

2. Pesquisa Bibliográfica

O processo de protensão é um tema explorado em muitos artigos, teses e dissertações atuais. O *Post-Tensioning Institute* tem publicado sobre este assunto muitos artigos, dentre eles, “*Design Fundamentals of Post-tensioned Concrete Floors*” [1], onde são discutidos os principais métodos utilizados no projeto de lajes. Atualmente, o método mais empregado é o da carga equivalente, método introduzido por Lin [2], no qual a protensão é vista como um carregamento aplicado. A carga aplicada é dividida em componentes que causam flexão e aqueles que causam pré-compressão. Os componentes do carregamento devido à protensão que causam flexão na laje determinam os momentos e cortantes normais na laje. A pré-compressão devido ao pré-esforço nas ancoragens é adicionada às tensões oriundas dos momentos fletores devido ao carregamento vertical.

Neste capítulo, será apresentada a pesquisa bibliográfica com os tópicos necessários para uma melhor compreensão e conhecimento no que diz respeito a lajes protendidas, maciças e nervuradas.

2.1. Considerações Gerais sobre a Protensão

A protensão é um artifício que consiste em introduzir numa estrutura um estado prévio de tensões internas, a traves de uma armadura previamente tracionada, que se opõem, até limites desejados, às tensões provocadas por cargas externas, a fim de melhorar sua resistência ou seu desempenho, perante as solicitações atuantes. A protensão elimina ou reduz a tensões de tração induzidas pelas cargas externas, evitando a fissuração excessiva.

A seção de concreto é verificada no Estado Limite de Serviço para garantir que tanto a tensões de compressão e de tração encontrem-se dentro dos limites aceitáveis dados nas normas vigentes.

Na aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF), as seções de projeto são selecionadas pelo engenheiro calculista com base na sua experiência e na sua observação da solução gráfica na tela resultante da aplicação do método de cálculo. Um bom ponto de partida é verificar na face dos apoios e no meio do vão.

Os princípios básicos do projeto em concreto protendido podem ser simplesmente entendidos ao considerar a distribuição de tensões em uma seção de projeto sob a ação de forças ou cargas aplicadas externamente.

A Figura 2.1 ilustra a simplicidade da teoria básica. Em essência, o processo implica verificação da distribuição de tensões sob a ação combinada de ambos a protensão e a carga aplicada, em todas as posições ao longo da viga, a fim de garantir que tanto a compressão e tração são mantidas dentro dos limites indicados nos padrões do projeto.

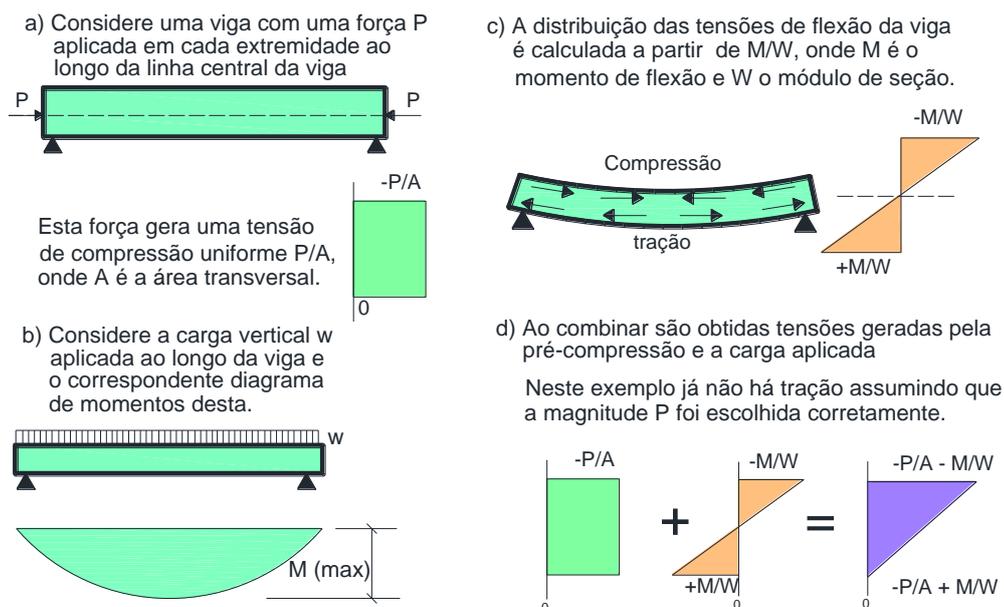


Figura 2.1 – Princípios básicos do projeto de concreto protendido [3].

O projeto de um membro protendido pode ser considerado em duas operações distintas: cálculo de momentos e cálculo de tensões. O cálculo dos momentos é muito importante principalmente no caso de vãos contínuos; uma vez que os momentos tenham sido obtidos, as tensões em seções críticas são obtidas a partir da eq. (2.1), equação simples de flexão.

$$\sigma = -\frac{P}{A} \pm \frac{P \cdot e}{W} \pm \frac{M}{W} \quad (2.1)$$

onde

P é a força de protensão

A é a área da seção transversal de concreto

M é o momento fletor causado pelo carregamento externo

W é o módulo de flexão (I/y)

e é a excentricidade

O acoplamento da pré-compressão e as forças de restrição na laje são um subproduto da formulação de elementos finitos. Os dois conjuntos de ações são combinados automaticamente na solução.

2.1.1. Exemplo Numérico Ilustrativo

No texto de “Fundamentos Do Concreto Protendido” [4] mostra de modo numérico o antes citado. Consideremos uma viga de concreto, simplesmente apoiada, com dimensões conforme mostra a Figura 2.2, sujeita às seguintes ações:

- peso próprio $g = 3,75 \text{ kN/m}$
- carga acidental $q = 34,6 \text{ kN/m}$
- força de protensão $P = -600 \text{ kN}$

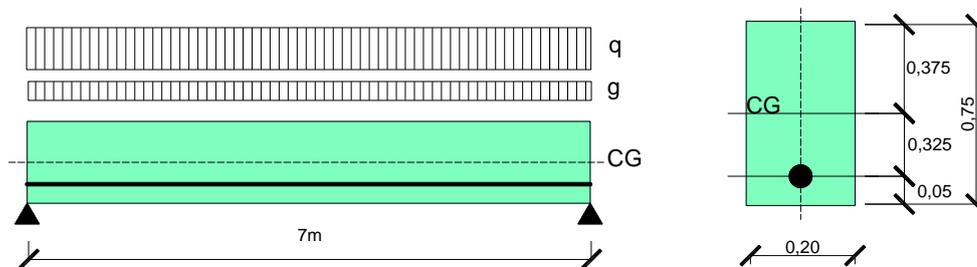
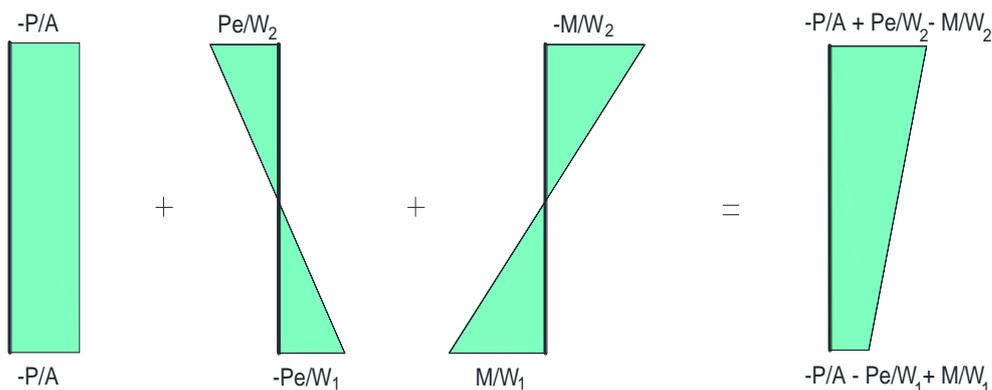


Figura 2.2 – Dados da viga de concreto protendido [4].

As tensões às quais a peça está submetida são dadas pela equação 2.1



Os cálculos descritos a seguir são efetuados considerando-se o concreto como material homogêneo e de comportamento elástico-linear.

- i. Características geométricas e mecânicas da seção transversal,

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = 7,03 \cdot 10^{-3} \text{m}^4$$

$$y_1 = -y_2 = 0,375 \text{m}$$

$$W_1 = -W_2 = \frac{I}{y_i} = 18,75 \cdot 10^{-3} \text{m}^3$$

$$A = b \cdot h = 0,150 \text{m}^2$$

$$e = 0,325 \text{m}$$

- ii. Esforços solicitantes e tensões normais no meio do vão

- a. Tensões referentes ao peso próprio

$$Mg_1 = \frac{3,75 \cdot 7^2}{8} = 22,97 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{1g_1} = \frac{Mg_1}{W_1} = +1,23 \text{MPa (na borda inferior)}$$

$$\sigma_{2g_1} = \frac{Mg_1}{W_2} = -1,23 \text{MPa (na borda superior)}$$

- b. Tensões referentes à carga acidental

$$Mq = \frac{34,6 \cdot 7^2}{8} = 211,93 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{1q} = \frac{Mq}{W_1} = +11,30 \text{MPa (na borda inferior)}$$

$$\sigma_{2q} = \frac{Mq}{W_2} = -11,30 \text{MPa (na borda superior)}$$

- c. Tensões referentes à força de protensão

$$P = -600 \text{kN}$$

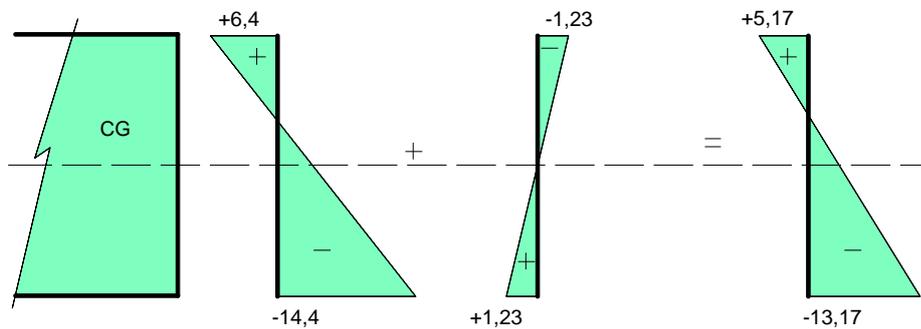
$$M_p = P \cdot e$$

$$\sigma_{1p} = \frac{P}{A_c} + \frac{P \cdot e}{W_1} = -4 - 10,4 = -14,40 \text{MPa (na borda inferior)}$$

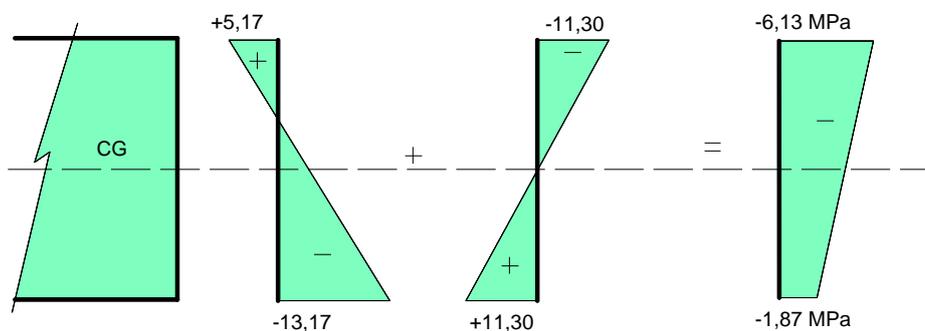
$$\sigma_{2p} = \frac{P}{A_c} + \frac{P \cdot e}{W_2} = -4 + 10,4 = +6,40 \text{MPa (na borda superior)}$$

iii. Combinação de ações

a. Estado em vazio (referente à força de protensão e ao peso próprio)



b. Estado em serviço



iv. Análise dos resultados

- Observa-se que pode ocorrer que no estado em vazio a seção transversal esteja mais solicitada que no estado em serviço. Portanto é necessário que haja uma verificação cuidadosa de todas as fases de solitação da peça.
- Variando-se a intensidade e a excentricidade da força de protensão, obtêm-se os efeitos desejados.
- É preciso que sejam verificadas as seções ao longo do vão (não apenas as mais solicitadas pelo carregamento externo), procurando-se, na medida do necessário, variar os efeitos da protensão.
- Uma verificação como essa realizada nos exemplos numéricos é útil para a análise da estrutura nas condições de serviço. É sempre necessário que sejam feitas também verificações dos estados limites últimos.

2.2. Vantagens das Lajes Protendidas

Lajes protendidas têm inúmeras vantagens se comparadas às lajes de concreto armado. *The Concrete Centre* na sua publicação “*Post-tensioned Concrete Floors*” [3] explica esses benefícios:

- **Grandes vãos:** Uma das principais vantagens do concreto protendido é que permite projetar vãos maiores que no concreto armado.
- **Seções mais esbeltas:** Laje de concreto protendido fornece espessura mínima para qualquer solução para cargas e vãos típicos. Ou seja, desencadeando outras vantagens como menor peso próprio da estrutura e menor altura total do edifício.
- **Flexibilidade:** O concreto protendido pode ser trabalhado com geometria irregular, incluindo curvas. Assim, uma grande flexibilidade de layout pode ser alcançada.
- **Distribuição de serviços:** Serviços mecânicos e elétricos são elementos caros na construção, com significativos custos de manutenção e substituição. Lajes protendidas geralmente oferecem uma zona de distribuição de serviços livre de vigas, diminuindo assim as interferências.
- **Aberturas:** Lajes de concreto protendido podem acomodar aberturas sem muita dificuldade. Furos menores raramente apresentam problemas, pois podem ser facilmente formados entre os cabos.
- **Velocidade de construção:** Concreto protendido é altamente compatível com programas de construção acelerados. Reduz o congestionamento de reforço, o que torna mais fácil a colocação de concreto.
- **Grande área para lançamento de concreto:** Lajes protendidas são mais finas que lajes de concreto e por isso uma área maior pode ser vertido para o mesmo volume de concreto.

- Deflexão: A deflexão muitas vezes rege os critérios de projeto, especialmente quando grandes vãos são usados. Em certa medida a deflexão da laje pode ser controlada variando-se o pré-esforço.
- Construção livre de fissuras: Construção livre de fissuras pode ser fornecida projetando toda a laje à compressão sob cargas normais de trabalho.
- Adaptabilidade: Mercados e práticas de trabalho estão em constante mudança, por isso faz sentido considerar um material que pode acomodar necessidades de mudança ou ser adaptado com o mínimo esforço.
- Redução do uso de materiais: O Concreto Protendido possui uma forma estrutural eficiente, o que otimiza o uso de concreto e utiliza aço de alta qualidade para os cabos.

2.3. Tipos de Lajes Protendidas

Nas lajes protendidas os principais esquemas estruturais adotados são as lajes lisas, com ou sem aumento de seção (capitéis) na região dos pilares e as lajes nervuradas, apoiada ou não em faixas maciças de concreto da mesma espessura da laje.

2.3.1. Lajes Lisas

As lajes lisas (Figura 2.3) são lajes de espessura uniforme, apoiadas diretamente sobre pilares, sem a existência de vigas para transmitir as cargas destas aos mesmos, possibilitando assim pavimentos com tetos lisos, que vêm sendo cada vez mais utilizados em edificações.

A espessura de uma laje lisa (*flat plate*) é geralmente controlada pelas exigências de deflexão e/ou punção em torno do pilar.

- A NBR 6118: 2007 [5] recomenda uma espessura mínima de 16 cm para lajes lisas.
- O ACI 318-05 [6] recomenda: $L/h \leq 42$ para lajes de piso.

- Segundo PTI *Post-tensioning Institute* [7] a esbeltez deve ser: $40 \leq L/h \leq 45$.

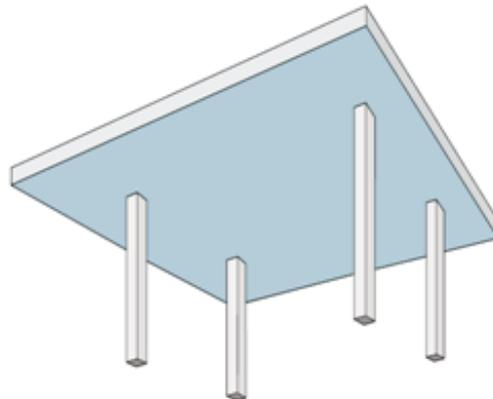


Figura 2.3 – Lajes lisas sem capitéis, *The Concrete Centre* [3].

2.3.2. Lajes Nervuradas

Segundo a NBR 6118: 2007 [5]: “Lajes nervuradas são as lajes moldadas no local ou com nervuras pré-moldadas, cuja zona de tração para momentos positivos está localizada nas nervuras entre as quais pode ser colocado material inerte”.

Lajes nervuradas em uma direção (*ribbed slab*), Figura 2.4 (a), são as lajes constituídas por uma série de vigas solidarizadas entre si pela mesa e que fornecem uma estrutura muito flexível capaz de acomodar aberturas. Para grandes vãos, lajes reticulares (*waffle slab*) é uma opção muito eficiente capaz de suportar altas cargas, Figura 2.4 (b). A principal desvantagem com este tipo de lajes é que é necessário "entrelaçar" os cabos de pré-esforço.

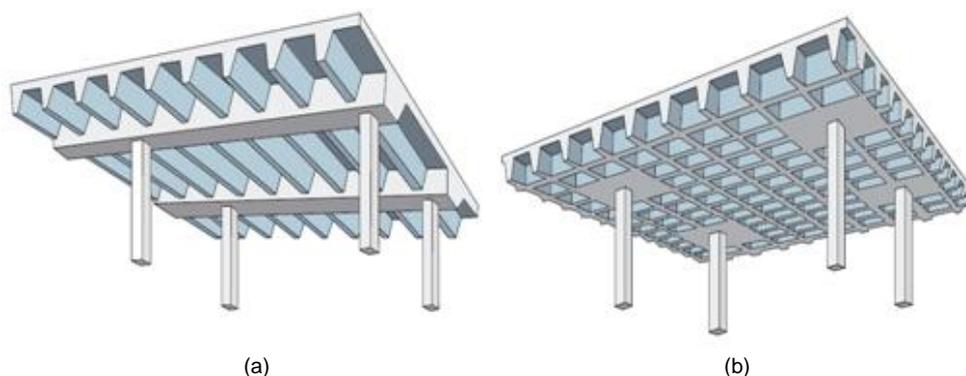


Figura 2.4 – Lajes nervuradas em uma direção (a) e em duas direções (b). *The Concrete Centre* [3].

No Brasil, tem sido bastante utilizado o sistema estrutural constituído de lajes nervuradas de concreto armado apoiadas em faixas maciças de concreto protendido, como mostra a Figura 2.5.

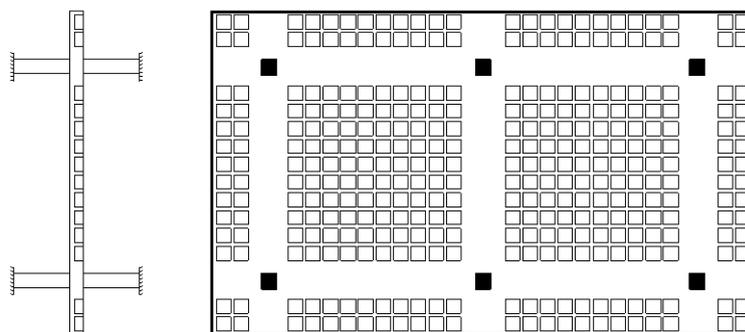


Figura 2.5 – Lajes nervuradas apoiadas em faixas maciças de concreto protendido.

Segundo o PTI [7], a esbeltez recomendada para vigas protendidas é: no caso de vãos contínuos, $L/h=30$; e no caso de um só vão: $L/h=26$.

Lajes nervuradas fazem uso do concreto e do aço da forma mais eficiente representando uma boa economia não só de material, mas de tempo. Diminui também a quantidade de escoramento durante o tempo de cura.

2.4. Sistemas de Protensão

2.4.1. Protensão com Aderência

Na protensão aderente os cabos são colocados dentro de bainhas metálicas contínuas que são injetadas com uma calda de cimento após os cabos serem tensionados, criando a aderência entre o concreto e os cabos. Pode ser executada por duas maneiras:

- com aderência inicial, em que a peça é concretada envolvendo uma armadura previamente tracionada e ancorada em dispositivos externos;
- com aderência posterior, em que a protensão é aplicada sobre uma peça de concreto após do endurecimento do concreto e a aderência é processada posteriormente através de uma calda de cimento após a aplicação da força de protensão e ancoragem dos cabos por meio de dispositivos mecânicos.



Figura 2.6 – Sistema aderente antes do lançamento do concreto. *The concrete Centre*. [3].

2.4.2. Protensão Sem Aderência

A protensão sem aderência é realizada com armadura pós-tracionada, isto é, a armadura ativa é tracionada sobre uma peça de concreto já endurecido.

O cabo ou cordoalha de aço permanece livre para se mover de forma independente do concreto. Em certos sistemas de protensão sem aderência, a armadura ativa é colocada em dutos formados por dutos metálicos ou de plástico. No caso da cordoalha engraxada, ou seja, cordoalhas não aderentes, o aço fica dentro de bainhas plásticas envolvidas por uma camada de fluido lubrificante pastoso e são ancoradas nas extremidades por meio de cunhas. Nesse tipo de protensão ainda há a possibilidade de trocar os cabos em uma futura manutenção.

A protensão sem aderência com cordoalhas engraxadas plastificadas oferece como principais vantagens: [8]:

- reduz bastante as perdas por atrito ao longo dos cabos, resultando em uma maior força efetiva de protensão.
- ancoragens individuais minimizam as tensões concentradas diminuindo as armaduras de fretagem.
- com a cordoalha engraxada obtém-se uma maior excentricidade do cabo, o que resulta em uma maior eficiência da protensão.



Figura 2.7 – Sistema não aderente antes do lançamento do concreto. *The concrete Centre*. [3].

Algumas das mais relevantes características básicas dos sistemas de protensão aderente e não aderente estão na Tabela 2.1 a seguir.

Tabela 2.1 – Diferenças dos sistemas de protensão aderente e não aderente [9].

SISTEMA ADERENTE	SISTEMA NÃO ADERENTE
Usa bainha metálica para até quatro cordoalhas por bainha, em trechos de 6m com luvas de emenda e vedação.	Sem bainha metálica. As cordoalhas vêm de fabrica com graxa e bainha plástica contínua.
O manuseio é feito com quatro cordoalhas ao mesmo tempo (aproximadamente 3,2 kg/m).	O manuseio é feito com uma cordoalha por vez (próximo de 0,89 kg/m).
Concretagem cuidadosa para evitar danos à bainha metálica (abertura da costura helicoidal).	Concretagem sem maiores cuidados. Bainha plástica é resistente aos trabalhos de obra.
Usa macaco de furo central que precisa ser enfiado pela ponta da cordoalha	Usa macaco de dois cilindros que se apoia na cordoalha junto à face do concreto.
A protensão é feita em quatro níveis de pressão hidráulica, seguidas das respectivas leituras de alongamento, correção da tabela e medida da perda por acomodação da ancoragem.	A protensão é feita em uma só elevação de pressão, pois não há retificação da cordoalha (bainha justa).
Exigem lavagem das cordoalhas por dentro para a diluição de eventual pasta de cimento.	Lavagem desnecessária.
A água deve ser retirada por ar comprimido antes da injeção, para não haver diluição da pasta.	Medida desnecessária.
Pasta de injeção, feito com misturador elétrico. A injeção é feita por bomba elétrica.	Medida desnecessária.

2.5. Arranjo de Cabos de Protensão

2.5.1. Traçado dos Cabos em Elevação

De um modo geral, o ideal é que os esforços provocados pela protensão variem proporcionalmente aos esforços externos. Isso pode ser conseguido se o traçado dos cabos acompanharem o diagrama de momentos fletores produzidos pelo carregamento externo.

A Figura 2.8 (a) é uma viga de três vãos contínuos com um balanço em uma extremidade. O carregamento é composto por cargas predominantemente concentradas sobre o balanço e o vão 1-2, e de cargas uniformemente distribuídas sobre os outros dois vãos 2-3 e 3-4. Figura 2.8 (b) mostra um possível perfil do cabo. No balanço e no vão 1-2, onde as cargas são concentradas, o perfil é composto por linhas retas. Nos vãos 2-3 e 3-4 os perfis são parabólicos. O perfil é simétrico no vão 2-3 e seu ponto mais baixo é na metade do vão. No vão 3-4, o perfil é assimétrico, e o comprimento b , a distância entre o apoio ao ponto mais baixo, não é conhecido, neste caso.

Um cabo não pode ser dobrado em ângulos agudos, todos os cantos do perfil são arredondados com parábolas, como nos suportes 2 e 3, e na metade do vão 1-2. Em estágios preliminares de projeto, o perfil é muitas vezes simplificado como mostra a Figura 2.8 (c).

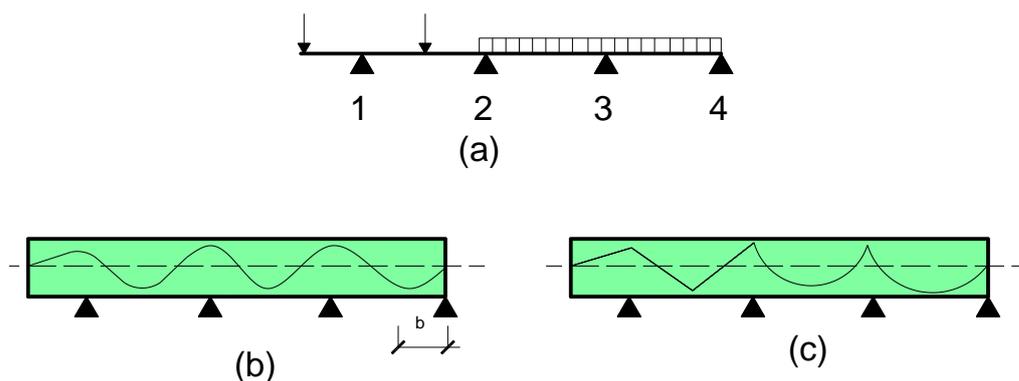


Figura 2.8 – Traçado vertical dos cabos em uma viga contínua [13].

O traçado do cabo se inicia reto em função dos dispositivos de ancoragem. Nas extremidades, as ancoragens devem ser colocadas no centro de gravidade da laje afim de não introduzir momentos fletores em uma região em que estes esforços não ocorrem por ação das cargas gravitacionais.

2.5.2. Distribuição dos Cabos em Planta

Uma característica especial em projetos de lajes protendidas é que a distribuição dos cabos no plano interno da laje não deve afetar sua resistência. Uma boa disposição dos cabos em planta permite que os esforços, mesmo em direções diferentes da laje, sejam suportados.

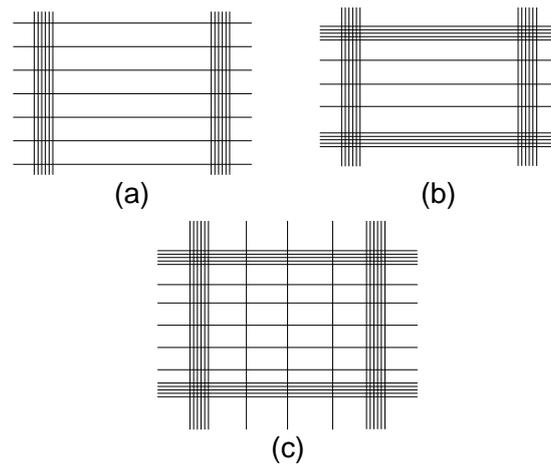


Figura 2.9 – Disposição dos cabos de protensão em planta.

O arranjo (a) da Figura 2.9 mostra a disposição dos cabos em faixas através da linha dos pilares em uma direção e uniformemente distribuída em outra direção. Este layout pode ser usado para lajes maciças e lajes nervuradas e é o arranjo mais comumente usado. Oferece as vantagens que os furos através da laje podem ser facilmente acomodados na fase de construção, pois ele não exige entrelaçamento dos cabos em diferentes direções, já que não se cruzam em seus pontos altos ou baixos, com exceção de dois cabos distribuídos ao longo dos suportes, como mostra a Figura 2.10.

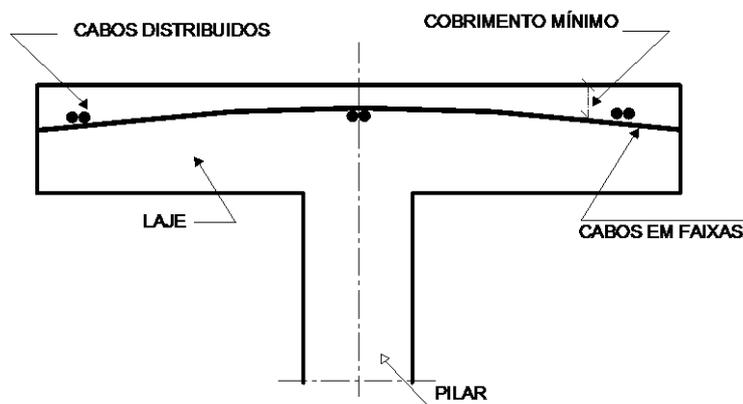


Figura 2.10 – Distribuição dos cabos ao longo dos suportes [1].

O arranjo (b) mostra uma faixa de cabos em uma direção, e uma combinação de faixa e distribuição de cabos na outra direção. Este fornece maior capacidade de absorção das tensões de cisalhamento em torno dos pilares. Uma avaliação cuidadosa de larguras de fissuras e deflexão é necessária com este arranjo.

O arranjo (c) mostra faixas e cabos distribuídos em ambas as direções, são adequadas para lajes reticulares, mas pode ser empregada para outras lajes, dependendo dos requisitos de projeto. A desvantagem deste esquema é que ele requer "entrelaçamento" dos cabos. É adequado para lajes maciças, onde a espessura mínima da laje é exigida.

Os esforços em um painel de laje concentram-se nas regiões das faixas dos apoios (Figura 2.11). Dessa forma, é recomendável que essas regiões apresentem uma maior concentração de cabos. O ACI 423 [10] apresenta a seguinte recomendação para a distribuição dos cabos em planta:

Faixa dos pilares: 65 a 75% dos cabos

Faixa central: 35 a 25% dos cabos.

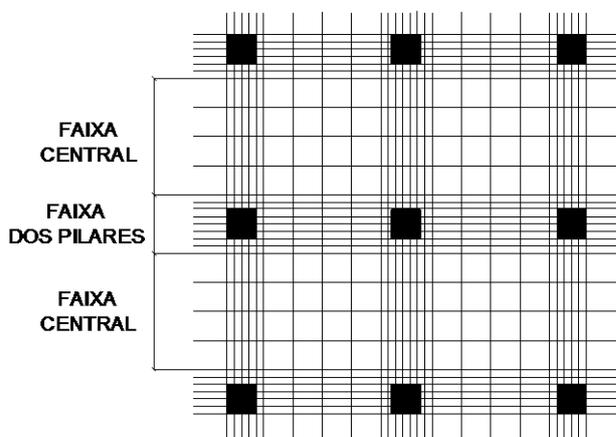


Figura 2.11 – Concentração de cabos nas regiões das faixas dos apoios [10].

Distribuição dos cabos concentrando nas faixas dos pilares

A NBR 6118/2007 [5] recomenda que quando se utilizem cabos concentrados em faixas sobre os pilares, as larguras dessas faixas não ultrapassem $b+3,5h$ para cada lado do eixo do pilar.

onde:

b é a largura do pilar na direção da largura da faixa;

h é a espessura da laje.

2.6. Protensão como carga externa equivalente

A protensão é aplicada através um conjunto de cargas externas equivalentes. O carregamento é dividido em componentes que causam flexão e aquelas que causam compressão. Os componentes da carga aplicada, devido à curvatura dos cabos que causam flexão determinam os momentos e cortantes normais na laje. A força de protensão nas extremidades que causam compressão é sobreposta sobre as tensões obtidas a partir da análise à flexão.

Na Figura 2.12, a força P ao longo da viga é a componente de compressão axial devido à protensão e o carregamento W_b representa a componente transversal que causa flexão. A substituição destes cabos por forças permite que a estrutura seja tratada como uma viga simples sem protensão.

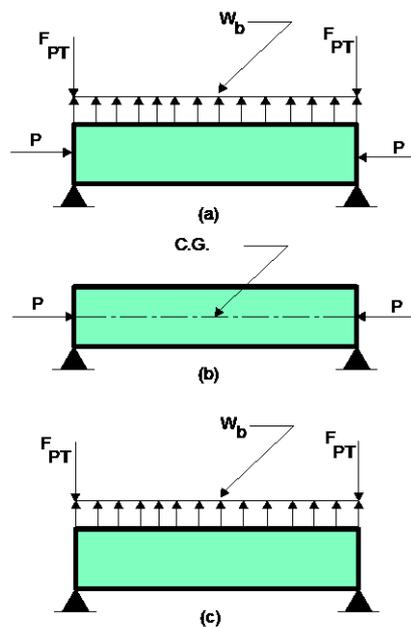


Figura 2.12 – Separação de força do cabo em componentes axial (P) e transversal (W_b)

2.7. Valores Representativos da Força de Protensão

Para o equilíbrio estático, o momento no médio do vão produzido pela excentricidade do cabo deve ser igual ao momento produzido pela carga uniformemente distribuída equivalente devida à curvatura do cabo. Para as estruturas usuais pode ser usada a formulação simplificada apresentada a seguir para o cálculo da força de protensão [9]:

$$\text{Balanço:} \quad P = \frac{ql_1^2}{2f_1} + \frac{Ql_1}{f_1} \quad (2.2)$$

$$\text{Vão interno:} \quad P = \frac{ql_2^2}{8f_2} \quad (2.3)$$

$$\text{Vão externo:} \quad P = \frac{ql_3^2}{8f_3} \quad (2.4)$$

Onde:

P: esforço de protensão

Q: carga concentrada no balanço

q: carga distribuída

f: flecha

O cabo é envolto de modo que sua carga equivalente atua em direção oposta às cargas devido ao peso próprio e sobrecargas. Para efeito de cálculo, em geral costuma-se desprezar o efeito da inversão da curvatura dos cabos sobre os pilares adotando-se um perfil simplificado como indicado pela Figura 2.13.

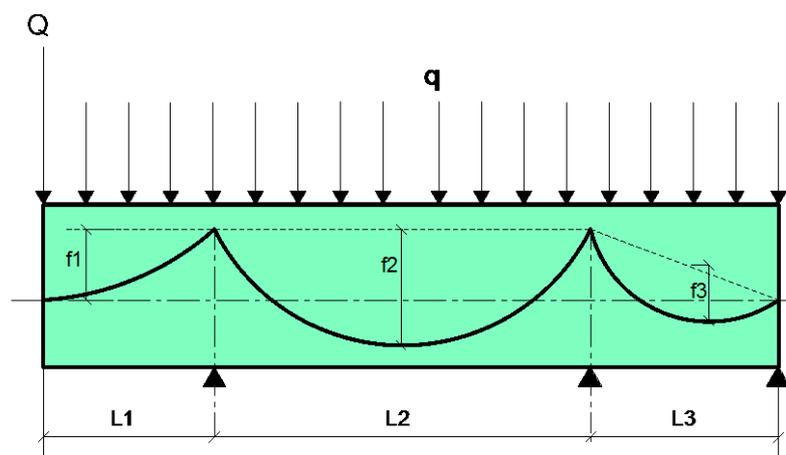


Figura 2.13 – Cálculo da protensão necessária [9]

Para estruturas com protensão total ou limitada deverá ser tomada a força de protensão do vão mais crítico para que sejam satisfeitas as condições de serviço pertinentes em todos os pontos da estrutura.

Em lajes com vãos desproporcionais, pode ser conveniente não aplicar a mesma força de protensão em todos os vãos. Nestes casos, pode-se ter em alguns vãos uma quantidade maior de cabos.

Com relação à flecha dada aos cabos nos vãos, podem ser adotados basicamente dois procedimentos [9]:

a) Adotar para o vão mais crítico um traçado que utiliza as excentricidades máximas, em função do cobrimento mínimo, calculando a força de protensão necessária; e para os demais vãos, calcular as excentricidades necessárias para obter o mesmo valor de protensão.

b) Adotar para todos os vãos a excentricidade máxima e calcular a protensão para o vão mais crítico.

A segunda possibilidade é a mais usual por aproveitar mais os cabos, implica em um carregamento equilibrado diferente em cada vão.

2.8. Estado Limites e Verificação da Tensão

2.8.1. Estado Limite de Serviço

Na protensão, até que os cálculos sejam realizados, não está claro se o estado de serviço ou de resistência máxima, ou ambos, são críticos. Portanto, no estado de serviço as verificações de tensões e deformação são partes essenciais do projeto. No estado de serviço, as tensões no concreto são obrigadas a estarem dentro dos limites especificados na compressão e na tração.

Na protensão parcial deve ser respeitado o estado limite de abertura de fissuras (ELS-W), sendo o procedimento adotado semelhante ao utilizado nas verificações de concreto armado. Para estruturas com protensão limitada deve ser respeitado o estado limite de formação de fissuras (ELS-F) para a combinação frequente de carregamento e o estado limite de descompressão (ELS-D) para a combinação de carregamento quase permanente. Já os elementos estruturais com

protensão completa devem atender ao ELS-F para a combinação rara e o ELS-D para a combinação frequente.

O ACI 423 [10] recomenda limites para tensão admissível em membros fletidos de concreto protendido:

Para laje com protensão não aderente a tensão média de compressão na laje deve estar no intervalo entre 0,86 MPa e 3,5 MPa.

- Tensões no concreto no ato da protensão (após perdas iniciais), em MPa:
 - ✓ compressão na zona de momento negativo $0,40f'_{ci}$
 - ✓ compressão na zona de momento positivo $0,60f'_{ci}$
 - ✓ tração (com armadura passiva) $0,25\sqrt{f'_{ci}}$
 - ✓ tração p/ $f_{ck}=30$ MPa, $f_{ckj}=20$ Mpa $1,12$ MPa
- Tensões no concreto em serviço no ELS-F (após as perdas no tempo), em MPa:
 - ✓ compressão na zona de momento negativo $0,30f'_c$
 - ✓ compressão na zona de momento positivo $0,45f'_c$
 - ✓ tração (com armadura passiva) $0,50\sqrt{f'_c}$
 - ✓ tração p/ $f_{ck}=30$ MPa, $f_{ckj}=20$ Mpa $3,04$ MPa

sendo f'_c a resistência à compressão do concreto especificada e f'_{ci} a resistência à compressão do concreto na idade “i” dias.

O ACI 318 [6] exige uma pré-compressão média mínima de 0,9 MPa em duas direções ortogonais da laje, após a consideração de todas as perdas de protensão.

Recomenda-se na prática o valor máximo de 2,0 MPa para a pré-compressão média [8].

2.8.2. Estado Limite Último

No cálculo de peças de concreto protendido, o dimensionamento é feito considerando os estados limites de serviço (ELS) e, posteriormente, são verificados os estados limites últimos (ELU). Para a verificação dos estados limites últimos são aplicados os coeficientes de ponderação tanto sobre as cargas como sobre as resistências, obtendo-se assim seus valores de cálculo.

O dimensionamento da armadura passiva no concreto protendido é feito semelhantemente ao utilizado para peças de concreto armado. No estágio de ruptura, a armadura protendida funciona de maneira idêntica à armadura das peças de concreto armado, com a seção transversal trabalhando no estágio III. A diferença principal consiste no pré-alongamento da armadura protendida, ou seja, a deformação do aço devido à protensão. O alongamento da armadura ativa devido à flexão da peça deve ser somado ao pré-alongamento, ou alongamento inicial.

O estado limite último corresponde a uma condição em que a estrutura não pode ser mais utilizada, por ter sofrido colapso ou deformações plásticas excessivas. O cálculo no estado limite último por flexão pode ser feito considerando as seguintes hipóteses [12]:

- As deformações das fibras são proporcionais à sua distância ao eixo neutro, ou seja, as seções planas permanecem planas até a ruptura.
- A intensidade e a posição da resultante dos esforços que atuam na região comprimida do concreto podem ser deduzidas de um diagrama de tensões simplificado. Os diagramas mais utilizados são o parábola-retângulo e o retangular equivalente.
- Após a fissuração, a resistência à tração do concreto é totalmente desprezada.
- Sob influência das solicitações, as armaduras ficam sujeitas às mesmas deformações unitárias médias que o concreto adjacente no caso da protensão aderente.

A força de tração total, em todos os cabos e armadura passiva, deve ser igual à força total de compressão no concreto. A forma do diagrama de tensão de compressão é normalmente simplificada para um retângulo. A Figura 2.14 mostra um diagrama típico de tensão em um membro protendido.

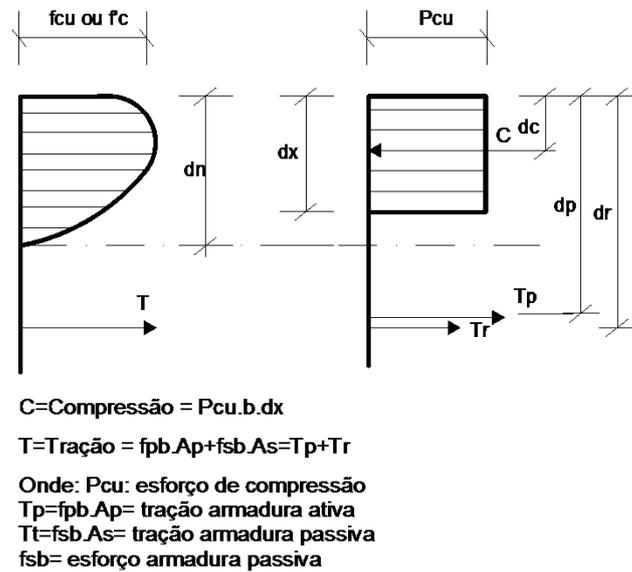


Figura 2.14 – Diagrama de esforços em uma seção protendida no estado limite último [13]

Para o bloco de compressão retangular, ACI 318 [6] especifica que:

- a tensão de concreto na face de compressão será $0,003 \cdot f_c$.
- o diagrama retangular de tensão será para tensão média de $0,85 f_c$.
- a espessura do diagrama retangular de compressão será tomado a β_1 vezes a espessura do eixo neutro. Tabela 2.2 dá os valores de β_1 para diferentes resistências cilíndricas.
- Resistência à tração do concreto é ignorada.

Tabela 2.2 - Taxa de espessura do bloco de compressão [13].

f_c	30	35	40	45	50	55 N/mm ²
β_1	0,85	0,81	0,77	0,73	0,69	0,65

2.9. Consideração do Efeito da Rigidez dos Pilares

Nos edifícios os elementos horizontais são geralmente ligados monoliticamente aos apoios, sejam eles pilares ou muros. Devido a esse fato, parte da força de protensão é absorvida por esses apoios reduzindo a força de compressão efetiva atuante na laje. Neste ponto da pesquisa é realizada uma revisão da bibliografia sobre o efeito dos elementos verticais na força de protensão.

2.9.1. Coeficiente de Rigidez dos Pilares

Barra biengastada

Considere-se a barra engastada em ambas as extremidades como representado na Figura 2.15. Pelo método dos deslocamentos, se impõe o deslocamento transversal unitário em sua extremidade esquerda, mantendo-se nulos os demais deslocamentos nodais, quando então ocorrem as forças relativas X_1 a X_4 . A força X_3 vale:

$$X_3 = \frac{-12EI}{l^3} \quad (2.5)$$

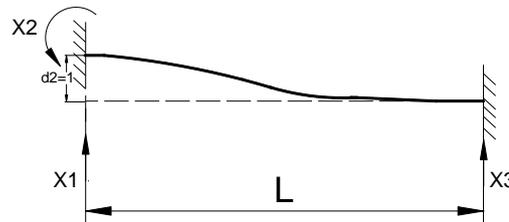


Figura 2.15 – Barra biengastada [14]

Barra engastada e rotulada

Considere-se uma barra engastada em uma de suas extremidades e rotulada na outra extremidade, como representado na Figura 2.16. A esta barra se impõe deslocamento transversal unitário em sua extremidade engastada, mantendo-se nulos os demais deslocamentos nodais. A força X_3 vale:

$$X_3 = \frac{-3EI}{l^3} \quad (2.6)$$

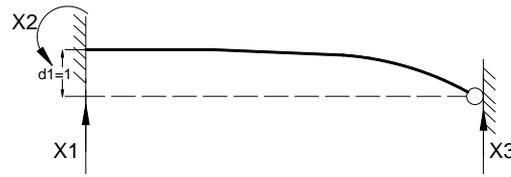


Figura 2.16 – Barra engastada-rotulada [14]

2.9.2. Análise do Pré-Esforço Axial na Laje

Para um piso normal, apoiado em pilares, a diferença entre a força no cabo e a compressão no concreto pode ser bastante significativa no caso de paredes rígidas ou pilares de elevada rigidez.

O pré-esforço axial (P_s) é igual à diferença entre a força nos cabos (P_t) e a força retida por parte dos elementos verticais (P_v) (eq. 2.7). A tensão média no concreto é agora menor do que teria sido se os elementos verticais não tivessem rigidez, portanto, a força no cabo é ligeiramente superior.

$$P_s = P_t - P_v \quad (2.7)$$

Na publicação “*Post-Tensioned Concrete Floors*” [13] pode-se encontrar um exemplo do acima citado. Considere-se o pórtico de um vão, como o representado na Figura 2.17 (a). Para simplificar, assume-se que as dimensões dos pilares são iguais, engastadas na parte inferior e com liberdade para girar no topo.

Se os pilares apenas fornecem restrição na vertical e a laje está livre para deslizar na horizontal, então se apresentaria um deslocamento de largura δ entre a viga e uma dos pilares por causa do encurtamento da viga, Figura 2.17 (b). Para fechar este deslocamento é necessária a cortante P_v , como mostrado na Figura 2.17 (c). Cada pilar desloca-se uma distância $\delta/2$ sob a força P_v .

$$\delta = \frac{P_s \cdot L}{A_c \cdot E_c} \quad (2.8)$$

$$\delta = \frac{2P_v \cdot H^3}{3E_c \cdot I_v} \quad (2.9)$$

Igualando 2.8 e 2.9, e isolando P_V :

$$P_V = \frac{1.5P_S(L.I_V)}{A_C.H^3}$$

$$P_V = \frac{P_S}{K_r} \quad (2.10)$$

Onde:

$$K_r = \frac{H^3 A_C}{1,5(L.I_V)} \quad (2.11)$$

I_V = Momento de inércia do pilar

A_C = Área da secção transversal da viga

K_r é um fator adimensional que relaciona a deformação de uma viga em compressão com o pilar em flexão. O módulo de elasticidade E_c se cancela, assumindo que os pilares e a laje têm o mesmo concreto.

Para o pórtico da Figura 2.17 (d), onde a viga é apoiada em uma parede muito rígida em uma extremidade e em um pilar na outra, apenas o pilar desvia-se, portanto:

$$K_r = \frac{H^3 A_C}{3(L.I_V)} \quad (2.12)$$

No caso de dois vãos iguais de comprimento L cada um, Figura 2.17 (e), o pilar central permanece inalterado. O pórtico é, portanto, equivalente a Figura 2.17 (d) e a eq. (2.12) é aplicável.

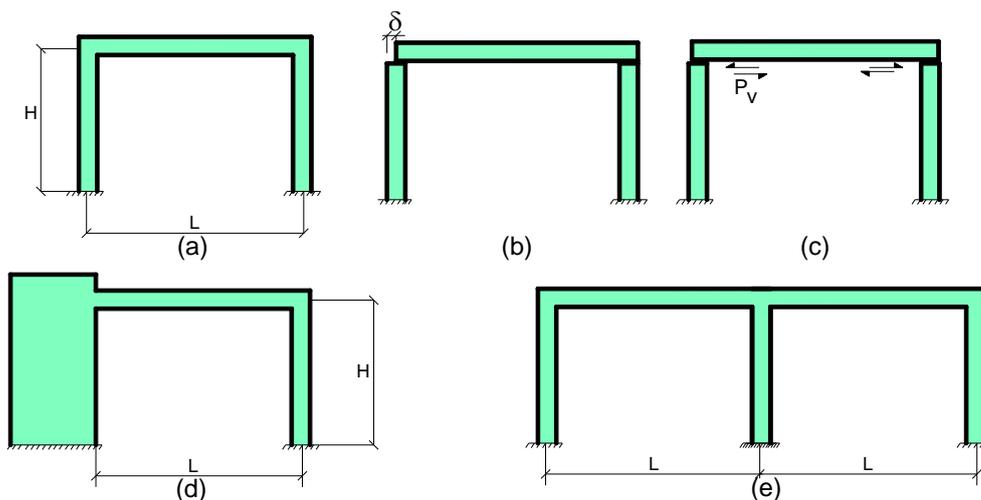


Figura 2.17 – Perda de pré-esforço axial devido à rigidez do pilar [13]

O momento no pilar devido ao encurtamento do comprimento da viga atua em oposição ao gerado pelas cargas verticais, e o efeito é que em estruturas protendidas os momentos no pilar são geralmente mais baixos do que em concreto armado. O momento resultante da força horizontal pode causar fissuras de flexão na laje ou de cisalhamento.

A perda na componente axial da força de protensão pode ser minimizada através do posicionamento dos membros rígidos verticais, próximos do meio da laje, ou de tal maneira que eles ofereçam a menor resistência ao encurtamento da laje.

Elementos verticais, sendo muito eficientes para resistir às forças laterais, podem absorver uma parcela significativa da força de pré-esforço se forem mal posicionadas.

2.10. Método dos Elementos Finitos

2.10.1. Formulação Baseada em Deslocamentos

No método dos elementos finitos (MEF) formulado com base em deslocamentos, uma estrutura complexa é discretizada em pedaços menores e mais simples (elementos). Cada elemento é formulado para capturar o comportamento local da estrutura, e para obter a distribuição das tensões e deformações e o campo de deslocamentos em todos os pontos de conexão entre elementos (nós).

No método geral de análise por elementos finitos, as equações de equilíbrio são satisfeitas apenas nos graus de liberdade (GDL) dos nós dos elementos. Portanto, todos os esforços externos são substituídos por carregamentos equivalentes aplicados nos GDL dos nós. Em geral, a condição de compatibilidade de deslocamentos (e para alguns elementos também rotações) é satisfeita, pois deslocamentos/rotações nodais são interpoladas usando funções de forma polinomiais que são contínuas e por que elementos vizinhos compartilham nós (ou GDL) que possuem valores de deslocamentos/rotações únicos.

Um elemento estrutural comumente usado em análise estrutural é o elemento de casca. Este elemento será usado para ilustrar os passos básicos da formulação do MEF baseada em deslocamentos. Fundamentalmente, o elemento de casca é uma combinação de dois outros elementos: elemento de placa e elemento de membrana. As forças internas que são desenvolvidas nos nós do elemento de placa correspondem à resposta devida à flexão devida à aplicação de carregamentos aplicados na direção transversal ao elemento. Estes esforços são M_x , M_y e F_z , como mostra a Figura 2.18. O elemento de membrana, por outro lado, representa a resposta de alongamento e encolhimento do elemento devido a forças aplicadas no plano do elemento. Neste caso estas forças são F_y e F_x , também ilustrados na Figura 2.18 [1].

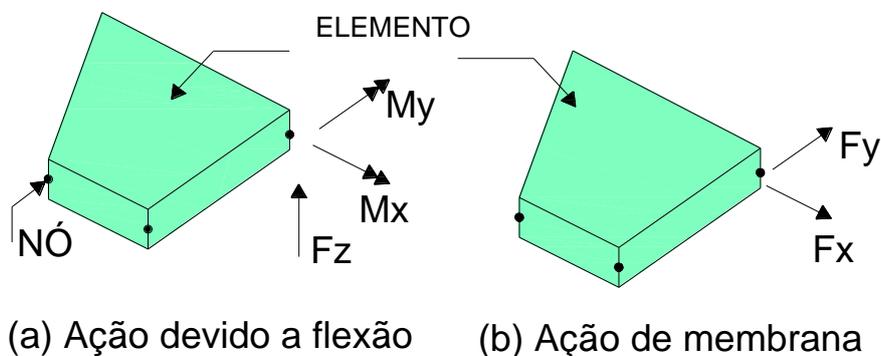


Figura 2.18 – Ação devido à flexão e ação de membrana para elementos usados para modelar lajes protendidas [1].

Para cada elemento é desenvolvida uma relação entre os deslocamentos/rotações dos nós e a forças aplicadas nestes. Estas relações são expressas pela seguinte equação:

$$\{f\} = [k] \{u\} \quad (2.13)$$

Onde:

$\{f\}$ é o vetor de forças/momentos aplicados nos GDL dos nós para nós do elemento,

$[k]$ é a matriz de rigidez do elemento

$\{u\}$ é o vetor de deslocamento/rotações para os nós do elemento a serem calculados.

Para satisfazer a condição de equilíbrio, a soma das forças e momentos dos elementos que compartilham um nó deve ser igual ao carregamento externo aplicado naquele nó. Além disso, o deslocamento de um nó comum a dois ou mais elementos deve ser o mesmo para todos os elementos. Estes dois critérios permitem as relações de equilíbrio individuais para cada elemento e sejam combinadas formando um sistema de equações globais que tem a seguinte forma:

$$\{F\} = [K] \{U\} \quad (2.14)$$

onde:

$\{F\}$ é o vetor de forças/momentos externamente aplicados nos nós da estrutura.

$\{U\}$ é o vetor de deslocamentos/rotações dos GDL da estrutura a serem calculados,

$[K]$ é a matriz de rigidez da estrutura.

As condições de contorno que em geral consistem de deslocamentos/rotações prescritas, são impostas através da eliminação das equações correspondentes a elas. Uma vez que isto é feito o sistema de equações global pode ser solucionado para a obtenção dos deslocamentos e rotações nodais.

Os deslocamentos no interior do elemento são assumidos com um polinômio. Na formulação do elemento de casca adotada pelo programa SAP2000, que é usado neste trabalho, o seguinte polinômio de quarto grau com coeficientes constantes [1] é usado para interpolar o deslocamento transversal.

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} xy^3 \quad (2.15)$$

O comportamento de flexão da placa é formulado com base na teoria de Kirchhoff para elementos de placa finos. Portanto, os graus de liberdade são associados com as rotações nodais θ_x e θ_y e são obtidos através da diferenciação do deslocamento transversal w . O resultado são os polinômios do terceiro grau abaixo:

$$\begin{aligned} \theta_x &= a_3 + a_5 xy + 2a_6 y + a_8 x^2 + 2a_9 xy + 3a_{10} y^2 + a_{11} x^3 + 3a_{12} xy^2 \\ \theta_y &= a_2 + 2a_4 x + a_5 y + 3a_7 x^2 + 2a_8 xy + a_9 y^2 + 3a_{11} x^2 y + a_{12} y^3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Usando o polinômio assumido de interpolação de deslocamentos e as propriedades do material do elemento, os deslocamentos e tensões dentro do elemento são relacionados com as forças e deslocamentos nos nós.

O vetor de deformações $\{\varepsilon\}$ é determinado através da diferenciação do vetor de deslocamentos da seguinte forma:

$$\{\varepsilon\} = \partial\{w\} / \partial\{x\} \quad (2.17)$$

O vetor de tensões $\{\sigma\}$ é determinado a partir do vetor de deformações usando as relações constitutivas como mostra a equação abaixo:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (2.18)$$

onde $[E]$ é a matriz de constantes elásticas do material.

A energia interna total no elemento é dada por:

$$1/2 \int \{\sigma\} \{\varepsilon\} dV \quad (2.19)$$

Enquanto a energia externa total (devida ao carregamento aplicado ao elemento) é dada por:

$$1/2 \{f^T\} \{u\} \quad (2.20)$$

onde,

$\{f\}$ são as ações externas aplicadas aos nós do elemento

$\{u\}$ são os deslocamentos dos nós associados com as ações $\{f\}$

2.10.2. Modelagem de uma Laje como Grelha

O comportamento de uma laje pode ser aproximando através de sua modelagem como grelha. Esta é uma técnica bastante simples de fácil compreensão e utilização. Os programas computacionais que utilizam esse processo de análise são, em geral, simples de manusear.

A modelagem consiste na divisão da laje em faixas representadas por vigas nas direções principais da laje formando assim uma estrutura do tipo grelha. Observa-se na Figura 2.19, em cada nó da grelha existem três graus de liberdade por nó, ou seja, duas rotações (θ_x e θ_y) e uma translação no eixo z. Note que estes graus de liberdade (GDL) correspondem aos GDL de uma placa.

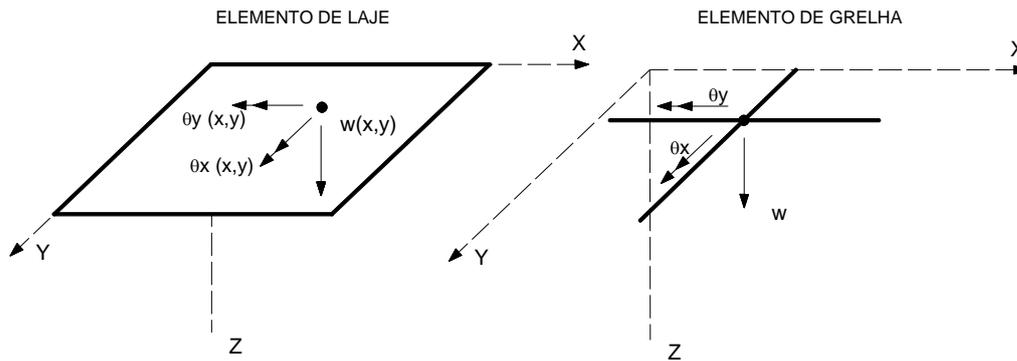


Figura 2.19 – Campos de deslocamentos considerados na modelagem de uma laje por grelha [15].

Em uma laje protendida além do carregamento transversal ao seu plano, existe também um carregamento equivalente que atua no plano da laje. A modelagem por grelha não é capaz de representar tal carregamento, pois só considera o deslocamento transversal w .

2.10.3.

Modelagem da Laje Protendida Usando Elementos Finitos

Os programas que usam método dos elementos finitos para a análise de lajes protendidas são capazes de capturar os efeitos das cargas que atuam tanto transversalmente como no plano da laje. Cargas permanentes e variáveis agem na direção transversal à laje, enquanto as forças decorrentes da protensão são agem no plano da laje.

Para lajes protendidas a interação das ações de flexão e de membrana é justificada. A Figura 2.20 mostra um pedaço de uma laje sujeita a estas ações. Em cada face da peça cortada, existem cinco ações.

Ações de flexão:

- ✓ Momentos fletores em torno dos eixos y e x : M_y e M_x
- ✓ Momento de torção: M_{xy}
- ✓ Forças de cisalhamento nas faces de elemento perpendiculares aos eixos x e y : V_x e V_y

Ações de membrana:

- ✓ Forças axiais ao longo dos eixos x e y : N_x e N_y
- ✓ Forças de cisalhamento no plano da laje (plano xy): N_{xy}

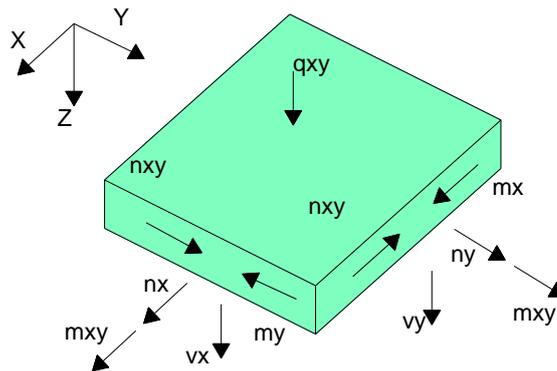


Figura 2.20 – Pedaço de laje sujeita a ações de flexão e de membrana [1].

Em métodos de projeto tradicionais de concreto armado e protendido a armadura de lajes é calculada considerando apenas os efeitos dos momentos fletores M_x e M_y . O efeito do momento de torção M_{xy} , não é geralmente considerado nestes cálculos.

As forças cortantes V_x e V_y , geralmente não são críticas no projeto de lajes de concreto devido que o comprimento e a largura, são muito maiores que a terceira dimensão (espessura). As forças cortantes no plano xy , N_{xy} , são computadas, mas geralmente não são usadas no cálculo da maioria dos sistemas de laje.

N_x e N_y são as cargas axiais, devido ao pré-esforço. Para garantir um desempenho satisfatório da laje, essas ações são controladas através de verificações de tensão.

Programas de elementos finitos usados por projetistas estruturais como SAP 2000 e *STAAD.Pro* oferecem elementos de casca quadrilaterais lineares (4 nós) para a modelagem de lajes. O nível de discretização da malha de elementos finitos determina o nível de precisão dos resultados, i.e. quanto menor o tamanho dos elementos, mais precisa a solução obtida.

Em lajes de espessura uniforme, a resposta da laje à flexão pode ser considerada independente das forças de membrana, particularmente sob carga de serviço. Por esta razão, em muitas análises, as ações de flexão e membrana em lajes, são computadas separadamente e as respostas são sobrepostas para obtenção das tensões finais.

Em alguns casos, a localização do plano médio de uma placa pode variar ao longo de uma de suas dimensões como no caso de lajes nervuradas onde faixas da laje sem nervura são necessárias para a aplicação da protensão (Figura 2.21). Neste caso, as forças de membrana e as forças de flexão são inter-relacionadas. Este acoplamento de momentos fletores e forças axiais ocorrem em quase todos os sistemas de lajes protendidas e deve ser corretamente incluídos na análise e projeto.

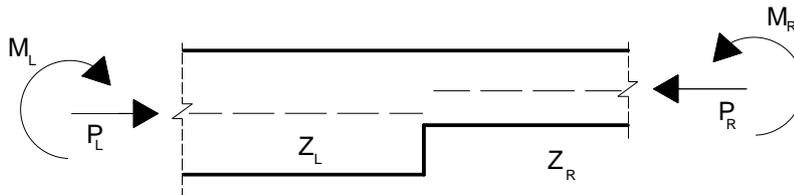


Figura 2.21 – Pedaço de laje sujeita a ações de flexão e de membrana [1].

2.11. Programas de Computador para Análise de Estruturas

Análises simplificadas usando programas que consideram lajes protendidas como uma grelha é muitas vezes utilizada em escritórios de cálculo estrutural. Com o aumento de popularidade de programas de elementos finitos, hoje em dia muitos optam por usar este tipo de análise mais sofisticada para o dimensionamento de tais lajes. A disponibilidade de diversos programas de elementos finitos, que se tornam cada vez mais fácil de usar, permite efetuar, a baixo custo, uma análise mais rigorosa destas lajes.

Os programas de elementos finitos disponíveis no mercado são capazes de lidar com uma grande variedade de formas geométricas: a seção pode ser retangular ou com nervuras; a laje pode ter faixa maciça de concreto (*drop panel*) ou uma mudança de seção perto dos apoios; e redistribuição de momentos pode ser considerada. Muitas vezes o método de balanceamento de carga, onde o perfil do cabo é transformado em uma força axial e uma carga equivalente agindo normal ao eixo membro é usado quando o projetista opta por utilizar tais programas.

Geralmente, os programas que utilizam analogia de grelhas não são capazes de lidar com a dispersão do componente axial de protensão em tal caso, as tensões nas seções críticas, permitindo a dispersão, pode ter que ser verificado manualmente, ou as tensões admissíveis para um programa pode ser modificado para se adequar ao caso particular.

2.11.1. SAP2000

O programa SAP2000 é um programa de análise estrutural da *Computers and Structures, Inc.* internacionalmente conhecido para a modelagem de estruturas utilizando o método dos elementos finitos. Trata-se de uma ferramenta poderosa que permite análises estáticas lineares e não-lineares, bem como análises dinâmicas. Possui também uma biblioteca rica de elementos finitos (incluindo vigas, cascas, sólidos, etc.) permitindo assim a modelagem de diversos tipos de estruturas. Nesta pesquisa foi utilizado o programa computacional SAP2000 versão 14.1.0.

Para simplificar a sua utilização o programa SAP2000 se limita a oferecer apenas elementos lineares como vigas com dois nós, elementos planos triangulares com 3 nós ou quadriláteros com 4 nós, e elementos sólidos com 8 nós.

Elemento de Casca (*Shell*)

O elemento tipo casca oferecido pelo programa SAP 2000 é um elemento genérico que pode ser utilizado para modelar cascas, membranas e placas em estruturas bidimensionais ou em três dimensões. Pode ser empregado na modelagem de lajes, *shear walls*, vigas e pilares.

Cada elemento casca pode ter 3 ou 4 nós. Os tipos de carregamento que podem ser aplicados no elemento tipo Casca são: gravidade, cargas uniformemente distribuídas em qualquer direção e forças concentradas. As tensões, forças internas e momentos são calculados nos pontos de Gauss do elemento e extrapolados para os nós.

O elemento tipo casca possui uma formulação que combina separadamente as forças de membrana e os esforços de flexão de placas. Possui seis graus de liberdade por nó: três graus de liberdade à translação (u_1, u_2, u_3) e três graus de liberdade à rotação ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$). [16]

As forças de membrana são determinadas a partir de uma formulação isoparamétrica que considera componentes de rigidez à translação no plano do elemento e componentes de rigidez à rotação na direção normal ao plano do elemento.

A formulação para a determinação dos esforços de flexão considera componentes de rigidez à rotação da placa e componentes de rigidez à translação na direção normal ao plano do elemento. O programa permite a utilização da formulação de Kirchoff para placas finas, que desconsidera a deformação por corte, ou a formulação de Mindlin/Reissner para placas espessas, que leva em conta tal deformação.

Elemento de Viga (*Frame*)

O elemento tipo Viga do programa SAP 2000 é um elemento de viga tridimensional com seis graus de liberdade por nó: três graus de liberdade à translação (u_1, u_2, u_3) e três graus de liberdade à rotação ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$). Da mesma forma que o elemento de casca, a formulação deste elemento é tal que os efeitos de flexão e de tensão são considerados separadamente e depois superpostos. Portanto, o elemento pode ser utilizado para modelar vigas, pilares, treliças e grelhas tanto em estruturas planas como espaciais.

O elemento é tem uma única dimensão e pode ser visualizado como uma linha reta conectada por dois pontos (i, j). Cada elemento possui seu próprio sistema de coordenadas local (1, 2, 3) para a definição das propriedades dos materiais e de sua seção transversal, do carregamento a ser aplicado e para a interpretação dos resultados da análise. Os eixos locais possuem uma relação com os eixos globais da estrutura (X, Y e Z), conforme pode ser observado na Figura 2.22.

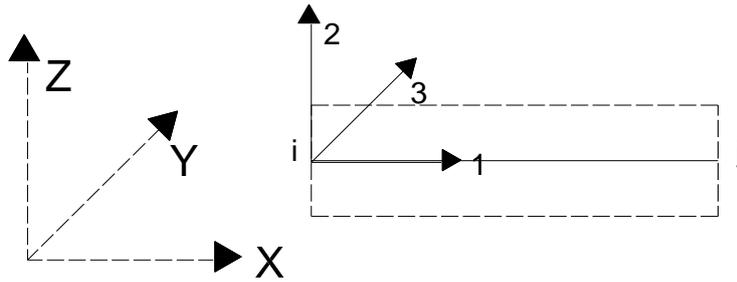


Figura 2.22 – Orientação do elemento Viga [16].

O elemento permite a aplicação de cargas de gravidade em qualquer direção, cargas concentradas, cargas distribuídas e cargas devidas a mudanças de temperatura.

A formulação do elemento viga inclui a determinação dos esforços de flexão biaxial nos planos 1-2 (M_2) e 1-3 (M_3), torção (T), da força axial (P) e das forças de cisalhamento nos planos 1-2 (V_2) e 1-3 (V_3), a partir da integração das tensões ao longo da seção. Estes esforços são determinados nas extremidades de cada elemento e em seções ao longo do comprimento com localizações escolhidas pelo usuário.