

2

Modos Normais Não Lineares para Sistemas Discretos

A análise estrutural de sistemas sujeitos a grandes amplitudes de movimento quase sempre demanda a consideração das não linearidades inerentes à dinâmica do sistema. Entretanto, a análise das vibrações não lineares de estruturas é em geral um processo trabalhoso e demorado. Também, muitos fenômenos não lineares são de difícil identificação em sistemas descritos por um grande número de graus de liberdade. A redução de ordem do problema é uma abordagem apropriada para se contornar essas dificuldades, além de constituir um procedimento eficiente para obtenção de um entendimento adequado do comportamento dinâmico de sistemas não lineares. A análise modal não linear tem sido apresentada, de modo análogo à sua correspondente linear, como uma alternativa viável para obtenção de modelos de ordem reduzida de sistemas não lineares (Pierre *et al.*, 2006).

Caso um sistema hamiltoniano em equilíbrio seja levemente perturbado, então ele pode exibir vários tipos de comportamento dinâmico, entre os quais as oscilações periódicas. No caso de sistemas lineares, essas oscilações são conhecidas por modos normais. No caso de sistemas hamiltonianos não lineares, podem existir certas famílias de oscilações periódicas que tendem aos modos normais lineares do respectivo sistema dinâmico linearizado em torno da posição de equilíbrio. Essas famílias de movimentos são os modos normais não lineares (Montaldi *et al.*, 1990).

A análise modal não linear tem por base teórica dois teoremas relacionados à existência de soluções periódicas nos sistemas dinâmicos:

Teorema 1 (Liyapunov, 1947)

Para sistemas hamiltonianos com n graus de liberdade, cujos valores de frequência do correspondente problema linearizado não apresentam ressonâncias internas entre si, existem próximas à configuração estável de equilíbrio, n famílias de soluções periódicas preenchendo de modo suave os subespaços formados por variedades invariantes de duas dimensões que passam pelo ponto

de equilíbrio do sistema. Para qualquer nível fixo de energia, encontram-se próximas à configuração estável de equilíbrio n soluções periódicas (modos normais).

Esse resultado foi generalizado por Weistein (1973) para os casos onde existem ressonâncias internas cuja relação entre frequências pertence ao conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

Teorema 2 (Weistein, 1973)

Para um sistema hamiltoniano, existem, próximas ao ponto de equilíbrio estável, pelo menos n soluções periódicas para um dado nível fixo de energia. Algumas dessas soluções podem não ser uma continuação analítica dos modos normais lineares do sistema.

Esses dois teoremas provam a existência de soluções periódicas para sistemas com n graus de liberdade. O objetivo deste capítulo é apresentar as principais características, propriedades e metodologias de obtenção das soluções previstas pelos dois teoremas anteriormente mencionados.

2.1.

Histórico da análise modal não linear

Na análise estrutural, o conceito de modo normal está classicamente relacionado à teoria de vibrações lineares. Estender o conceito de modos normais para o caso não linear tem sido um grande desafio para muitos autores, em especial, porque o princípio da superposição dos efeitos não é satisfeito (Bouc e Bellizi, 2007). O principal objetivo dessa seção é apresentar de forma resumida o desenvolvimento histórico dessa busca pelo desenvolvimento de uma análise modal para sistemas estruturais não lineares.

Divide-se, para fins de um melhor entendimento, o desenvolvimento da análise não linear em seis fases:

- I. Primórdios (1889 – 1959);
- II. Formalização (1959 - 1966);
- III. Desenvolvimento teórico (1964-1997);
- IV. Variedades invariantes (1991-1994);
- V. Aplicações práticas (1994-atualmente);

Essa divisão não tem por pretensão ser definitiva, uma vez que a análise modal não linear não se encontra ainda completamente desenvolvida. Além do

que, cronologicamente algumas fases se sobrepõem. Escolhe-se para marco inicial de cada fase o surgimento de aspectos importantes no estudo dos modos normais não lineares. A seguir discute-se brevemente cada uma das fases, a Tabela 2-1 apresenta um resumo dos desenvolvimentos mais importantes de cada fase.

2.1.1.

Fase I – Primórdios (1889 – 1959)

O Teorema 1 de Lyapunov (1947), apresentado originalmente em seu trabalho de 1892, que trata da existência de soluções periódicas para sistemas não lineares é, de acordo com Kerschen e coautores (2009), o marco fundamental para estabelecimento da teoria da análise modal não linear. De acordo com Miklhin e Morgunov (2001), as soluções de Lyapunov possuem propriedades semelhantes aos modos normais lineares.

Alguns autores (Jezequel e Lamarque, 1991; Kerschen *et al*, 2009;) afirmam que, mesmo antes dos resultados obtidos por Lyapunov, desenvolvimentos como os teoremas de Poincaré (1889) são fundamentais para o embasamento do método das formas normais, e portanto de essencial importância para o desenvolvimento da teoria dos modos normais não lineares.

2.1.2.

Fase II – Formalização (1959 - 1966)

De acordo com Slater e Inman (1995), o conceito de modos normais para sistemas não lineares já era intuitivamente aceito até que Rosemberg, no início da década de 1960, propôs uma definição formal para esses movimentos particulares.

Após apresentar um trabalho sobre os modos normais lineares Rosemberg se volta para o desenvolvimento de uma definição formal de modos normais para sistemas não lineares, definindo-os como vibrações em uníssono e classificando-os em similares ou não similares (Rosemberg, 1960; 1961; 1962 e Rosemberg e Kuo, 1964). Essa definição é ampla o suficiente para que os modos normais lineares possam ser considerados como um caso particular (Rosemberg, 1966). De acordo com Ahmadian e Zamani (2009), o método proposto por Rosemberg permite um estudo qualitativo dos movimentos correspondentes aos modos normais não lineares.

Estágio	Ano	Pesquisadores	Fatos importantes
Fase I - Primórdios	1889	Poincaré	Teorema fundamental para o desenvolvimento do método das formas normais
	1947	Lyapunov	Teorema relativo à existência de soluções periódicas para sistemas não lineares
Fase II - Formalização	1960	Rosemberg	Definição
	1961	Rosemberg	Multiplicidade de modos
	1961	Rosemberg	Estudo da estabilidade
	1962	Rosemberg	Generalização para sistemas com n graus de liberdade
	1966	Rosemberg	Resumo das definições e métodos desenvolvidos
Fase III - Desenvolvimento Téorico	1964	Wah	Aplicação para sistemas contínuos
	1966 - 1972	Vários autores	Existência
	1965 - 1992	Vários autores	Estabilidade e Bifurcações
	1971 - 1994	Vários autores	Métodos para construção
Fase IV - Variedades Invariantes	1991	Shaw e Pierre	Idéia do método
	1993	Shaw e Pierre	Definição e método de derivação dos modos
	1994	Shaw e Pierre	Aplicação para sistemas contínuos
Fase V - Aplicações práticas	1994	Boivin e coautores	Multimodos
	1994	Nayfeh e Nayfeh	Variedades invariantes em variáveis complexas
	1999	Shaw e coautores	Aplicação para sistemas forçados
	2000	Pescheck	Método baseado no procedimento de Galerkin
	2000	Mazzilli, Soares e Baracho Neto	Método combinando multiplas escalas e elementos finitos para sistemas com muitos graus de liberdade
	2006	Shih e coautores	Formalização do método baseado nas variedades invariantes utilizando o método das formas normais
	2008	Andrianov	Definição de modos normais não lineares para sistemas contínuos sem separação exata entre variáveis de tempo e espaço
	1994 - atualmente	Vários autores	Aplicação dos modos normais não lineares para problemas práticos de engenharia.

Tabela 2-1 Desenvolvimento histórico da análise modal não linear.

De acordo com Qaisi (1997), Rosemberg concentra-se em seus trabalhos no desenvolvimento de métodos para construção de modos para sistemas discretos, conservativos e com certas condições de simetria. Os métodos têm alto caráter geométrico e empregam conceitos e técnicas da geodésia para resolver as equações integro-diferenciais que governavam a energia do movimento, quase sempre considerando somente não linearidades ímpares (Rosemberg, 1960; 1961 e 1962; Rosemberg e Kuo, 1964).

Desde os seus primeiros trabalhos Rosemberg (1961) já observa o fenômeno da multiplicidade (superabundância) de modos, um fenômeno sem correspondente na análise linear. Ele também apresenta um estudo da estabilidade desses modos (1961) e generaliza o método para sistemas com n graus de liberdade (1962),

concentrando-se após isso nas propriedades dos modos normais não similares (1964).

2.1.3.

Fase III – Desenvolvimento teórico (1964-1997);

Após aproximadamente cinco anos de pesquisa Rosenberg (1966) publica um trabalho sobre modos normais não lineares onde lança as bases em que se apoiam os desenvolvimentos subsequentes (Li *et al.*, 2006).

Essa fase consiste basicamente no esforço de vários pesquisadores, que, utilizando a definição de Rosenberg, a aplicou à construção dos modos normais não lineares e ao estudo de sua estabilidade e bifurcações em função de variações de determinados parâmetros do sistema, bem como do seu nível de energia (Apiwattanalungarn, 2003).

Assim as várias contribuições dessa fase relativas à definição teórica e construção analítica de modos normais não lineares concentraram-se basicamente em três frentes:

1. Existência dos modos normais para sistemas não lineares (Cooke e Struble, 1966; Pak e Rosenberg, 1968; Weistein, 1973; Montaldi *et al.*, 1990; Vito, 1972b);
2. Estabilidade e bifurcação dos modos normais não lineares: (Atkinson e Taksett, 1965; Rand, 1973; Vito, 1972a; Month e Rand, 1977; 1980; Pecelli e Thomas, 1980; Montaldi *et al.*, 1990; Caughey e Vakakis, 1991; Pak *et al.*, 1992);
3. Métodos para construção dos modos normais não lineares (Rand, 1971; Greenberg e Yang, 1971; Rand 1974).

Essa fase é marcada pelo estudo de exemplos teóricos com poucos graus de liberdade e com os parâmetros manipulados para obtenção de certos fenômenos essencialmente não lineares.

De acordo com Kerschen e coautores (2008), o trabalho seminal de Rosenberg permanece como uma curiosidade teórica até que ganha ímpeto com os trabalhos de Vakakis e Shaw e Pierre na década de 1990, o que inaugura a próxima fase do desenvolvimento histórico dos modos normais não lineares. Essa fase é importante para o entendimento pleno de fenômenos, conceitos e propriedades relativos aos modos normais não lineares. Nesse contexto cita-se o

trabalho de Wah (1964) que, de acordo com Andrianov (2008), é o primeiro a generalizar os conceitos desenvolvidos por Rosemberg para sistemas contínuos, e as pesquisas feitas por Anand (1972) e Rand e Vito (1972), alguns dos primeiros a estudar o fenômeno da ressonância interna e a propriedade de multiplicidade de modos em alguns sistemas dinâmicos. Citam-se também os estudos de pesquisadores chineses que, de acordo com Guojing e Jianguo (1998), desenvolvem durante a década de 1980 métodos de análise de problemas de autovalor para problemas não lineares utilizando as técnicas e definições de Rosemberg.

Nessa fase é importante ressaltar os trabalhos de Vakakis (1991, 1992, 1994) e Vakakis e Rand (1992) que apresentam diversas investigações sobre a existência, estabilidade e bifurcações dos modos normais não lineares a partir dos resultados de Rosemberg. Esses resultados encontram-se resumidos em um trabalho de Vakakis (1997).

2.1.4.

Fase IV – Variedades invariantes (1991-1994)

Os trabalhos de Vakakis e Shaw e Pierre marcam o início da década de 1990 como o período do ressurgimento do interesse nos modos normais não lineares (Kerschen *et al.*, 2009). Contudo, apesar de se constituir em importantes contribuições para o desenvolvimento da análise modal não linear, os trabalhos de Vakakis, tratam, na maior parte dos casos, de desenvolvimentos baseados nas idéias propostas por Rosemberg, sendo que os trabalhos de Shaw e Pierre, por seu completo ineditismo, inauguram uma nova fase na história da análise modal não linear tornando-a mais abrangente para diferentes problemas de vibração.

De acordo com Shi e coautores (2006), muitos autores enfatizam o movimento em uníssono, ignorando o fato que os modos normais não lineares podem ser diretamente obtidos da propriedade de invariância modal. Foi para esse fato que atentaram Shaw e Pierre em 1991, apresentando a idéia de uma nova definição e técnica de construção de modos normais não lineares, já que até então os métodos existentes só podiam ser aplicados a sistemas conservativos com simetrias específicas. A definição de Shaw e Pierre tem por base o conceito que um modo não linear é um movimento que se dá inteiramente dentro do subespaço definido por variedades invariantes.

Nesse contexto o trabalho de Shaw e Pierre (1991, 1993) é um marco no desenvolvimento dos modos normais não lineares, pois até então os estudos se baseavam unicamente na definição e métodos propostos por Rosemberg (Li *et al.*, 2006).

A vantagem da nova definição é que ela abrange sistemas não conservativos e sem a necessidade de condições específicas de simetrias, podendo ser aplicada a uma ampla gama de problemas não lineares e engloba a definição de Rosemberg como um caso particular. Posteriormente (Shaw e Pierre, 1994; Shaw, 1994) os conceitos desenvolvidos para sistemas discretos são estendidos para estruturas contínuas, aplicando-os primeiramente a vigas simplesmente apoiadas.

2.1.5.

Fase V – Aplicações práticas (1994-atualmente);

A quinta fase na história do desenvolvimento da análise modal não linear é marcada pelas aplicações práticas da definição e técnicas baseadas nas variedades invariantes para uma ampla gama de problemas dinâmicos não lineares.

Inicialmente devem ser destacados os trabalhos de Boivin e coautores (1994 e 1995) que generalizam o conceito baseado nas variedades invariantes de modos normais não lineares individuais para obtenção de multimodos.

Nayfeh e coautores (1994, 1996) desenvolvem uma técnica baseada nas variedades invariantes expressas em variáveis complexas, posteriormente aplicada a sistemas com ressonância interna.

Outra contribuição dessa fase é a extensão da teoria das variedades invariantes para sistemas com não linearidades inerciais (Hsieh *et al.*, 1994).

Shaw e coautores (1999) estendem o procedimento das variedades invariantes para sistemas forçados, pela adição de uma nova variável representando a variação da geometria das variedades invariantes com o tempo.

Pesheck (2000) desenvolve um novo método de obtenção dos modos normais não lineares que permite a aplicação das variedades invariantes para sistemas com forte não linearidade. O método consiste em uma aproximação numérica, expressando o par mestre em coordenadas polares e utilizando técnicas baseadas no procedimento de Galerkin para a solução numérica das equações diferenciais das variedades invariantes.

Outro desenvolvimento importante é a extensão feita por Pesheck e coautores (2001) dos conceitos baseados nas variedades invariantes para sistemas com ressonância interna (Lacarbonara e Camillaci, 2004).

Nessa fase as variedades invariantes multimodais são obtidas pelo método da projeção de Galerkin (Jiang *et al.*, 2004).

Jiang e coautores (2005a) combinam o método baseado no procedimento de Galerkin desenvolvido por Peschek (2000) com o método para obtenção de variedades invariantes forçadas (Shaw *et al.*, 1999).

Apesar do caráter principalmente prático desta fase, algumas importantes contribuições teóricas são feitas como a de Shih e coautores (2006) que utilizam o método das formas normais para obter uma formulação teoricamente mais formal do método baseado nas variedades invariantes.

Andrianov (2008) propõe uma definição mais geral que a de Shaw e Pierre (1994) de modos normais não lineares para sistemas contínuos incluindo casos onde a separação entre as variáveis temporal e espacial não se dá de forma exata. Todas essas contribuições permitem a aplicação dos desenvolvimentos obtidos nas fases anteriores para uma ampla gama de problemas de engenharia.

As novas fronteiras no desenvolvimento da análise modal não linear consistem na busca de sua aplicação para estruturas e problemas práticos de engenharia estrutural, o desenvolvimento de modelos de ordem reduzida utilizando-se a análise modal não linear, a derivação de métodos de construção dos modos normais não lineares, em especial os modos essencialmente não lineares, e a obtenção de procedimentos analíticos para o estudo paramétrico e da descrição do comportamento vibratório de sistemas dinâmicos para uso nas fases de pré-projeto de elementos estruturais sujeitos a vibrações não lineares.

Nesse contexto, a interface entre o método dos elementos finitos e as técnicas baseadas nas variedades invariantes tem sido a porta de entrada para aplicação da análise modal não linear para problemas mais complexos e com grande quantidade de graus de liberdade (Apiwattanalungarn, 2003). Um exemplo nesse esforço é o pioneirismo dos trabalhos de Soares e Mazzili (2000) Mazzilli e Baracho Neto (2002) na aplicação do método de múltiplas escalas combinado com o método dos elementos finitos para estudo de estruturas com muitos graus de liberdade.

2.2.

Análise modal linear

Como a análise modal não linear tem sido histórica e teoricamente desenvolvida em analogia à análise linear, é de fundamental importância, para que essa analogia fique clara, que a análise modal linear seja brevemente discutida.

A análise modal de um sistema linear estrutural com n graus de liberdade, escrito na forma matricial como:

$$\{\ddot{x}\} + [A]\{x\} = \{0\}, \quad (2-1)$$

leva à determinação de n autovalores (frequências) e n autovetores (modos normais) da matriz fundamental do sistema (A), considerada simétrica e positiva definida, onde x é o vetor de deslocamentos e o ponto acima das variáveis indica a sua variação temporal.

A matriz A depende unicamente dos parâmetros intrínsecos do sistema: massa e rigidez e sua distribuição espacial. Assim as frequências e seus modos normais correspondentes são características inerentes ao sistema.

Além da interpretação física dos autovalores e correspondentes autovetores, os modos normais lineares têm propriedades matemáticas importantes na análise dinâmica. A primeira delas é que eles desacoplam as equações de movimento do problema em n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem independentes.

Do desacoplamento dos modos normais decorrem duas propriedades importantes: a invariância – um movimento iniciado num dado modo permanece nele durante todo o tempo, e a superposição modal – os modos podem ser usados numa combinação linear para descrever qualquer movimento do sistema.

Esses resultados da análise modal permitem uma análise mais fácil da dinâmica do problema, além de prover uma nova interpretação física do comportamento dinâmico linear do mesmo, uma vez que os modos normais podem ser vistos como uma base do problema no espaço modal de n dimensões. Outras relevantes aplicações da análise modal linear incluem a redução modal, técnicas de subestruturação, análise experimental, modelagem com método dos elementos finitos e monitoramento e controle de vibração de estruturas em serviço (Kerschen *et al.*, 2009)

Após essa breve exposição dos conceitos de análise modal linear, a análise modal não linear é discutida em detalhe nas próximas seções, onde se destacam as semelhanças e diferenças entre os dois casos.

2.3.

Definição de modos normais não lineares

Entre as definições existentes para os modos não lineares a mais simples, de acordo com Kerschen e coautores (2009), é a de uma vibração em uníssono do sistema, ou em outras palavras uma oscilação síncrona. Nesse contexto, de acordo com Pellicano e Vakakis (2001), os modos normais não lineares são soluções particulares das equações de movimento do sistema. Contudo, o conceito de modos normais não lineares tem passado por uma série de modificações desde o seu desenvolvimento original numa série de trabalhos de Rosemberg e coautores (1960; 1961; 1962; 1964 e 1966) até as definições mais recentes resultantes dos esforços de Shaw e Pierre (1991, 1993 e 1994).

Em geral as definições para os modos não lineares procuram reproduzir abordagens já existentes para os modos lineares. Assim, caso o sistema não linear possa ser desacoplado numa série de equações mutuamente independentes e o subespaço correspondente às equações onde se dá o movimento de cada modo seja invariante, então os modos normais não lineares podem ser definidos de modo semelhante aos modos lineares (Guojing e Jianguo, 1998).

Nesse contexto existem duas definições principais dos modos normais não lineares na literatura. A primeira dada por Rosemberg (1960) e a outra baseada no conceito de variedades invariantes desenvolvida por Shaw e Pierre (1991 e 1993). De acordo com Falzarano e coautores (2001), a definição de Rosemberg é mais compacta e matematicamente elegante e facilmente extensível aos sistemas contínuos, enquanto aquela baseada nas variedades invariantes é mais heurística e possivelmente mais fácil de ser estendida a uma ampla classe de problemas incluindo sistemas forçados e amortecidos sendo, portanto, aplicável à análise de uma gama maior de problemas práticos da engenharia. Apesar de existirem definições adicionais como a definição baseada em variedades invariantes descritas em variáveis complexas (Nayfeh e Nayfeh, 1994b) e a definição utilizando teoria dos grupos (Vakakis *et al.*, 1996), elas não se encontram muito difundidas na literatura, sendo que as definições de Rosemberg e Shaw e Pierre

são aquelas que mais receberam atenção no desenvolvimento da análise modal não linear.

2.3.1.

Definição de Rosenberg

Apesar de o Teorema 1 (Lyapunov, 1947) provar a existência dos modos normais para sistemas não lineares, esse fato foi intuitivamente aceito até que Rosenberg no início da década de 1960 apresentou pela primeira vez uma definição clara de um modo normal não linear e apresentou metodologias de obtenção desses modos para sistemas conservativos com n graus de liberdade.

A metodologia apresentada por Rosenberg (1962) é uma clara extensão da análise modal linear para sistemas não lineares. Durante o movimento em um modo normal de um sistema linear conservativo, cada grau de liberdade do sistema se move com a mesma frequência e com uma razão fixa entre os deslocamentos dos seus graus de liberdade. Aplicando essa clássica definição da teoria linear para sistemas não lineares, os modos normais não lineares podem ser definidos como uma oscilação periódica e síncrona de maneira que todos os pontos materiais da estrutura passem por sua posição de equilíbrio e sua posição de máxima amplitude ao mesmo tempo. Pode-se reescrever essa definição de modo mais formal do seguinte modo:

Definição 1 (Rosenberg 1962, 1966)

Considere um sistema autônomo e conservativo com n graus de liberdade cuja dinâmica é governada pelas seguintes equações de movimento:

$$\ddot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2-2)$$

onde $i=1,2,\dots,n$; x_i representam os deslocamentos dos vários graus de liberdade em relação à posição de equilíbrio e f_i as forças (por unidade de massa) não lineares.

O sistema descrito pela eq. (2-2) oscila em um modo normal, se estiver vibrando em uníssono, ou seja, se as seguintes propriedades são verificadas.

1) Os movimentos de todas as coordenadas são periódicos vibrando com o mesmo período de vibração T_0 constante:

$$x_i(t) = x_i(t + T_0), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2-3)$$

2) Existe um instante de tempo t_0 em que todas as massas passam por sua posição de equilíbrio x_i^0 :

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2-4)$$

3) Existe um instante de tempo $t = t_1 \neq t_0$ em que todas as velocidades se anulam, ou seja todas as coordenadas atingem seu valor de amplitude:

$$\dot{x}_i(t_1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2-5)$$

4) Para um grau de liberdade fixo r , em qualquer instante de tempo durante o movimento, os deslocamentos do sistema estão relacionados pelas seguintes funções chamadas de equações modais:

$$x_i = P_i(x_r, \dot{x}_r), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2-6)$$

De acordo com a Definição 1, todos os deslocamentos podem ser parametrizados em função de um par mestre pelas equações modais, possibilitando assim a redução de ordem do sistema. Os modos lineares podem ser vistos como um caso particular da Definição 1, onde as funções modais dadas pela eq. (2-6) são lineares.

Yang (1968) propôs uma definição semelhante à definição de Rosemberg, porém com uma abordagem mais geométrica, destacando o papel das simetrias:

Definição 2 (Yang, 1968)

Um modo normal de vibração é um movimento periódico de uma massa unitária cuja trajetória no espaço de configuração é um segmento de uma curva simples (não auto-interceptante) passando pela origem desse espaço.

As trajetórias do sistema correspondente aos modos normais são chamadas de linhas modais e sua representação analítica é dada pela eq. (2-6). Em função da geometria das linhas modais no espaço de configuração, Rosemberg subdividiu os modos normais não lineares em dois tipos de acordo com a seguinte definição.

Definição 3 (Rosemberg 1962, 1966)

Caso as linhas modais correspondentes aos modos normais não lineares sejam representadas geometricamente por retas no espaço de configuração, então o modo é chamado similar. Por outro lado, no caso onde as linhas modais são representadas por curvas no espaço de configuração o modo é dito não similar.

Assim as trajetórias dos modos similares no espaço de configuração são expressas por relações lineares na expressão (2-6), enquanto que no caso dos modos não similares as trajetórias são representadas por equações não lineares. Matematicamente a condição de existência de modos normais não lineares similares pode ser escrita como:

$$x_i = c_{ir} x_r, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq r; \quad c_{rr} = 1; \quad (2-7)$$

onde x_r é o deslocamento de um dos graus de liberdade, x_i é o deslocamento dos demais graus de liberdade e c_{ir} são constantes de proporcionalidade.

Enquanto os modos similares podem ser encontrados em sistemas lineares e não lineares, os modos não similares são encontrados unicamente em sistemas não lineares. A existência de modos normais similares em sistemas não lineares está intimamente ligada às propriedades de simetria do sistema físico que se refletem em propriedades de simetria na expressão da energia potencial do sistema (Yang, 1968; Pai, 2011).

Pela sua própria natureza, a definição de Rosemberg apresenta duas grandes limitações: não pode ser aplicada a sistemas não conservativos e não pode ser usada quando o problema apresenta o fenômeno de ressonância interna. Essas limitações decorrem do fato de que em ambos os casos a vibração do sistema não é síncrona. Nesse contexto a definição de Shaw e Pierre (1991) a ser descrita na próxima seção é uma alternativa para a extensão dos conceitos envolvendo os modos normais não lineares para sistemas com vibração não uníssona.

2.3.2. Definição de Shaw e Pierre

O conceito desenvolvido por Shaw e Pierre (1991) é baseado na teoria das variedades invariantes e pode ser visto como uma generalização da definição de Rosemberg. Com base em argumentos geométricos, os modos normais não lineares são definidos como uma família de movimentos que permanece durante todo o tempo em um espaço bidimensional formado por variedades invariantes no espaço de fase do sistema. De modo mais formal esses conceitos podem ser expressos como:

Definição 4 (Shaw e Pierre, 1994)

As variedades invariantes de um sistema dinâmico são um subconjunto S do espaço de fase. Assim, caso condições iniciais sejam dadas em S , todos os

movimentos correspondentes às soluções das equações que governam a dinâmica do sistema permanecem em S durante todo o tempo do movimento.

De acordo com a Definição 4 as variedades invariantes de um modo normal não linear correspondem a uma superfície no espaço de fase do sistema. Essa superfície é tangente ao correspondente auto-espaço modal linear no ponto de equilíbrio (Jiang *et al.*, 2005b).

Uma das principais distinções da abordagem de Shaw e Pierre em relação à abordagem de Rosemberg é o uso de um par de coordenadas, deslocamento e velocidade, e não somente o deslocamento para obtenção das equações modais, também chamadas de equações de restrição que parametrizam o sistema enquanto esse vibra em um determinado modo normal não linear. O par deslocamento-velocidade escolhido para descrição do movimento do modo é chamado de par mestre, enquanto os demais pares parametrizados pelo par mestre são chamados de pares escravos. O conceito de modos normais não lineares com base nas variedades invariantes pode ser expresso pela definição:

Definição 5 (Shaw e Pierre, 1994; Shaw *et al.*, 1999)

Um modo normal de um sistema não linear é um movimento que ocorre em variedades invariantes bidimensionais no espaço de fase do sistema. Essas variedades invariantes passam pela posição de equilíbrio estável do sistema, e nesse ponto, são tangentes ao autoespaço bidimensional do correspondente sistema linearizado em relação à posição de equilíbrio. Nas variedades invariantes o sistema dinâmico é governado por uma equação de movimento envolvendo um par de variáveis de estado, ou seja, o sistema se comporta como um oscilador não linear de um único grau de liberdade.

De acordo com a Definição 5, um modo normal é um movimento que satisfaz às seguintes condições: a) atende às equações de movimento; b) é tangente aos hiperplanos modais do sistema linearizado na posição de equilíbrio e c) obedece as equações de restrição das variedades invariantes.

Assim a principal questão dessa abordagem é a determinação das equações de restrição que descrevem a geometria das variedades invariantes no espaço de fase do sistema, sendo representadas por planos no caso de modos lineares e modos não lineares similares e por superfícies curvas no caso dos modos normais não lineares não similares. Uma vez obtidas as funções de restrição de um determinado modo, a dinâmica do problema é reduzida à análise de um oscilador

modal não linear, pela substituição das equações de restrição nas equações de movimento do problema. Obtém-se assim um modelo de ordem reduzida do sistema (Kerschen *et al*, 2009).

Em geral a definição baseada nas variedades invariantes é mais geral, uma vez que cobre uma faixa mais ampla de sistemas e respostas. Ela pode ainda ser generalizada para o caso de multimodos quando um sistema com ressonâncias internas é estudado (Apiwattanalungarn, 2003).

A definição dos modos normais não lineares baseada no conceito de variedades invariantes recebeu formalismo e rigor matemáticos por meio do trabalho de Shih e coautores (2006) que utilizaram, para isso, o método das formas normais.

2.3.3. Multimodos

Com o intuito de se obter a generalização do conceito de modos normais não lineares baseados nas variedades invariantes para sistema com ressonância interna, Boivin e coautores (1994 e 1995; ver também Shaw *et. al.*, 1999) introduziram o conceito de variedades invariantes multimodais. No caso da análise modal linear, um multimodo é obtido pela superposição de vários modos. Contudo, na presença de ressonância interna, os modos não lineares podem apresentar acoplamentos não removíveis que impedem a sua consideração individual, sendo, portanto necessária a obtenção de um multimodo definido como:

Definição 6 (Shaw *et al*, 1999)

Um movimento não linear representado por um multimodo com M modos é uma resposta do sistema que ocorre num subespaço dado por variedades invariantes de dimensão $2M$ no espaço de fase do sistema. As variedades invariantes passam pela configuração de equilíbrio do sistema e neste ponto são tangentes ao auto-espaço de dimensão $2M$ do sistema linearizado (representando M modos lineares). Nesse subespaço o sistema é governado por M pares de variáveis de estado, ou seja, comporta-se como um sistema de M graus de liberdade.

A Definição 6 significa que o multimodo de dimensão M é obtido pela escolha de M pares mestres deslocamento-velocidade na parametrização do

sistema. Desse modo o conceito de modos normais singulares dado pela Definição 5 pode ser visto como um caso particular da Definição 6, onde M é igual a um.

2.4.

Métodos de derivação dos modos normais não lineares

Kerschen e coautores (2009) classificam os métodos para obtenção dos modos normais não lineares em duas categorias, em função dos procedimentos utilizados na sua derivação: técnicas analíticas e numéricas. Contudo, essa classificação, em alguns casos, não contempla todas as metodologias envolvidas, uma vez que há métodos que combinam ambas as abordagens.

Rosemberg (1962) não somente foi o primeiro a propor uma definição formal para modos normais não lineares como também desenvolveu técnicas para sua obtenção no caso de sistemas conservativos discretos. A sua formulação analítica é a base para as técnicas de energia desenvolvidas por Vakakis e coautores (1992, 1994), bem como para as apresentadas em trabalhos mais recentes (Kerschen *et. al.*, 2008). Contudo, os métodos utilizados por Rosemberg se limitam a problemas conservativos e a sistemas com não linearidade de grau ímpar (Pesheck, 2000; Mazzilli e Baracho Neto, 2002).

Em conexão com o reavivamento do interesse pelos modos normais não lineares na década de 1990, Shaw e Pierre desenvolveram um método assintótico para dedução das equações diferenciais que governam as variedades invariantes do sistema. Pesheck (2000) resolve as mesmas equações diferenciais numericamente. O método baseado nas variedades invariantes também pode ser utilizado na determinação numérica dos modos normais não lineares pela utilização da técnica baseada no procedimento de Galerkin (Pesheck *et al.*, 2002a). Os métodos baseados no conceito de variedades invariantes são passíveis de serem aplicados a uma gama maior de problemas de relevância prática em engenharia incluindo sistemas forçados, amortecidos e não conservativos (Falzarano *et al.*, 2001).

Andrianov (2008) apresenta uma revisão detalhada dos métodos assintóticos mais utilizados na construção de modos normais não lineares.

Os métodos de perturbação também têm sido aplicados na obtenção dos modos normais não lineares (Vakakis 1992; Vakakis e Rand 1992; Nayfeh e Nayfeh, 1993). Alguns exemplos incluem o método de Lindsted Poincaré

(Warminski, 2010), o método das múltiplas escalas (Nayfeh and Nayfeh, 1994a; Mazzilli e Baracho Neto, 2002; Lacarbonara *et al.*, 2003; Li *et al.*, 2006; Wang, 2008), incluindo problemas com excitação paramétrica (Yabuno e Nayfeh, 2001). O uso dos métodos de perturbação é limitado a sistemas com poucos graus de liberdade, uma vez que resultam em procedimentos trabalhosos para sistemas com muitos graus de liberdade (Mazzilli *et al.*, 2004).

Outro método analítico utilizado para determinação dos modos normais não lineares é o método das formas normais (Vedenova *et al.*, 1985; Touzé e Amabili, 2006; Shih, *et al.*, 2006). O método também foi empregado na determinação dos modos normais não lineares utilizando-se uma formulação em variáveis complexas (Jézéquel and Lamarque, 1991).

Os métodos puramente numéricos não têm recebido tanta atenção como os procedimentos analíticos na determinação dos modos normais não lineares (Kerschen *et al.*, 2009). Slater (1996) desenvolveu um método numérico para a obtenção de modos normais não lineares baseado em técnicas de obtenção de soluções periódicas. O método determina primeiramente os modos lineares e assumindo, então, que os modos não lineares existem na vizinhança dos lineares determinam-se os modos normais não lineares. Um procedimento semelhante é desenvolvido por Bellizi e Bouc (2005), porém os modos normais não lineares são aproximados utilizando-se o método de Galerkin.

Burton (2007) apresenta um método numérico para obtenção dos modos normais não lineares utilizando uma quantidade negativa de amortecimento para que o modo linear, utilizado como condição inicial de integração do sistema de equações de movimento, seja desestabilizado, e as órbitas obtidas descrevam as variedades invariantes de interesse. O problema pode ser usado mesmo para problemas com não linearidades médias e fortes. Não sendo aplicável, contudo, para os modos bifurcados ou essencialmente não lineares.

Métodos baseados em análises de elementos finitos também podem ser citados como exemplos de procedimentos numéricos para determinação de modos normais não lineares (Mazzilli *et al.*, 2001). De acordo com Apiwattanalungarn (2003), uma interface eficiente entre os métodos de discretização por elementos finitos e métodos de construção de modos normais não lineares utilizando a definição baseada nas variedades invariantes abrem caminho para que sistemas

com geometria mais complexa e com maior número de graus de liberdade possam ser analisados pelo método dos modos normais não lineares.

Peeters e coautores (2009) usam o método do chute e um método semelhante à técnica de continuação do comprimento de arco. Entretanto, o método não pode ser usado para determinar modos essencialmente não lineares e demanda um esforço computacional muito grande para modelos com muitos graus de liberdade.

Recentemente Renson e coautores (2012) utilizaram o método dos elementos finitos para resolver as equações diferenciais parciais que governam as variedades invariantes de problemas conservativos e não conservativos. O método pode ser utilizado para sistemas com muitos graus de liberdade e o domínio de validade da solução é definido *a priori*. Um método semelhante é desenvolvido por Blanc e coautores (2011), utilizando, porém uma discretização em diferenças finitas.

Modos normais não lineares analiticamente obtidos podem ser usados para investigação de propriedades dinâmicas de certas classes de estruturas (Lacarbonara e Camillaci, 2004). Ao contrário de métodos numéricos, os métodos analíticos levam a um melhor entendimento físico das características dos problemas não lineares (Mahmoodi *et al.*, 2003).

Metodos assintóticos, utilizando séries polinomiais, são válidos apenas localmente (Nayfeh and Nayfeh, 1994a; Pesheck *et al.*, 2002b). Por outro lado o método baseado no procedimento de Galerkin é preciso sobre um domínio mais amplo (Jiang *et al.*, 2004). É um método com caráter numérico válido para valores maiores de amplitudes, mas a sua aplicação em multimodos é extremamente dispendiosa do ponto de vista computacional, mesmo para sistemas com poucos graus de liberdade (Apiwattanalungarn, 2003).

A seguir dois métodos, um analítico e outro numérico são discutidos em detalhes.

2.4.1. Métodos assintóticos

Descrevem-se aqui, em termos das variedades invariantes, os passos básicos da abordagem assintótica para obtenção dos modos não lineares. O primeiro passo é reescrever as equações (2-2) que governam a dinâmica do sistema como

equações de Cauchy de primeira ordem (Falzarano *et al.*, 2001), também chamadas de equações no formato do espaço de fase do sistema (Peeters *et al.*, 2008):

$$\dot{x}_i = y_i; \quad \dot{y}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n); \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2-8)$$

onde x_i são as coordenadas generalizadas (deslocamentos e rotações) e y_i são as correspondentes velocidades e f_i são as forças (por unidade de massa) restauradoras não lineares.

A seguir, assume-se que existe pelo menos uma configuração de movimento na qual os deslocamentos e velocidades são parametrizados por um único par deslocamento-velocidade, por meio de equações de restrição. Esse par, geralmente pode ser arbitrariamente escolhido (Agnes e Inman, 2001), desde que não seja um ponto nodal, e é denominado par mestre. Como exemplo, escolhem-se o deslocamento e velocidade do primeiro grau de liberdade do sistema como par mestre, que recebem a seguinte designação:

$$u = x_1, v = y_1 \quad (2-9)$$

O par de variáveis u e v descreve completamente as variedades invariantes para o movimento do modo normal escolhido, referente ao primeiro grau de liberdade. Pierre e coautores (2006) descrevem o par mestre como “as sementes” das variedades invariantes. Assim, caso, durante um movimento no espaço de fase, a trajetória da solução seja restrita a uma superfície bidimensional, então é possível expressar cada uma das coordenadas generalizadas como função de um par delas, ao menos na vizinhança do ponto de equilíbrio.

Os pares dos demais graus de liberdade, chamados pares escravos, são restritos em função de u e v de acordo com as seguintes equações:

$$x_i = P_i(u, v), \quad y_i = Q_i(u, v) \rightarrow i = 1, 2, \dots, n \quad (2-10)$$

onde P_i e Q_i são as funções de restrição das variedades invariantes, ou ainda equações modais, e $P_1(u, v) = u$ e $Q_1(u, v) = v$.

Cada uma das equações (2-10) representa uma superfície de restrição no espaço bi-dimensional formado por u e v e descrevem, assim, o subespaço das variedades invariantes para os modos não lineares. As equações de restrição capturam as relações entre coordenadas dos pares mestres e escravos. Um movimento que satisfaça essas equações é um movimento que, se iniciado no

subespaço formado pelas variedades invariantes descritas pelas relações de restrição, nele permanece, pela propriedade de invariância, durante todo o tempo do movimento. Portanto, de acordo com a Definição 5, qualquer movimento que satisfaça às equações de movimento do sistema dadas pela eq. (2-8), à condição de tangência aos modos normais lineares e às equações de restrição (2-10) é definido como um modo normal não linear (Shaw e Pierre, 1991).

A superfície das variedades invariantes pode ser obtida resolvendo-se as equações de movimento junto com as funções de restrição. Para isso, a ocorrência explícita da variável temporal é eliminada, resultando num problema independente do tempo, cujas equações descrevem a geometria das variedades invariantes (Shaw e Pierre, 1993). Desse modo, a abordagem das variedades invariantes é essencialmente geométrica (Shaw e Pierre, 1991). Por considerar a velocidade como uma coordenada no par mestre a trajetória modal deixa de ser uma curva e passa a ser uma superfície (Falzarano *et al.*, 2001).

Assim, a principal característica do método é a eliminação da variável temporal, sendo que ao mesmo tempo a velocidade é considerada como uma variável na determinação da geometria dos modos não lineares, o que permite a extensão da técnica para sistemas dissipativos, pois a adição da velocidade, como uma coordenada para obtenção das variedades invariantes de um dado modo, deixa o sistema invariante com o tempo, mesmo no caso da presença de amortecimento e de outros termos dissipativos. Em outras palavras, o sistema toma a forma de um sistema autônomo (Pesheck, 2000) e a linha modal, de acordo com Slater e Inmam (1995), se torna dependente do deslocamento e da velocidade mestres.

Por considerar a velocidade como uma variável na obtenção das variedades invariantes, a metodologia baseada nas variedades invariantes não só permite a inclusão do amortecimento na vibração não linear, como também mostra que a velocidade tem termos importantes na geometria do subespaço das variedades invariantes para sistemas não amortecidos (Shaw e Pierre, 1993).

Para eliminação da variável temporal, obtêm-se primeiramente as derivadas temporais das funções de restrição (2-10)

$$\dot{x}_i = \frac{\partial P_i(u, v)}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial P_i(u, v)}{\partial v} \dot{v}, \rightarrow i = 1, 2, \dots, n; \quad (2-11)$$

$$\dot{y}_i = \frac{\partial Q_i(u, v)}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial Q_i(u, v)}{\partial v} \dot{v}, \rightarrow i = 1, 2, \dots, n \quad (2-12)$$

Essas equações relacionam as taxas de variação de todas as variáveis de estado em relação a u e v por meio das equações de restrição. A seguir, substituem-se as equações (2-11) e (2-12) nas equações de movimento (2-8). Utilizando-se ainda as equações de restrição dadas por (2-10), obtém-se o seguinte sistema de $2n-2$ equações diferenciais parciais não lineares:

$$\begin{aligned} Q_i(u, v) &= \frac{\partial P_i(u, v)}{\partial u} v \\ &+ \frac{\partial P_i(u, v)}{\partial v} f_1(u, P_2(u, v), \dots, P_n(u, v); v, Q_2(u, v), \dots, Q_n(u, v)) \end{aligned} \quad (2-13)$$

$$\rightarrow i = 2, 3, \dots, n ;$$

$$\begin{aligned} f_i(u, P_2(u, v), \dots, P_n(u, v); v, Q_2(u, v), \dots, Q_n(u, v)) &= \frac{\partial Q_i(u, v)}{\partial u} v \\ &+ \frac{\partial Q_i(u, v)}{\partial v} f_1(u, P_2(u, v), \dots, P_n(u, v); v, Q_2(u, v), \dots, Q_n(u, v)) \end{aligned} \quad (2-14)$$

$$\rightarrow i = 2, 3, \dots, n$$

As funções P_i e Q_i representam o subespaço das variedades invariantes para o sistema não linear dado pelas equações de movimento do sistema e são por meio delas que as equações diferenciais parciais das variedades invariantes, equações (2-13) e (2-14), governam a dinâmica não linear do problema (Apiwattanalungarn, 2003). Desse modo, cada equação diferencial parcial do sistema formado pelas expressões (2-13) e (2-14) tem como incógnita as equações modais. Uma determinada solução do sistema de equações diferenciais parciais representa geometricamente uma das variedades invariantes.

As equações diferenciais parciais que governam as variedades invariantes não possuem, em geral, solução de forma fechada, salvo na presença de certas condições de simetria, onde tipicamente o subespaço formado pelas variedades invariantes é plano. Esse é o caso da existência de um modo normal similar, sendo que as funções de restrição podem ser determinadas numericamente ou ainda analiticamente, utilizando-se séries de potência.

Pesheck (2000) apresenta uma formulação alternativa, onde as equações de movimento são mantidas como equações diferenciais de segunda ordem, e

somente uma equação de restrição é utilizada, a de deslocamentos, para descrição das variedades invariantes.

Uma vez que as funções de restrição do problema tenham sido determinadas, os modos normais não lineares do sistema, podem ser obtidos pela substituição das funções de restrição nas equações de movimento, resultando nas seguintes equações modais de um único grau de liberdade, também chamado de oscilador modal:

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = f_1(u, P_2(u, v), \dots, P_n(u, v), v, Q_2(u, v), \dots, Q_n(u, v)) \quad (2-15)$$

As equações (2-15) significam que a dinâmica de um determinado modo normal não linear é obtida pela substituição das equações de restrição nas equações de movimento do sistema, incluindo-se assim os efeitos dos modos não simulados, referentes aos pares escravos, no modo normal simulado, referente ao par mestre (Pesheck, 2000).

Como na maior parte dos casos não existe um modo simples de expressar a resposta não linear de um sistema como uma função algébrica de forma fechada (Siller 2004), faz-se uso de aproximações assintóticas. Por exemplo, pode-se utilizar séries de Taylor em função das variáveis u e v em torno da configuração de equilíbrio do sistema. As aproximações em termos de séries de potência para as soluções das equações (2-13) e (2-14) são intrinsicamente locais, e resultam em aproximações para a dinâmica não linear do problema próximas à posição de equilíbrio. Contudo, elas têm a vantagem de serem analíticas e serem extensíveis a sistemas de qualquer ordem (Shaw e Pierre, 1993). As funções de restrição escritas como séries de potência são iguais a:

$$P_i(u, v) = a_{1i}u + a_{2i}v + a_{3i}u^2 + a_{4i}uv + a_{5i}v^2 + a_{6i}u^3 + a_{7i}u^2v + a_{8i}uv^2 + a_{9i}v^3 + \dots \rightarrow i = 1, 2, \dots, n \quad (2-16)$$

$$Q_i(u, v) = b_{1i}u + b_{2i}v + b_{3i}u^2 + b_{4i}uv + b_{5i}v^2 + b_{6i}u^3 + b_{7i}u^2v + b_{8i}uv^2 + b_{9i}v^3 + \dots \rightarrow i = 1, 2, \dots, n \quad (2-17)$$

Os coeficientes nas expansões (a_{ij} e b_{ij}) representam a influência do iésimo modo linear nas variedades invariantes do modo simulado j (modo mestre). Em outras palavras, eles definem as relações entre as coordenadas escravas e mestras. Estes coeficientes dependem das relações entre os pares mestres e os escravos.

Para sistemas com muitos graus de liberdade, podem se reescrever as equações (2-16) e (2-17) de forma matricial como:

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{Bmatrix} = ([m_0] + [m_1(u, v)] + [m_2(u, v)]) \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} + \dots \quad (2-18)$$

As matrizes m_0 , m_1 e m_2 são matrizes retangulares de ordem $2n \times 2$, sendo m_0 a matriz dos coeficientes lineares, m_1 e m_2 representam as matrizes dos coeficientes dos termos quadráticos e cúbicos respectivamente. A fatorização dos coeficientes de u e v em função dos termos lineares não é única, mas é conveniente em alguns procedimentos de cálculo. Além disso, qualquer que seja a disposição da fatorização escolhida dentre as possíveis alternativas, os resultados são idênticos.

Os termos não lineares na eq. (2-18) descrevem a curvatura do subespaço modal correspondente às variedades invariantes. De acordo com Rosemberg (1966), podem ser interpretados como uma correção dos modos lineares no caso de sistemas não lineares. Outra interpretação possível é a de Boivin e coautores (1994), para quem os coeficientes das funções de restrição representam as correções não lineares (de várias ordens) no modo normal não linear simulado devido aos modos normais lineares não simulados. Esses termos capturam os efeitos provenientes das forças não lineares f_i e resultam na dependência entre a frequência e a amplitude do movimento dos modos normais não lineares (Shaw e Pierre, 1991). Desse modo, o subespaço das variedades invariantes corresponde a uma manifestação geométrica de um movimento em um modo normal não linear (Georgious e Scharwtz, 1999), o que confirma a essência geométrica do método.

Substituindo-se a eq. (2-18) nas equações diferenciais das variedades invariantes, (2-13) e (2-14), o problema reduz-se a um sistema de equações algébricas não lineares em termos dos coeficientes a_{ij} e b_{ij} . O número de equações, N_{eq} , do sistema depende da ordem N utilizada nas aproximações representadas pelas eq. (2-16) e (2-17), e pode ser calculado, com base no triângulo de Pascal, pela seguinte expressão:

$$N_{eq} = 2 \left[\sum_{i=1}^N (N - i + 2) \right] \quad (2-19)$$

O sistema de equações resultante pode ser resolvido sequencialmente, de acordo com a ordem da não linearidade das equações, como nos métodos de perturbação. As equações lineares (coeficientes de u e v) são quadráticas em função dos coeficientes a_{1j} , b_{1j} , a_{2j} e b_{2j} . A solução do sistema é semelhante a um problema de autovalor, e, portanto, métodos da álgebra linear podem ser aplicados (Mazzilli *et al.*, 2001; 2004). Caso o sistema não apresente ressonâncias internas, o problema terá n soluções no conjunto de números reais, uma para cada modo normal linear (Falzarano *et al.*, 2001). Como a solução dos coeficientes não lineares é obtida sucessivamente utilizando-se os coeficientes lineares e os não lineares de ordem mais baixa, o resultado será a obtenção de n modos normais não lineares, todos podendo ser considerados como uma continuação não linear dos modos lineares. Essas características tornam possível o uso de esquemas computacionais em programas de linguagem simbólica para obtenção dos modos normais não lineares de forma analítica para sistemas com vários graus de liberdade.

A obtenção dos coeficientes das aproximações das superfícies modais permite que as funções de restrição possam ser substituídas na eq. (2-16), o que resulta em n osciladores modais desacoplados do sistema não linear.

Os passos para obtenção das variedades invariantes são resumidos por Kerschen e coautores (2009) como:

- 1- Escolha das coordenadas mestras, u e v ;
- 2- Expressar as coordenadas escravas em função das funções de restrição, $P(u,v)$ e $Q(u,v)$;
- 3- Usar a técnica das variedades invariantes para eliminar a dependência explícita do tempo das equações de movimento;
- 4- Utilizar aproximações locais para as funções de restrição;
- 5- Substituir as aproximações das funções de restrição nas equações diferenciais parciais que governam as variedades invariantes;
- 6- Resolver o sistema de equações algébricas resultante;
- 7- Substituir as coordenadas escravas na equação de movimento pelas expansões polinomiais;

Esses passos encontram-se dispostos de maneira esquemática na Figura 2-1.

Shaw e Pierre (1993) também apresentam uma transformação entre as coordenadas físicas $\{w\}$ e as coordenadas modais $\{u\}$, para que a dinâmica do sistema possa ser recuperada no espaço físico do problema. Isso é feito primeiramente pela junção de todas as matrizes m_i da eq. (2-18), para cada uma das funções de restrição para os n modos obtidos com o método assintótico em uma matriz M de dimensão $2n \times 2n$. De modo similar o vetor das coordenadas modais, $\{u\}$ é obtido pela reunião de todos os pares (u_i, v_i) para $i=1,2,\dots,n$. A transformação completa entre as coordenadas físicas e modais pode ser escrita como:

$$\{w\} = [M(\{u\})]\{u\} = ([M_0] + [M_1(\{u\})] + [M_2(\{u\})])\{u\} + \dots \quad (2-20)$$

A inversa da transformação pode ser obtida com uma aproximação até os termos de ordem quadrática, pela seguinte expressão:

$$\{u\} = ([I] - [M_0]^{-1}[M_1][M_0]^{-1}\{w\})[M_0]^{-1}\{w\} + \dots, \quad (2-21)$$

onde I é a matriz identidade.

Uma particularidade da expansão modal é que singularidades nos coeficientes das funções de restrição são uma indicação da presença de ressonâncias internas entre os modos escravos e mestres. Desse fato decorre que a propriedade de invariância é violada nesses casos, sendo, portanto, necessária uma análise multimodal, onde os modos ressonantes sejam incluídos como simulados na determinação das variedades invariantes, de forma a capturar as ressonâncias internas e permitir a troca de energia entre os modos incluídos no problema (Apiwattanalungarn, 2003). A metodologia para obtenção dos multimodos é apresentada na próxima seção. Essa propriedade permite que as ressonâncias internas não precisem ser conhecidas *a priori* para os sistemas analisados, uma vez que são identificadas pela própria aplicação da técnica.

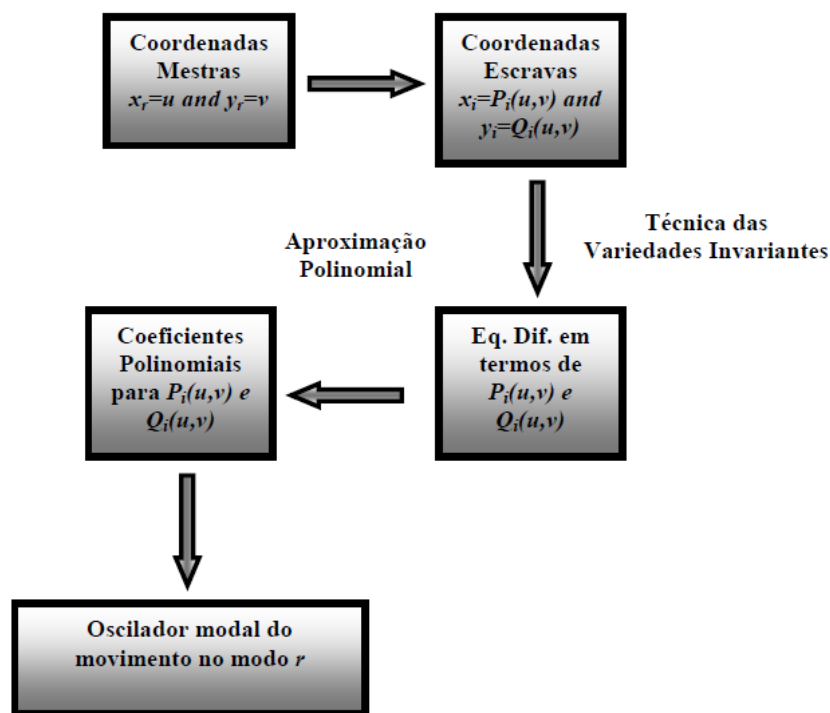


Figura 2-1 Fluxograma do método assintótico.

2.4.2. Multimodo

Os multimodos são um resultado da busca pela manutenção da propriedade de invariância face à presença de ressonâncias internas (Mazzilli *et al.*, 2004), sendo que a análise multimodal é, em geral, utilizada para remoção do problema de contaminação entre os modos não simulados e simulados (Boivin *et al.*, 1994).

A construção das variedades invariantes multimodais é obtida pela escolha dos M_m modos de interesse, modos simulados ou modos mestres, que são reunidos em um subconjunto S_M . Os pares mestres relativos a esses modos são expressos por vetores $\{u_{Mf}\}$ e $\{v_{Mf}\}$. De modo que o subespaço das variedades invariantes associado ao multimodo possui dimensão $2M_m$ dentro do espaço $2n$ do sistema com n graus de liberdade.

O procedimento para obtenção das variedades invariantes é semelhante ao apresentado na seção 2.4.1, sendo que agora a parametrização das variedades invariantes é feita pelo uso de M_m pares de deslocamento e velocidade:

$$x_i = u_i, y_i = v_i \quad \forall i \in S_M \quad (2-22)$$

Adicionalmente, as variáveis escravas são parametrizadas pelas seguintes funções de restrição:

$$x_i = P_i(\{u_M\}, \{v_M\}), y_i = Q_i(\{u_M\}, \{v_M\}) \quad \forall i \notin S_M \quad (2-23)$$

Como no caso dos modos individuais, pela substituição das equações (2-22) e (2-23) na equação de movimento do sistema, e utilizando-se a regra da cadeia para determinação das variáveis, obtêm-se as seguintes equações diferenciais parciais que governam as variedades invariantes:

$$Q_i = \sum_{k \in S_M} \frac{\partial P_i}{\partial u_k} v_k + \frac{\partial P_i}{\partial v_k} f_k; \quad (2-24)$$

$$f_i = \sum_{k \in S_M} \frac{\partial Q_i}{\partial u_k} v_k + \frac{\partial Q_i}{\partial v_k} f_k \quad (2-25)$$

Utilizam-se expansões em séries de Taylor em termos das coordenadas mestras. O número de coeficientes nas expansões cresce de modo considerável, em função do número de modos inclusos. Como o multimodo se reduz a um modo normal singular quando somente um modo é incluso na análise, uma alternativa é obter as variedades invariantes individualmente e utilizar os coeficientes de suas funções de restrição para obtenção dos multimodos, reduzindo-se assim o esforço computacional para a solução do sistema (Boivin *et al.*, 1994).

De acordo com Boivin e coautores (1994), os modos não simulados podem ser vistos de duas maneiras: como um conjunto, como outro multimodo, ou ainda separadamente como modos normais individuais. Desse modo os modos normais ou variedades invariantes individuais podem ser considerados como um caso particular dos multimodos. Há dois casos extremos: o primeiro onde todos os modos são simulados, de forma que o sistema completo é analisado e representa o maior multimodo possível para o problema, e o segundo em que somente um modo é simulado, obtendo-se um sistema com um grau de liberdade (Boivin *et al.*, 1995).

Como na análise modal singular, a análise multimodal representa uma solução local e sua precisão depende tanto da amplitude do movimento quanto da proximidade de ressonâncias internas entre os modos simulados e não simulados (Pesheck *et al.*, 2001).

2.4.3. Método baseado no procedimento de Galerkin

Uma das diferenças básicas entre os métodos assintóticos e o baseado no procedimento de Galerkin é o uso de coordenadas polares na determinação geométrica das variedades invariantes. As equações diferenciais das variedades invariantes são solucionadas de modo aproximado, utilizando-se uma discretização por meio de uma projeção de Galerkin sobre um domínio de amplitude e ângulo fase previamente escolhidos (Pesheck *et al.*, 2002a).

A transformação para o sistema de coordenadas polares pode ser definida em função da dependência do tempo por parte da amplitude a e pelo ângulo fase ϕ :

$$u = a \cos \phi, \quad v = -a \omega \sin \phi \quad (2-26)$$

onde ω é a frequência natural correspondente ao sistema linearizado e referente ao modo mestre.

As equações de restrição são escritas em termos do par mestre, formado por a e ϕ :

$$x_i = P_i(a(t), \phi(t)), \quad y_i = Q_i(a(t), \phi(t)) \rightarrow i = 1, 2, \dots, n \quad (2-27)$$

A aproximação das equações de restrição é dada pelo método de Galerkin, utilizando-se uma série dupla em termos das amplitudes e ângulos de fase modais:

$$P_i(a(t), \phi(t)) = \sum_{l=1}^{n_a} \sum_{m=1}^{n_\phi} C_i^{lm} T_{l,m}(a(t), \phi(t)) \rightarrow i = 1, 2, \dots, n \quad (2-28)$$

$$Q_i(a(t), \phi(t)) = \sum_{l=1}^{n_a} \sum_{m=1}^{n_\phi} D_i^{lm} U_{l,m}(a(t), \phi(t)) \rightarrow i = 1, 2, \dots, n \quad (2-29)$$

onde C_i^{lm} e D_i^{lm} são coeficientes das expansões a serem determinados e $T_{l,m}$ e $U_{l,m}$ são as funções de forma do método de Galerkin, tipicamente compostas por harmônicos de funções em termos de a e ϕ , definidas em geral em um domínio $a \in [0, a_0]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ pré-escolhido. Os parâmetros n_a e n_ϕ denotam o número de funções nas expansões utilizadas para a e ϕ , respectivamente.

A substituição das equações (2-28) e (2-29) nas equações que governam as variedades invariantes resulta em equações em termos das coordenadas modais que podem ser resolvidas por integração numérica. A vantagem desse método

sobre o método assintótico é que o domínio de convergência é conhecido *a priori* e, portanto, a técnica pode ser utilizada para uma aproximação em um domínio maior de amplitudes de movimento. Porém, como a solução é obtida numericamente, perdem-se as vantagens do uso de soluções analíticas, principalmente para análises paramétricas.

Jiang (2004) generaliza a técnica baseada no método da projeção de Galerkin para análise multimodal, enquanto Apiwattanalungarn (2003) desenvolve um método parecido com este método baseado no procedimento de Galerkin, utilizando, porém, a velocidade e o deslocamento como parâmetros modais e não a amplitude e o ângulo fase.

2.5.

Propriedades fundamentais

De acordo com Kerschen e coautores (2006) os modos normais não lineares se constituem numa abordagem com suficiente rigor teórico para extensão da análise modal linear para problemas dinâmicos não lineares. Assim uma análise adequada de suas propriedades fundamentais se faz necessária para o entendimento da aplicabilidade dessa extensão.

A análise modal não linear tem se desenvolvido como uma adaptação da análise modal linear para sistemas dinâmicos não lineares (Pierre *et al.*, 2006). Entretanto, algumas das propriedades da análise modal linear não se aplicam aos problemas não lineares. Assim, é evidente que uma completa analogia entre as análises linear e não linear não pode ser obtida, fundamentalmente porque o princípio da superposição dos efeitos não se verifica no caso não linear. Entretanto, de acordo com Boivin e coautores (1995), muitos dos princípios e abordagens relevantes podem ser generalizados do caso linear para o não linear. Assim sendo o objetivo dessa seção é identificar as semelhanças entre as análises modais linear e não linear bem como as particularidades de ambas as análises.

O acoplamento dinâmico entre modos normais não lineares diferentes faz com que a resposta múltipla de vários modos não possa ser obtida pela superposição individual dos modos, ou seja, eles não formam uma base para gerar a resposta completa do sistema, como no caso da análise modal linear (Pesheck, 2000; Kerschen *et al.*, 2008).

A inaplicabilidade da superposição dos modos é um dos maiores limitantes da análise modal não linear (Kerschen *et al.*, 2008), já que ela impossibilita a decomposição modal e a obtenção de um movimento geral em função dos modos normais nos moldes da análise modal linear (Rosemberg, 1960; Hsieh *et al.*, 1994).

Os modos normais não lineares podem ser acoplados ou desacoplados, correspondendo no último caso a um movimento modal puro (Boivin *et al.*, 1994), enquanto que os modos normais lineares apresentam-se somente de forma desacoplada (Li *et al.*, 2006).

Além disso, os modos normais não lineares não apresentam as relações de ortogonalidade como os modos lineares (Pesheck *et al.*, 2002a; Kerschen *et al.*, 2008). Por essa razão Siller (2004) considera que o termo normal deva ser usado de modo restrito, embora o termo seja utilizado com frequência na literatura especializada, tanto nos casos onde os modos são independentes um do outro (Siller, 2004), quanto nos que significam movimentos principais (Miklhin e Morgunov, 2001). Anand (1972) considera que o termo normal não pode ser aplicado a um determinado modo de vibração cuja relação entre dois graus de liberdade quaisquer não seja constante (modos similares). Contudo o uso do termo pode ser generalizado adotando-se a definição de Rosemberg (sistemas conservativos) e a definição baseada nas variedades invariantes (sistemas dissipativos). Ficam excluídos dessas definições os modos que não são uma continuação dos modos lineares, o que ocorre na presença de outra propriedade exclusiva da análise modal não linear – a multiplicidade de modos.

A multiplicidade de modos é uma propriedade única dos sistemas não lineares que podem apresentar, ao contrário dos sistemas lineares, um número de modos que excede o número de graus de liberdade do sistema (Rosemberg, 1961; Happawana *et al.*, 1995; Miklhin e Morgunov, 2001). Isso acontece em decorrência dos fenômenos de ressonância interna e bifurcação de modos (Nayfeh *et al.*, 1996; Falzarano *et al.*, 2001; Li *et al.*, 2006). Assim, alguns modos não lineares podem ser considerados uma extensão dos modos lineares (Jezequel e Lamarque, 1991; Siller, 2004), mas outros não o são, sendo chamados de modos essencialmente não lineares, puramente não lineares ou modos bifurcados. Nesse caso uma linearização do sistema pode não ser possível ou ainda não permitir que as ressonâncias internas sejam identificadas.

A bifurcação modal, propriedade não encontrada em sistemas lineares, pode ocorrer no caso não linear para determinados níveis de energia ou valores de algum parâmetro de controle do sistema (Apiwattanalungarn, 2003). O fenômeno da ressonância interna, que também não tem analogia no caso da dinâmica linear (Kerschen *et al.*, 2008), surge quando uma relação expressa por números inteiros entre as frequências do sistema é verificada para dois ou mais modos e é responsável pela quebra da propriedade de invariância dos modos normais não lineares e demanda uma análise multimodal da dinâmica não linear do problema (Jiang *et al.*, 2005b).

A invariância dos modos normais lineares vem do fato de que esses modos são ortogonais entre si, de forma que uma vibração iniciada num desses modos permanece nele durante todo o tempo do movimento (Falzarano *et al.*, 2001). Desse modo, a invariância é, de acordo com Ching (1993), um dos conceitos mais úteis da análise dinâmica estrutural. Porém, ao contrário dos modos normais lineares, os modos normais não lineares são apenas individualmente invariantes (Pesheck 2000; Lacarbonara e Camillaci, 2004), podendo interagir entre si durante movimentos causados por fenômenos mais complexos como ressonâncias internas (Pesheck, 2000) e também a chamada contaminação do movimento entre os modos mestres e escravos advindos dos acoplamentos entre os modos (Boivin *et al.*, 1995).

Outro fenômeno possível em sistemas não lineares e lineares é a troca de energia entre os modos, que pode ser reversível entre os modos lineares e pode ser irreversível no caso dos modos não lineares (Kerschen *et al.*, 2006). No caso linear tem-se o chamado fenômeno de batimento (quando dois modos com frequências naturais aproximadamente iguais trocam energia entre si de modo reversível). No caso da análise não linear a troca pode ocorrer dos modos excitados para os modos não excitados por causa da interação modal (Anderson *et al.*, 1994).

Outro fenômeno ligado à energia de vibração é a localização espacial de um modo, onde uma classe de modos normais não lineares é espacialmente localizada e leva a um fenômeno de confinamento não linear do modo (Pai, 2011).

A ressonância interna é diferente do acoplamento modal, mas ambos dão origem aos mesmos fenômenos: a troca de energia e a formação de modos acoplados. O fenômeno de ressonância interna é identificado por métodos de

perturbação ou por singularidades nas expansões modais das equações de restrição. Por outro lado, o acoplamento modal, é baseado num mecanismo relativamente simples: a perda de estabilidade de um modo normal (Pak, 2006).

Os multimodos ou hipermodos, no caso da análise modal linear, são obtidos por meio da combinação linear da resposta individual dos modos de interesse (Shaw *et al.*, 1999), sendo que na análise modal não linear, por não ser válido o princípio da superposição, os multimodos devem ser obtidos pela construção das variedades invariantes considerando todos os modos de interesse (Apiwattanalungarn, 2003).

A análise baseada nas variedades invariantes é bastante atrativa, pois de modo semelhante à análise linear, ela resulta no desacoplamento das equações de movimento por meio de uma projeção do movimento (Pellicano e Mastroddi, 1997). Assim, em ambos os casos os modos normais constituem uma família de movimentos em que o sistema se comporta como um oscilador de um grau de liberdade (Shaw e Pierre, 1994), de maneira que condições iniciais especiais são necessárias na análise linear e não linear para que se observe a vibração do sistema nos modos normais (Pesheck, 2000).

No caso dos modos normais lineares, os parâmetros modais são constituídos principalmente pela amplitude do movimento, frequência de vibração, vetor modal e ângulo fase (Bellizzi e Bouc, 2005 e 2007). No caso da análise modal não linear baseada nas variedades invariantes, os principais parâmetros modais são a geometria do subespaço das variedades invariantes e são definidos pelas funções de restrição e relações frequência-amplitude de cada modo.

Os parâmetros modais no caso linear dependem unicamente das características intrínsecas ao sistema, enquanto no caso não linear dependem também das características do próprio movimento, como a energia disponível e a amplitude de vibração. No caso linear, portanto, a obtenção dos parâmetros modais corresponde à solução de um problema de autovetor, o que não pode ser reproduzido no caso não linear, uma vez que isso pressupõe que a energia potencial do sistema seja uma forma quadrática para a energia potencial, o que em geral não existe para sistemas não lineares (Falzarano *et al.*, 2001). Isso ocorre porque, segundo Rosenberg (1966), a própria essência da não linearidade é que a energia não seja uma forma quadrática.

As equações de restrição modal no caso não linear correspondem aos autovetores do sistema não linear, no sentido que relacionam as amplitudes relativas do movimento. No caso linear, as frequências de vibração correspondem aos autovalores do sistema, enquanto no caso não linear a frequência é dada por uma curva que varia com a amplitude do movimento (Shih *et al.*, 2006).

Os parâmetros modais são constantes no caso da análise linear, sendo independentes do nível de energia, o que em geral não ocorre no caso não linear (Siller, 2004). Modos normais não lineares similares têm o seu formato independente da energia do sistema e a frequência dependente. Já os modos não similares apresentam tanto a forma quanto a frequência de vibração dependentes do nível de energia de vibração do sistema (Rosemberg, 1966). Assim, os modos normais lineares e os modos não lineares similares têm a sua forma independente da amplitude do movimento, enquanto para os modos não similares a forma é dependente da amplitude (Boivin *et al.*, 1995; Jezequel e Lamarque, 1991).

Essa dependência das curvas de frequências modais do nível de energia no caso de sistemas contínuos impede a exata separação de variáveis para o tempo e espaço nas equações de movimento que governam os problemas não lineares (Kerschen *et al.*, 2006 e 2008), sendo que nos problemas lineares essa separação é possível.

As linhas modais dos sistemas lineares são retas, uma vez que suas coordenadas seguem relações lineares durante as oscilações modais, enquanto no caso dos modos normais não lineares, em geral, as linhas modais são curvas. Na presença de certas condições de simetria essas curvas se degenerem em retas mesmo na presença de não linearidades nas equações de movimento (Happawana *et al.*, 1995; Mikhlin e Morgunov, 2001; Kerschen *et al.*, 2006). Já a geometria das variedades invariantes é plana no caso de modos normais lineares e de modos não lineares similares. Já os modos normais não similares têm sua geometria caracterizada por superfícies curvas, e para os modos que são uma continuação dos modos lineares, tangentes aos planos formados por esses modos (Pesheck, 2000).

A transformação entre as coordenadas modais e físicas nos sistemas lineares é dada por uma matriz linear independente da amplitude do movimento. Contudo, no caso da mesma transformação para sistemas não lineares, a matriz de transformação é não linear, onde seus coeficientes dependem da amplitude do

movimento que não pode ser invertida utilizando as técnicas da álgebra linear (Shaw e Pierre, 1993; Slater e Inman, 1995).

Os modos normais não lineares podem ser estáveis ou instáveis, enquanto os modos lineares são sempre neutramente estáveis (Vakakis, 1997). A estabilidade de um modo normal não linear não depende somente dos parâmetros do sistema, mas também do nível de energia de oscilação do sistema (Vakakis, 1991). Assim, um determinado modo pode, por ressonância interna, perder sua estabilidade e se acoplar a outro modo (Pak, 2006). As bifurcações também podem levar os modos não lineares à perda de sua estabilidade, um conceito desconhecido na análise linear (Kerschen *et al.*, 2006).

A coexistência de múltiplos modos normais não lineares num dado domínio de frequência pode levar à coexistência de múltiplas soluções de equilíbrio estático, o que, por sua vez, não ocorre no caso linear, que possui uma única posição de equilíbrio que está correlacionada a uma bacia de atração. A essa bacia está associado um movimento dependente exclusivamente das condições iniciais (Kerschen *et al.*, 2006).

O diagrama de estabilidade de Mathieu tem sido utilizado em conjunto com a análise modal não linear para o estudo da estabilidade da solução para sistemas discretos (Auld, 1961; Atkinson, 1961 e 1963; Month e Rand 1977). O procedimento mais adotado para estudo da estabilidade de um movimento periódico em um sistema não linear envolve uma perturbação da solução do sistema linearizado, ao qual se aplica então a teoria de Floquet e a estabilidade do sistema reduzido é obtida pela equação de Mathieu (Vito, 1972a; Month e Rand, 1980; Kerschen *et al.*, 2009).

Outro método bastante utilizado para o estudo da estabilidade dos modos normais não lineares são as seções de Poincaré (Month e Rand, 1980; Vakakis, 1991). O método utilizando a seção de Poincaré é correspondente ao uso da teoria de Floquet, uma vez que, caso os multiplicadores característicos do sistema sejam complexos conjugados, o modo é estável e aparece como um centro na seção de Poincaré. Por outro lado, se forem reais e distintos, o modo é instável e se apresenta como um ponto de sela na seção de Poincaré (Pak, 2006).

2.6. Aplicações

Desde o início do seu desenvolvimento (Rosemberg, 1966) a análise modal não linear tem sido utilizada como um meio para obtenção de um entendimento detalhado da dinâmica de sistemas não lineares. Isso se deve ao fato de poderem ser obtidos de maneira analítica, de serem úteis na redução modal, na análise de fenômenos dinâmicos complexos, no estudo da ressonância, acoplamentos modais, troca de energia entre modos e localização não linear espacial do movimento (Andrianov, 2008, Kerschen *et al.*, 2006). Além disso, os modos normais capturam os efeitos de imperfeições, como quebras de simetria, que se traduzem no desaparecimento de modos bifurcados (Bellizi e Bouc, 2005). Os modos essencialmente não lineares são também úteis no desenvolvimento de métodos para identificação de sistemas não lineares (Kerschen *et al.*, 2006).

Diante dessas propriedades, verifica-se que os modos normais não lineares são uma ferramenta eficiente para a solução de problemas de engenharia (Avramov, 2008), em especial de problemas estruturais, uma vez que têm uma certa relação com a análise modal linear, familiar aos engenheiros estruturais (Kerschen *et al.*, 2006).

A seguir são abordadas em detalhe as principais aplicações da análise modal utilizadas na dinâmica estrutural: a redução modal e o estudo do comportamento de sistemas em vibração amortecida e forçada.

2.6.1. Redução modal

Uma análise completa de sistemas estruturais é em geral impraticável, mesmo no caso de sistemas lineares onde a análise modal é utilizada para eliminar essa dificuldade, numa análise preliminar global da dinâmica estrutural (Pesheck, 2000). De modo semelhante, a procura por uma redução de ordem precisa e eficiente tem motivado a busca por uma correspondente análise modal não linear.

Modelos precisos de grandes estruturas e também de componentes estruturais em vibração não linear requerem um alto número de graus de liberdade na discretização por elementos finitos. Em geral isso decorre do acoplamento modal que leva a uma lenta convergência modal. A simulação numérica desses modelos, mesmo por esquemas de elementos finitos, consome grande quantidade

de tempo, resultando em estudos paramétricos lentos e ciclos de projeto demorados (Apiwattananlunggarn, 2003).

Em geral a resposta vibratória de sistemas mecânicos é tipicamente dominada por um número relativamente baixo de modos ativos de vibração (Pesheck, 2000), pois, de acordo com Siller (2004), os efeitos não lineares, em geral, estão confinados a um número pequeno de modos e coordenadas, enquanto o resto se comporta de maneira muito semelhante ao sistema linear. Além disso, tipicamente, se está interessado, na dinâmica dos modos que exibem maior amplitude de movimento, ou que estão localizados num certo domínio de frequência, e não em todos os modos (Apiwattananlunggarn *et al.*, 2003).

Um dos requisitos básicos para os modelos reduzidos utilizados no estudo de sistemas vibratórios é que eles devem ser suficientemente grandes para que efeitos não lineares não sejam desprezados com o truncamento dos graus de liberdade e respectivos modos, mas pequenos o suficiente para que não deixem de resultar em uma análise simplificada (Pesheck, 2000).

Desde os primeiros trabalhos sobre os modos normais não lineares (Rosemberg e Atkinson, 1959) a análise modal não linear tem sido identificada como uma ferramenta potencial à obtenção de modelos de ordem reduzida. Na verdade, a própria essência da idéia das variedades invariantes é extremamente pertinente à redução modal, uma vez que as variedades invariantes são um subconjunto do espaço de fase no qual o sistema se comporta como um sistema de dimensão reduzida. (Pesheck, 2000). Além disso, a propriedade de invariância permite que a contaminação de modos não simulados seja evitada enquanto somente os modos de interesse direto são analisados (Pesheck *et al.* 2002b). Podemos considerar o modo não linear como uma redução modal que considera a contribuição de todos os modos lineares no modo não linear simulado (Pesheck, 2000; Apiwattananlunggarn *et al.*, 2003).

Assim, na redução modal com modos não lineares, somente poucos modos precisam ser mantidos para que se obtenha um requerido grau de precisão. Isso acontece porque os modos normais não lineares de baixa ordem capturam muito da contribuição dos modos lineares de alta ordem, por meio das equações parciais acopladas das variedades invariantes que descrevem o movimento desses modos (Boivin *et al.*, 1994). Assim de acordo com Ma e coautores (2000) os modelos

reduzidos obtidos com os modos normais não lineares são em geral precisos e não requerem tempos longos de computação.

2.6.2.

Vibração amortecida

A análise modal não linear permite o uso de diversos modelos de amortecimento não linear. Yabuno e Nayfeh (2001) se valeram dessa vantagem para o estudo de vibração de vigas em balanço utilizando amortecimento não linear.

O método baseado nas variedades invariantes é mais facilmente estendido para o caso de sistemas amortecidos, menores que 25% (Falzarano *et al.*, 2001), podendo ser utilizado para determinação dos modos não lineares amortecidos, aqueles onde o amortecimento é considerado na obtenção da geometria das variedades invariantes.

Contudo, de acordo com Boivin e coautores (1996), no caso de análises considerando amortecimento pequeno e proporcional, os modos obtidos para vibração não amortecida podem ser utilizados na análise amortecida sem perda de precisão (Boivin *et al.*, 1996). Nesses casos a dinâmica do sistema amortecido se aproxima muito da resposta dinâmica do sistema não amortecido (Kerschen *et al.*, 2008). Isso resulta em um ganho em função da redução dos custos computacionais na obtenção das equações de restrição, já que, para o caso amortecido, principalmente em análise multimodal, um processamento grande é necessário mesmo para sistemas com poucos graus de liberdade (Jiang *et al.*, 2005a; 2005b).

No exemplo prático das estruturas offshore estudadas por Falzarano e coautores (2001), somente para valores relativamente altos de amortecimento, em torno de 25 a 75 % do valor crítico, é necessário o uso dos modos amortecidos.

Essas considerações são utilizadas neste trabalho, uma vez que as porcentagens de amortecimento proporcional utilizadas nos exemplos dos capítulos subsequentes são pequenas.

2.6.3.

Vibração forçada

O estudo da vibração forçada é importante nas análises de fadiga e da resposta de sistemas estruturais sob forças externas, principalmente no caso de

estruturas offshore que estão suscetíveis à excitação proveniente de vento, ondas e correntes marítimas.

Outra importância do estudo da vibração forçada é que a ressonância externa ocorre na vizinhança dos modos normais tanto no caso da análise linear quanto não linear (Rosemberg, 1966; Vakakis, 1996; 1997; Falzarano *et al.*, 2001). Isso acontece porque na vizinhança da ressonância externa o sistema vibra essencialmente nos seus modos - lineares ou não (Rosemberg, 1960).

Quando a vibração é forçada, as variedades invariantes tornam-se dependentes do tempo em relação ao subespaço descrito por elas no sistema correspondente não forçado. Entretanto, a determinação das variedades invariantes dependentes do tempo pode se tornar uma tarefa extremamente custosa do ponto de vista computacional. Vários autores estudaram os efeitos da não consideração da variação temporal dos modos normais não lineares na presença de vibrações forçadas (Boivin *et al.*, 1996; Pierre *et al.*, 2006; Warminski, 2010).

No caso da análise modal linear a força externa é ignorada na obtenção do modelo reduzido e a força é projetada nos modos retidos na análise. Nesse caso os outros modos estão também sob ação da força externa e, portanto também ativos, mas são simplesmente ignorados. Similarmente, na análise modal não linear, a análise de vibração forçada pode ser obtida pela adição dos termos de força externa nas equações de movimento do modelo já reduzido para os modos de interesse, desprezando-se a ativação de outros modos. (Shaw e Pierre, 1999; Pesheck, 2000).

De acordo com Boivin e coautores (1996) em todos os graus de aproximação, a variação com o tempo dos modos normais não lineares (modos forçados) pode ser desconsiderada caso a amplitude da força externa seja pequena quando comparada à amplitude da resposta estrutural. Em geral esse requisito é atendido quando a análise se dá na vizinhança da ressonância externa dos modos mestres. Nesses casos os modos independentes do tempo provêm uma boa aproximação para as variedades invariantes forçadas, ainda que essas tenham a propriedade de invariância claramente violada.

Quando se necessita construir as variedades invariantes forçadas para o movimento de um determinado modo de interesse, podem-se obter os modos normais não lineares dependentes do tempo considerando-se uma equação

adicional onde o termo de força externa é considerado como uma variável adicional do problema. Com essa nova variável, a metodologia baseada nas variedades invariantes pode ser estendida para casos de vibração harmonicamente forçada (Jiang *et al.*, 2005a). Considere-se, por exemplo, a ação de uma força harmônica senoidal sobre a estrutura, a variável adicional e sua derivada temporal são dadas pelas seguintes expressões:

$$x_f = \text{sen}(\omega_f t), \dot{x}_f = y_f = \omega_f \cos(\omega_f t); \quad (2-30)$$

onde ω_f é a frequência da carga externa.

A equação adicional no formato de equação de Cauchy de primeira ordem é igual a:

$$\dot{x}_f = y_f, \dot{y}_f = -\omega_f^2 \text{sen}(\omega_f t); \quad (2-31)$$

com as seguintes condições iniciais adicionais:

$$x_f(0) = 1, y_f(0) = 0 \quad (2-32)$$

Assim, as equações de restrição para os modos escravos são definidas no espaço aumentado, dependendo tanto do par mestre de coordenadas quanto da variável acrescentada que corresponde ao termo forçado, o que corresponde, mesmo no caso onde não haja ressonâncias externas, a uma análise multimodal. Transforma-se assim um problema não autônomo em um problema autônomo. As variedades invariantes resultantes são ditas forçadas e possuem uma dimensão a mais quando comparadas às variedades invariantes de vibração livre. Os modos podem ser vistos como hipersuperfícies que variam no tempo com um período igual ao da força externa. Além disso, as superfícies modais não tendem a zero quando a amplitude tende a zero como no caso da vibração livre (Jiang *et al.*, 2005a).

2.7.

Análise modal linear x não linear

Com base na discussão apresentada sobre as características, propriedades e aplicações fundamentais da análise modal não linear e com o intuito de se evidenciarem semelhanças e diferenças entre os modos normais não lineares e lineares, apresenta-se na Tabela 2-2 uma comparação entre as duas análises.

Propriedade	Análise Modal Linear	Análise Modal Não Linear
Existência de soluções periódicas	Sim	Sim
Existência de múltiplas soluções	Não	Sim
Energia Potencial	Forma quadrática	Em geral não é forma quadrática.
Superposição dos efeitos	Válida	Inválida
Invariância	Válida	Válida somente individualmente.
Ortogonalidade	Válida.	Inválida.
Técnica de obtenção	Problema de autovalor.	Outras técnicas: métodos de energ., varied. invariantes, etc.
Geometria das variedades invariantes	Hiperplano.	Hiperplano (modos similares) e hiper-superfície (modos não similares).
Linhas modais	Retas.	Retas (modos similares) e curvas (modos não similares).
Equações de restrição	Lineares	Lineares (modos similares) e não lineares (modos não similares).
Parâmetros modais	Amplitude do movimento, frequência de vibração, vetor modal e ângulo fase.	Geometria das variedades invariantes e relações frequência amplitude.
Frequências de vibração	Autovalores do sistema.	Curvas frequência amplitude.
Relações entre amplitudes de vibração	Autovetores do sistema.	Equações de restrição.
Dependência da energia	Formato e frequência independentes.	Formato: dependente (não similar) e independente (similar); frequência: dependente.
Transformação modal	Matriz linear.	Matriz não linear.
Força externa	Excluída.	Excluída ou incluída (varied. invar. forçadas)
Ressonância externa	Ocorre na vizinhança dos modos.	Ocorre na vizinhança dos modos.
Amortecimento	Linear proporcional.	Linear ou não, proporc. ou não.
Multiplicidade de modos	Inexistente.	Pode ou não existir.
Bifurcação modal	Inexistente.	Pode ou não existir.
Ressonância interna	Inexistente.	Pode ou não existir.
Acoplamento modal	Inexistente.	Pode ou não existir.
Contaminação entre modos	Inexistente.	Pode ou não existir.
Multimodos	Combinação linear dos modos.	Análise multimodal.
Localização espacial	Inexistente.	Pode ou não existir.
Desacoplamento	Válida	Válida somente na ausência de acoplamentos.
Troca de energia entre modos	Reversível.	Reversível ou irreversível.
Redução modal	Modos escravos não são considerados.	Modos escravos são considerados.
Estabilidade dos modos	Estáveis	Estáveis ou instáveis.

Tabela 2-2 Comparativo entre análise modal linear e não linear.