

5

Os grupos de Mathieu

5.1

O Grupo M_{24}

5.1.1

O M_{24} , o Código de Golay e o $S(5, 8, 24)$

O maior grupo de Mathieu, o M_{24} , pode ser definido de diversas maneiras. A seguir, destaremos a relação do M_{24} com o Código de Golay e o sistema de Steiner $S(5, 8, 24)$.

5.1.1.1

Grupo dos semi-automorfismos do hexacode

Como foi visto anteriormente, o hexacode \mathcal{H}_6 é um subespaço vetorial 3 dimensional de \mathbb{F}_4^6 gerado pelos vetores $(w, \bar{w}, \bar{w}, w, \bar{w}, w)$, $(\bar{w}, w, w, \bar{w}, \bar{w}, w)$ e $(\bar{w}, w, \bar{w}, w, w, \bar{w})$. Vimos também que uma forma de reconhecer se um vetor (a, b, c, d, e, f) está em \mathcal{H}_6 , é verificar se existe uma função quadrática sobre \mathbb{F}_4 satisfazendo $\phi(0) = c$, $\phi(1) = d$, $\phi(w) = e$, $\phi(\bar{w}) = f$.

Seja G_A o grupo das matrizes M de permutação, $M \in \mathbb{F}_4^{6 \times 6}$, que preservam casais de um hexacodeword (ver 4.1.1). Dizemos que uma matriz M preserva casais de um hexacodeword quando para quaisquer x, y pertencentes a um casal do vetor temos que $M.(x)$ e $M.(y)$ também pertencem ao mesmo casal. Portanto como temos 3 casais sendo permutados e ainda pode haver uma troca dentro de cada casal segue que $|G_A| = 3! \cdot 2^3 = 48$. Porém, observe que nem todo elemento de G_A preserva o hexacode. Por exemplo, a matriz M de permutação em 5.1.1 preserva casais do hexacodeword mas não preserva o hexacode. De fato, a imagem do hexacodeword $10\ 10\ w\bar{w}$ através de M é $10\ 10\ \bar{w}w$ que não é um elemento do hexacode.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (56) \quad (5.1.1)$$

Assim, podemos considerar G_B o subgrupo de G_A formado pelas matrizes de permutação que preservam o hexacode. Note que $G_B \cong G_A$, pois $M \in G_A$ mas $M \notin G_B$. Pode-se checar que as três matrizes de permutação a seguir são elementos de G_B (lembre que $w\bar{w} w\bar{w} w\bar{w} \in \mathcal{H}_6$):

$$(12)(34) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(13)(24) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(135)(246) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, considere G_C subgrupo de G_B gerado por essas matrizes, isto é, $G_C = \langle (12)(34), (13)(24), (135)(246) \rangle$. Como $S_4 \simeq \langle (12)(34), (13)(24), (135)(246) \rangle \cong S_4$, temos que G_C tem 24 elementos. E portanto, temos:

$$G_C \leq G_B \cong G_A, \text{ com } |G_A| = 48 \text{ e } |G_C| = 24.$$

Donde $G_C = G_B \cong S_4$.

Desde que multiplicar por 1, w ou \bar{w} ainda preserva o hexacode podemos considerar G_S um grupo de simetrias do hexacode, gerado por multiplicações escalares e pelas permutações $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(135)(246)$. Portanto, $G_S \cong \mathbb{Z}/(3) \times S_4 = 3 \times S_4$.

Denotaremos os grupos cíclicos $\mathbb{Z}/(n)$ apenas por n .

O hexacode sobre a ação do grupo $3 \times S_4$ está dividido em 5 órbitas. Listamos a seguir o tamanho e um representante de cada órbita:

Representante da órbita	Tamanho da órbita
$(0, 0, 0, 0, 0, 0)$	1
$(1, 1, 1, 1, 0, 0)$	9
$(w, \bar{w}, w, \bar{w}, w, \bar{w})$	12
$(1, 1, w, w, \bar{w}, \bar{w})$	6
$(0, 1, 0, 1, w, \bar{w})$	36

O grupo dos automorfismos do hexacode é definido como o conjunto das transformações lineares monomiais que preservam este código; denotaremos este grupo por G_{Aut} . A aplicação 5.1.2 é um exemplo de um elemento em G_{Aut} . Vamos mostrar que $G_{Aut} = 3 \cdot A_6$.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \longmapsto (wx_1, \bar{w}x_2, x_3, x_6, x_4, x_5). \tag{5.1.2}$$

Afirmção 5.1.1. Substituir entradas não-nulas das matrizes monomiais pertencentes ao grupo de automorfismos do hexacode, G_{Aut} , define de maneira natural um homomorfismo $\phi : G_{Aut} \longrightarrow S_6$. Mais ainda, a imagem desta aplicação é $A_6 < S_6$.

Demonstração. Para obtermos $A_6 \subseteq Im(\phi)$ basta tomarmos $N \in G_{Aut}$ abaixo, (note que N é a matriz monomial que representa o automorfismo (5.1.2)):

$$N = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{w} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (456)$$

Verifica-se que as permutações $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(135)(246)$, (456) geram A_6 . Logo, $S_4 \subset A_6 \cong \langle (12)(34), (13)(24), (135)(246), (456) \rangle \subseteq Im(\phi)$. Falta provarmos que $Im(\phi) \subseteq A_6$, isto é, se $X \in G_{Aut}$ temos que $\phi(X)$ é uma permutação par. Suponhamos, por absurdo, que $Im(\phi) \neq A_6$. Assim, teríamos:

$$A_6 \subsetneq Im(\phi) \subseteq S_6 \text{ e portanto } Im(\phi) = S_6.$$

Donde existiria, por exemplo, automorfismo de \mathcal{H}_6 da forma:

$$A = \begin{pmatrix} + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 \end{pmatrix}, \text{ onde } + \in \{1, w, \bar{w}\}.$$

Olhando as imagens dos hexacodewords $(1, 1, 1, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 1, 1, 1)$ através da matriz A , temos que: $A.(1, 1, 1, 1, 0, 0) = (+, +, +, +, 0, 0) \in \mathcal{H}_6$. Sem perda, podemos supor: $A.(1, 1, 1, 1, 0, 0) = (1, 1, 1, 1, 0, 0)$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 \end{pmatrix}.$$

E assim, $A.(0, 0, 1, 1, 1, 1) = (0, 0, 1, 1, +, +) \in \mathcal{H}_6$. Donde teríamos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (5\ 6),$$

isto é, a permutação de coordenadas $(5\ 6)$ seria uma automorfismo do hexacode. Mas de (5.1.1) já sabemos que $A \notin G_{Aut}$. Donde concluimos nossa afirmação. \square

Lema 5.1.2. *O grupo de automorfismos do hexacode, G_{Aut} , é $3 \cdot A_6$.*

Demonstração. Pela afirmação anterior temos $\phi : G_{Aut} \longrightarrow A_6$ homomorfismo de grupos sobrejetor. Tome $M \in Ker(\phi)$. Então:

$$M = \begin{pmatrix} + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \end{pmatrix}, \text{ onde } + \in \{1, w, \bar{w}\}.$$

Considere os hexacodewords $(1, 1, 1, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 1, 1, 1)$. Portanto, $M.(1, 1, 1, 1, 0, 0) = (x, x, x, x, 0, 0)$ e $M.(0, 0, 1, 1, 1, 1) = (0, 0, y, y, y, y)$.
Donde

$$M = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x=y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x=y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \implies M = x.Id, \text{ onde } x \in \mathbb{F}_4^*.$$

Portanto, $Ker(\phi) \approx \mathbb{Z}/(3)$ e pelo Primeiro Teorema dos Isomorfismos, temos: $G_{Aut}/Ker(\phi) \approx A_6$. Donde, $G_{Aut} = 3 \cdot A_6$. □

Assim, vimos que nenhum automorfismo de \mathcal{H}_6 induz permutações ímpares. No entanto, podemos estender o grupo $3 \cdot A_6$ dos automorfismos do hexacode ao grupo $3 \cdot S_6$ dos semi-automorfismos deste código pela adjunção do anti-automorfismo 5.1.3 abaixo.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \longrightarrow (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_6}, \overline{x_5}). \tag{5.1.3}$$

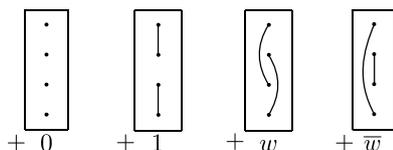
5.1.1.2

$3 \cdot S_6$ e o Código de Golay.

O maior **grupo de Mathieu**, o M_{24} , pode ser definido como o grupo de permutações de 24 pontos que preservam o Código de Golay. Equivalentemente, M_{24} é o grupo dos automorfismos do $S(5, 8, 24)$.

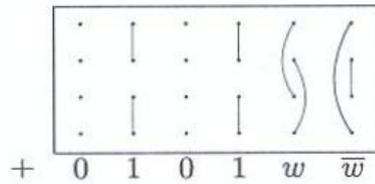
Vimos no capítulo 3 que é prático arrumar as 24 coordenadas de um vetor de \mathcal{C}_{24} no MOG. Nessa matriz os vetores de \mathcal{C}_{24} tem suas coordenadas indexadas pelos 24 pontos $(i, x) \in X = \{1, \dots, 6\} \times \mathbb{F}_4$. Veremos que a ação do hexacode e dos semi-automorfismos do hexacode em X definem de maneira natural elementos de M_{24} . Dessa maneira, teremos que 2^6 e $3 \cdot S_6$ são subgrupos de M_{24} . Veremos que estes dois subgrupos geram um produto semi-direto $2^6 : 3 \cdot S_6 < M_{24}$.

Os elementos do hexacode (que como grupo aditivo é isomorfo a 2^6) agem sobre X por adição: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ aplica (i, x) em $(i, x + x_i)$. Temos assim uma inclusão natural $2^6 < M_{24}$. Nas colunas do MOG isso funciona como na figura abaixo:



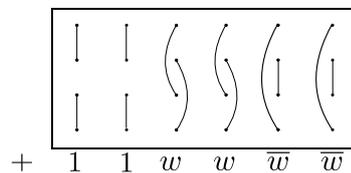
Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 25. A ação do hexacodeword $(0, 1, 0, 1, w, \bar{w})$ sobre os 24 pontos do MOG resulta no seguinte elemento de M_{24} :



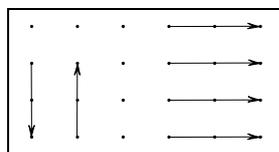
Dois pontos são ligados por uma aresta quando formam um ciclo de tamanho dois.

Exemplo 26. Analogamente a ação do hexacodeword $(1, 1, w, w, \bar{w}, \bar{w})$ é



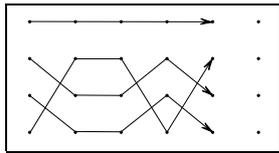
Temos também que automorfismos do hexacode definem permutações de X e automorfismos de \mathcal{C}_{24} . Assim, $3 \cdot A_6 < M_{24}$. Os elementos do grupo $3 \cdot A_6$ agem em X aplicando (i, x) em $(\pi(i), c_i x)$, onde $\pi \in A_6$ e $c_i \in \mathbb{F}_4^*$. Em outras palavras, um automorfismo φ do hexacode é tal que $\varphi(xe_i) = c_i \cdot x \cdot e_{\pi(i)}$. A seguir temos alguns exemplos de automorfismos φ do hexacode e sua ação no MOG:

Exemplo 27. $\varphi : \mathcal{H}_6 \longrightarrow \mathcal{H}_6$
 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \longmapsto (wx_1, \bar{w}x_2, x_3, x_6, x_4, x_5)$

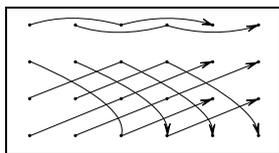


As setas ligando três pontos de X indicam um ciclo de tamanho três. Assim, neste exemplo, os pontos $(4, 0), (5, 0)$ e $(6, 0)$ formam um ciclo de tamanho 3 com $(6, 0)$ sendo levado em $(4, 0)$. A seta indica a orientação do ciclo.

Exemplo 28. $\varphi : \mathcal{H}_6 \longrightarrow \mathcal{H}_6$
 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \longmapsto (\bar{w}x_5, wx_1, x_2, \bar{w}x_3, wx_4, x_6)$



Exemplo 29. $\varphi : \mathcal{H}_6 \longrightarrow \mathcal{H}_6$
 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \longmapsto (\bar{w}x_5, \bar{w}x_6, \bar{w}x_1, \bar{w}x_2, \bar{w}x_3, \bar{w}x_4)$

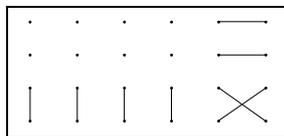


Similarmente, um anti-automorfismo do hexacode também define uma permutação de X e portanto um automorfismo de \mathcal{C}_{24} ; assim $3 \cdot S_6 < M_{24}$. Elementos de $3 \cdot S_6$ agem em X aplicando (i, x) em $(\pi(i), c_i \bar{x})$, onde $\pi \in S_6$ e $c_i \in \mathbb{F}_4^*$. Isto é, um anti-automorfismo ψ do hexacode é tal que $\psi(xe_i) = c_i \cdot \bar{x} \cdot e_{\pi(i)}$.

Exemplo 30. Considere a ação do anti-automorfismo 5.1.3 do hexacode no MOG:

$$\varphi : \mathcal{H}_6 \longrightarrow \mathcal{H}_6$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \longmapsto (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_6, \bar{x}_5)$$



Portanto vimos que 2^6 e $3 \cdot S_6$ são subgrupos de M_{24} . Agora veremos que estes dois subgrupos geram um produto semi-direto $2^6 : 3 \cdot S_6$ que portanto também é subgrupo de M_{24} . Para isso, é suficiente provarmos que o hexacode é fechado por conjugação com respeito aos elementos de $3 \cdot S_6$. De fato, seja $\psi : \mathbb{F}_4^6 \longrightarrow \mathbb{F}_4^6$ um semi-automorfismo do hexacode. Este, interpretado como permutação, nos dá um elemento μ_ψ de M_{24} . Seja v um elemento do hexacode. A ação de v nos 24 pontos do MOG nos dá um elemento $\mu_v \in M_{24}$. Queremos mostrar que $\mu_\psi \cdot \mu_v \cdot \mu_\psi^{-1} = \mu_{\psi(v)}$. Mas isso realmente acontece, desde que:

$$(i, x) \xrightarrow{\mu_v} (i, x + iv_i) \xrightarrow{\mu_\psi} (\pi(i), c_i(x + v_i)),$$

$$(i, x) \xrightarrow{\mu_\psi} (\pi(i), c_i x) \xrightarrow{\mu_{\psi(v)}} (\pi(i), c_i x + c_i v_i).$$

Conclusão: Construimos um subgrupo $2^6 : 3 \cdot S_6$ de M_{24} . Estas permutações de X respeitam a decomposição de X em 6 colunas. Assim, M_{24} age sobre o conjunto dos sextets e o subgrupo $2^6 : 3 \cdot S_6$ estabiliza o sextet base. Veremos ainda que este subgrupo é maximal em M_{24} .

5.1.1.3

$2^6 : 3 \cdot S_6$ é o estabilizador do sextet base.

Vimos que o grupo $2^6 : 3 \cdot S_6$ está contido no estabilizador do sextet base. Agora vamos provar que este subgrupo de M_{24} é o estabilizador do sextet base, isto é, nenhum subgrupo de M_{24} maior que $2^6 : 3 \cdot S_6$ estabiliza esse sextet.

Para isso, defina G_1 o subgrupo de M_{24} formado por permutações que respeitam o sextet base. A fim de facilitar a notação, chamaremos $G_2 = 2^6 : 3 \cdot S_6 < G_1$. Nosso objetivo é provar que $G_1 = G_2$.

Proposição 5.1.3. *As 759 octads do Código de Golay são divididas em 3 órbitas de comprimentos 384, 360 e 15, tanto por G_1 quanto por G_2 .*

Demonstração. Considere as 759 octads do Código de Golay. Abaixo temos um representante e a contagem dos elementos de cada órbita sobre a ação do grupo G_1 ou G_2 .

0	1	1	1	1	1
1					
1					
1					

Considere octads com distribuição coluna $3^1 1^5$.

Assim temos 6 possibilidades para a escolha da coluna que irá receber 3 pontos e 2^6 posições para as coordenadas diferentes em cada coluna. Logo temos $6 \cdot (2^6) = 384$ elementos nesta órbita.

1	1	1	1
1	1	1	1

Considere octads com distribuição coluna 2^4 .

Note que os 8 hexacodewords que tem os 4 primeiros dígitos compostos apenas de zeros e uns preservam essa octad. Portanto temos $8 = \frac{2^6}{2^3}$ possibilidades de hexacodewords, ainda podemos multiplicar por $1, w$ e \bar{w} e $15 = \binom{6}{2}$ pares de colunas vazias. Logo o número de octads nessa órbita é $8 \cdot 3 \cdot 15 = 360$.

1	1
1	1
1	1
1	1

Considere octads com distribuição coluna 4^2 .

Temos 6 colunas e queremos escolher duas para receber 4 pontos cada; logo

temos $15 = \binom{6}{2}$ pares de colunas deste tipo. E portanto o número de elementos nesta órbita é 15.

Como $384+360+15=759$, concluímos nossa afirmação. \square

Considere os seguintes homomorfismos $\psi_1 : G_1 \rightarrow S_6$ e $\psi_2 : G_2 \rightarrow S_6$, definidos pela ação nas 6 colunas do MOG. É claro que ψ_2 é sobrejetora e portanto ψ_1 também o é. Chamemos de H_1 e H_2 os núcleos de ψ_1 e ψ_2 , respectivamente. Assim, H_1 e H_2 são formados por permutações que preservam o Código de Golay e cada coluna do sextet base. Pelo Primeiro Teorema dos Isomorfismos, temos $G_1/H_1 \approx S_6$ e $G_2/H_2 \approx S_6$. Como, $|G_2| = 2^6 \cdot 3 \cdot 6!$ e $\frac{|G_2|}{|H_2|} = |S_6| = 6!$ segue que $|H_2| = 2^6 \cdot 3$ e o índice de H_2 em G_2 é $6!$. Temos também que o índice do subgrupo H_1 e G_1 é $6!$.

Considere no conjunto das 759 octads do código de Golay a $[G_1$ ou $G_2]$ -órbita composta de 384 octads; cujo um representante é:

0	1	1	1	1	1
1					
1					
1					

Visto que H_2 preserva o Código de Golay e cada coluna do sextet base, esta órbita sobre a ação deste grupo é dividida em 6 órbitas com 64 elementos cada. Abaixo listamos os 6 representantes para cada uma dessas órbitas:

0	1	1	1	1	1
1					
1					
1					

1	0	1	1	1	1
	1				
	1				
	1				

1	1	0	1	1	1
		1			
		1			
		1			

1	1	1	0	1	1
			1		
			1		
			1		

1	1	1	1	0	1
				1	
				1	
				1	

1	1	1	1	1	0
					1
					1
					1

E novamente H_1 e H_2 órbitas tem os mesmos elementos. Portanto H_1 age transitivamente sobre o conjunto das 64 octads da forma:

0	1	1	1	1	1
1					
1					
1					

ou

3	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---

(# de 1's por coluna)

Considere $K_1 < H_1$ o estabilizador da octad

0	1	1	1	1	1
1					
1					
1					

. Mais

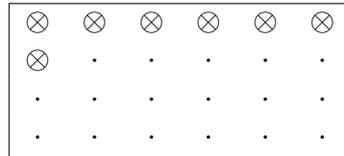
ainda, K_1 consiste das permutações que respeitam Código de Golay, fixam cada coluna e cada elemento da primeira linha. Logo, os elementos de K_1 são da forma abaixo, onde os parafusos \otimes indicam pontos obrigatoriamente fixos:

\otimes	\otimes	\otimes	\otimes	\otimes	\otimes
.
.
.

De maneira análoga, considere $K_2 < H_2$ (e portanto $K_2 < K_1$). Assim, K_2 é gerado por

\otimes	\otimes	\otimes	\otimes	\otimes	\otimes
↓	↓	↓	↓	↓	↓
↓	↓	↓	↓	↓	↓

Donde $K_2 \approx Z/(3)$ e $id_{H_2}(K_2) = \frac{(2^6).3}{3} = 64$. Chamemos de L_1 o subgrupo de



K_1 , de índice 3, que além de fixar todos os elementos da primeira linha fixa também o elemento (1,1) do conjunto X. Assim, L_1 fixa os seguintes elementos:

Analogamente, defina L_2 subgrupo de K_2 com a mesma propriedade.

Afirmção 5.1.4. $L_1 = \{1\}$.

(A prova dessa afirmação será feita a seguir).

Temos pela afirmação acima $L_1 = \{1\}$, e como $L_2 < L_1$ segue que $L_1 = \{1\}$ e $id_{K_2}(L_2) = 3$.

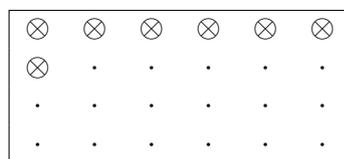
E portanto obtemos a seguinte cadeia de grupos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 G_1 & \supset & H_1 & \supset & K_1 & \supset & L_1 \\
 \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
 G_2 & \supset & H_2 & \supset & K_2 & \supset & L_2
 \end{array}$$

E de $L_1 = L_2$, resulta em $H_1 = H_2$ e $G_1 = G_2$.

Comentário 5.1.5. Assim, desde que a afirmação 5.1.4 seja verdadeira teremos que o subgrupo $2^6 : 3 \cdot S_6$ de M_{24} é o estabilizador do sextet base.

Vamos provar a afirmação 5.1.4, que nos dizia $L_1 = \{1\}$. Lembre que os seguintes pontos de X estavam fixos pela ação de L_1 :



Lembre também que 5 pontos determinam uma única octad e que L_1 fixa colunas. Vamos agora considerar o efeito de L_1 sobre algumas octads a fim de obter o resultado desejado.

Pela definição de L_1 e do $S(5,8,24)$ temos que um elemento de L_1 preserva, por exemplo, as octads abaixo:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & & 1 & 1 \\ \hline \end{array} .$$

Donde todo elemento de L_1 fixa todos os elementos da primeira e segunda

linha do MOG:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ \hline \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

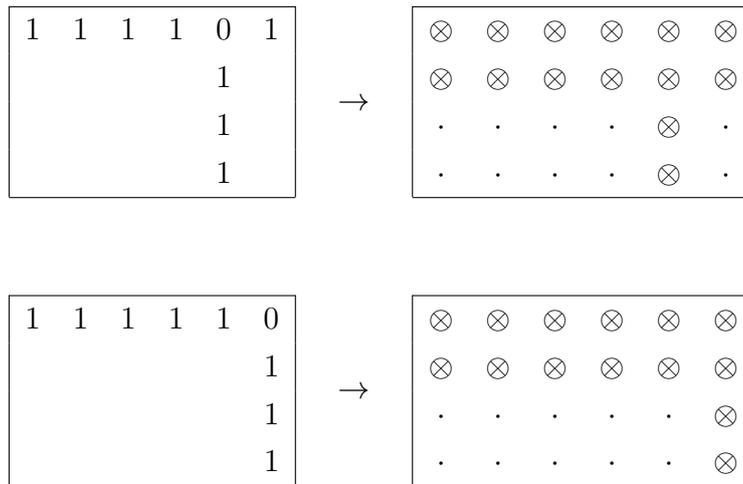
A partir daí e analisando o efeito de um elemento de L_1 sobre as octads a seguir temos que L_1 fixa os seguintes pontos:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & & & \\ \hline 1 & & & & & \\ \hline 1 & & & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ \hline \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ \hline \otimes & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \otimes & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & & & \\ \hline 1 & & & & & \\ \hline 1 & & & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ \hline \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ \hline \cdot & \otimes & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \otimes & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & & & & \\ \hline & 1 & & & & \\ \hline & 1 & & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ \hline \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ \hline \cdot & \cdot & \otimes & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \otimes & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & & 1 & & \\ \hline & & & 1 & & \\ \hline & & & 1 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ \hline \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes & \otimes \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \otimes & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \otimes & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$



Donde concluimos que todos os elementos são fixos pela ação de L_1 . E portanto $L_1 = \{1\}$.

Conclusão: o subgrupo $2^6 : 3 \cdot S_6$ de M_{24} é o estabilizador do sextet base.

5.1.1.4

M_{24} e seu subgrupo maximal $2^6 : 3 \cdot S_6$

Nesta seção encontraremos as órbitas dos sextets sobre a ação do $2^6 : 3 \cdot S_6$ a fim de calcularmos a ordem de M_{24} e provarmos o fato deste grupo ser altamente transitivo em Ω . Provaremos também que $2^6 : 3 \cdot S_6$ é um subgrupo maximal de M_{24} .

Afirmção 5.1.6. Sabemos que existem 1771 sextets no Código de Golay. Sobre a ação do grupo $2^6 : 3 \cdot S_6$ esses sextets são divididos em 4 órbitas. A primeira órbita, de tamanho 1, é o sextet base que consiste das seis colunas do MOG. A segunda órbita de tamanho 90, consiste dos sextets cuja cada tetrad (4-conjunto) que o compõe tem dois pontos em uma coluna e dois pontos na outra. A terceira órbita, de tamanho 240, consiste dos sextets que dois dos seus tetrads tem três pontos em uma coluna e um ponto em uma outra coluna. A quarta e última órbita, de tamanho 1440, consiste dos sextets que quatro dos seus tetrads tem dois pontos em uma coluna e os outros dois em outras duas colunas. Abaixo exibimos um representante para cada uma dessas órbitas:

1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6

1	1	3	3	5	5
1	1	3	3	5	5
2	2	4	4	6	6
2	2	4	4	6	6

1	2	3	3	3	3
2	1	4	4	4	4
2	1	5	5	5	5
2	1	6	6	6	6

1	1	1	2	5	6
1	2	2	2	4	3
3	5	6	4	3	6
4	6	5	3	5	4

onde os seis tetrads de cada sextet são rotulados de 1 a 6.

Demonstração. Inicialmente observe que qualquer tetrad com a distribuição coluna $2^2, 3^1 1^1, 1^2 2^1$ realmente pertence a segunda, terceira, quarta órbita, respectivamente. Pois os elementos do grupo $2^6 : 3 \cdot S_6$ nos permitem permutar as colunas, somar hexacodewords e multiplicar por $1, w$ ou \bar{w} . Note que ao considerarmos tetrads com a distribuição coluna 1^4 eles podem pertencer a terceira ou quarta órbita.

Calcularemos explicitamente o comprimento das três órbitas não triviais dos 1771 sextets do Código de Golay sobre a ação do subgrupo $2^6 : 3 \cdot S_6$ de M_{24} .

1	1	3	3	5	5
1	1	3	3	5	5
2	2	4	4	6	6
2	2	4	4	6	6

Considere um sextet na segunda órbita.

O número de 4-conjuntos com dois pontos em uma coluna e dois pontos em outra é $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 15 \cdot 6 \cdot 6$. E como temos seis tetrads deste tipo nesta sextet e um tetrad determina um único sextet segue que, o número de sextets nesta órbita é: $\frac{15 \cdot 6 \cdot 6}{6} = 90$.

1	2	3	3	3	3
2	1	4	4	4	4
2	1	5	5	5	5
2	1	6	6	6	6

Considere um sextet na terceira órbita.

O número de 4-conjuntos com 3 pontos em uma coluna e 1 ponto em outra é $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4$. Desde que temos dois tetrads com essa distribuição coluna em cada sextet temos $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4}{2} = 240$ elementos nesta órbita.

1	1	1	2	5	6
1	2	2	2	4	3
3	5	6	4	3	6
4	6	5	3	5	4

Considere um sextet na quarta órbita.

O número de 4-conjuntos com dois pontos em uma coluna e os outros dois em outras duas é: $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 4 \cdot 4$. Como temos quatro tetrads deste tipo neste sextet segue que temos $\frac{6 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 4 \cdot 4}{4} = 1440$.

Como $1+90+240+1440=1771$ temos que essas são todas as órbitas. \square

Teorema 5.1.7. *O grupo M_{24} age transitivamente em sextets.*

Demonstração. Considere a permutação α a seguir:

$$\alpha = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \diagup & \diagdown \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \diagdown & \diagup \\ \hline \longleftarrow & \longleftarrow & \longleftarrow & \longleftarrow & \uparrow & \uparrow \\ \longleftarrow & \longleftarrow & \longleftarrow & \longleftarrow & \downarrow & \downarrow \\ \hline \end{array} \end{array} \tag{5.1.4}$$

Checando a ação de α em uma base do Código de Golay temos que α fixa este código; e portanto $\alpha \in M_{24}$ (ver apêndice).

Mais ainda, α torna as 4 órbitas dos sextets sobre a ação do $2^6 : 3 \cdot S_6$ em uma única órbita sobre M_{24} . De fato, basta considerar a ação de α nos sextets abaixo:

<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	$\xrightarrow{\alpha}$	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr> </table>	1	2	3	4	6	5	1	2	3	4	6	5	2	1	4	3	5	6	2	1	4	3	5	6
1	2	3	4	5	6																																													
1	2	3	4	5	6																																													
1	2	3	4	5	6																																													
1	2	3	4	5	6																																													
1	2	3	4	6	5																																													
1	2	3	4	6	5																																													
2	1	4	3	5	6																																													
2	1	4	3	5	6																																													

<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>6</td><td>6</td></tr> </table>	3	1	1	3	5	5	4	2	2	4	6	5	4	2	2	4	5	6	3	1	1	3	6	6	$\xrightarrow{\alpha}$	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>6</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>6</td></tr> </table>	3	1	1	3	5	6	4	2	2	4	5	5	2	4	4	2	6	6	1	3	3	1	5	6
3	1	1	3	5	5																																													
4	2	2	4	6	5																																													
4	2	2	4	5	6																																													
3	1	1	3	6	6																																													
3	1	1	3	5	6																																													
4	2	2	4	5	5																																													
2	4	4	2	6	6																																													
1	3	3	1	5	6																																													

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 6 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 5 & 6 & 4 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\alpha} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ \hline 1 & 4 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ \hline 6 & 1 & 6 & 2 & 6 & 4 \\ \hline 5 & 1 & 5 & 2 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} .$$

Donde M_{24} age transitivamente em sextets.

□

Como sabemos que M_{24} é transitivo em sextets e o seu subgrupo $2^6 : 3 \cdot S_6$ é o estabilizador do sextet base, segue que:

$$|M_{24}| = 1771 \cdot 2^6 \cdot 3 \cdot 6! = 244823040 = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23.$$

Teorema 5.1.8. *O subgrupo $2^6 : 3 \cdot S_6$ é maximal em M_{24} .*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que o subgrupo $2^6 : 3 \cdot S_6$ não seja maximal em M_{24} . Assim existiria H subgrupo de M_{24} , com $2^6 : 3 \cdot S_6 \subsetneq H < M_{24}$. Considere o sextet base. Diremos que um sextet é atingido se existir uma permutação π em H tal que $\pi(\text{sextet base}) = \text{sextet}$. Como exemplo ilustrativo, consideremos o sextet abaixo, ele é dito atingido se existe $\pi \in H$ tal que:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\pi} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Diremos que um sextet é totalmente atingido se para toda permutação em M_{24} com $\pi(\text{sextet base}) = \text{sextet}$, tem-se $\pi \in H$.

Afirmção. Se um sextet é atingido então ele é totalmente atingido.

Demonstração. Suponha que exista um sextet atingido (que chamaremos de *sextet atingido*₁). Assim, existe $\pi_1 \in H$ tal que $\pi_1(\text{sextet base}) = (\text{sextet atingido})_1$. Considere $\pi_2 \in M_{24}$ tal que $\pi_2(\text{sextet base}) = (\text{sextet atingido})_1$. Assim, $\pi_2^{-1} \circ \pi_1$ preserva o sextet base. Donde temos $\pi_2^{-1} \circ \pi_1 \in 2^6 : 3 \cdot S_6 < H$ e portanto $\pi_2 \in H$. □

Afirmção. Se um sextet é atingido então toda a sua classe é atingida.

Demonstração. Considere dois sextets na mesma classe (chamaremos estes de *sextet atingido*₁ e *sextet*). Como, por hipótese, um desses sextets é atingido existe $\pi_1 \in H$ tal que $\pi_1(\text{sextet base}) = (\text{sextet atingido}_1)$. Como o *sextet atingido*₁ e o *sextet* pertencem a mesma classe, existe permutação π em $2^6 : 3 \cdot S_6 < H$ tal que $\pi(\text{sextet atingido}_1) = (\text{sextet})$. Donde $\pi \circ \pi_1 \in H$, com $\pi(\text{sextet base}) = (\text{sextet})$, e portanto concluímos nossa afirmação. \square

Sabemos que pela ação do $2^6 : 3 \cdot S_6$ os 1771 sextets estão divididos em 4 órbitas de tamanho 1, 90, 240, 1771. Daí, e pela afirmação anterior temos as seguintes possibilidades para o índice de $2^6 : 3 \cdot S_6$ em H :

$$1, 91, 241, 331, 1441, 1531, 1681, 1771.$$

Como o índice de $2^6 : 3 \cdot S_6$ em M_{24} é 1771 temos que o índice de $2^6 : 3 \cdot S_6$ em H divide 1771. Donde temos que o índice de $2^6 : 3 \cdot S_6$ em H é 1 ou 1771. E portanto $2^6 : 3 \cdot S_6$ é subgrupo maximal de M_{24} . \square

Lema 5.1.9. *O subgrupo de M_{24} estabilizador pontual de uma tetrad é da forma $2^4 : A_5$.*

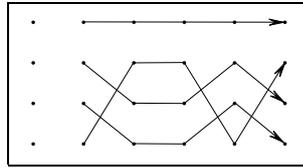
Demonstração. Tome 4 pontos em Ω . Como 4 pontos determinam um único sextet e M_{24} é transitivo em sextets, sem perda, podemos considerar esses 4 pontos sendo a primeira coluna do MOG. Chamemos de $G < M_{24}$ o estabilizador pontual dos 4 pontos a seguir:

⊗						
⊗						
⊗						
⊗						

Como G fixa a primeira coluna do MOG e esta é \mathbb{F}_4 -linear temos que $G < 2^6 : 3 \cdot A_6$. A ação de G permuta as 5 colunas restantes, que formam um sistema de imprimitividade. Então, considere o homomorfismo $\varphi : G \rightarrow S_5$. O núcleo de φ é formado pelos elementos de G que fixam todas as colunas do MOG, donde inicialmente temos $Ker(\varphi) \leq 2^6 : 3$. Mais ainda, como a primeira coluna é fixada ponto-a-ponto temos $Ker(\varphi) \leq 2^6$. Logo o núcleo de φ é composto pelos hexacodewords cujo o primeiro dígito é zero. Conseqüentemente os elementos do núcleo de φ correspondem a somar hexacodewords com primeira coordenada igual a 0 e portanto $Ker(\varphi) \cong 2^4$. Como $G < 2^6 : 3 \cdot A_6$ temos $Im(\varphi) \leq A_5$. Considerando o automorfismo do hexacode

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto (x_1, \bar{w}x_6, wx_2, x_3, \bar{w}x_4, wx_5)$$

cuja a ação nos 24 pontos do MOG é o elemento de G a seguir, temos que $Im(\varphi) = A_5$



Segue do Primeiro Teorema dos Isomorfismos que $G/2^4 \cong A_5$. Logo $|G| = 2^4 \cdot \frac{5!}{2}$. Considere $N < G$ formado pelos automorfismos do hexacode, isto é, $N < 3 \cdot S_6$. Como N fixa pontualmente a primeira coluna do MOG temos $N < A_5$. Certamente todas as permutações de A_5 são realizadas nesse grupo. Logo $N \cong A_5$. Como $A_5 \cap 2^4 = \{e\}$ temos que $G = 2^4 : A_5$. \square

Note que $2^4 : A_5$ age transitivamente sobre os 20 pontos restantes.

Teorema 5.1.10. *O grupo M_{24} é 5-transitivo nos 24 pontos de Ω .*

Demonstração. Escolha dois conjuntos de 5 pontos distintos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 . Como 4 pontos determinam um único sextet considere os 2 sextets contendo x_1, x_2, x_3, x_4 e y_1, y_2, y_3, y_4 . Como M_{24} é transitivo em sextets podemos supor que ambos os sextets foram levados no sextet base. Daí, e como o grupo estabilizador de um sextet é transitivo nos seis tetrads temos que existe elemento nesse grupo que leva o tetrad composto por x_1, x_2, x_3, x_4 no tetrad composto por y_1, y_2, y_3, y_4 . Mais ainda, fixando esse tetrad temos que todas as permutações de S_4 são realizadas nos pontos desse tetrad. Portanto, podemos considerar que x_i foi levado em y_i para todo $1 \leq i \leq 4$. E finalmente como o grupo estabilizador de um tetrad é o $2^4 : A_5$ o qual é transitivo nos 20 pontos restantes, temos que x_5 é levado em y_5 . Donde M_{24} é 5-transitivo. \square

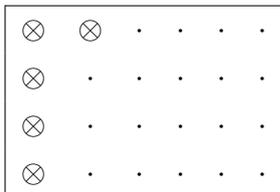
5.1.1.5
O estabilizador de uma octad

Teorema 5.1.11. *O grupo M_{24} age transitivamente em octads.*

Demonstração. Sejam duas octads \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 . Queremos provar que existe permutação π em M_{24} tal que $\pi(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_2$. Para isso, tome quaisquer dois conjuntos de 5 pontos $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ e $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ contidos em \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 , respectivamente. Como M_{24} é 5-transitivo, segue que existe permutação π em M_{24} com $\pi(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}) = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$. Daí e como, por definição, M_{24} preserva o sistema de Steiner $S(5, 8, 24)$ temos que $\pi(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_2$. \square

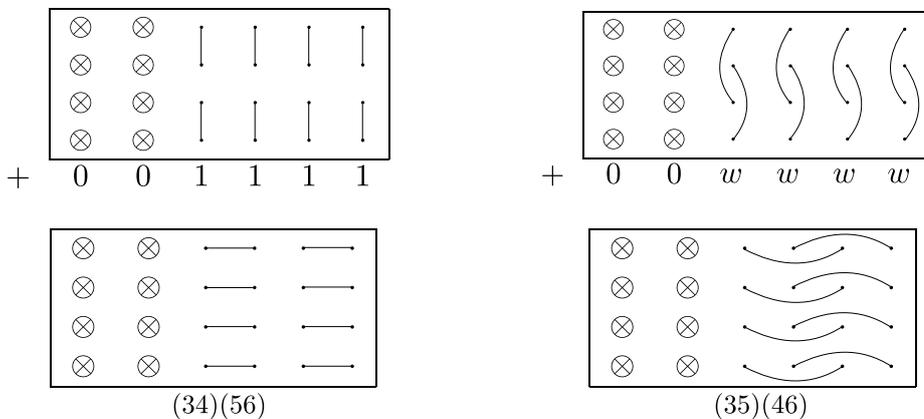
Lema 5.1.12. *O subgrupo de M_{24} estabilizador pontual de 5 pontos de Ω é $2^2 : A_4 = 2^4 : 3$.*

Demonstração. Como M_{24} é 5-transitivo, N independe da escolha dos 5 pontos de Ω . Sem perda, considere N o subgrupo de M_{24} estabilizador dos 5 pontos a seguir:



Como os elementos de N fixam os 4 primeiros pontos segue $N \leq 2^4 : A_5$. Além disso como $2^4 : A_5$ age transitivamente nos 20 pontos, o índice de N é 20. Automorfismos de \mathcal{H}_6 realizam todas as permutações pares das 4 colunas restantes. Soma de um hexacodeword com as 2 primeiras coordenadas iguais a 0 definem um subgrupo normal isomorfo a 2^2 . Assim $2^2 : A_4 \leq N$, como os índices são iguais temos a igualdade.

Sabemos que $A_4 = 2^2 : 3$ donde $N = 2^2 : (2^2 : 3)$. Na verdade N admite um subgrupo normal isomorfo a 2^4 gerado pelos elementos abaixo:



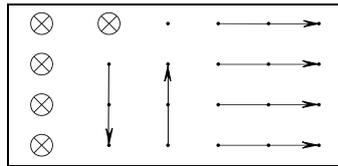
O estabilizador de um ponto que não está na segunda coluna define um subgrupo de N isomorfo a 3. Para o primeiro ponto da terceira coluna temos o automorfismo do hexacode

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto (x_1, wx_2, \bar{w}x_3, x_6, x_4, x_5)$$

que corresponde ao seguinte elemento de N :

Assim, $N = 2^4 : 3$. □

Comentário 5.1.13. Note que podemos calcular a ordem de M_{24} de outra maneira. Como já sabemos que M_{24} é 5-transitivo em Ω e o estabilizador de



uma pentad (5-conjunto) é $2^4 : 3$, temos que o índice de $2^4 : 3$ em M_{24} é $24.23.22.21.20$. Donde a ordem de M_{24} é

$$|M_{24}| = 24.23.22.21.20.16.3 = 244823040.$$

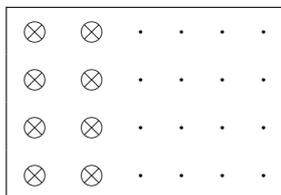
Lema 5.1.14. *O subgrupo de M_{24} estabilizador pontual de uma octad é o 2^4 .*

Demonstração. Chamemos de $G < M_{24}$ o estabilizador pontual de uma octad. Como M_{24} age transitivamente em octads podemos supor que estamos falando da octad base. Assim G fixa os 5 primeiros pontos e portanto $G \leq 2^4 : 3$. Em $2^4 : 3$, o sexto ponto pode ser levado no sexto, sétimo ou oitavo ponto (e estas três possibilidades de fato ocorrem). Além disso, se o sexto ponto ficar fixo o sétimo e o oitavo também ficam. Assim, o índice de G em $2^4 : 3$ é 3. O grupo G é isomorfo a 2^4 , gerado pelos 4 elementos de ordem 2 mostrados na demonstração do lema anterior. \square

Teorema 5.1.15. *O subgrupo de M_{24} estabilizador de uma octad é o $2^4 : A_8$.*

Demonstração. Seja $G < M_{24}$ o estabilizador da octad $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Podemos assumir essa octad composta pelas primeiras duas colunas do MOG, isto é, a octad base. Assim, $\pi \in G$ se e só se, $\pi(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Como M_{24} é transitivo em octads temos $|G| = \frac{|M_{24}|}{759} = 322560$.

Seja $H < G$ o estabilizador pontual da octad $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, isto é, $\pi \in H$ se e só se $\pi(i) = i$ para todo $1 \leq i \leq 8$. Assim, H fixa a octad base:

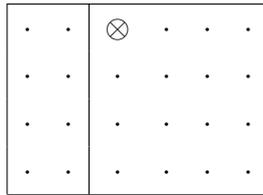


, onde \otimes são os pontos fixos pela ação do grupo.

Pelo resultado anterior $H \cong 2^4 = (\mathbb{Z}/(2))^4$. Portanto o índice de H em G é, $id_G H = \frac{|G|}{|H|} = \frac{322560}{2^4} = 20160 = \frac{8!}{2}$.

Defina o homomorfismo $\phi : G \rightarrow S_8$ pela ação de G sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Assim, $Ker(\phi) = H$ e $Im(\phi) < S_8$ com $|Im(\phi)| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{8!}{2}$. Donde $\frac{|S_8|}{|Im(\phi)|} = 2$ e portanto $Im(\phi) \triangleleft S_8$. Logo, $Im(\phi) = A_8$.

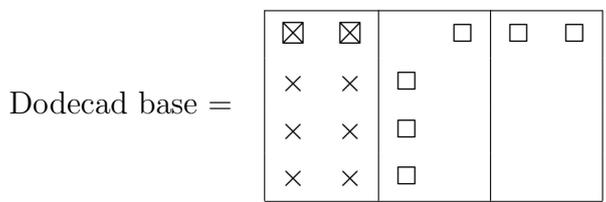
Considere $K < G$ o estabilizador pontual de um dos 16 pontos fora da octad base, logo $id_G K = 16$. Digamos que K fixa o ponto 9, a saber:



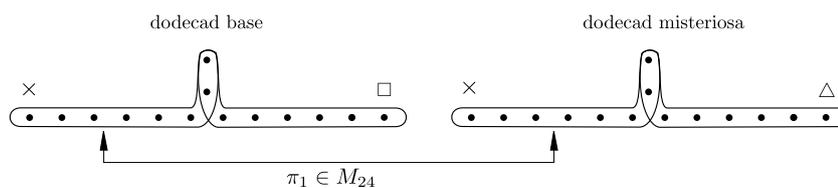
E analogamente, defina $\varphi : K \rightarrow A_8$ pela ação de K sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Vamos provar que φ é isomorfismo. Primeiramente, φ é sobrejetora. De fato, dada uma permutação $\pi_1 \in A_8$, como $\phi|_{A_8}$ é sobrejetora, existe $\pi \in G$ tal que $\pi|_{\{1, \dots, 8\}} = \pi_1$. Tome $\sigma \in H$ com $\sigma(9) = \pi(9)$. Como $(\sigma^{-1} \cdot \pi)|_{\{1, \dots, 8\}}$ e $(\sigma^{-1} \cdot \pi)(9) = 9$ segue que $(\sigma^{-1} \cdot \pi) \in K$. Como $id_{A_8} G = \frac{|G|}{|A_8|} = \frac{16 \cdot \frac{8!}{2}}{\frac{8!}{2}} = 16$ e $id_G K = 16$ segue que $|K| = |A_8|$. Daí e como φ é sobrejetora temos φ injetora, logo $K \approx A_8$. E desde que $H \approx 2^4 \triangleleft G$ e $K \approx A_8 < G$ temos $G = 2^4 : A_8$. \square

Teorema 5.1.16. *O grupo M_{24} age transitivamente no conjunto de pares de octads $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ com $|\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2| = 2$. Em particular, M_{24} age transitivamente em dodecads.*

Demonstração. Tome duas dodecads no Código de Golay. Sem perda, considere uma dodecad sendo a dodecad base abaixo, onde \square e \times indicam os elementos das octads que compõem esta dodecad e \boxtimes indica os dois pontos de interseção dessas octads. A dodecad desconhecida, chamaremos de dodecad misteriosa.



Queremos provar que M_{24} é transitivo em dodecads, isto é, que existe permutação π em M_{24} tal que $\pi(\text{dodecad base}) = \text{dodecad misteriosa}$. Mais ainda, isso ocorre respeitando a decomposição dessas dodecads como soma de duas octads que se intersectam em um 2-conjunto. Como M_{24} age transitivamente em octads podemos supor que a primeira octad da dodecad misteriosa é a octad base, isto é,



Sabemos que existe permutação $\pi_2 \in 2^4 : A_8$ que aplica os dois pontos de interseção das duas octads uns nos outros. Sem perda,

\triangle	\triangle		\square		\square	\square
\times	\times	\square				
\times	\times	\square				
\times	\times	\square				

Agora devemos completar a octad composta por \triangle . Note que o hexacodeword determinado pela octad formada por \triangle tem a forma $00\ xx\ xx$, tal que $x \in \mathbb{F}_4$. Observe também que como as primeiras duas colunas do MOG tem pontuação ímpar todas as colunas e a primeira linha do MOG deverão ter um número ímpar de \triangle . Assim, como nos restam 4 colunas e 6 pontos devemos escolher uma coluna para receber três \triangle e três colunas para receber um único \triangle . Assim, temos $16 = 4 \cdot 4$ possibilidades para completar esta octad. Por exemplo, fazendo $x = w$ e escolhendo a quarta coluna para receber três \triangle temos a seguinte octad:

\triangle	\triangle		\triangle			
			\triangle			
		\triangle		\triangle	\triangle	x
			\triangle			
0	0	x	x	x	x	

Finalmente como existe $\rho \in 2^4 < M_{24}$ tal que $\rho(\text{octad}_\square) = \text{octad}_\triangle$ segue que M_{24} age transitivamente no conjunto de pares de octads que se intersectam em um 2-conjunto. Particularmente temos que M_{24} é transitivo em dodecads. \square

Observação 5.1.17. Aqui podemos observar facilmente que o número de dodecads $D_{i,j}$ fornecido pelo triângulo das dodecads no teorema 3.0.9 independe dos i e j pontos escolhidos nos conjuntos A e B , respectivamente. Depende apenas da cardinalidade desses conjuntos. Isso deve-se ao fato de M_{24} agir transitivamente em dodecads, ser 5-transitivo nos 24 pontos de Ω , e ser o estabilizador do $S(5, 8, 24)$.

Comentário 5.1.18. O grupo M_{24} tem vários subgrupos maximais além do $2^6 : 3 \cdot S_6$. Veremos a seguir alguns outros exemplos, inclusive M_{23} . O menor subgrupo maximal de M_{24} é isomorfo a $PSL_2(7)$, o grupo dos automorfismos do sistema de Steiner $S(2, 3, 7)$.

A seguir, iremos provar que o grupo M_{24} é simples. Para isso, usaremos o lema de Iwasawa (veja Lema 2.3.2), com $H = 2^6 : 3 \cdot S_6$, Ω_H o conjunto das 1771 sextets e $A = 2^6 < H$ e usaremos também os lemas (5.1.19, 5.1.20 e 5.1.21).

Lema 5.1.19. *O grupo M_{24} age fielmente nos 1771 sextets.*

Demonstração. Para provarmos que M_{24} age fielmente nos 1771 sextets, devemos mostrar que se $\pi \in M_{24}$ fixa todo sextet σ (isto é, $\pi(\sigma) = \sigma$), então $\pi = Id$.

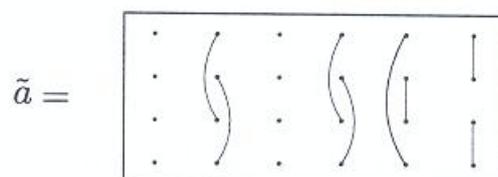
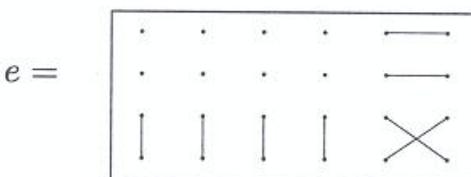
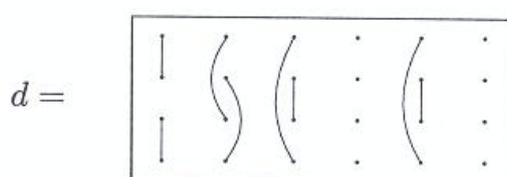
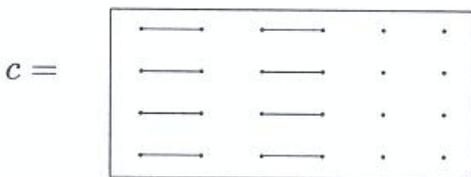
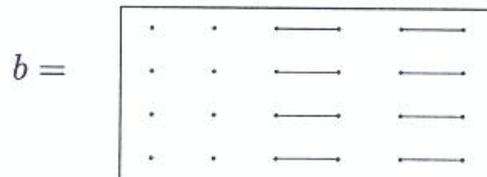
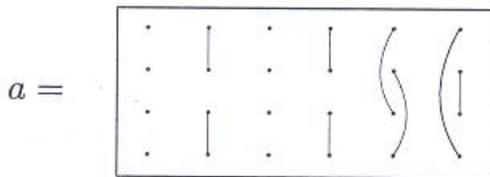
Seja $\pi \in M_{24}$ satisfazendo a condição acima. Considerando a ação de π nos sextets abaixo é suficiente para concluirmos que π é a identidade.

1 2 3 4 5 6	1 1 1 2 5 6
1 2 3 4 5 6	1 2 2 2 4 3
1 2 3 4 5 6	3 5 6 4 3 6
1 2 3 4 5 6	4 6 5 3 5 4
1 1 1 1 3 2	1 3 4 2 1 1
4 4 4 4 2 3	1 3 4 2 3 3
5 5 5 5 2 3	6 5 5 5 4 2
6 6 6 6 2 3	5 6 6 6 2 4

□

Lema 5.1.20. *Elementos comutadores de H geram A .*

Demonstração. Para isso considere os elementos, $a, b, c, d, e, \tilde{a}, \tilde{e}, \hat{e}$ de H abaixo.



$$\tilde{e} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{---} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \text{---} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \diagdown & | & | & | & | \\ \hline \end{array} \quad \hat{e} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \text{---} & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \text{---} & \cdot & \cdot \\ \hline | & | & \diagdown & | & | \\ \hline \end{array}$$

Assim temos que os comutadores $abab$, $acac$, $eded$, $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}$, $\tilde{a}\tilde{c}\tilde{a}\tilde{c}$, $\hat{e}\hat{d}\hat{e}\hat{d}$ geram A .

$$\begin{array}{l} abab = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & | & | & | & | \\ \hline \cdot & \cdot & | & | & | & | \\ \hline \cdot & \cdot & | & | & | & | \\ \hline \cdot & \cdot & | & | & | & | \\ \hline \end{array} \\ + \quad \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \\ \\ acac = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline | & | & | & | & \cdot & \cdot \\ \hline | & | & | & | & \cdot & \cdot \\ \hline | & | & | & | & \cdot & \cdot \\ \hline | & | & | & | & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \\ + \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \\ \\ eded = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \cdot & | & | & \cdot & \left(\begin{array}{c} | \\ \cdot \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \end{array} \right) \\ \hline \cdot & | & | & \cdot & \left(\begin{array}{c} | \\ \cdot \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \end{array} \right) \\ \hline \cdot & | & | & \cdot & \left(\begin{array}{c} | \\ \cdot \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \end{array} \right) \\ \hline \cdot & | & | & \cdot & \left(\begin{array}{c} | \\ \cdot \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \end{array} \right) \\ \hline \end{array} \\ + \quad \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & \bar{w} & w \end{array} \\ \\ \tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \end{array} \right) \\ \hline \cdot & \cdot & \left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \end{array} \right) \\ \hline \cdot & \cdot & \left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \end{array} \right) \\ \hline \cdot & \cdot & \left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \end{array} \right) \\ \hline \end{array} \\ + \quad \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & w & w & w & w \end{array} \\ \\ \tilde{a}\tilde{c}\tilde{a}\tilde{c} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \end{array} \right) & \cdot & \cdot \\ \hline \left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \end{array} \right) & \cdot & \cdot \\ \hline \left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \end{array} \right) & \cdot & \cdot \\ \hline \left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \end{array} \right) & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \\ + \quad \begin{array}{cccccc} w & w & w & w & 0 & 0 \end{array} \\ \\ \hat{e}\hat{d}\hat{e}\hat{d} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \cdot & | & \left(\begin{array}{c} | \\ \cdot \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \end{array} \right) & | & \cdot \\ \hline \cdot & | & \left(\begin{array}{c} | \\ \cdot \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \end{array} \right) & | & \cdot \\ \hline \cdot & | & \left(\begin{array}{c} | \\ \cdot \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \end{array} \right) & | & \cdot \\ \hline \cdot & | & \left(\begin{array}{c} | \\ \cdot \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \cdot \\ | \end{array} \right) & | & \cdot \\ \hline \end{array} \\ + \quad \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \bar{w} & w & 1 & 0 \end{array} \end{array}$$

□

Lema 5.1.21. *O grupo H é gerado por conjugados de A .*

Demonstração. Isto segue do fato de que conjugados do elemento (5.1.5), o qual é conjugado de A , geram H .

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \text{---} \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \text{---} \\ \hline | & | & | & | & \diagdown \\ \hline \end{array} \tag{5.1.5}$$

□

Teorema 5.1.22. *O grupo M_{24} é simples.*

Demonstração. Sabemos que M_{24} age transitivamente sobre os 1771 sextets e o estabilizador de um ponto de Ω_H , por exemplo, do sextet base, é $H = 2^6 : 3 \cdot S_6$, subgrupo maximal de M_{24} . Daí, e pela proposição (2.3.1), segue que M_{24} age primitivamente em Ω_H . Pelo Lema 5.1.19, temos que M_{24} age fielmente em Ω_H . No Lema 5.1.20 vimos que elementos comutadores de H geram A . O grupo H é gerado pelos conjugados de A via M_{24} (Lema 5.1.21). Conjugados de A geram também a permutação α definida em 5.1.4. Daí, e como conjugados de comutadores são ainda comutadores geramos M_{24} , donde M_{24} é perfeito. Assim, verificamos todas as hipóteses do Lema de Iwasawa donde M_{24} é simples. \square

5.1.2

M_{24} a partir de $PSL_2(23)$

Rotule os pontos do MOG com os pontos da linha projetiva $\Omega = PL(23)$ como segue (veja Atlas (3)):

0	∞	1	11	2	22
19	3	20	4	10	18
15	6	14	16	17	8
5	9	21	13	7	12

Com essa rotulagem do MOG e como $PSL_2(23)$ é gerado por

$$\alpha : x \longrightarrow x + 1, \quad \beta : x \longrightarrow 2x, \quad \gamma : x \longrightarrow -x^{-1},$$

temos $PSL_2(23)$ subgrupo de M_{24} . O grupo $PSL_2(23)$ agindo em $PL(23)$ pode ser estendido a M_{24} pela adjunção da aplicação $\delta : x \longrightarrow x^3/9$ ($x \in Q$) ou $x \longrightarrow 9x^3$ ($x \in N$), onde $Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18\}$ e $N = \{\infty, 5, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22\}$.

A lista dos geradores de M_{24} é:

$$\alpha = (\infty)(0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22),$$

$$\beta = (\infty)(15 \ 7 \ 14 \ 5 \ 10 \ 20 \ 17 \ 11 \ 22 \ 21 \ 19)(0)(3 \ 6 \ 12 \ 1 \ 2 \ 4 \ 8 \ 16 \ 9 \ 18 \ 13),$$

$$\gamma = (\infty \ 0)(15 \ 3)(7 \ 13)(14 \ 18)(5 \ 9)(10 \ 16)(20 \ 8)(17 \ 4)(11 \ 2)(22 \ 1)(21 \ 12)(19 \ 6),$$

$$\delta = (\infty)(14 \ 17 \ 11 \ 19 \ 22)(15)(20 \ 10 \ 7 \ 5 \ 21)(0)(18 \ 4 \ 2 \ 6 \ 1)(3)(8 \ 16 \ 13 \ 9 \ 12).$$

5.2

O grupo M_{23}

Os Grupos de Mathieu M_{23} e M_{22} são melhores entendidos como subgrupos de M_{24} . Aqui falaremos brevemente desses grupos.

Definimos o **Grupo de Mathieu** M_{23} como o estabilizador de um ponto em M_{24} ; e este é um subgrupo maximal de M_{24} . Portanto M_{23} tem ordem

$$\frac{|M_{24}|}{24} = \frac{2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23}{2^3 \cdot 3} = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 = 10200960.$$

Como M_{24} é 5-transitivo temos que M_{23} é 4-transitivo. O grupo M_{23} pode também ser definido como o estabilizador do sistema de Steiner $S(4, 7, 23)$ obtido através do sistema Steiner $S(5, 8, 24)$, deletando um dado ponto de todas as octads de $S(5, 8, 24)$ que o contém. O número de heptads resultantes no sistema de Steiner $S(4, 7, 23)$ é $253 = \frac{\binom{23}{4}}{\binom{7}{4}}$.

Similarmente, removendo uma coordenada fixada de todos os 2^{12} vetores do Código de Golay obtemos o Código binário de Golay não estendido \mathcal{C}_{23} que tem a seguinte distribuição de peso

$$0^1 \ 7^{253} \ 8^{506} \ 11^{1288} \ 12^{1288} \ 15^{506} \ 16^{253} \ 23^1.$$

Comentário 5.2.1. Os pesos do Código de Golay não estendido podem ser facilmente entendidos em conexão com o triângulo das octads, que nos diz que dado um ponto em Ω existem 253 octads que o contém e 506 que não o contém. Assim como existem 759 vetores de peso 8 (octads) no código de Golay, removendo uma coordenada desses vetores teremos 253 vetores de peso 7 caso o ponto removido pertença a octad e 506 vetores de peso 8 caso contrário. Pelo mesmo raciocínio e desde que um vetor de peso 16 (anti-octad) no Código de Golay é sempre o complementar de uma octad teremos em \mathcal{C}_{23} 253 vetores de peso 16 caso o ponto removido não pertença a anti-octad e 506 vetores de peso 15 caso contrário (isto é, o ponto removido não pertença a octad). Como temos 2576 dodecads no Código de Golay teremos 1288 vetores de peso 11 e 1288 vetores de peso 12 caso o ponto removido esteja ou não na dodecad, respectivamente.

5.3

O grupo M_{22}

Definimos o **Grupo de Mathieu** M_{22} como o estabilizador de dois pontos em M_{24} . Então M_{22} tem ordem

$$\frac{|M_{23}|}{23} = \frac{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23}{23} = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 443520.$$

Como M_{23} é 4-transitivo segue que M_{22} é 3-transitivo. O grupo M_{22} pode ser definido como o estabilizador do sistema de Steiner $S(3, 6, 22)$ obtido deletando dois pontos de todas as octads de $S(5, 8, 24)$ que contém ambos os pontos. O número de hexads do sistema de Steiner $S(3, 6, 22)$ é $\frac{\binom{22}{3}}{\binom{6}{3}} = 77$.

Comentário 5.3.1. Similarmente, o subgrupo de M_{24} estabilizador de 3 pontos tem ordem

$$\frac{|M_{22}|}{22} = \frac{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{22} = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 20160,$$

e muitas vezes é chamado de M_{21} . Porém este grupo não é um grupo esporádico, pois é isomorfo a $PSL_3(4)$.

5.4

O grupo M_{12}

O **grupo de Mathieu** M_{12} é definido como o estabilizador de uma dodecad no código binário de Golay estendido, desde que M_{24} age transitivamente nas 2576 dodecads deste código (ver 5.1.16). Assim, a ordem de M_{12} é

$$\frac{|M_{24}|}{2576} = \frac{2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23}{2^4 \cdot 7 \cdot 23} = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 = 95040.$$

Esta definição de M_{12} não é a mesma dada originalmente por Mathieu, que construía esse grupo de maneira independente de M_{24} . O fato de M_{12} ser um subgrupo de M_{24} foi primeiro descoberto por Frobenius. Note que o subgrupo M_{12} não é maximal em M_{24} . De fato, como o complemento de uma dodecad é também uma dodecad e M_{24} age transitivamente em dodecads, temos um subgrupo $M_{12} : 2$ que fixa pares de dodecads complementares. O subgrupo $M_{12} : 2$ é maximal em M_{24} , porém não é simples.

Vimos pela última linha do triângulo das dodecads que em \mathcal{C}_{24} uma octad pode intersectar uma dodecad em 2, 4 ou 6 de seus pontos. Fixada uma dodecad há $132 = \frac{\binom{12}{5}}{6}$ octads a intersectando em 6 pontos, por completamento, há 132 intersectando em 2 pontos e desde que um tetrad determina um único sextet temos $495 = \binom{12}{4}$ intersectando em 4 pontos (ver figuras 5.1 e 5.2). As interseções de tamanho 6 formam um conjunto com 132 blocos chamados **hexads**. Como cada hexad está contida em uma única octad esse conjunto tem

a propriedade (herdada de $S(5, 8, 24)$) que qualquer 5-conjunto determina um único bloco. Assim, M_{12} pode ser definido como o estabilizador do $S(5, 6, 12)$ sistema de Steiner.

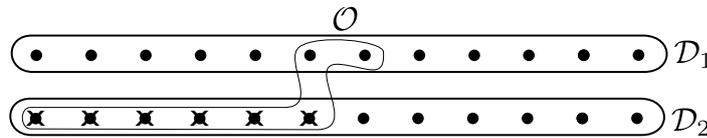


Figura 5.1: Dodecad intersectando uma octad em 2 ou 6 pontos.

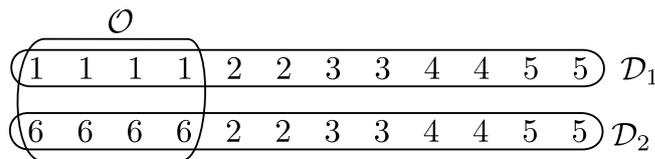


Figura 5.2: Dodecad intersectando uma octad em 4 pontos.

Considere $h = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ uma hexad e A um k -conjunto contido em h . Pela definição do $S(5, 6, 12)$ sistema de Steiner temos que o número de hexads contendo A é dado por $\frac{\binom{12-k}{5-k}}{\binom{6-k}{5-k}}$, se $k \in \{1, \dots, 4\}$ e é 1 se $k \in \{5, 6\}$. Portanto o número de hexads contendo um k -conjunto é 132, 66, 30, 12, 4, 1, 1 para $k = 0, \dots, 6$, respectivamente. Consequentemente, o número de hexads que não contém um ponto é $132 - 66 = 66$, e assim por diante. Assim, de maneira análoga à construção do triângulo das octads construímos o triângulo das hexads. Considere h uma hexad tal que B é um i -conjunto e A um j -conjunto com $A \subseteq B \subseteq h$. Então, o número de hexads que contém os elementos de A e não contém os elementos de $B \setminus A$ é dado pela $(j + 1)$ -ésima entrada da $(i + 1)$ -ésima linha da tabela abaixo:

				132						
				66		66				
			30		36		30			
		12		18		18		12		
		4	8		10		8		4	
	1		3	5		5		3	1	
1		0		3	2		3		0	1

Figura 5.3: Triângulo das hexads.

Pela última linha do triângulo das hexads vemos que existem 1, 3, 2, e 3 hexads intersectando uma hexad dada em 0, 2, 3 ou 4 pontos, respectivamente. Em particular, o complemento de uma hexad é sempre uma outra hexad.

Lema 5.4.1. *O estabilizador pontual de um hexad em M_{12} é o grupo trivial.*

Demonstração. Tome uma hexad contida em uma dodecad. Certamente essa hexad está contida em uma octad e a soma (diferença simétrica) desses não está contida na dodecad. O estabilizador pontual da hexad fixa toda a octad que contém essa hexad. De fato, inicialmente os dois pontos da octad que não pertencem a hexad poderiam ser permutados. Mas isso não ocorre, desde que o grupo estabilizador de uma octad é $2^4 : A_8$, isto é, só permutações pares são realizadas dentro da octad fixada.

Daí, e como o estabilizador pontual da octad é o 2^4 e M_{12} , por definição, fixa a dodecad segue que o grupo estabilizador da hexad é o trivial. \square

Teorema 5.4.2. $|M_{12}| = 132|S_6|$, M_{12} é transitivo em hexads e o estabilizador como conjunto de um hexad é S_6 agindo naturalmente nos 6 pontos do hexad. Portanto, M_{12} é 5-transitivo em 12 pontos.

Demonstração. Já sabemos que $|M_{12}| = 95040$ e que, por definição, as 132 hexads do sistema de Steiner $S(5, 6, 12)$ são preservadas por M_{12} .

Fixe uma hexad, chamaremos esta de hexad base. Considere a órbita da hexad base, e denotemos esta por $G_{\text{hexad base}} = \{\pi(\text{hexad base}); \pi \in M_{12}\}$. Assim, $|G_{\text{hexad base}}| = n \leq 132 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$.

Chamemos de G o estabilizador como conjunto da hexad base. Em outras palavras, $G < M_{12}$ tal que $\pi \in G$ se e só se $\pi(\text{hexad base}) = \text{hexad base}$. Portanto, $|G| = \frac{|M_{12}|}{n} \geq \frac{2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2^2 \cdot 3 \cdot 11} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6!$. G age sobre os 6 pontos da hexad base logo G realiza $m \leq 6!$ permutações. Chamemos de H o estabilizador pontual da hexad base, isto é, $H \leq G$ tal que $\pi \in H$ se e só se $\pi|_{\text{hexad base}} = Id$. Donde $|H| = \frac{|G|}{m} \geq \frac{6!}{6!} = 1$. Mas pelo lema anterior o estabilizador pontual de um hexad em M_{12} é o grupo trivial. Donde $|H| = 1$ e todas as desigualdades acima são igualdades. Portanto, $m = 6!$, $n = 132$, $G = S_6$ e $|M_{12}| = 132|S_6|$. E desde que um 5-conjunto determina uma única hexad e $|M_{12}|$ é transitivo em hexads segue M_{12} é 5-transitivo em um 12-conjunto. \square

5.4.1

O M_{12} , o MINIMOG e o $S(5, 6, 12)$

O grupo de Mathieu M_{12} é ao mesmo tempo um subgrupo de M_{24} e um análogo dele. Aqui veremos algumas dessas semelhanças.

Os blocos do $S(5, 6, 12)$ sistema de Steiner não geram um código binário no mesmo caminho dos blocos de $S(5, 8, 24)$, pois duas hexads podem se intersectar em 0, 2, 3 ou 4 pontos. Mas colocando sinais nos pontos das hexads conseguimos um código ternário, o $C_{12}[12, 6, 6]$ (ver seção 2.9). O $S(5, 6, 12)$

sistema de Steiner também é único a menos de isomorfismo. O grupo M_{12} , que pode ser definido como o estabilizador do $S(5, 6, 12)$ sistema de Steiner, é melhor entendido em conexão com o código ternário de Golay. Nos iremos aqui definir o C_{12} em termos do tetracode e do MINIMOG.

O Tetracode, $\mathcal{C}_4[4, 2, 3]$, é um subespaço vetorial de \mathbb{F}_3^4 de dimensão 2 e consiste das seguintes palavras, que chamaremos de **tetracodewords**:

$$\begin{array}{lll} 0\ 000 & 0\ +\ +\ + & 0\ -\ -\ - \\ +\ 0\ +\ - & +\ +\ -\ 0 & -\ -\ +\ 0 \\ -\ 0\ -\ + & -\ +\ 0\ - & -\ -\ +\ 0. \end{array}$$

Para cada função $\phi(x) = ax + b$ sobre \mathbb{F}_3 definimos uma palavra $a\ bcd$ em \mathcal{C}_4 , onde (a, b) especificam a função ϕ e (b, c, d) são obtidos avaliando a função ϕ respectivamente em $0, +, -$:

$$a, b = \phi(0), c = \phi(+), d = \phi(-).$$

Isto torna fácil resolver dois tipos de problemas:

1. **O 2-problema:** completar um tetracodeword a partir de 2 de seus pontos.
2. **O 4-problema:** corrigir um tetracodeword dados todos os seus 4 pontos (algum dígito pode estar errado).

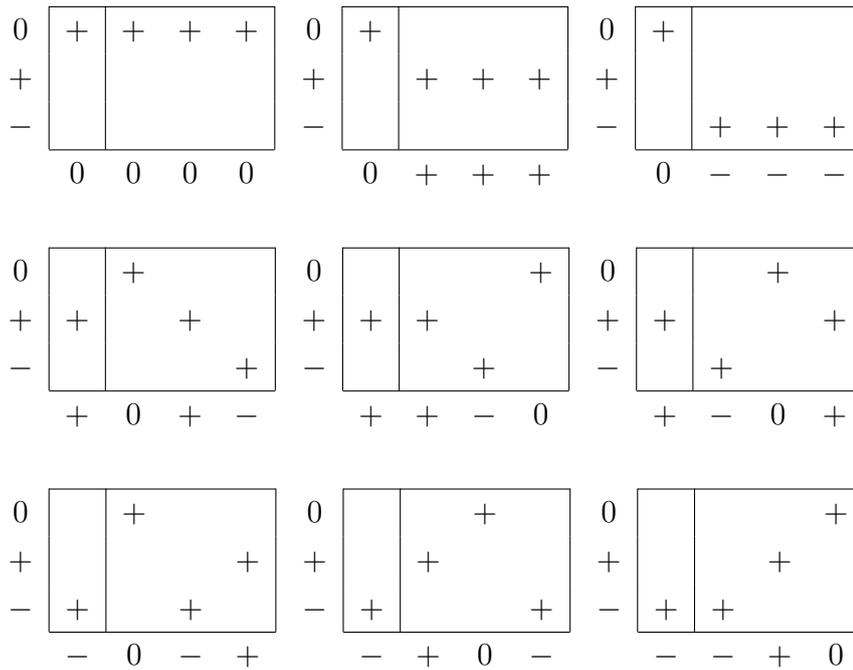
O **MINIMOG** é uma matriz 3×4 cujas linhas são rotuladas pelos elementos $0, +, -$ de \mathbb{F}_3 e cujas colunas correspondem aos 4 dígitos do tetracodeword. Muitas vezes, em cima de cada coluna colocamos sua pontuação, isto é, o seu número de dígitos não nulos. Nós usaremos a palavra *coluna*, abreviadamente 'col', para as palavras de comprimento 12 com dígitos $+$ em todas as entradas de uma coluna e dígitos 0 nos outros lugares. E usaremos a palavra *tetrad*, abreviadamente 'tet', para as palavras de comprimento 4 com dígitos $+$ nas entradas correspondentes ao tetracodeword e dígitos 0 nos outros lugares.

Vamos listar todos os cols e todos os tets:

cols:

$$\begin{array}{cccc} 0 & \begin{array}{|c|c|} \hline + & \\ \hline + & \\ \hline - & + \\ \hline \end{array} & 0 & \begin{array}{|c|c|} \hline & + \\ \hline + & + \\ \hline - & + \\ \hline \end{array} & 0 & \begin{array}{|c|c|} \hline & + \\ \hline + & + \\ \hline - & + \\ \hline \end{array} & 0 & \begin{array}{|c|c|} \hline & + \\ \hline + & + \\ \hline - & + \\ \hline \end{array} \end{array}$$

tets:



O código $\mathcal{C}_{12}[12, 6, 6]$ é um subespaço vetorial de \mathbb{F}_3^{12} de dimensão 6. Em termos de cols e tets \mathcal{C}_{12} é gerado por:

$$\text{col-col, tet-tet, col+tet.}$$

Em particular, isso nos diz que as combinações

$$\text{col-col, tet-tet, col+tet, col+col-tet}$$

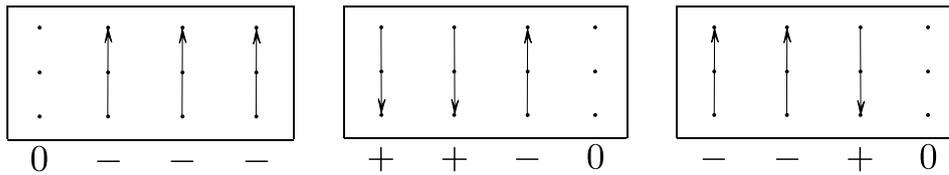
funcionam como palavras em \mathcal{C}_{12} de peso 6 denominadas **hexads com sinal**.

Exemplo 31. Abaixo temos um exemplo de hexad com sinal em \mathcal{C}_{12} obtido a partir de col+col-tet:

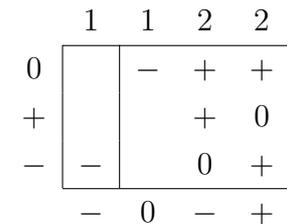
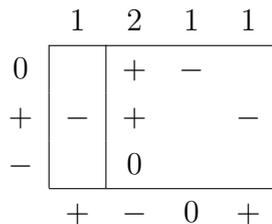
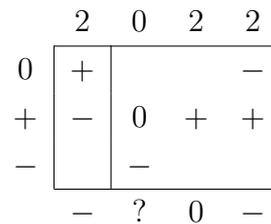
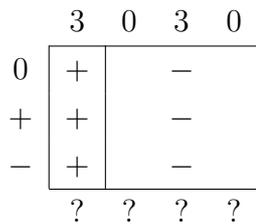
$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & + & & \\ \hline & + & & \\ \hline & + & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & + & & \\ \hline & + & & \\ \hline & + & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & + \\ \hline + & + & & \\ \hline & & + & \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & + & + & - \\ \hline - & 0 & + & \\ \hline & + & 0 & \\ \hline \end{array} = (0, -, 0, +, 0, +, +, +, 0, -, 0, 0) \in \mathcal{C}_{12}.$$

Comentário 5.4.3. O tetracode age nos 12 pontos do MINIMOG por adição, donde temos uma inclusão natural $\mathcal{C}_4 = 3^2 \subset M_{12}$. Abaixo temos a ação das palavras 0 ---, + + -0 e - - +0 no MINIMOG:



Para cada codeword em \mathcal{C}_{12} de peso 6 podemos definir, para cada coluna da matriz MINIMOG, o seu **odd-men-out**. Para cada coluna o odd-men-out será a linha correspondente ao único dígito não nulo ou ao único dígito nulo naquela coluna. Caso para alguma coluna o odd-men-out não exista, escrevemos ? abaixo dela.



Se nós ignorarmos os sinais dos 264 hexads com sinal existentes em \mathcal{C}_{12} obtemos os 132 hexads de $S(5,6,12)$. Assim os hexads de $S(5,6,12)$ podem ser descritos como:

1. O conjunto de seis pontos cuja distribuição coluna não é 3 210, e
2. o odd-men-out faz parte de um tetracodeword.

Dessa maneira, o problema de completar um hexad conhecendo 5 de seus pontos pode ser resolvido a partir do 2-problema ou 4-problema desde que um tetracodeword é sempre determinado por quaisquer duas de suas coordenadas e o odd-men-out sempre determina um único tetracodeword e então colocando os sinais usando expressões em termos de colunas e tetrads obtemos o hexad com sinal desejado.

Nos próximos exemplos veremos como determinar hexads em $S(5,6,12)$ a partir de 5 de seus pontos, prosseguiremos usando expressões de cols e tets a fim de determinarmos hexads com sinal em $\mathcal{C}_{12}[12,6,6]$.

Exemplo 32.

0		*	*	*
+			*	
-		*		
	?	+	-	0

Acima temos um conjunto de 5 pontos (pentad) de $S(5, 6, 12)$ e os odd-men-out. Logo, $\phi(x) = ax+1$ e portanto $\phi(+)=a+1=-1 \Rightarrow a=1$ e $\phi(x)=x+1$, $\phi(-1)=0$.

Donde determinamos o tetracodeword e todos os odd-men-out, obtendo assim uma hexad do $S(5, 6, 12)$:

0		*	*	*
+	*		*	
-		*		
	+	+	-	0

$\in S(5, 6, 12)$

Agora usando as expressões de cols e tets podemos terminar os sinais. Como o hexad tem a distribuição coluna $(2^2 1^2)$ isso nos diz que ele foi obtido a partir de col+col-tet e conseqüentemente obtemos o hexad com sinal de \mathcal{C}_{12} :

<table border="1" style="width: 100px; height: 100px;"> <tr><td></td><td>+</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>+</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>+</td><td></td></tr> </table>		+			+			+		+	<table border="1" style="width: 100px; height: 100px;"> <tr><td></td><td>+</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>+</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>+</td><td></td></tr> </table>		+			+			+		-	<table border="1" style="width: 100px; height: 100px;"> <tr><td></td><td></td><td>+</td></tr> <tr><td>+</td><td>+</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>+</td></tr> </table>			+	+	+				+
	+																														
	+																														
	+																														
	+																														
	+																														
	+																														
		+																													
+	+																														
		+																													
=																															
		1 2 2 1																													
	0	<table border="1" style="width: 100px; height: 100px;"> <tr><td></td><td>+</td><td>+</td><td>-</td></tr> <tr><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>+</td><td>0</td><td></td></tr> </table>		+	+	-	-	0	+			+	0		$\in \mathcal{C}_{12}$																
	+	+	-																												
-	0	+																													
	+	0																													
		+	+	-	0																										

Exemplo 33.

0	*	*		
+	*			
-	*	*		
	?	?	?	?

Como a distribuição 3 210 é proibida devemos completar o hexad colocando a * que falta na segunda coluna:

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 + \\
 - \\
 ? \quad ? \quad ? \quad ?
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 * & * \\
 \hline
 * & * \\
 \hline
 * & * \\
 \hline
 \end{array}
 \in S(5, 6, 12)$$

Obtendo assim a distribuição $3^2 0^2$, o que nos diz que o hexad foi obtido a partir de col-col. Donde,

$$\begin{array}{|c|c|}
 \hline
 + \\
 \hline
 + \\
 \hline
 + \\
 \hline
 \end{array}
 -
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 + \\
 \hline
 + \\
 \hline
 + \\
 \hline
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 3 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \\
 0 \\
 + \\
 - \\
 ? \quad ? \quad ? \quad ?
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 + & - \\
 \hline
 + & - \\
 \hline
 + & - \\
 \hline
 \end{array}
 \in \mathcal{C}_{12}$$

Exemplo 34.

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 + \\
 - \\
 0 \quad ? \quad ? \quad 0
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 * & * \\
 \hline
 * & * \\
 \hline
 \end{array}$$

Novamente, como a distribuição $3 \ 2 \ 1 \ 0$ é proibida podemos alterar apenas a segunda e a terceira coluna. Como $a = 0$ e $d = 0$ o tetracodeword é $0 \ 000$, logo:

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 + \\
 - \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 * & * & * \\
 \hline
 * & * & * \\
 \hline
 \end{array}
 \in S(5, 6, 12)$$

Como a distribuição é $2^3 0^1$, temos que o hexad foi obtido a partir de tet-tet. E portanto completamos o seguinte hexad com sinal:

$$\begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 + \\
 \hline
 + \\
 \hline
 \end{array}
 -
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 + \\
 \hline
 + \\
 \hline
 + \\
 \hline
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 2 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \\
 0 \\
 - \\
 + \\
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 0 \\
 \hline
 - & - & + \\
 \hline
 + & + & - \\
 \hline
 \end{array}
 \in \mathcal{C}_{12}$$

Exemplo 35.

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 + \\
 - \\
 - \quad ? \quad ? \quad +
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 * & * \\
 \hline
 * & * \\
 \hline
 * & * \\
 \hline
 \end{array}$$

Analogamente ao exemplo anterior, podemos alterar apenas a segunda e a terceira coluna. Como $\phi(x) = -x + b$ e $\phi(-) = 1 + b = 1$, temos $b = 0$. Donde $\phi(x) = -x$, $\phi(0) = 0$, $\phi(+)= -1$ e o tetracodeword é $- 0 - +$. Logo completamos o hexad de $S(5, 6, 12)$ abaixo:

$$\begin{array}{c} 0 \\ + \\ - \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline * & & * \\ \hline * & * & \\ \hline * & * & * \\ \hline \end{array} \in S(5, 6, 12)$$

- 0 - 0

Colocando os sinais, obtemos o hexad com sinal de \mathcal{C}_{12} :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & + \\ \hline + & + & \\ \hline & & + \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline + & & \\ \hline & + & + \\ \hline & + & + \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} 2 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline - & & + \\ \hline + & + & \\ \hline & - & 0 \\ \hline - & 0 & - \\ \hline \end{array} \in \mathcal{C}_{12}$$

Exemplo 36.

$$\begin{array}{c} 0 \\ + \\ - \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & * \\ \hline & * & * \\ \hline & * & * \\ \hline \end{array}$$

? 0 - ?

Temos 2 dígitos corretos do tetracodeword, logo:
 $\phi(x) = ax + 0$ e $\phi(+)= a = -1 \Rightarrow \phi(x) = -x$, $\phi(-) = -$. Donde completamos o tetracodeword e descobrimos o odd-men-out:

$$\begin{array}{c} 0 \\ + \\ - \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & * \\ \hline & * & * \\ \hline * & * & \\ \hline \end{array} \in S(5, 6, 12)$$

- 0 - +

Como a distribuição coluna é $2^2 1^2$ devemos ter col+col-tet. Colocando os sinais, temos:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline + \\ \hline + \\ \hline + \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline + \\ \hline + \\ \hline + \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline + & \\ \hline & + \\ \hline + & + \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ 0 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 0 \quad + \\ \hline \end{array} \\ + \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & + \quad + \quad - \\ \hline \end{array} \in \mathcal{C}_{12} \\ - \quad \begin{array}{|c|c|} \hline - \quad 0 \\ \hline \end{array} \\ - \quad 0 \quad - \quad + \end{array}$$

Comentário 5.4.4. Note que sempre há duas maneiras corretas de colocar sinais em hexad de $S(5, 6, 12)$, a primeira que você escolheu e o negativo dela.

A relação entre o MINIMOG e o MOG. O MINIMOG pode ser inserido no MOG, como mostra a figura (5.4). Nesta inclusão os hexads de $S(5, 6, 12)$ pertencem a parte da figura rotulada por \bullet e podem ser completados a uma octad por 2 pontos fora dessa região. A figura (5.5) mostra um exemplo.

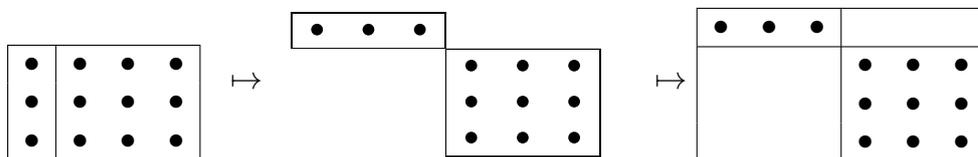


Figura 5.4: Como o MOG contém o MINIMOG.

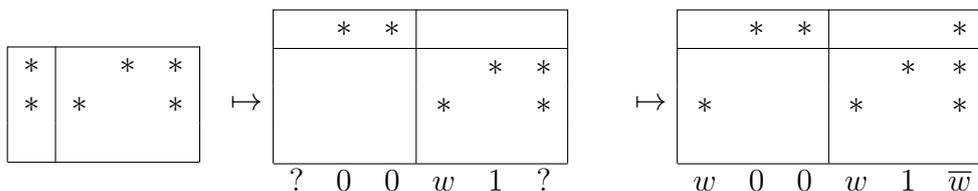


Figura 5.5: Como um hexad torna-se uma octad.

5.5

O Grupo M_{11}

Definimos o **grupo de Mathieu** M_{11} como o estabilizador de um ponto em M_{12} . Donde temos

$$\frac{|M_{12}|}{12} = \frac{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11}{12} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 7920.$$

Como M_{12} é 5-transitivo temos que M_{11} é 4-transitivo em um conjunto de 11 pontos. O grupo M_{11} pode ser definido como o estabilizador do sistema de Steiner $S(4, 5, 11)$. O número de pentads do sistema de Steiner $S(4, 5, 11)$ é $\frac{\binom{11}{4}}{\binom{5}{4}} = 66$. O grupo M_{11} é o menor grupo de Mathieu.