

3 Modelo Matemático

No presente trabalho o modelo matemático utilizado para prever o escoamento bifásico ao longo de tubulações no padrão intermitente é o Modelo de Dois Fluidos (Ishii, 1975). A formulação do modelo é obtida a partir de um processo de média temporal das equações locais e instantâneas, juntamente com as condições de salto nas interfaces, de forma a obter um modelo que represente as fases de forma contínua. Em sua versão isotérmica, as equações de conservação de massa e quantidade de movimento são resolvidas para cada fase.

As equações de conservação para o escoamento multifásico do Modelo de Dois Fluidos são de natureza tridimensional. No entanto, como mencionado anteriormente, tendo em conta que, para dutos longos, as principais variações dos parâmetros do escoamento ocorrem na direção axial, é conveniente introduzir a hipótese de escoamento uni-dimensional na formulação.

A formulação unidimensional é obtida através de um segundo processo de média, o qual é realizado na seção transversal da tubulação. Torna-se assim necessário um cuidado especial na incorporação de modelos de fechamento que levem em consideração os efeitos físicos julgados importantes para a descrição dos fenômenos em questão. A introdução dos diferentes termos de fechamento apresenta grande importância com relação ao condicionamento matemático do sistema de equações resultantes. A presença ou ausência de algum termo físico, mesmo que com pequena influência no resultado, pode ser crucial para a obtenção de um sistema de equações bem posto.

O modelo matemático apresentado a seguir foi desenvolvido a partir do trabalho de Ortega (2004) e Carneiro (2006), os quais investigaram o escoamento no padrão de golfadas em tubulações horizontais. No presente trabalho, ênfase é dada ao escoamento ao longo de tubulações verticais.

De acordo com Issa e Kempf (2003), Ortega (2004) e Carneiro (2006), para modelar o escoamento em tubulações horizontais, considera-se o escoamento estratificado como escoamento base, a partir do qual o padrão de golfadas evolui. Como não existe este padrão de escoamento em tubulações verticais, no presente trabalho considerou-se uma geometria anular como

configuração base para o escoamento intermitente, de forma a manter o tratamento de fases segregadas na metodologia (em analogia ao escoamento estratificado na horizontal).

As seguintes hipóteses foram consideradas para a obtenção das equações de conservação:

- (i) tubulação horizontal ($\beta = 0$) ou vertical ($\beta = 90^\circ$);
- (ii) massa específica constante para a fase líquida (ρ_L);
- (iii) massa específica da fase gasosa (ρ_G) se comporta como gás ideal;
- (iv) viscosidade molecular constante μ ;
- (v) não há transferência de massa entre fases;
- (vi) fluxo difusivo viscoso axial desprezível;
- (vii) isotérmico
- (viii) existe salto de pressão na interface entre as fases

Antes de apresentar as equações de conservação é conveniente introduzir algumas definições.

A fração volumétrica do gás α_G (ou fração de vazio) e do líquido α_L , também chamado de *holdup* podem ser definidas como

$$\alpha_G = \frac{\forall_G}{\forall} = \frac{A_G}{A} \quad (3.1)$$

$$\alpha_L = \frac{\forall_L}{\forall} = \frac{A_L}{A} \quad (3.2)$$

onde o volume é igual $\forall = A dx$, A é a área da seção transversal, e dx um comprimento infinitesimal da direção axial do escoamento. Os subscritos G e L representam as fases gasosa e líquida, respectivamente. Naturalmente, que seguinte equação de restrição deve ser respeitada:

$$\alpha_G + \alpha_L = 1 \quad (3.3)$$

Conforme descrito acima, ao derivar o Modelo de Dois Fluidos em sua forma unidimensional, médias das grandezas do escoamento são realizadas ao longo da seção transversal do duto.

A definição da média de uma dada grandeza F na seção transversal é

$$\langle F \rangle = \frac{\int F dA}{A}, \quad (3.4)$$

e a média de F relativa a uma fase qualquer k , ponderada pela sua fração volumétrica α_k é

$$\langle\langle F_k \rangle\rangle = \frac{\int \alpha_k F_k dA}{\int \alpha_k dA} \quad (3.5)$$

As velocidades superficiais do gás U_{SG} e do líquido U_{SL} são definidas como as velocidades que seriam obtidas se somente uma fase escoasse na tubulação

$$U_{SG} = \frac{\dot{V}_G}{A} = U_G \alpha_G \quad ; \quad (3.6)$$

$$U_{SL} = \frac{\dot{V}_L}{A} = U_L \alpha_L \quad (3.7)$$

onde \dot{V} é a vazão volumétrica e U_G (ou $\langle U_G \rangle$) e U_L (ou $\langle U_L \rangle$) são as velocidades médias na seção transversal da fases gasosas e líquida.

A velocidade de mistura é dada pela soma das velocidades superficial

$$U_M = U_{SG} + U_{SL} \quad (3.8)$$

3.1 Equações de Conservação

O Modelo de Dois Fluidos consiste de uma equação de conservação para cada fase.

Conservação de Massa para o Gás

$$\frac{\partial(\alpha_G \rho_G)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_G \rho_G U_G)}{\partial x} = 0 \quad (3.9)$$

Conservação de Massa para o Líquido

$$\frac{\partial(\alpha_L \rho_L)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_L \rho_L U_L)}{\partial x} = 0 \quad (3.10)$$

Conservação de Quantidade de Movimento Linear para o Gás:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_G \rho_G U_G)}{\partial t} + \frac{\partial(C_G \alpha_G \rho_G U_G^2)}{\partial x} = \\ -\alpha_G \frac{\partial P_{Gi}}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_G (P_G - P_{Gi})}{\partial x} - \alpha_G \rho_G g \sin \beta - \tau_{wG} \frac{S_G}{A} - \tau_i \frac{S_i}{A} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Conservação de Quantidade de Movimento Linear para o Líquido:

$$\frac{\partial(\alpha_L \rho_L U_L)}{\partial t} + \frac{\partial(C_L \alpha_L \rho_L U_L^2)}{\partial x} = -\alpha_L \frac{\partial P_{Li}}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_L (P_L - P_{Li})}{\partial x} - \alpha_L \rho_L g \sin \beta - \tau_{wL} \frac{S_L}{A} + \tau_i \frac{S_i}{A} \quad (3.12)$$

onde nas Equações (3.6) a (3.12), os subscritos G , L e i referem-se à fase gasosa, líquida e interface, respectivamente. U é a velocidade média na seção transversal, α é a fração volumétrica, ρ é a massa específica. P é a pressão, A é a área da seção transversal do duto, β é a inclinação do duto, x e t correspondem às coordenadas axial e temporal, respectivamente. τ_w é a tensão de cisalhamento com a parede, τ_i é a tensão de cisalhamento da interface gás-líquido, S é o perímetro molhado da fase k , S_i é o perímetro da interface gás-líquido, g é a aceleração da gravidade e C é o parâmetro de distribuição de quantidade de movimento (Montini, 2011).

Para complementar a definição do sistema de equações apresentado, diversas equações adicionais de fechamento precisam ser introduzidas. É necessário definir as configurações geométricas básicas de referência, introduzir equações de estado para determinar a massa específica do gás, incorporar equações para a determinação das tensões cisalhantes na parede e na interface. Finalmente é preciso definir como obter o salto de pressão e o parâmetro de fluxo de quantidade de movimento.

3.2 Parâmetros Geométricos

Para escoamento horizontal ou quase horizontal, a configuração básica utilizada para avaliar os parâmetros geométricos do escoamento é de um escoamento estratificado, conforme recomendado por Issa e Kempf (2003) e Carneiro (2006). Já para o escoamento na vertical, a configuração básica considerada é de escoamento anular. Ambos os casos serão apresentados a seguir.

3.2.1 Escoamento estratificado

Os parâmetros geométricos para escoamento estratificado encontram-se ilustrados na Figura 3.1,

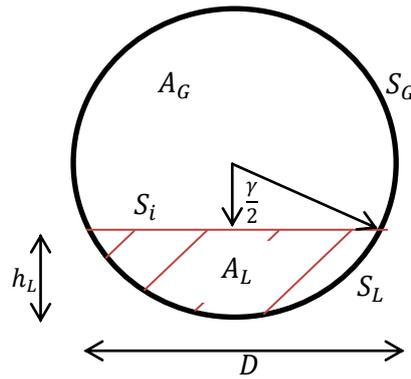


Figura 3.1 – Escoamento estratificado.

e podem ser obtidos a partir de

$$\alpha_G = \frac{1}{\pi} \left[\cos^{-1}(\xi) - \xi \sqrt{1 - \xi^2} \right] \quad (3.13)$$

$$S_G = D \cos^{-1}(\xi) \quad ; \quad S_L = \pi D - S_G \quad ; \quad S_i = D \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.14)$$

$$A_G = \frac{D}{4} [S_G - S_i \xi] \quad ; \quad A_L = \frac{\pi D^2}{4} - A_G \quad (3.15)$$

$$\xi = 2 \frac{h_L}{D} - 1 \quad ; \quad \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = -\xi \quad ; \quad \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{1 - \xi^2} \quad ; \quad (3.16)$$

3.2.2 Escoamento anular

No caso de escoamento vertical, os parâmetros geométricos podem ser obtidos a partir da configuração anular ilustrada na Fig.3.2, e são:

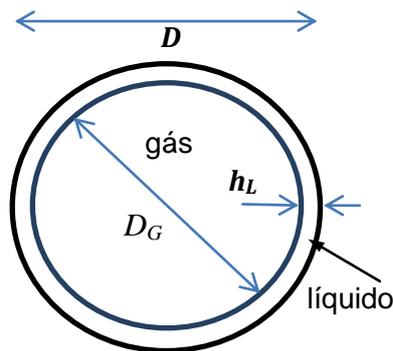


Figura 3.2 – Geometria do escoamento anular

$$\alpha_G = \left(1 - \frac{2h_L}{D}\right)^2 \quad (3.17)$$

$$S_G = 0 \quad ; \quad S_L = \pi D; \quad S_i = \pi(D - 2h_L) \quad (3.18)$$

$$D_G = D - 2h_L \quad ; \quad A_G = \frac{\pi}{4} D_G^2 \quad ; \quad A_L = \frac{\pi D^2}{4} - A_G \quad (3.19)$$

$$h_L = \frac{D}{2} (1 - \sqrt{\alpha_G}) \quad (3.20)$$

3.3 Equações de Estado

Conforme mencionado anteriormente, a massa específica do líquido é considerada constante e o gás se comporta como gás ideal. Segundo Issa e Kempf (2003), os efeitos de compressibilidade devem ser importantes nestes tipos de escoamento uma vez que, quando as golfadas se formam, as variações temporais e espaciais da pressão (e, portanto, da densidade) podem atingir até 40%.

Dessa forma, a massa específica do gás pode ser obtida por:

$$\rho_G = \frac{P_G}{R_G T_{ref}} \approx \frac{P_{Gi}}{R_G T_{ref}} \quad (3.21)$$

onde R_G é a constante do gás, e T_{ref} é a temperatura de referência do escoamento isotérmico. A pressão média do gás P_G é considerada, por simplicidade, igual ao valor na interface (P_{Gi}), uma vez que a altura hidrostática associada é desprezível.

3.4 Tensões Cisalhantes

As tensões de cisalhamento na parede e na interface podem ser avaliadas em função de coeficientes de atrito, considerando-se escoamento localmente hidrodinamicamente desenvolvido, de acordo com:

$$\tau_{wG} = \frac{1}{2} f_G \rho_G |U_G| U_G \quad (3.22)$$

$$\tau_{wL} = \frac{1}{2} f_L \rho_L |U_L| U_L \quad (3.23)$$

$$\tau_i = \frac{1}{2} f_i \rho_G |U_G - U_L| (U_G - U_L) \quad (3.24)$$

Para o fator de atrito, foram utilizadas as correlações recomendadas nos trabalhos de Issa e Kempf (2003), Bonizzi (2003) e posteriormente Ortega (2004) e Carneiro (2006), conforme a Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Correlações para o fator de atrito

	Regime Laminar	Regime Turbulento
f_L (estratificado e anular)	$\frac{24}{\text{Re}_{sL}}$ (Hand, 1991)	$0,0262(\alpha_L \text{Re}_{sL})^{-0,139}$ (Spedding e Hand, 1997)
f_G (estratificado)	$\frac{16}{\text{Re}_G}$ (Hagen-Poiseuille)	$0,046(\text{Re}_G)^{-0,25}$ (Taitel e Dukler, 1976)
f_i (estratificado)	$\frac{16}{\text{Re}_G}$ (Hagen-Poiseuille)	$0,046(\text{Re}_i)^{-0,25}$ (Taitel e Dukler, 1976)
f_i (anular) $\xi = \left[1 + 24 \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{1/3} \frac{h_L}{D} \right]$	$\xi \frac{16}{\text{Re}_G}$ (Whalley e Hewitt, 1978)	$\xi 0,046(\text{Re}_i)^{-0,25}$ (Whalley e Hewitt, 1978)

Os números de Reynolds referentes a cada fase e interface foram definidos conforme Taitel e Dukler (1976):

$$\text{Re}_{sL} = \frac{\rho_L \alpha_L U_{sL} D}{\mu_L} \quad (3.25)$$

$$\text{Re}_L = \frac{\rho_L U_L D_{h,L}}{\mu_L} \quad ; \quad D_{h,L} = \frac{4A_L}{S_L} \quad (3.26)$$

$$\text{Re}_g = \frac{\rho_G U_G D_{h,G}}{\mu_G} \quad ; \quad D_{h,G} = \frac{4A_G}{(S_G + S_i)} \quad (3.27)$$

$$\text{Re}_i = \frac{\rho_G |U_G - U_L| D_{h,G}}{\mu_G} \quad (3.28)$$

onde μ_G e μ_L são as viscosidades dinâmicas do gás e do líquido, respectivamente.

Considerou-se regime laminar para número de Reynolds inferior a 2000, e regime turbulento para número de Reynolds superior a 2100. Entre estes dois valores, o fator de atrito foi obtido através de uma interpolação linear entre os valores correspondentes aos dois regimes de forma a evitar variações abruptas que poderiam causar instabilidades numéricas.

Vale observar que para o caso vertical, como a configuração básica é anular, não existe contato do gás com a parede, conseqüentemente, o fator de atrito f_G é igual a zero.

3.5

Parâmetro de Fluxo de Quantidade de Movimento (C_k)

O parâmetro de fluxo (também denominado parâmetro de forma) é definido da seguinte maneira:

$$C_k = \frac{\langle\langle U_k^2 \rangle\rangle}{\langle\langle U_k \rangle\rangle^2} = \frac{\langle\alpha_k U_k^2\rangle}{\alpha_k \langle\langle U_k \rangle\rangle^2} = \frac{\int \alpha_k U_k^2 dA \int \alpha_k dA}{(\int \alpha_k U_k dA)^2}, \quad (3.29)$$

e atua como um multiplicador no fluxo de quantidade de movimento (termo convectivo).

Para escoamentos monofásicos totalmente desenvolvidos, é possível determinar os valores do parâmetro de forma através da integração dos perfis analíticos de velocidade. Para o caso laminar (escoamento de Poiseuille),

$$C_k = \frac{\langle U^2 \rangle}{\langle U \rangle^2} = \frac{4}{3} = 1,33 \text{ é um resultado clássico da mecânica dos fluidos.}$$

Escoamentos turbulentos apresentam perfis mais achatados, portanto há a tendência de se obter valores inferiores àquele obtido para o caso laminar. Tomando por exemplo o perfil de potência 1/7, o valor analítico do fator de forma se torna aproximadamente $C_k = 1,02$.

A introdução de C_k tem o objetivo de restaurar alguma informação sobre a distribuição do escoamento ao longo da seção transversal. Song e Ishii, (2003) avaliaram a influência deste parâmetro para o escoamento no padrão de bolhas dispersas, considerando-o, no entanto constante, dependendo apenas da geometria e condições de entrada. Montini (2011) argumenta que, de uma forma geral, este parâmetro deve variar com as densidades, velocidades e frações volumétricas das fases, porém, suas análises foram realizadas considerando C_k constante. No presente trabalho, também considerou-se o parâmetro de forma C_k constante.

3.6

Distribuição de Pressão Hidrostática

Analisando as Eqs. (3.11) e (3.12) observa-se a presença do seguinte termo, $-\partial \alpha_k (P_k - P_{ki}) / \partial x$. Este termo reflete a variação da pressão na seção transversal da tubulação, pois incorpora a diferença entre a pressão média da fase k na seção transversal, $P_k = \langle P_k \rangle$, e o valor da mesma na interface P_{ki} . Um resultado clássico da literatura estabelece que o sistema de equações do Modelo de Dois Fluidos é incondicionalmente mal-posto se a distribuição de pressões for considerada constante ao longo da seção transversal, a não ser

para o caso particular em que $U_L = U_G$. Banerjee e Chan (1980) mostraram que a incorporação de uma distribuição hidrostática de pressão na seção aumenta a região para a qual o modelo é bem posto.

A pressão média do líquido na seção transversal pode ser obtida para um escoamento estratificado ao longo da tubulação com diâmetro D , inclinada em relação a horizontal de ângulo β , da Fig. 3.3, como:

$$\langle P_L \rangle = \frac{1}{A} \int_0^{h_L} P_L(y) b dy = P_{Li} + \frac{1}{A} \int_0^{h_L} \rho_L g \cos \beta (h_L - y) b dy \quad (3.30)$$

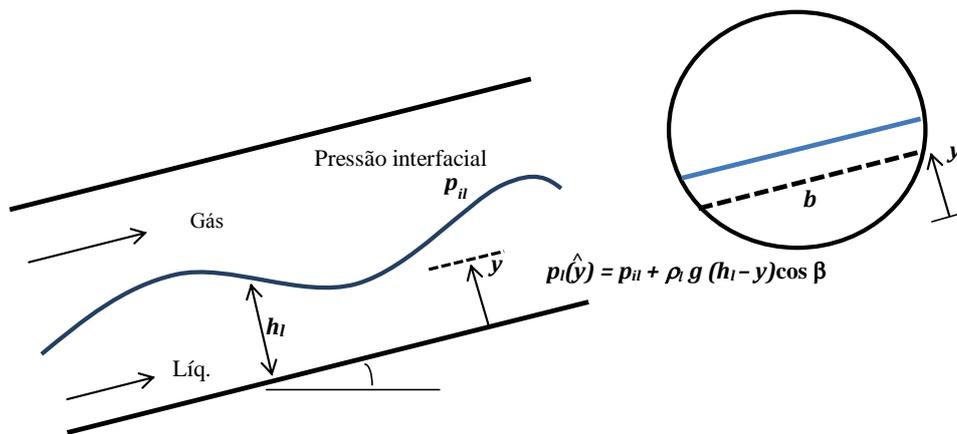


Figura 3.3. Aproximação hidrostática para o perfil de pressão no escoamento estratificado.

Logo, o gradiente da diferença $\langle P_L \rangle - P_{Li}$ pode ser obtido através de expressão a seguir, onde $\langle \ \rangle$ será omitido para não carregar a apresentação

$$\frac{\partial \alpha_L (P_L - P_{Li})}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_L \int_0^{h_L} \rho_L g \cos \beta (h_L - y) b dy \right) \quad (3.31)$$

Utilizando a regra de Leibniz, é possível obter:

$$\frac{\partial \alpha_L (P_L - P_{Li})}{\partial x} = \alpha_L \rho_L g \cos \beta \frac{\partial h_L}{\partial x} \quad (3.32)$$

Um procedimento análogo pode ser realizado para a equação de quantidade de movimento da fase gasosa.

$$\frac{\partial \alpha_G (P_G - P_{Gi})}{\partial x} = \alpha_G \rho_G g \cos \beta \frac{\partial h_L}{\partial x} \quad (3.33)$$

Note que no caso de um escoamento na vertical, a contribuição deste termo é nula.

3.7 Salto de Pressão na Interface

A diferença de pressão através da interface é outro parâmetro usado para se obter o bom condicionamento das equações de conservação, Eqs. (3.11) e (3.12). A diferença $(P_{Gi} - P_{Li})$ pode ser estimada em função da tensão superficial σ , e da curvatura da interface κ , pela equação de Young-Laplace:

$$(P_{Gi} - P_{Li}) = \sigma \kappa, \quad \text{com} \quad \kappa = \frac{1}{R} \quad (3.34)$$

onde R é o raio de curvatura principal da superfície elementar ao redor de uma dada posição.

A pressão do líquido na interface pode ser eliminada da equação de conservação, relacionando-a com a pressão do gás na interface, de acordo com

$$\frac{\partial P_{Li}}{\partial x} = \frac{\partial P_{Gi}}{\partial x} - \sigma \frac{\partial \kappa}{\partial x} \quad (3.35)$$

Para avaliar o raio de curvatura é conveniente analisar separadamente o escoamento estratificado e anular.

3.7.1 Escoamento estratificado

Para uma geometria correspondente ao escoamento estratificado (Fig. 3.4), pode-se assumir que a curvatura relevante se dá na direção axial, a qual pode ser definida através da taxa de variação do ângulo θ ao longo da coordenada s :

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{\partial \theta}{\partial s} \quad (3.36)$$

onde R representa o raio do círculo osculador à interface no ponto P .

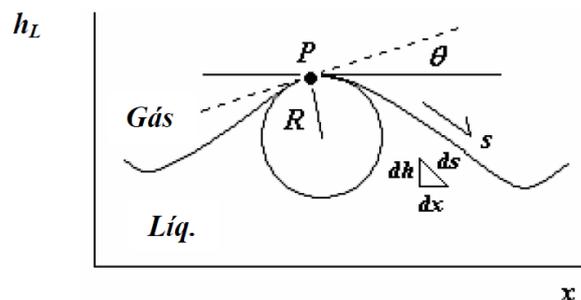


Figura 3.4 Interface gás-líquido e definições geométricas para o cálculo da curvatura. Carneiro (2006).

Para estimar a curvatura da interface, observa-se que para o ponto P da Fig. 3.4, tem-se

$$\tan \theta = \frac{\partial h_L}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 h_L}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \tan \theta = \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dx} \quad (3.37)$$

Adicionalmente, uma vez que $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$, pode-se escrever

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{\partial^2 h_L}{\partial x^2}}{1 + \left(\frac{\partial h_L}{\partial x}\right)^2} \quad (3.38)$$

Observando o triângulo retângulo apontado na Fig. 3.4, é possível estabelecer que: $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h_L}{\partial x}\right)^2}$. Utilizando a regra da cadeia e a definição da curvatura, finalmente obtém-se que:

$$\kappa = \frac{\frac{\partial^2 h_L}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial h_L}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (3.39)$$

Considerando-se ângulos pequenos ($\theta \ll 1$), é possível escrever:

$\frac{\partial h_L}{\partial x} = \tan \theta \approx \theta$, e $1 + \left(\frac{\partial h_L}{\partial x}\right)^2 \approx 1$. Essa aproximação é consistente com a hipótese de longos comprimentos de onda (Ramshaw and Trapp, 1978). Portanto, tem-se que:

$$\kappa \approx \frac{\partial^2 h_L}{\partial x^2} \quad (3.40)$$

logo

$$\frac{\partial P_{Li}}{\partial x} = \frac{\partial P_{Gi}}{\partial x} - \sigma \frac{\partial^3 h_L}{\partial x^3} \quad (3.41)$$

3.7.2

Escoamento anular

Segundo Kawaji e Banerjee (1987), para a geometria anular, dois raios de curvatura são relevantes, o primeiro na direção axial, tal qual ocorre no escoamento estratificado, $1/R_1 = \partial^2 h_L / \partial x^2$; sendo o segundo na direção radial devido à geometria circular, $1/R_2 = 2/D_G = 2/(D - 2h_L)$, conforme mostrado na Fig. 3.1. Assim,

$$\kappa = \frac{\partial^2 h_L}{\partial x^2} + \frac{2}{D - 2h_L} \quad (3.42)$$

A derivada axial do segundo termo de curvatura pode ser obtida utilizando a regra da cadeia, e a Eq. (3.17) como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{D-2h_L} \right) = \frac{\partial}{\partial h_L} \left(\frac{2}{D-2h_L} \right) \frac{\partial h_L}{\partial x} = \left(\frac{4}{(D-2h_L)^2} \right) \frac{\partial h_L}{\partial x} = \left(\frac{4}{D^2 \alpha_G} \right) \frac{\partial h_L}{\partial x} \quad (3.43)$$

O salto de pressão, pode então ser escrito como

$$\frac{\partial P_{Li}}{\partial x} = \frac{\partial P_{Gi}}{\partial x} - \sigma \frac{\partial^3 h_L}{\partial x^3} - \left(\frac{4 \sigma}{D^2 \alpha_G} \right) \frac{\partial h_L}{\partial x} \quad (3.44)$$

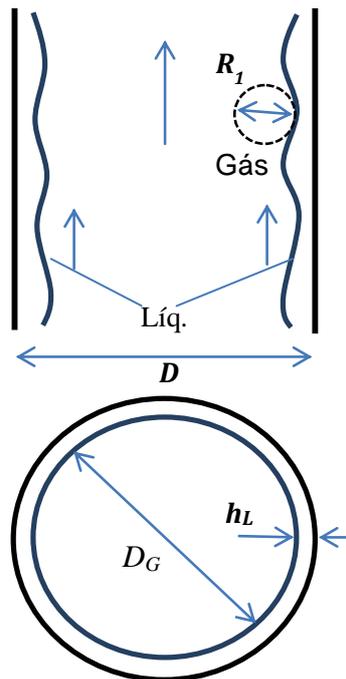


Figura 3.5 – Raios de curvatura da geometria anular

3.8

Equações de Conservação de Quantidade de Movimento Linear

As equações de conservação de quantidade de movimento linear para o gás e líquido pode ser rescritas em função somente da pressão do gás na interface como

$$\frac{\partial(\alpha_G \rho_G U_G)}{\partial t} + \frac{\partial(C_G \alpha_G \rho_G U_G^2)}{\partial x} = -\alpha_G \frac{\partial P_{Gi}}{\partial x} - \alpha_G \rho_G g \cos \beta \frac{\partial h_L}{\partial x} - \alpha_G \rho_G g \sin \beta - \tau_{wG} \frac{S_G}{A} - \tau_i \frac{S_i}{A} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial(\alpha_L \rho_L U_L)}{\partial t} + \frac{\partial(C_L \alpha_L \rho_L U_L^2)}{\partial x} = -\alpha_L \frac{\partial P_{Gi}}{\partial x} - \alpha_L \rho_L g \cos \beta \frac{\partial h_L}{\partial x} + \alpha_L \sigma \frac{\partial^3 h_L}{\partial x^3} + \left(\frac{4 \sigma \alpha_L}{D^2 \alpha_G} \right) \frac{\partial h_L}{\partial x} \sin \beta - \alpha_L \rho_L g \sin \beta - \tau_{wL} \frac{S_L}{A} + \tau_i \frac{S_i}{A} \quad (3.46)$$

Na Eq. (3.46), $\sin \beta$ foi incluído no segundo termo de curvatura da configuração vertical, para generalizar a expressão do salto de pressão, de forma a ser aplicada tanto para o caso horizontal quanto vertical.

3.9 Análise de Hiperbolicidade

Como mencionado, o processo de média para a obtenção da modelagem 1D do Modelo de Dois Fluidos leva à perda de informação relativa à transferência de massa, quantidade de movimento e energia, e o sistema de equações pode ser posto. Segundo Courant e Lax (1949), uma modelagem é dita bem posta, quando as equações constituintes atendem às condições de Hadamard, isto é:

- A solução existe
- A solução é única
- A solução depende continuamente das condições iniciais e de contorno

Um problema mal posto não possui solução única, e qualquer solução obtida em problemas deste tipo faz parte de um conjunto infinito de soluções, todas elas igualmente inválidas. A aplicação de uma perturbação infinitesimal implicará na obtenção de uma nova solução que pode diferir significativamente da solução original.

É preciso enfatizar que há uma distinção entre instabilidades intrínsecas ao escoamento (uma característica física) e aquelas observadas devido ao fato do problema de valor inicial ser mal-posto. A estabilidade do escoamento associa-se à capacidade de restaurar o seu estado inicial após ter sido perturbado. O crescimento ou decaimento das perturbações é determinado pela dinâmica do escoamento. Ao contrário da estabilidade, o fato do problema ser bem- ou mal-posto é uma propriedade da modelagem, e não do escoamento.

Visando facilitar o estudo de estabilidade do sistema de equações, e seguindo recomendação de Carneiro (2005), considerou-se que o gás também é incompressível.

Para determinar se o sistema de equações é bem ou mal posto, é conveniente escrever sistema de equações diferenciais parciais, expandindo as derivadas na seguinte forma

$$\rho_G \frac{\partial \alpha_G}{\partial t} + \alpha_G \rho_G \frac{\partial U_G}{\partial x} + \rho_G U_G \frac{\partial \alpha_G}{\partial x} = 0 \quad (3.47)$$

$$\rho_L \frac{\partial \alpha_L}{\partial t} + \alpha_L \rho_L \frac{\partial U_L}{\partial x} + \rho_L U_L \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} = 0 \quad (3.48)$$

$$\alpha_G \rho_G \frac{\partial U_G}{\partial t} + \rho_G U_G \frac{\partial \alpha_G}{\partial t} + 2C_G \alpha_G \rho_G U_G \frac{\partial U_G}{\partial x} + C_G \rho_G U_G^2 \frac{\partial \alpha_G}{\partial x} + \alpha_G \frac{\partial P_{Gi}}{\partial x} + \alpha_G \rho_G g \cos \beta \mathcal{D} + \alpha_G \rho_G g \sin \beta + \tau_{wG} \frac{S_G}{A} + \tau_i \frac{S_i}{A} = 0 \quad (3.49)$$

$$\alpha_L \rho_L \frac{\partial U_L}{\partial t} + \rho_L U_L \frac{\partial \alpha_L}{\partial t} + 2C_L \alpha_L \rho_L U_L \frac{\partial U_L}{\partial x} + C_L \rho_L U_L^2 \frac{\partial \alpha_L}{\partial x} + \alpha_L \frac{\partial P_{Li}}{\partial x} - \alpha_L \sigma \rho \mathcal{D} + \alpha_L \rho_L g \cos \beta \mathcal{D} + \alpha_L \rho_L g \sin \beta + \tau_{wL} \frac{S_L}{A} - \tau_i \frac{S_i}{A} = 0 \quad (3.50)$$

Estas equações podem ser escritas na forma matricial como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{B}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v} + \mathbf{C}(\mathbf{v}) = 0 \quad (3.51)$$

onde \mathbf{v} é o vetor de variáveis independentes, que no presente caso, contém a solução do sistema representado pelo Modelo de Dois Fluidos

$$\mathbf{v} = [\alpha_G \ U_G \ U_L \ P_{Gi}]^T \quad (3.52)$$

Na Eq. (3.51) \mathbf{A} e \mathbf{B} são as matrizes *Jacobianas* de dimensão $n \times n$ e \mathbf{C} é um vetor coluna de dimensão n . O sistema definido pela Eq. (3.51) representa um problema de valor inicial, e consiste em achar a solução para o sistema na região $0 \leq x \leq L$ (L é o comprimento da tubulação) e $t \geq 0$, sujeito à condição inicial $\mathbf{v}(0, x) = \mathbf{v}_{ini}(x)$.

Para avaliar os coeficientes do sistema dado pela Eq.(3.51) e determinar a região que o sistema é bem/mal posto, considerou-se ambas as fases como incompressíveis. Carneiro (2006) realizou uma pequena análise levando em consideração os efeitos de compressibilidade do gás. A formulação fica extremamente mais complexa e o comportamento do sistema é semelhante ao do caso incompressível, tendo sido adotado neste trabalho.

As matrizes *Jacobianas* \mathbf{A} e \mathbf{B} para fases incompressíveis são

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \rho_G & 0 & 0 & 0 \\ -\rho_L & 0 & 0 & 0 \\ \rho_G U_G & \rho_G \alpha_G & 0 & 0 \\ -\rho_L U_L & 0 & \rho_L \alpha_L & 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \rho_G U_G & \rho_G \alpha_G & 0 & 0 \\ -\rho_L U_L & 0 & \rho_L \alpha_L & 0 \\ \rho_G C_G U_G^2 + \alpha_G \rho_G g \cos \beta \mathcal{D} & 2\rho_G \alpha_G C_G U_G & 0 & \alpha_G \\ -\rho_L C_L U_L^2 + \alpha_L \rho_L g \cos \beta \mathcal{D} - \alpha_L \wp \mathcal{D} \sigma & 0 & 2\rho_L \alpha_L C_L U_L & \alpha_L \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

onde

$$\mathcal{D} = \frac{\partial h_L}{\partial \alpha_G} \quad (3.55)$$

$$\wp = \left(\frac{4}{D^2 \alpha_G} \sin \beta + \frac{\partial \kappa_{ax}}{\partial h_L} \right) ; \quad \kappa_{ax} = \frac{\partial^2 h_L}{\partial x^2} \quad (3.56)$$

O termo \mathcal{D} assume diferentes expressões, dependendo se o padrão é anular ou estratificado. No caso estratificado, derivando a Eq. (3.13) combinada com a Eq. (3.16), tem-se

$$\mathcal{D} = \frac{\partial h_L}{\partial \alpha_G} = \frac{A}{dA_G / dh_L} = -\frac{\pi D}{4 \text{sen}(\gamma/2)} \quad (5.57)$$

Já para o caso anular, derivando a Eq. (3.17) obtêm-se

$$\mathcal{D} = -\frac{D}{4 \sqrt{\alpha_G}} \quad (3.58)$$

Para verificar o caráter matemático das equações, as *características* do sistema devem ser avaliadas. As características λ_n são definidas tais que:

$$\det(\mathbf{B} - \lambda_n \mathbf{A}) = 0 \quad (3.59)$$

A equação acima possui n raízes (λ_n) para as n equações do sistema, o qual é considerado bem-posto se, e somente se, todas as raízes forem reais. É importante notar que a matriz \mathbf{C} não influencia no cálculo de λ_n . Para o Modelo de Dois Fluidos, isto significa que os termos de fonte algébricos (por exemplo, provenientes das tensões na parede e da tensão interfacial) não influenciam no caráter matemático do modelo.

Tendo como base as raízes λ_n , é possível definir uma classificação para o sistema de equações diferenciais parciais como descrito abaixo:

- Se todas as n raízes (λ_n) forem reais e distintas, o sistema é *hiperbólico*
 - Se houver a presença de raízes reais iguais, o sistema é *parabólico*
 - Se raízes complexas forem obtidas, o sistema é *elíptico* (as raízes complexas serão pares conjugados, uma vez que os coeficientes das matrizes **A** e **B** são reais)

Se todas as características forem reais e distintas, o problema é bem-posto e a informação se propaga no domínio real. O número de grandezas a serem prescritas para o problema de valor inicial equivale ao número de características obtidas. Características complexas implicam na propagação de informação do plano complexo para o plano real e o problema de valor inicial é mal-posto. A obtenção de solução seria possível com a prescrição de condições de contorno em todo o espaço-tempo (problema de valor de contorno), o que implicaria na necessidade (fisicamente impossível) de prover informações de tempos futuros (Prosperetti e Tryggvason, 2009).

Quando problemas transientes foram sistemas hiperbólicos ou parabólicos são bem-postos, enquanto que problemas elípticos são mal-postos.

A Eq. (3.51) é normalmente denominada equação característica e as raízes do sistema, dadas por $\lambda_n = \mathbf{BA}^{-1} = \frac{dx}{dt}$, determinam as velocidades características, que também definem as direções ao longo das quais as informações se propagam através dos campos de escoamento.

Resolvendo-se a Eq. (3.59), obtêm-se quatro autovalores,

$$[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad 0 \quad 0] \quad (3.60)$$

sendo dois nulos. Os dois autovalores diferentes de zero são dados pelas raízes da equação quadrática na forma característica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, i.e.:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (3.61)$$

$$a = \alpha_G \rho_L + \alpha_L \rho_G \quad (3.62)$$

$$b = -2(\alpha_G \rho_L U_L C_L + \alpha_L \rho_G U_G C_G) \quad (3.63)$$

$$c = \alpha_L \rho_G U_G^2 C_G + \alpha_G \rho_L U_L^2 C_L - \alpha_G \alpha_L \mathcal{D}[(\rho_G - \rho_L) g \cos \beta - \wp \sigma] \quad (3.64)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (3.65)$$

Para garantir a hiperbolicidade do sistema de equações, isto é, para definir se o sistema é bem posto, é necessário que $\Delta \geq 0$, que por sua vez leva ao seguinte critério:

$$\begin{aligned} & -(C_G U_G - C_L U_L)^2 - \\ & \frac{(\rho_L \alpha_G + \rho_G \alpha_L)}{\rho_G \rho_L \alpha_G \alpha_L} \left[(\rho_G U_G^2 \alpha_L C_G (C_G - 1) + \rho_L U_L^2 \alpha_G C_L (C_L - 1)) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\alpha_G}{\rho_G} + \frac{\alpha_L}{\rho_L} \right) \mathcal{D} (g \cos \beta (\rho_L - \rho_G) - \wp \sigma) \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

Note que se o parâmetro de forma for igual a 1, a Eq. (3.66) se simplifica para

$$-(U_G - U_L)^2 - \left(\frac{\alpha_G}{\rho_G} + \frac{\alpha_L}{\rho_L} \right) \mathcal{D} (g \cos \beta (\rho_L - \rho_G) - \wp \sigma) \geq 0 \quad (3.67)$$

Se adicionalmente o salto de pressão for desprezado ($\wp = 0$), obtêm-se a Modelo de Dois Fluidos “clássico” (Issa e Kempf, 2003; Carneiro, 2006; Montini, 2011).

$$-(U_G - U_L)^2 - \left(\frac{\alpha_G}{\rho_G} + \frac{\alpha_L}{\rho_L} \right) (g \cos \beta \mathcal{D} (\rho_L - \rho_G)) \geq 0 \quad (3.68)$$

Pode-se observar então que o Modelo de Dois Fluidos “clássico” para um escoamento horizontal só será bem posto se a distribuição hidrostática de pressão for introduzida, conforme observado por Bonizzi (2003), entre outros. Note ainda que o modelo “clássico” para um escoamento vertical será sempre mal posto para qualquer par de velocidades sempre $U_G \neq U_L$, pois $\cos \beta = 0$.

Ainda analisando a influência do parâmetro de forma na Eq. (3.66), pode-se observar que o lado esquerdo da desigualdade revela que, se a velocidade do gás for maior que a velocidade do líquido (o que normalmente ocorre para escoamento estratificado, próximo à transição para o regime de golfadas), o parâmetro C_G torna o critério mais restritivo, enquanto que o contrário ocorre para C_L , contribuindo para o aumento da região em que o modelo é bem posto.

Issa e Montini (2010) testaram diversos valores de $C_L \geq 1$ no Modelo de

Dois Fluidos para a simulação do escoamento de golfadas. No entanto, a análise não foi considerada conclusiva, pois os valores do parâmetro necessários para tornar o modelo bem-posto pareceram fisicamente pouco plausíveis. Apesar de ter sido possível obter soluções independentes da malha mesmo em casos mal-postos (sem adição de C_L), os valores dos parâmetros característicos das golfadas não apresentaram boa concordância com os dados experimentais.

Para estimar o termo relacionado à variação da curvatura local da interface com o nível de líquido, é útil a introdução de uma perturbação de acordo com a seguinte expressão:

$$h_L = h_{L,eq} + h_{L,0} e^{i(\omega t - \kappa_p x)} \quad (3.69)$$

onde $h_{L,eq}$ é o nível de líquido de equilíbrio. O segundo termo representa a flutuação na altura do líquido, h'_L , com $h_{L,0}$, ω e κ_p correspondendo a amplitude da perturbação, frequência angular e número de onda. Assumindo por simplicidade κ_p constante ao longo da coordenada axial, tem-se que:

$$\kappa_{ax} = \frac{\partial^2 h_L}{\partial x^2} = -\kappa_p^2 h_L \quad \therefore \quad \frac{\partial \kappa_{ax}}{\partial h_L} = -\kappa_p^2 \quad (3.70)$$

então

$$\wp = \left(\frac{4}{D^2 \alpha_G} \sin \beta - \chi_p^2 \right) \quad (3.71)$$

A Equação (3.66) pode ser rescrita como

$$\begin{aligned} & -(C_G U_G - C_L U_L)^2 - \\ & \frac{(\rho_L \alpha_G + \rho_G \alpha_L)}{\rho_G \rho_L \alpha_G \alpha_L} \left[(\rho_G U_G^2 \alpha_L C_G (C_G - 1) + \rho_L U_L^2 \alpha_G C_L (C_L - 1)) \right] \\ & - \left(\frac{\alpha_G}{\rho_G} + \frac{\alpha_L}{\rho_L} \right) \frac{\sigma D}{D^2} \left(Eo \cos \beta - \frac{4}{\alpha_G} \sin \beta + (\chi_p D)^2 \right) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

onde Eo é o número de Eötvös dado por

$$Eo = (\rho_L - \rho_G) \frac{g D^2}{\sigma} \quad (3.73)$$

representando a razão entre as forças de empuxo e devido à tensão superficial.

Para as simulações numéricas de alta resolução com o Modelo de Dois

Fluidos, à medida que a malha é refinada, menores comprimentos de onda são introduzidos na solução. É possível, portanto, que o termo devido ao salto de pressão possua algum efeito estabilizante, ao menos para perturbações cujos comprimentos de onda são da ordem do espaçamento da malha.

Segundo Montini (2011) e Holmås (2008), que analisaram escoamentos horizontais, o efeito da tensão superficial é indiscutivelmente físico e benéfico ao modelo, mesmo que pequeno para grande parte dos casos práticos. Ramshaw e Trapp (1978) argumentam que, apesar de exercer um efeito estabilizante sobre as menores escalas, a tensão superficial não é capaz de dissipar a energia recebida pela interação com as demais bandas do espectro. Assim, é possível que, mesmo que um determinado comprimento de onda seja (linearmente) estável pela ação da tensão superficial, sua amplitude poderá crescer através de mecanismos não lineares de transferência de energia de outros comprimentos de onda do espectro.

É possível notar, da equação acima, que para escoamento verticais ($\sin\beta = 1$), os termos devido às curvaturas nas direções axial e radial possuem sinais contrários. O termo devido à curvatura na direção axial possui um efeito estabilizante, portanto, tornando o critério menos restritivo. Já o termo devido à curvatura na direção radial possui sinal negativo e reduz o limite para o qual o modelo é bem-posto (tornando o critério mais restritivo). Fisicamente, o efeito desestabilizante do diferencial de pressão interfacial devido à curvatura na direção radial pode ser interpretado da seguinte maneira: se a interface for perturbada da sua posição de equilíbrio, a força devido à tensão superficial será maior nas posições em que o raio de curvatura for menor, portanto a interface será deslocada em direção ao centro da tubulação, ao invés de restaurada para a sua posição de equilíbrio.

O procedimento utilizado para obter a curva que separa a região onde o sistema de equações é bem posto e mal posto consiste em considerar constante a velocidade superficial do gás e ir gradualmente incrementando a velocidade superficial do líquido desde zero até que o critério desejado deixe de ser satisfeito. Quando isto acontece, o primeiro par de vazões volumétricas U_{SG} , U_{SL} , é determinado. O procedimento é repetido para toda a faixa de velocidades superficiais do gás. Para determinar o critério de bem/mal posto é necessário determinar a fração volumétrica da fase líquida (ou gasosa), que é obtida para a condição de escoamento em equilíbrio para dadas vazões volumétricas das fases, independente do padrão de escoamento esperado (Barnea e Taitel, 1994).

No caso horizontal, considera-se a condição de equilíbrio como sendo a de um escoamento estratificado e para o caso vertical, escoamento anular. Em ambas as situações, considera-se a aceleração nula. Assim, combinando-se as Eqs. (3.45) e (3.46), e eliminando-se o gradiente de pressão obtém-se a seguinte expressão:

$$-(\rho_L - \rho_G) g \sin \beta - \tau_{wL} \frac{S_L}{A_L} + \tau_{wG} \frac{S_G}{A_G} + \frac{\tau_i S_i}{A} \left(\frac{1}{\alpha_L} + \frac{1}{\alpha_G} \right) = 0 \quad (3.74)$$

Os valores do *hold-up* de equilíbrio podem ser obtidos através da Eq. (3.74), dados os valores para as velocidades superficiais de líquido e gás, por meio de um método iterativo qualquer (uma vez que se trata de uma equação não-linear). O procedimento escolhido aqui foi o método da secante (Press, 1992). Depois de calculado este parâmetro, verifica-se o critério dado pela Eq. (3.66).