# 3. Modelagem de Lajes por Elementos Finitos

Este capítulo apresenta um estudo sobre a modelagem de lajes protendidas, maciças e nervuradas, que faz parte da análise paramétrica de pavimentos constituídos por ditas lajes, que é discutida mais adiante no capítulo 4.

Para obter modelos confiáveis e precisos de lajes foram preparados diversos modelos de lajes maciças e nervuradas usando o programa de análise estrutural SAP2000. Estes modelos foram desenvolvidos com a finalidade de selecionar o nível discretização necessário para convergência bem com os tipos de elementos finitos mais adequados a serem utilizado.

A partir desses estudos, concluiu-se que elementos tipo casca são adequados para modelar a mesa e a faixa de concreto onde é aplicada a protensão, e elementos viga são satisfatórios para modelar as nervuras da laje. Quanto à modelagem dos pilares optou-se por simulá-los como um apoio aplicado em um único ponto correspondendo ao centro do pilar uma vez que foram obtidos resultados satisfatórios tanto em termos de momento como de reação quanto comparados com a solução analítica. Foi também concluído que a discretização da malha usando elementos com tamanho típico de 25 cm produziram resultados adequados e, portanto, será usada no estudo paramétrico das tensões que são descritos no capítulo 4.

# 3.1. Estudo de Convergência para a Definição da Malha de Elementos Finitos

# 3.1.1. Laje de Referência

A laje em estudo é uma laje lisa maciça (10m x10m) com 20 cm de espessura apoiada diretamente sobre pilares. O carregamento adotado é um carregamento uniformemente distribuído de 7,7 kN/m<sup>2</sup>, que representa a soma das cargas permanentes e variáveis. No programa SAP2000 encontra-se a opção "*shell uniform load*", que é uma opção pré-definida para este tipo de carregamento.

As propriedades mecânicas do concreto para este estudo são:

Resistência característica à compressão: fck = 35MPa
Módulo de elasticidade E: E = 4760√fck

v = 0,2

• O coeficiente de Poisson.

As análises realizadas em todos os estudos a seguir correspondem ao estádio I, ou seja, para concreto não fissurado e comportamento elástico linear, considerando os deslocamentos diretamente proporcionais ao carregamento aplicado.

# 3.1.2. Modelagem por Elementos Finitos

Realizou-se um estudo de convergência para definir o nível adequado de refinamento da malha de elementos finitos. É importante frisar que foram consideradas malhas constituídas por elementos tipo casca bem como malhas constituídas por elementos sólidos. Inicialmente, adotaram-se malhas menos refinadas, com elementos típicos de 100 cm de lado. Gradativamente, as malhas foram sendo mais refinadas e os deslocamentos obtidos em pontos de controle selecionados foram observados. A malha com maior refinamento considerada neste estudo possuía elementos com dimensão típica de 10 cm de lado.

Para realização do estudo de convergência bem como a seleção do tipo de elemento finito apropriado, optou-se por modelar inicialmente uma laje maciça apoiada por pilares nos seus quatro cantos. Neste estudo os pilares foram simulados como um apoio pontual. Três tipos de modelos foram considerados:

- Laje modelada usando elementos casca sem consideração da excentricidade (*Offset*) entre o plano médio da laje e os apoios.
- Laje modelada usando elementos casca, considerando excentricidade entre o plano médio da laje e os apoios (*Offset*).
- Laje modelada usando elementos sólidos com os apoios localizados em sua posição real.



Figura 3.1 – Modelo com elementos tipo Casca e considerando o excentricidade entre apoios e plano médio da laje e com elementos de 25cm de lado.

### 3.1.3. Resultados do Estudo de Convergência

Iniciou-se o estudo de convergência com uma malha grosseira dividindo a laje em 10 x10 elementos, tanto no eixo X como no eixo Y. Subsequentemente foram feitos refinamentos dividindo-se a laje em 20x20, 40x40, 60x60, 80x80, 100x100 e 120x120 elementos em cada eixo. Os deslocamentos analisados foram os máximos encontrados no centro da laje. Quando elementos sólidos foram usados, os maiores deslocamentos foram na face inferior do elemento foram usados já que os deslocamentos na face superior foram praticamente os mesmos que na face inferior. A Tabela 3.1 mostra os resultados de deslocamentos no centro da laje dos modelos descritos acima para as diferentes discretizações. A Figura 3.2 ilustra estes resultados.

Flomonto	Deslocamento (cm)				
típico (cm)	Sem excentricidade	Com excentricidade	Sólidos		
100.00	-10.11	-6.85	-6.10		
50.00	-10.20	-7.31	-6.96		
25.00	-10.23	-7.65	-7.51		
16.67	-10.23	-7.82	-7.73		
12.50	-10.23	-7.92	-7.87		
10.00	-10.23	-8.00	-7.97		
8.33	-10.23	-8.05	-8.05		

Tabela 3.1 – Deslocamento (cm) do ponto central para os diferentes níveis de discretização.

# **Deslocamentos**



Figura 3.2 – Deslocamento (em cm) do centro da laje para os diferentes níveis de discretização.

Os modelos usando elementos de casca que não consideram a excentricidade (Offset) entre o plano médio da placa e os apoios, o deslocamento tende a convergir mais rápido. No entanto, é importante notar que este modelo é uma simplificação da estrutura real, já que no problema real a laje não é apoiada no seu plano médio. De fato, pode-se observar que este modelo produz maiores deslocamentos (~27%) do que os obtidos pelos outros dois modelos (Tabela 3.1 e Figura 3.2). Portanto a desconsideração da excentricidade entre a placa e os apoios resulta em uma estrutura bem mais flexível do que a real.

Pode-se concluir, portanto, que na modelagem de uma placa apoiada por pilares a consideração da excentricidade entre a placa e os apoios (*Offset*) é muito importante para a obtenção de resultados confiáveis.

Observe-se na Figura 3.2 que a partir da laje com malha de 25 cm os deslocamentos apresentam pouca variação ao serem modeladas com excentricidade ou com elementos sólidos. A partir desta discretização a modelagem pode ser feita considerando dita excentricidade, já que modelo com sólidos requer mais tempo de execução.

Na Tabela 3.2 observa-se que a convergência é obtida a partir da laje discretizada em elementos típicos de 8.3 cm, a qual tem um deslocamento no seu ponto médio de -8.05cm nos modelos que consideram excentricidade e com elementos sólidos. Com este valor pode ser feita uma comparação dos deslocamentos para todos os modelos das lajes, como mostrado na Tabela 3.2, onde a laje com elementos típicos de 25 cm tem uma diferença de 5% com respeito à solução convergida.

Tabela 3.2 -	Quadro	comparativo	dos	deslocamentos	respeito	ao	deslocamento
convergido.							

	Deslocame	to (cm)		
Malha (cm)	Com	%		
	excentricidade	diferença		
100.00	-6.85	14.95%		
50.00	-7.31	9.25%		
25.00	-7.65	5.00%		
16.67	-7.82	2.95%		
12.50	-7.92	1.65%		
10.00	-8.00	0.72%		
8.33	-8.05	0.00%		

Conforme o observado para os deslocamentos das lajes com os diferentes modelos, a laje com discretização de malha de 25 cm considerando uso de excentricidade tem uma diferença de 5% comparada com a solução convergida, e não requer muito tempo de execução no SAP2000 e, portanto, será usada no estudo paramétrico das tensões.

# 3.2. Modelagem dos Pilares como Apoios

Nesta segunda etapa, a modelagem dos pilares é avaliada. Em particular, deseja-se saber o efeito da inclusão das dimensões dos pilares no modelo nos resultados.

### 3.2.1. Laje de Referência

Foi adotada uma laje lisa de 10x10m, com 20 cm de espessura, com as mesmas propriedades mecânicas e carregamento da laje do estudo anterior.

A laje é apoiada diretamente sobre pilares localizados nos quatro cantos da laje e um pilar central, como se mostra a Figura 3.3.



Figura 3.3 – Geometria da laje de referência.

# 3.2.2. Solução Analítica da Equação Diferencial das Placas

A equação de Lagrange válida para materiais em regime elástico linear para uma placa retangular simplesmente apoiada de dimensões a e b (Figura 3.4) submetida a um carregamento bisenoidal distribuído sobre toda a superfície é dado pela equação 3.1.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_o}{D} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$
(3.1)



#### Figura 3.4 – Geometria da laje de referência.

Na análise de uma placa qualquer, uma carga p(x,y) qualquer pode ser desenvolvida a através de uma Série de Fourier infinita, com a expressão:

$$p_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} sen \frac{m\pi x}{a} sen \frac{n\pi y}{b} dxdy$$
(3.2)

onde

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{0}^{b} \int_{0}^{a} p(x, y) sen \frac{m\pi x}{a} sen \frac{n\pi y}{b} dxdy$$
(3.3)

A solução geral da Equação Geral de Lagrange, desenvolvida em séries de Fourier para um carregamento qualquer para placas retangulares simplesmente apoiadas é dado por:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{\pi^4 D(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$
(3.4)

$$m_{x}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}(\frac{m^{2}}{a^{2}} + \upsilon \frac{n^{2}}{b^{2}})}{\pi^{2}(\frac{m^{2}}{a^{2}} + \frac{n^{2}}{b^{2}})^{2}} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$
(3.5)

$$m_{y}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}\left(\frac{n^{2}}{b^{2}} + \upsilon \frac{m^{2}}{a^{2}}\right)}{\pi^{2}\left(\frac{m^{2}}{a^{2}} + \frac{n^{2}}{b^{2}}\right)^{2}} sen\frac{m\pi x}{a}sen\frac{n\pi y}{b}$$
(3.6)

$$m_{xy}(x, y) = -(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$
(3.7)

Esta solução geral é desenvolvida por Hennrichs [17] para os seguintes casos particulares de lajes retangulares:

- Figura 3.5 (a). Laje retangular sujeita a carregamento uniformemente distribuído.
- Figura 3.5 (b). Laje sujeita a uma carga concentrada central.

• Figura 3.5 (c). Laje sujeita a carga uniformemente distribuída aplicada em um retângulo parcial.



Figura 3.5 – (a) Placa com carregamento uniformemente distribuído, (b) Placa com carga concentrada (c) Placa com carga uniforme em um retângulo parcial (c)

È obtido um deslocamento máximo  $\omega 1$  no meio do vão da laje para o carregamento uniformemente distribuído, Figura 3.5 (a), logo é obtido  $\omega 2$  para a mesma laje, mas agora com uma carga concentrada no meio do vão, Figura 3.5 (b).

Na superposição de efeitos, Figura 3.6, iguala-se ambas as equações  $\omega 1 = \omega 2$ , define-se o valor da carga concentrada P, para a qual o deslocamento central fosse nulo. Por tanto a reação de apoio (carga concentrada P), em função do deslocamento  $\omega 1$  é dada por a equação 3.8:



Figura 3.6 – Geometria da laje de referência.

As soluções da laje com apoio pontual foram desenvolvidas, utilizando o programa Mathcad, em séries de Fourier com 19 termos a partir da equação geral de Lagrange para os casos dos carregamentos necessários para a solução do problema, conforme mostra o Anexo A. Substituindo as dimensões e propriedades da laje em estudo bem como o valor do carregamento adotado para os casos particulares, obtêm-se os seguintes resultados:

- Deslocamento e momento no centro da placa para carregamento uniformemente distribuído, Figura 3.5 (a):
  - $\omega 1 = 1.602 \text{ cm}, \text{ m1} = 34.073 \text{ kN.m/m}.$
- Deslocamento e momento no centro da placa sujeita a carga concentrada aplicada no centro da placa, Figura 3.5 (b):
  - $\omega 2 = 1.638$  cm, m2 = -92.896 kN.m/m.
- Deslocamento e momento no centro da placa com carga distribuída em um retângulo parcial (para simular as dimensões do pilar de 50cmx50cm), Figura 3.5 (c):
  - $\omega 2 = 1.638$  cm, m2 = -87.049 kN.m/m.

Portanto por superposição de efeitos o momento fletor no ponto central da laje, com pilar simulado como carga pontual, submetido a carregamento distribuído é mx=my=(m2-m1)=-58.823 kN.m/m e para pilar de simulado como carregamento distribuído num retângulo parcial é mx=my=(m2-m1)=-52.976 kN.m/m.

Destes resultados da solução analítica conclui-se que modelar o pilar como um apoio é razoável, devido a que a diferença destes valores é de 10 %.

Com estes resultados poderão ser avaliados modelos empregando elementos finitos com o pilar modelado como um apoio pontual e simulando o pilar com vários apoios e comparar com os resultados obtidos para a teoria das placas. A finalidade é definir, para futuros modelos, se estes modelos podem ser feitos com o pilar simulado como um único apoio.

### 3.2.3. Modelagem com Elementos Finitos

A laje descrita acima foi modelada utilizando elementos tipo Casca considerando a excentricidade dos apoios usando a opção *Offset*, já que, como visto anteriormente, este tipo de modelo produz bons resultados. Inicialmente, considerou-se uma malha menos refinada, e após um estudo de convergência chegou-se a um nível de refinamento com elementos típicos de 25 cm que produz resultados, para a reação do pilar modelado como um único ponto, com uma precisão de 0.37% respeito à solução analítica e de 2.53% nos momentos.

#### 3.2.3.1. Pilar modelado como uma restrição pontual

O pilar central é modelado como um apoio em um único ponto, como ilustra a Figura 3.7, tal que a translação vertical é restringida.



Figura 3.7 – Tensões e deformada do modelo de laje com pilar central modelado como uma restrição pontual

A Tabela 3.3 e as Figuras 3.8 e 3.9 apresentam os resultados obtidos pelo modelo descrito acima. Em particular ela apresenta, para os vários níveis de refinamento da malha, o valor da reação do pilar central e o momento fletor obtido no centro da laje e em um ponto a 25 cm do centro. Este valor obtido a 25 cm foi de modo a verificar melhor as tensões, já que na modelagem os momentos negativos tendem crescerem com a redução da seção do pilar, essa tendência afirma que os momentos para cargas concentradas tendem ao infinito.

	Solução Elementos Finitos			% erro		
Típico	Carga	Moment	o (kN.m/m)	Carga (kN)	(kN.m/m)	
(CIII)	(KIN)	No centro	a 25 cm		No centro	a 25 cm
100	262.93	-64.04	-53.08	4.92%	-8.87%	9.77%
50	270.91	-84.73	-61.57	2.03%	-44.04%	-4.68%
25	275.51	-104.72	-57.33	0.37%	-78.02%	2.53%
16.67	277.47	-116.31	-58.96	-0.34%	-97.72%	-0.24%

Tabela 3.3 – Reação no pilar e momentos fletores obtidos com modelagem do pilar por uma restrição pontual.

Momento







Figura 3.9 – Comparação da reação do pilar respeito á solução analítica.

Analisando a Tabela 3.3, indica que os valores dos momentos tomados no centro da laje respeito á solução analítica tem um erro de até 97.7% no caso da malha mais refinada, os momentos negativos tendem a crescer significativamente no centro da laje quanto mais refinada seja a malha, não entanto os momentos tomados a 25 cm do centro da laje não diferem muito da solução analítica pelo contrário malha mais refinada melhora os resultados. A diferença destes momentos para uma malha refinada com elementos típicos de 25 cm respeito à solução analítica é de 2.5%, uma malha ainda mais refinada como aquela com elementos típicos de 16.67 cm chega praticamente a convergir com a solução analítica.

No caso da reação no pilar para o modelo com elementos típicos de 25 cm tem uma porcentagem de erro de 0.37%, no caso do modelo com elementos de 16.67cm este porcentagem é de 0.34%. Pode ser visto que não representou uma melhora significativa (0.03%), por outro lado, aumenta o tempo de execução.

#### 3.2.3.2. Pilar modelado com varios apoios.

Adotou-se a malha de 25 cm, a qual, para os exemplos de pilar modelado como um ponto apresentou bons resultados. Para a mesma malha, foi estudado o pilar de seção 50x50 cm, simulado com apoio com restrições na vertical:



Figura 3.10 – Deformada do modelo da laje com pilar modelado por vários apoios.

A Tabela 3.4 apresenta as reações, momentos no centro da laje e a 50 cm do centro, modelado com vários apoios simulando um pilar de 50cm x 50cm.

Tabela 3.4 – Quadro comparativo das reações e momentos no centro da laje (	6 6
50cm do centro quando é modelado por vários apoios	

comparativo das

G ~ . 1.	Solução Elementos Finitos			% erro		
Secao do pilar u/y	Carga	Momento	(kN.m/m)	Carga	Momento (kN.m/m)	
phar u/v	(kN)	No centro	a 50 cm	(kN)	No centro	a 50 cm
50/50	288.2	-60. 80	-40.27	4%	-15%	24%

Na Figura 3.11 pode-se ver a variação dos momentos no plano central da laje, para o pilar simulado como uma única restrição pontual e para o pilar simulado com restrições em vários pontos considerando suas dimensões. Para ambos os modelos os momentos têm um comportamento similar na laje perto da face do pilar.

O modelo do pilar como apoio pontual tem-se um pico de esforço no centro da laje, mas nos nós próximos do centro, como mostrado na Tabela 3.3, fornecem resultados satisfatórios para reações e momentos negativos, usando elementos típicos de 25 cm, com uma precisão de 0.37% 2.53% respectivamente. No entanto o pilar modelado com vários apoios fornece erro de 4% e 24% na reação e momento respectivamente. Conclui-se, portanto que a modelagem dos pilares pode ser feita simulando o pilar como um único apoio.



Figura 3.11 – Comparação do momento para o pilar modelado como apoio pontual e como vários apoios simulando um pilar de 50cmx50cm.

# 3.3. Considerações sobre a Modelagem de Lajes Nervuradas

# 3.3.1. Laje de Referência

A estrutura em estudo é uma laje nervurada de quatro painéis de 10mx10m, com 20 cm de espessura, a qual tem as mesmas propriedades mecânicas usadas nos estúdios descritos acima.

As propriedades mecânicas do concreto para o presente estudo são:

- Resistência característica à compressão: fck = 35Mpa
- O módulo de deformação longitudinal E:  $E = 4760\sqrt{fck}$
- O coeficiente de Poisson. v = 0,2

A análise é feita considerando a protensão aplicada como carga equivalente nas faixas de concreto, a largura destas faixas corresponde a um oitavo do comprimento do vão (L/8). A laje encontra-se submetida só a uma força equivalente de protensão P de 2500 kN. As Figuras 3.12 e 3.13 mostram a geometria de dita laje.



Figura 3.12 – Laje nervurada com carregamento de protensão aplicado em faixas de concreto de largura 125 cm.



Figura 3.13 – Seção transversal A-A da laje nervurada.

### 3.3.2. Modelagem da Laje

Os pilares, para o estudo da laje de referência, foram modelados como uma única restrição pontual. Foram desenvolvidos três modelos. Nos dois primeiros modelos a laje é modelada usando elementos de casca com seis graus de liberdade por nó e as nervuras por elementos de viga também com seis graus de liberdade por nó, três graus de liberdade à translação (u1, u2, u3) e três graus de liberdade à rotação ( $\theta$ 1,  $\theta$ 2,  $\theta$ 3).

#### 3.3.2.1. Modelo 1: Laje modelada sem considerar excentricidade (*Offset*).

No modelo 1 a mesa e faixas de concreto são discretizadas com elementos de casca e nervuras com elemento de viga. Neste modelo a excentricidade entre o centro da nervura e o centro da mesa da laje bem como das faixas de concreto não foi considerada, como mostra a Figura 3.14.



Figura 3.14 – Representação da laje nervurada modelada sem considerar a excentricidade entre nervura e laje.

# 3.3.2.2. Modelo 2: Laje modelada considerando excentricidade (Offset):

O modelo 2 utiliza os mesmos tipos de elementos finitos que o Modelo 1. A diferença é que neste modelo a excentricidade (*Offset*) entre nervuras e a mesa e a faixa de concreto é considerada, como mostra a Figura 3.15.



Figura 3.15 – Representação do Modelo 2 da laje nervurada considerando excentricidade.

# 3.3.2.3. Modelo 3: Laje modelada com elementos sólidos:

Neste modelo tanto as nervuras, a laje e as faixas de concreto foram modeladas com elementos tridimensionais sólidos de oito nós, cada nó possui três graus de liberdade à translação (u1,u2,u3) e não possui graus de liberdade à rotação.



Figura 3.16 – Representação do Modelo 3 da laje nervurada modelada usando elementos sólidos.

#### 3.3.2.4. Estudo das Tensões

A análise foi feita na seção A-A mostrada na Figura 3.12 que está localizada a 2.4 m dos apoios da esquerda da figura. Nesta seção foram tomadas as tensões normais S11 (kN/cm<sup>2</sup>) no topo da laje, que são aqueles que ocorrem na face 1 do elemento e na direção 1, onde a força foi aplicada. Assim a tensão S11 atua na direção paralela ao eixo local 1 como indica a Figura 3.17.

As tensões avaliadas foram as tensões decorrentes no topo da laje. No SAP2000 os esforços internos são relatados, através de tabelas, nos nós dos elementos. No caso dos elementos sólidos as tensões internas foram tomadas nos nós da face superior dos elementos.



Figura 3.17 – Representação dos eixos locais dos elementos [18].

Na Figura 3.18 as tensões S11 são plotadas (as tensões S11 estão indicadas no Anexo B). Observa-se que para o modelo 2 que considera a excentricidade e para o modelo 3 que usa elementos sólidos os resultados de tensões são muito semelhantes. No entanto, para o modelo 1, que desconsidera a excentricidade, as tensões obtidas nas faixas de concreto onde a força de protensão é aplicada não são bem representadas.



Figura 3.18 - Tensões no topo da laje nervurada para os diferentes modelos.

A partir deste estudo, pôde-se determinar que os modelos de casca que consideram a excentricidade entre seus elementos e os modelos que utilizam elementos sólidos produzem resultados semelhantes. Portanto, conclui-se que ambos os modelos são capazes de simular o comportamento das tensões em lajes nervuradas adequadamente. Devido ao seu menor custo computacional, o modelo que será adotado para estudos paramétricos desenvolvidos nesta dissertação será o modelo que usa elementos de casca e viga para simular laje e nervuras respectivamente e que considera a excentricidade entre as componentes da laje.