (15)$$

$$\delta = \left(\frac{\gamma v^2}{\lambda}\right)^{0,5} \qquad (16)$$

Onde v é a volatilidade total incluindo os saltos, λ é o número esperado de saltos por ano e Υ é o percentual da volatilidade total da série explicada pelos saltos.

2.1.4.
Modelo de Black e Black Modificado

Como vimos, Black e Scholes (1973) propuseram, a partir de um conjuntos de hipóteses, um modelo para cálculo dos prêmios de calls e puts européias sobre ações que não pagassem dividendos:

A partir do modelo acima, Merton (1973) estendeu o modelo para inclusão de pagamento de dividendos nas ações e Black (1976) desenvolveu as fórmulas analíticas que permitem a avaliação de opções sobre contratos futuros. Aqui, ao invés do preço *spot*, S, trabalha-se com o preço futuro, F:

$$c = [F\,N(d_1) - X\,N(d_2)]e^{-rT} \qquad (17)$$

$$p = [X\,N(d_2) - F\,N(d_1)]e^{-rT} \qquad (18)$$

Sendo:

$$d1 = \frac{\left[\ln\left(\frac{F}{X}\right) + \sigma^2\frac{T}{2}\right]}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (19)$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T} \qquad (20)$$

No presente trabalho, ao lidar com opções sobre contratos futuros, incorpora-se a assimetria e curtose ao modelo acima, através das formulas abaixo:

$$c = [F\,N(d_1) - X\,N(d_2)]e^{-rT} + \mu_3 Q_3 + (\mu_4 - 3)Q_4 \qquad (21)$$

$$p = [X\,N(d_2) - F\,N(d_1)]e^{-rT} + \mu_3 Q_3 + (\mu_4 - 3)Q_4 \qquad (22)$$

$$Q_3 = \frac{1}{6(1+w)}F\sigma\sqrt{T}\left(2\sigma\sqrt{T} - d\right)N(d) \qquad (23)$$

$$Q_4 = \frac{1}{(24(1+w))}F\sigma\sqrt{T}\left(d^2 - 3d\sigma\sqrt{T} + 3\sigma^2 T - 1\right)N(d) \qquad (24)$$

$$w = \frac{\mu_3}{6}\sigma^3 T^{1,5} + \frac{\mu_4}{24}\sigma^4 T^2 \qquad (25)$$

$$d = \frac{\left[\log\left(\frac{F}{X}\right) + \left[b + \frac{\sigma^2}{2}\right]T - \log(1 + w)\right]}{\sigma\sqrt{T}} \tag{26}$$

Onde b é o diferencial de juros, entre as taxa doméstica e estrangeira. Sendo ainda μ_3 o coeficiente de assimetria e μ_4 o coeficiente de curtose. Sendo este o modelo de Black modificado utilizado neste trabalho.

2.2.
Revisão de literatura

A literatura de apreçamento de opções data do início do século 20, com os trabalhos de Louis Bachelier, um matemático Francês. Bachelier deduziu uma fórmula para apreçar opções baseada na hipótese de que o preço de uma ação segue um Movimento Browniano com zero *drift*. Desde então, muito pesquisadores vêem acrescentando inúmeras contribuições ao estudo dos prêmios das opções. (MERTON, 1973).

Neste contexto, a década de 70 desponta com o modelo para o apreçamento de opções proposto por Fischer Black e Myron Scholes – B&S (BLACK; SCHOLES, 1973), tendo sido de suma importância para o desenvolvimento do mercado de derivativos. O modelo parte de uma seleção de hipóteses para apreçar opções européias sobre ações que não pagam dividendos, onde o prêmio de uma opção de compra ou uma opção de venda é função do preço do ativo objeto, preço de exercício, tempo para o vencimento, taxa de juro livre de risco e volatilidade do preço do ativo objeto.

Apesar de representar um grande avanço para a teoria de finanças, o modelo de Black-Scholes possuía grandes limitações, que residiam no fato de suas hipóteses serem frequentemente violadas quando eram analisados dados reais de mercado.

Visando aprimorar o tradicional modelo de B&S, diversos autores propuseram expansões de series de uma dada densidade de probabilidade visando aproximar-se da distribuição de retornos livre de riscos. Sob esta abordagem, a assimetria e curtose da série apresentam impacto significativo sobre o apreçamento de opções, levando ao entendimento de que alterações corretivas no modelo de B&S possam levar à eliminação de vieses já constatados.

O modelo original de B&S assume que o logaritmo do preço do ativo segue um processo de difusão com variância constante. Estudos anteriores realizados por Black e Scholes (1972) e Officer (1973) testam e rejeitam a validade dessa premissa de variância constante. Desde então, a literatura de heteroscedasticidade originada com Engle (1982) e Bollerslev (1986), tem documentado a natureza volátil da variância dos retornos das ações.

É comum verificar, em diversas séries financeiras, que a hipótese de homocedasticidade (variâncias condicionais do termo errático, u_i, constantes), adotada em vários modelos econométricos, é inapropriada. Constata-se, em geral, que períodos de grandes oscilações de preços são seguidos por intervalos de tempo de relativa estabilidade nas cotações, levando a uma oscilação da volatilidade. Fora neste contexto que Engle (1982) desenvolveu o modelo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity), com o objetivo de estimar a volatilidade de séries com as características citadas acima, expressando a variância condicional em termos do quadrado dos retornos passados. Posteriormente, Bollerslev (1986) estendeu o modelo ARCH, com o desenvolvimento do modelo GARCH (Generalized ARCH), em que a variância condicional passa a depender do quadrado dos retornos passados e das variâncias condicionais passadas (ENDERS, 2004).

Além de apresentar resultados mais robustos em comparação aos modelos tradicionais, a literatura mostra que os modelos de volatilidade determinística, mencionados acima, apresentam melhores resultados, quando comparados à metodologia da volatilidade histórica (MORAIS E PORTUGAL, 1999; JORION, 2003), (MACIEL et al. 2009).

Sabe-se agora, portanto, que a variância dos retornos de ações é estocástica e correlacionada com o preço do ativo, implicando em uma distribuição de retornos não normal. Desta forma, Heston (1993), Hull e White (1987), Schott (1987), Stein e Stein (1991) e Wiggins (1987) mostram que, sob estas condições, espera-se que o modelo original de B&S sistematicamente forneça um premio para as opções diferentes dos observados.

É sob este contexto que Corrado-Su (CORRADO-SU, 1996) propõem incorporar a assimetria e curtose ao modelo de B&S, tendo sido revisto por Jurczenko et al. (2004), que apresentou uma mudança na fórmula original, modificando-a no intuito de prover consistência. Segundo Jurczenko, as simplificações ao modelo de Corrado e Su utilizadas em alguns trabalhos não devem ser negligenciadas no todo, mas deve-se evitá-las quando da presença de uma distribuição assimétrica e leptocúrtica.

Com relação ao apreçamento de opções de câmbio, os de maior destaque são os modelos de Garman-Kohlhagen (1983) e o de Black (1976). O primeiro demonstrou que o modelo de apreçamento de opções com ativos que pagam uma taxa de dividendos constante poderia ser utilizado para o apreçamento de derivativos de taxas de câmbio, visto que a remuneração de uma posição em moeda estrangeira é semelhante ao pagamento de dividendos contínuos. O segundo, pode ser usado para o apreçamento quando os futuros e as opções vencem na mesma data. (BLACK, 1976); (MERTON, 1976); (CUNHA JR.; LEMGRUBER, 2003). Tal modelo fora originalmente proposto para incorporar as fórmulas analíticas que permitissem a avaliação de opções sobre contratos futuros.

Algumas outras considerações acerca do modelo de B&S referem-se ao movimento do preço da ação que, ao invés de seguir um caminho aleatório (Movimento Geométrico Browniano) pode ser mais bem identificado pela teoria dos fractais (PETERS, 1994).

Entende-se, portanto, que o modelo de Black-Scholes serviu de base para o desenvolvimento de diversos novos modelos que visavam contornar suas limitações. Tais modelos, por serem versões adaptadas do modelo de Black-Scholes, ainda possuem algumas de suas fragilidades, demandando estudos adicionais de forma a contorná-las. Esses estudos podem ser divididos em três classes: modelos de difusão univariada; modelos de volatilidade estocástica; modelos de saltos (COSTA ; YOSHINO 2004).

As três classes adotam abordagens semelhantes à do modelo de Black-Scholes, cada uma relaxando alguma das hipóteses adotadas. Nos modelos de difusão univariada, a hipótese de adoção do Movimento Browniano Geométrico é relaxada. Já os modelos de volatilidade estocástica relaxam a hipótese de volatilidade constante e permitem que a volatilidade instantânea do retorno dos ativos mude estocasticamente no tempo. Essa mudança geralmente segue um processo de difusão, entretanto pode também ocorrer como uma mudança de regime (NAIK; LEE. 1994) ou como processo de difusão com saltos (DUFFIE *et al.,* 2000). Uma das vantagens da adoção deste tipo de modelo residiria na incorporação dos efeitos do "sorriso" da volatilidade e de assimetria. (COSTA; YOSHINO, 2004).

Por fim, os modelos de saltos relaxam a hipótese de difusão nos preços dos ativos, inserindo um componente de salto no caminho seguido pelo ativo objeto. Um dos principais modelos desta classe é o de Merton (MERTON, 1976) que assumiu a existência de uma descontinuidade na distribuição dos retornos do ativo objeto e modelou esse componente discreto (saltos) por um processo de Poisson.

Os modelos citados acima são apenas exemplos de cada classe, pois diversos autores, seja seguindo por caminhos semelhantes ou diferentes, já sugeriram modelos visando melhorar o apreçamento de opções de câmbio como um todo, ou adequar modelos existentes a realidades específicas de alguns mercados.

Segundo Grabbe (GRABBE, 1983), modelos para opções européias podem não ser adequados para apreçar opções cambiais americanas devido à possibilidade de exercício antecipado, ou seja, antes da data de vencimento da opção. Entretanto, Roll (ROLL, 1997) e Geske e Shastri (GESKE E SHASTRI, 1985) ressaltam que a possibilidade de exercício antecipado é muito baixa quando são analisadas ações que pagam pequenos dividendos. Shastri e Tandon (SHASTRI; TANDON, 1986) demonstram que o preço de uma opção cambial européia é muito próximo do de uma opção cambial americana. Já Adams e Wyatt (ADAMS; WYATT, 1987) argumentam que se a taxa de juros doméstica é menor do que a estrangeira, então existe uma diferença maior do prêmio da opção de compra americana para o da européia. Caso a taxa de juros doméstica seja maior que a estrangeira, a diferença maior existe para o prêmio da opção de venda americana em relação à européia. E caso sejam iguais, a diferença é muito pequena.

Hillard (HILLARD *et al.,* 1991) sugere um modelo de apreçamento que utiliza taxas de juros domésticas e estrangeiras estocásticas e assume que as taxas de juros de curto prazo seguem um movimento de reversão a média de Ornstein-Uhlenbeck impulsionado por um movimento aritmético browniano (MAB). Kwok (KWOK, 2008) sugere a correção da volatilidade de forma a incorporar as volatilidades de preço do dólar e do cupom cambial, enquanto Hull (HULL, 2006) sugere adotar a fórmula de dividendo constante mesmo sendo a taxa do cupom cambial estocástica. Bates (BATES, 1996), Bakshi (BAKSHI *et al.,* 1997), Heston (HESTON, 1993) e Stein (STEIN, 1991) adotam o uso da transformada de Fourier para a obter a função densidade de probabilidade do retorno do ativo objeto enquanto Scott (SCOTT, 1987) recorre à simulação de Monte Carlo e Wiggins (WIGGINS, 1987) e Hull (HULL; WHITE, 1987) à abordagem de diferença-finita para apreçar opções com volatilidade estocástica.

Já Feiger (FEIGER; BERTRAND, 1979) e Amin (AMIN; JARROW, 1991), entre outros, sugerem soluções analíticas para opções européias de taxas de câmbio, enquanto Melino (MELINO; TURNBULL, 1991) sugere que o modelo com volatilidade estocástica é bem-sucedido para explicar o preço das opções de câmbio para alguns mercados do G-7.

Outra linha de estudo para o apreçamento de opções utiliza Redes Neurais Artificiais (RNAs). Segundo Maciel (MACIEL *et al.,* 2009), esta é uma técnica computacional inspirada no funcionamento do sistema nervoso biológico que permite modelar relações do tipo entrada-saída. Além disso, ela vem conquistando espaço dentro da literatura de finanças e muitos estudos com avaliações de redes neurais aplicadas à modelagem financeira já podem ser encontrados.

Como exemplo, podemos citar o estudo publicado por Hutchinson (HUTCHINSON *et al.,* 1994), que aplicou a técnica de redes neurais para o apreçamento e aplicação da operação delta-hedge nas opções sobre futuros do índice S&P 500. Além desse, podemos citar o de Malliaris (MALLIARIS; SALCHENGERGER, 1996), que desenvolveu um modelo de rede neural para a previsão da volatilidade futura das opções sobre futuro do índice S&P 100. Segundos seus autores, todos os modelos citados acima obtiveram resultados superiores aos obtidos com o modelo Black-Scholes.

Com relação ao mercado brasileiro mais especificamente, poucos estudos endereçando o apreçamento de opções de câmbio foram realizados. Cunha Jr e Lemgruber (2003) testaram o modelo de taxas de juro e de cupom cambial estocásticos na avaliação de opções de dólar no mercado brasileiro por meio de amostra de 7841 opções negociadas na BM&F no período de 1998 a 2001 e concluíram que a aderência do modelo aos preços de mercado é muito melhor do que à obtida com base nos modelos tradicionais de Merton e de Garman e Kohlhagen, evidenciando que este último não deveria ser usado para situações onde as volatilidades das taxas de juro e dos cupons cambiais são elevadas.

Já Costa (COSTA; YOSHINO, 2004) implementou o modelo de Heston, utilizando como dados as cotações de fechamento das opções de câmbio entre as datas de 02/09/2002 e 05/03/2003 na BM&F e calibrando o modelo por meio de uma matriz de volatilidades implícitas de um grupo de bancos que atuam de forma efetiva no mercado nacional. Os autores concluíram que o modelo de Heston se mostrou aceitável para o mercado brasileiro de moeda estrangeira, apresentando parâmetros estáveis nos períodos de menores volatilidades no mercado cambial e com alguma instabilidade nos períodos de maior volatilidade.

No que diz respeito à utilização de redes neurais artificiais, Maciel (MACIEL *et al*., 2009) aplicou um modelo de rede neural multicamadas para o apreçamento das opções de taxa de câmbio R$/US$, negociadas na BM&FBovespa, no período de janeiro de 2004 a dezembro de 2007, obtendo um desempenho superior ao do modelo de Black nos diferentes graus de *moneyness*.