

5 Plataforma “Spar”

Um exemplo adicional do uso dos modos normais não lineares para o entendimento do comportamento dinâmico não linear de estruturas *offshore* é a análise das vibrações de plataformas do tipo “spar”. A plataforma do tipo “spar” clássica consiste basicamente de um grande casco cilíndrico com sistemas de amarração e risers (Chakrabarti, 2005). De acordo com Koo e coautores (2004), a principal razão para uso de cascos grandes é que, devido ao seu calado profundo, os movimentos de afundamento (*heave*) e arfagem (*pitch*) são pequenos o suficiente para permitir a instalação de risers rígidos com árvores de natal secas.

Outra característica marcante das plataformas do tipo “spar” é que os períodos naturais de afundamento e arfagem dessas estruturas são relativamente longos. Isso decorre da geometria da estrutura com uma pequena área de flutuação quando comparada ao grande volume submerso da estrutura. Assim, em geral, as plataformas do tipo “spar” não são excitadas verticalmente. Contudo, de acordo com Rho e Choi (2002), a resposta do movimento de afundamento cresce de modo drástico na ressonância quando acoplamentos entre esses movimentos e os de arfagem são induzidos pela vibração da plataforma. Além desses fenômenos, as condições severas do ambiente marítimo demandam uma análise não linear da vibração de plataformas *offshore* do tipo “spar”. Neste capítulo, a análise não linear é realizada por meio do uso dos modos normais não lineares de vibração.

5.1. Formulação

A abordagem clássica na engenharia de estruturas offshore é usar as equações de movimento de corpos rígidos para modelar o comportamento das estruturas flutuantes (Ma e Patel, 2001). A dinâmica dos corpos rígidos flutuantes é governada por seis equações de movimento, uma para cada um dos seis possíveis graus de liberdade da estrutura. Sendo três graus de liberdade utilizados para descrição das translações: x_1 – avanço (*surge*), x_2 – deriva (*sway*) e x_3 –

afundamento (*heave*); e outros três utilizados para descrição das rotações: x_4 – jogo (*roll*), x_5 – arfagem (*pitch*) e x_6 – guinada (*yaw*). Os seis graus de liberdade do modelo de corpo rígido para a plataforma “spar” são mostrados na Figura 5-1 (a).

O modelo físico utilizado para o tipo clássico de plataforma “spar” é um cilindro longo (Jingrui e coautores, 2010). Aqui não se consideram os risers e sistemas de ancoragem da plataforma na análise da vibração da plataforma. A configuração do modelo é mostrada na Figura 5-1 (b) e as definições dos parâmetros utilizados na modelagem da plataforma são mostradas na Tabela 5-1. No Apêndice B apresenta-se um glossário dos termos técnicos e características de estruturas offshore aqui utilizadas.

Em decorrência da configuração simétrica da plataforma, da importância dos movimentos de afundamento e arfagem da estrutura para a operação segura dos sistemas de risers e ancoragem, e também devido aos fenômenos de ressonância interna e externa associados a esses graus de liberdade, somente esses dois movimentos são analisados aqui. Esse procedimento é comum na literatura relacionada ao assunto (Ma e Patel, 2001; Rho e Choi, 2002; Koo *et al.*, 2004; Jingrui *et al.*, 2010 e Li *et al.*, 2011).

De acordo com princípio de D’Alembert e a segunda lei de Newton as

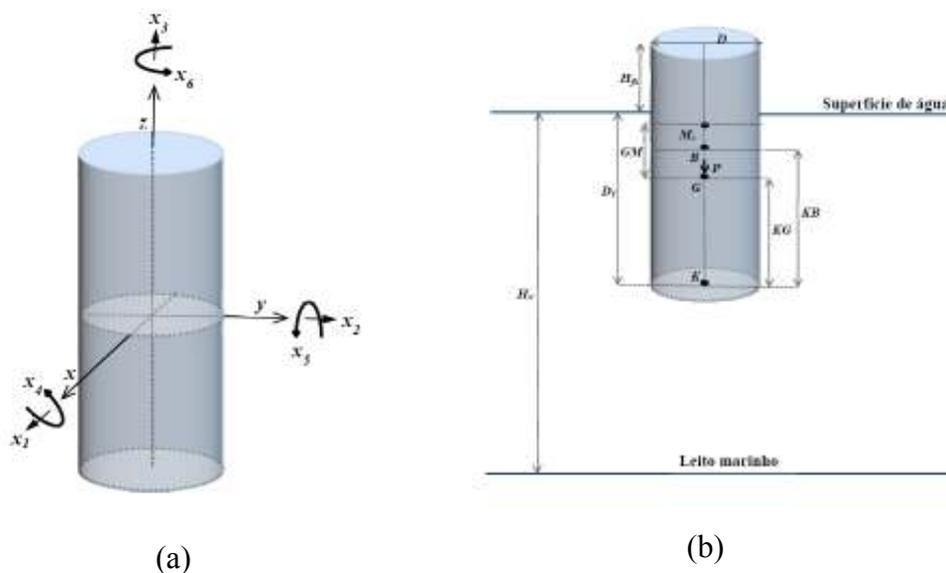


Figura 5-1 Modelo da plataforma tipo “spar”: (a) seis graus de liberdade; (b) principais parâmetros e dimensões.

Parâmetro	Símbolo
Altura da lâmina de água	H_w
Diâmetro	D
Calado	D_f
Borda livre	H_{fb}
Peso total	P
Metacentro	M_c
Centro de empuxo	B
Centro de gravidade	G
Ponto de quilha	K
Distância entre K e G	KG
Distância entre K e B	KB
Altura metacêntrica	GM

Tabela 5-1 Principais parâmetros da plataforma “spar”.

equações acopladas para vibração forçada amortecida que governam os movimentos de afundamento e arfagem são (Chakrabarti, 2005):

$$(m + A_{33})\ddot{x}_3 + C_3\dot{x}_3 + R_3(x_3, x_5) = F_3(t); \quad (5-1)$$

$$(I_{55} + A_{55})\ddot{x}_5 + C_5\dot{x}_5 + R_5(x_3, x_5) = F_5(t); \quad (5-2)$$

onde m , A_{33} , C_3 , R_3 e F_3 denotam a massa da plataforma, a massa adicionada na direção de x_3 , o coeficiente de amortecimento para o movimento de afundamento, as forças restauradoras e forças externas na direção z . Já os coeficientes I_{55} , A_{55} , C_5 , R_5 e F_5 na eq. (5-2) representam respectivamente o momento de inércia em torno do eixo y , a massa adicionada relacionada ao movimento de arfagem, o coeficiente de amortecimento de arfagem, os momentos restauradores e os momentos devidos à ação de forças externas em torno do eixo y . Os pontos sobre as variáveis representam suas derivadas em relação ao tempo t .

Em alguns casos, a rigidez hidrostática pode ser vista como uma constante resultante do equilíbrio estático, contudo, de acordo com Li e coautores (2011), o movimento de afundamento é sempre acompanhado por movimentos de arfagem quando a plataforma é excitada por ondas. O resultado direto desse fato é que as forças e momentos restauradores são dependentes do tempo, uma vez que a rigidez hidrostática se modifica com o movimento global da estrutura em vibração. Esse comportamento leva a um problema de excitação paramétrica, ou

seja, os coeficientes dos termos das forças hidrostáticas são dependentes do tempo.

As forças e momentos restauradores aqui utilizados são os propostos por Jíngruí e coautores (2010) e são resultados de modelos e protótipos experimentais. De acordo com essa modelagem, a força restauradora na direção z e o momento restaurador em torno do eixo y podem ser escritos, respectivamente, como:

$$R_3(x_3, x_5) = \rho_w g A_w \left[x_3 - x_5^2 \frac{H_g}{2} - \eta(x, t) \right]; \quad (5-3)$$

$$R_5(x_3, x_5) = V_w \left[GMx_5 - \frac{1}{2} x_3 x_5 + \frac{1}{2} \eta(x, t) x_5 \right]; \quad (5-4)$$

onde ρ_w e g são respectivamente a massa específica da água e aceleração da gravidade; A_w é a área de flutuação (região horizontal formada pela interseção do casco da plataforma na altura da linha de água com a superfície); H_g é a distância entre o centro de gravidade e a superfície de água; η é o perfil de onda e V_w é o volume total de água deslocado pela estrutura.

A área de flutuação da plataforma, e o volume total de água deslocada são definidos pelas seguintes expressões, respectivamente:

$$A_w = \frac{\pi}{4} D^2; \quad V_w = A_w D_f \quad (5-5)$$

onde D é o diâmetro e D_f é o calado do casco da plataforma.

O perfil de onda é dado pela teoria de ondas planas, eq. (4-49), que, para ondas de período muito longo como as consideradas na análise, se reduz a (Jíngruí *et al.*, 2010):

$$\eta(x, t) = \eta_0 \cos \omega t \quad (5-6)$$

onde η_0 e ω são respectivamente a amplitude e a frequência da onda.

O momento de inércia da plataforma “spar”, I_{55} , é igual a:

$$I_{55} = \frac{m}{32} \left[2D^2 + 3l^2 + 32(k_{yy})^2 \right] \quad (5-7)$$

onde k_{yy} é o raio de giração e l o comprimento do casco da plataforma. Os coeficientes da massa adicionada para o afundamento e a arfagem são dados respectivamente por (Jíngruí *et al.*, 2010):

$$A_{33} = \frac{1}{12} \pi \rho_w D^3; \quad A_{55} = \frac{1}{12} \pi \rho_w D^2 \left[KG^3 + (D_f - KG)^3 \right] \quad (5-8)$$

O momento e a força externos são descritos por funções periódicas dadas pelas expressões:

$$F_3 = K_3(\omega)\eta_0 \cos(\omega t); \quad F_5 = K_5(\omega)\eta_0 \cos(\omega t); \quad (5-9)$$

onde K_3 e K_5 são as amplitudes (dependentes da frequência da onda - ω) da força e momento externos, respectivamente.

A dependência entre as amplitudes das forças generalizadas e a frequência da onda, de acordo com Jingrui e coautores (2010), é dada por meio das curvas mostradas na Figura 5-2 (a) e (b), correspondentes ao resultado da interpolação polinomial dos resultados de testes experimentais e expressa pelas seguintes equações:

$$K_3 = (-2,212\omega^7 + 4,967\omega^6 - 4,403\omega^5 + 1,898\omega^4 - 0,391\omega^3 + 0,354\omega^2 - 0,051\omega + 0,012)10^6; \quad (5-10)$$

$$K_5 = (-19,804\omega^7 + 103,621\omega^6 - 206,058\omega^5 + 179,512\omega^4 - 40,561\omega^3 - 34,227\omega^2 + 18,684\omega - 1,138)10^5 \quad (5-11)$$

Da divisão das equações de movimento (5-1) e (5-2) pelos coeficientes dos termos de aceleração e utilizando-se as expressões de (5-3) a (5-9), obtém-se as seguintes equações de movimento para a plataforma “spar”:

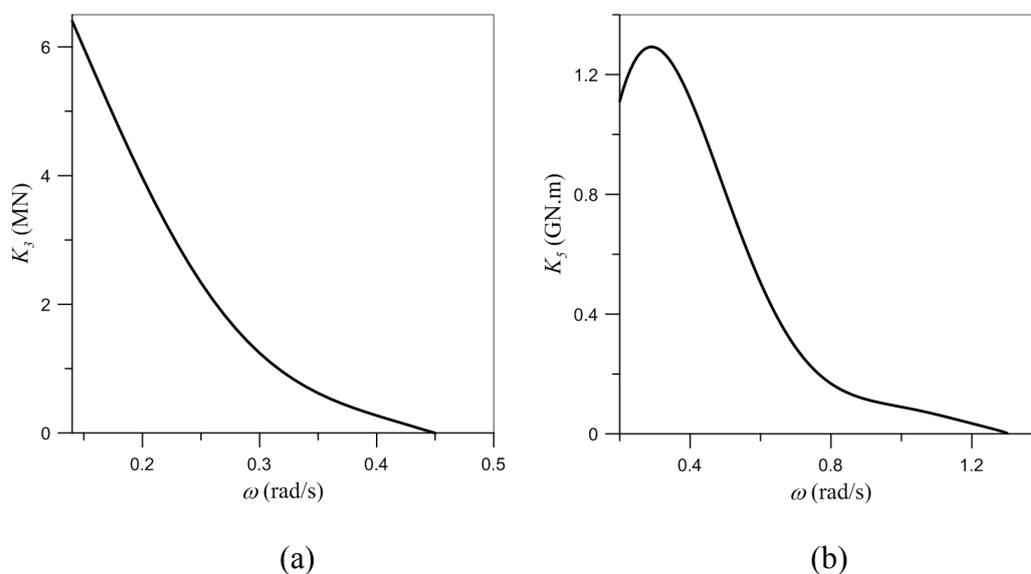


Figura 5-2 Amplitudes das forças generalizadas externas: (a) força de afundamento; (b) momento de arfagem.

$$\ddot{x}_3 + 2\mu_3\dot{x}_3 + \omega_{03}^2 x_3 - \bar{a}_3 x_5^2 - \bar{b}_3 \eta_0 \cos(\omega t) = \bar{k}_3(\omega) \cos(\omega t); \quad (5-12)$$

$$\ddot{x}_5 + 2\mu_5\dot{x}_5 + \omega_{05}^2 x_5 - \bar{a}_5 x_3 x_5 + \bar{a}_5 x_5 \eta_0 \cos(\omega t) = \bar{k}_5(\omega) \cos(\omega t) \quad (5-13)$$

Os coeficientes das equações (5-12) e (5-13) são definidos a seguir.

Os coeficientes de amortecimento são expressos por:

$$\mu_3 = \frac{C_3}{2(m + A_{33})} = \frac{\omega_{03}\xi_3}{(m + A_{33})}; \quad \mu_5 = \frac{C_5}{2(I_{55} + A_{55})} = \frac{\omega_{05}\xi_5}{(I_{55} + A_{55})}, \quad (5-14)$$

onde ξ_3 e ξ_5 são os fatores de amortecimento respectivamente na direção do afundamento e da arfagem e ω_{03} e ω_{05} são as frequências naturais para os movimentos de afundamento e arfagem, definidas pelas seguintes expressões:

$$\omega_{03}^2 = \frac{\rho_w g A_w}{m + A_{33}}; \quad \omega_{05}^2 = \frac{V_w GM}{I_{55} + A_{55}} \quad (5-15)$$

Os coeficientes dos termos não lineares da força e momento restauradores são dados por:

$$\bar{a}_3 = \frac{\rho_w g A_w H_g}{2(m + A_{33})}; \quad \bar{b}_3 = \frac{\rho_w g A_w}{(m + A_{33})}; \quad \bar{a}_5 = \frac{V_w}{2(I_{55} + A_{55})} \quad (5-16)$$

Os coeficientes da força e momento externos são:

$$\bar{K}_3(\omega) = \frac{K_3(\omega)}{m + A_{33}}; \quad \bar{K}_5(\omega) = \frac{K_5(\omega)}{I_{55} + A_{55}} \quad (5-17)$$

As equações (5-12) e (5-13) descrevem um problema de excitação paramétrica, já que apresentam termos harmônicos como coeficientes nas equações diferenciais de movimento.

5.2. Modos normais lineares

A linearização das equações de movimento (5-12) e (5-13) resulta no seguinte sistema de equações:

$$\ddot{x}_3 + \omega_{03}^2 x_3 = 0; \quad \ddot{x}_5 + \omega_{05}^2 x_5 = 0 \quad (5-18)$$

O sistema linear é desacoplado e possui dois autovetores distintos (modos normais lineares): $\Phi_3 = (1,000; 0,000)^T$ e $\Phi_5 = (0,000; 1,000)^T$ associados aos dois autovalores, ω_{03} e ω_{05} , (frequências de vibração, consideradas inicialmente não proporcionais) definidos pelas equações (5-15).

5.3. Modos normais não lineares

O método assintótico é utilizado para obtenção dos modos normais não lineares, de acordo com a abordagem baseada na definição das variedades invariantes. Escolhe-se inicialmente o grau de liberdade relacionado ao movimento de arfagem e sua velocidade como par mestre das variedades invariantes:

$$x_3 = u, \dot{x}_3 = v \quad (5-19)$$

Utilizando-se o par mestre definido por (5-19) investiga-se, primeiramente, a existência de modos normais similares. Desse modo identifica-se a existência de um modo similar cuja constante de proporcionalidade é igual a:

$$c_{53} = 0 \quad (5-20)$$

ou seja:

$$x_5 = 0, \dot{x}_5 = 0 \quad (5-21)$$

A restrição dada pela eq. (5-20) indica a existência de um modo desacoplado na direção do movimento de afundamento da plataforma. A substituição da eq. (5-20) na versão não forçada e não amortecida da eq. (5-13) resulta no seguinte oscilador modal:

$$\ddot{u} + \omega_{03}^2 u = 0 \quad (5-22)$$

O oscilador resultante do modo normal similar é igual ao resultante da análise modal linear, dado pela eq. (5-18), constituindo assim um modo similar puramente linear. Não se obtém modos não similares fisicamente consistentes usando-se o par mestre definido por (5-19). Isto indica que fisicamente pode existir um movimento puramente vertical sem rotação, sendo este movimento descrito, dentro das hipóteses da formulação adotada por uma equação linear.

A próxima tentativa é escolher o movimento de arfagem e sua velocidade como par mestre:

$$x_5 = u, \dot{x}_5 = v \quad (5-23)$$

As funções de restrição resultantes para o primeiro modo são iguais a:

$$x_3 = P(u, v) = u + \frac{(\bar{a}_3 - \bar{a}_5)(\omega_{03}^2 - 2\omega_{05}^2)}{\omega_{03}^2(\omega_{03}^2 - 4\omega_{05}^2)}u^2 - 2\frac{(\bar{a}_3 - \bar{a}_5)}{\omega_{03}^2(\omega_{03}^2 - 4\omega_{05}^2)}v^2 \quad (5-24)$$

$$\dot{x}_3 = Q(u, v) = v + 2\frac{(\bar{a}_3 - \bar{a}_5)}{(\omega_{03}^2 - 4\omega_{05}^2)}uv \quad (5-25)$$

e para o segundo modo, tem-se:

$$x_3 = P(u, v) = -u + \frac{(\bar{a}_3 - \bar{a}_5)(\omega_{03}^2 - 2\omega_{05}^2)}{\omega_{03}^2(\omega_{03}^2 - 4\omega_{05}^2)}u^2 - 2\frac{(\bar{a}_3 - \bar{a}_5)}{\omega_{03}^2(\omega_{03}^2 - 4\omega_{05}^2)}v^2 \quad (5-26)$$

$$\dot{x}_3 = Q(u, v) = -v + 2\frac{(\bar{a}_3 - \bar{a}_5)}{(\omega_{03}^2 - 4\omega_{05}^2)}uv \quad (5-27)$$

Observa-se das equações (5-24) a (5-27) que a diferença entre as funções de restrição para os dois modos está apenas no sinal da parte linear dessas relações, sendo positivo para o primeiro modo (modo em fase) e negativo para o segundo (modo fora de fase). Observa-se também que, no caso de ressonância interna 1:2 ($x_5:x_3$), os coeficientes dos termos não lineares resultam em singularidades, indicando assim, que a abordagem baseada nas variedades invariantes não pode ser utilizada nesses casos e que a análise deve ser feita utilizando-se um multimodo (incluindo ambos x_3 e x_5 como pares mestres), o que corresponde às equações originais de movimento (5-12) e (5-13) e não constitui uma redução de ordem do problema.

As singularidades ocorrem nos termos cujo grau de não linearidade corresponde ao tipo de ressonância interna existente no sistema (1:2 no caso do exemplo atual). Esse fato é um resultado direto da violação da propriedade de invariância das variedades invariantes causada pela ressonância interna. Esse exemplo ilustra a propriedade vantajosa da redução modal que utiliza os modos normais não lineares, principalmente para sistemas com um grande número de graus de liberdade. Nesse caso as ressonâncias internas não precisam ser conhecidas *a priori*, pois serão detectadas na expansão das funções de restrição por meio de singularidades nos termos não lineares, cujos graus são correspondentes a essas eventuais ressonâncias internas.

Os osciladores modais são obtidos pela substituição das funções de restrição (5-23) a (5-27) na equação de movimento correspondente ao grau de liberdade de arfagem, resultando para, respectivamente, o primeiro e segundo modos nas seguintes equações:

$$\ddot{u} + \omega_{05}^2 u - \bar{a}_5 u^2 - \frac{\bar{a}_5(\bar{a}_3 - \bar{a}_5)(\omega_{03}^2 - 2\omega_{05}^2)}{\omega_{03}^2(\omega_{03}^2 - 4\omega_{05}^2)} u^3 +$$

$$2 \frac{\bar{a}_5(\bar{a}_3 - \bar{a}_5)}{\omega_{03}^2(\omega_{03}^2 - 4\omega_{05}^2)} u \dot{u}^2 = 0 \quad (5-28)$$

$$\ddot{u} + \omega_{05}^2 u + \bar{a}_5 u^2 - \frac{\bar{a}_5(\bar{a}_3 - \bar{a}_5)(\omega_{03}^2 - 2\omega_{05}^2)}{\omega_{03}^2(\omega_{03}^2 - 4\omega_{05}^2)} u^3 +$$

$$2 \frac{\bar{a}_5(\bar{a}_3 - \bar{a}_5)}{\omega_{03}^2(\omega_{03}^2 - 4\omega_{05}^2)} u \dot{u}^2 = 0 \quad (5-29)$$

Ambos os osciladores modais (5-28) e (5-29) apresentam termos não lineares quadráticos e cúbicos, sendo que o sinal do coeficiente do termo quadrático é positivo para o primeiro modo e negativo para o segundo modo. Já os termos cúbicos têm o sinal dependente dos valores dos coeficientes dos termos das forças restauradoras.

A redução modal obtida com as equações (5-28) e (5-29) permite um tratamento mais simples da análise de vibração da estrutura nos modos correspondentes. Essa análise é objeto das próximas seções.

A validade das superfícies calculadas pelo método assintótico – equações (5-24) e (5-25) é agora analisada com base no procedimento de Galerkin apresentado na seção 2.4.3 para obtenção das equações de restrição do primeiro modo. Para a amplitude foram utilizadas duas funções polinomiais no domínio $a \in [0,1] rad$, de acordo com a não linearidade das equações modais (Pesheck *et al.*, 2002a):

$$L_1(a) = \sqrt{6} \left(\frac{a}{a_0} \right)^2; \quad L_2(a) = \sqrt{2} \left[-12 \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 + 14 \left(\frac{a}{a_0} \right)^3 \right] \quad (5-30)$$

Para o ângulo de fase foram utilizados os três primeiros harmônicos no domínio $\phi \in [0, 2\pi] rad$. Os resultados da aplicação do método para o primeiro modo são:

$$P(a, \phi) = 27,275a^2 \cos \phi; \quad (5-31)$$

$$Q(a, \phi) = (-0,446 + 0,269 \cos \phi + 0,892 \cos^2 \phi + 0,148 \cos^3 \phi) a^2 +$$

$$(0,202 - 0,297 \cos \phi - 0,404 \cos^2 \phi + 0,127 \cos^3 \phi) a^3 \quad (5-32)$$

Os resultados para ambos os modos são praticamente coincidentes uma vez que somente o sinal do coeficiente linear das funções de restrição é oposto para cada um dos modos, assim são mostrados apenas os resultados para o primeiro modo. As variedades invariantes para o primeiro modo representadas pelas equações (5-31) e (5-32) são mostradas na Figura 5-3 junto com as mesmas superfícies calculadas pelo método assintótico – equações (5-24) e (5-25). As variáveis das equações de restrição obtidas pelo método assintótico foram transformadas em coordenadas polares utilizando-se as expressões (2-26). Observa-se nas Figura 5-3 (a) e (b) que, quanto maior a amplitude, maior a diferença entre as superfícies modais obtidas por ambos os métodos, o que se justifica pela validade local dos métodos assintóticos, cujo domínio só pode ser determinado posteriormente à obtenção das variedades invariantes, comparando-as à solução numérica do sistema original de equações de movimento. O método baseado no procedimento de Galerkin tem seu domínio de validade definido *a priori*.

Utiliza-se também o procedimento numérico apresentado na seção 3.3.10 para obtenção das variedades invariantes do primeiro modo. As equações de movimento foram integradas utilizando as seguintes condições iniciais:

$$x_3(0) = 0,324 ; \dot{x}_3(0) = 0,000 ; x_5(0) = 0,100 ; \dot{x}_5(0) = 0,000 \quad (5-33)$$

As condições iniciais (5-33) foram definidas com ajuda das equações de restrição obtidas pelo método assintótico. Para se obterem variedades invariantes mais precisas podem ser utilizadas as funções de restrição obtidas pelo método de Galerkin o que resulta em:

$$x_3(0) = 0,273 ; \dot{x}_3(0) = 0,000 ; x_5(0) = 0,100 ; \dot{x}_5(0) = 0,000 \quad (5-34)$$

As variedades invariantes obtidas pelo procedimento numérico, para as condições iniciais (5-33) e (5-34), são mostradas junto das superfícies modais obtidas pelo método assintótico na Figura 5-4, onde se observa uma boa correspondência entre elas no domínio das variáveis definido pelas condições iniciais utilizadas.

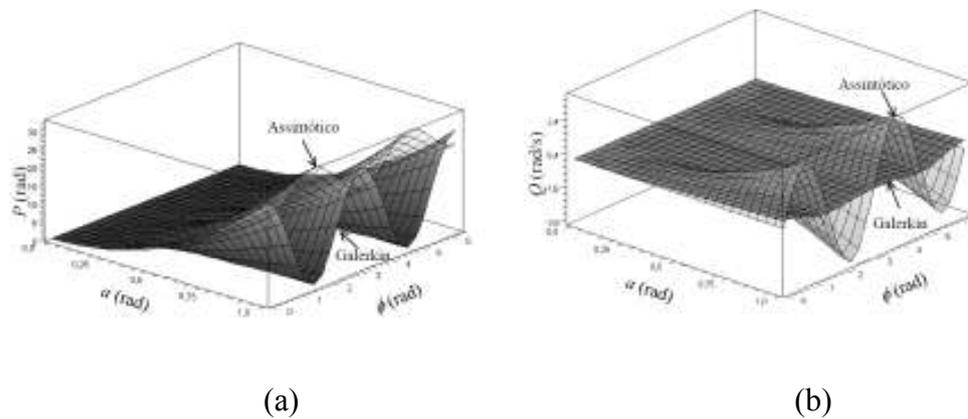


Figura 5-3 Equações de restrição para o primeiro e segundo modos – comparação entre os métodos baseado no procedimento de Galerkin e assintótico: (a) deslocamentos; (b) velocidades.

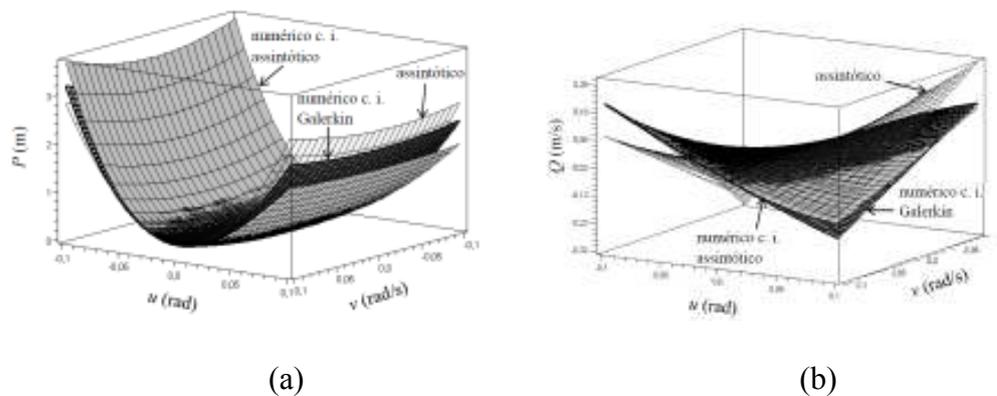


Figura 5-4 Equações de restrição para o primeiro e segundo modos – comparação entre o procedimento numérico e o método assintótico: (a) deslocamentos; (b) velocidade.

5.4. Resposta no tempo

A análise numérica utilizada tem por base os parâmetros numéricos sugeridos por Jingrui e coautores (2010), esses valores estão listados na Tabela 5-2. Para esse exemplo numérico os valores das frequências naturais de afundamento e arfagem são respectivamente $\omega_{03}=0,281$ rad/s e $\omega_{05}=0,360$ rad/s.

Os resultados da integração numérica das equações originais de movimento para o primeiro modo e segundo modo são apresentados na Figura 5-5. Observa-se da Figura 5-5 (a) que ambos os modos são não similares, ou seja, se apresentam como curvas e não retas no espaço de configuração. Observa-se também, de acordo com a Figura 5-5 (b) e a Figura 5-5 (c) que o primeiro modo apresenta

solução para os movimentos de afundamento e arfagem em fase, enquanto para o segundo modo esses movimentos estão fora de fase. Ambos os modos, nesse exemplo, podem ser vistos como uma continuação dos modos normais lineares, seguindo, portanto, a Definição 5 (Seção 2.3.2), uma vez que as variedades invariantes são tangentes aos hiperplanos gerados pelos modos normais lineares do sistema. O problema apresenta dois modos não similares e um modo similar essencialmente linear, ou seja, resulta num oscilador modal linear expresso pela eq. (5-22).

5.5. Relação frequência-amplitude

Utiliza-se o método do balanço harmônico para obtenção das relações entre frequência e amplitude para os dois modos normais não lineares da plataforma. De acordo com o tipo de não linearidade observada nos osciladores modais (5-28) e (5-29), assume-se a seguinte solução harmônica:

$$u(t) = X_1 + X_2 \cos(\omega t) \quad (5-35)$$

Utilizando-se as relações trigonométricas do Anexo I, obtém-se para o primeiro modo o seguinte sistema algébrico de equações não lineares em termos das amplitudes e frequência do movimento:

$$\begin{aligned} X_1 - 0,007X_1^2 - 0,003X_2^2 - 0,144X_1^3 - 0,216X_1X_2^2 - \\ 0,104\Omega^2X_1X_2^2 = 0; \end{aligned} \quad (5-36)$$

Parâmetro	Símbolo	Valor
Altura da lâmina de água	H_w	1018,000 m
Diâmetro	D	74,400 m
Calado	D_f	198,100 m
Borda livre	H_{fb}	15,100 m
Peso total	P	423,500 kN
Massa específica da água	ρ_w	999,000 kg/m ³
Distância entre K e G	KG	89,000 m
Distância entre K e B	KB	99,100 m
Altura metacêntrica	GM	10,100 m

Tabela 5-2 Parâmetros do exemplo numérico da plataforma “spar”

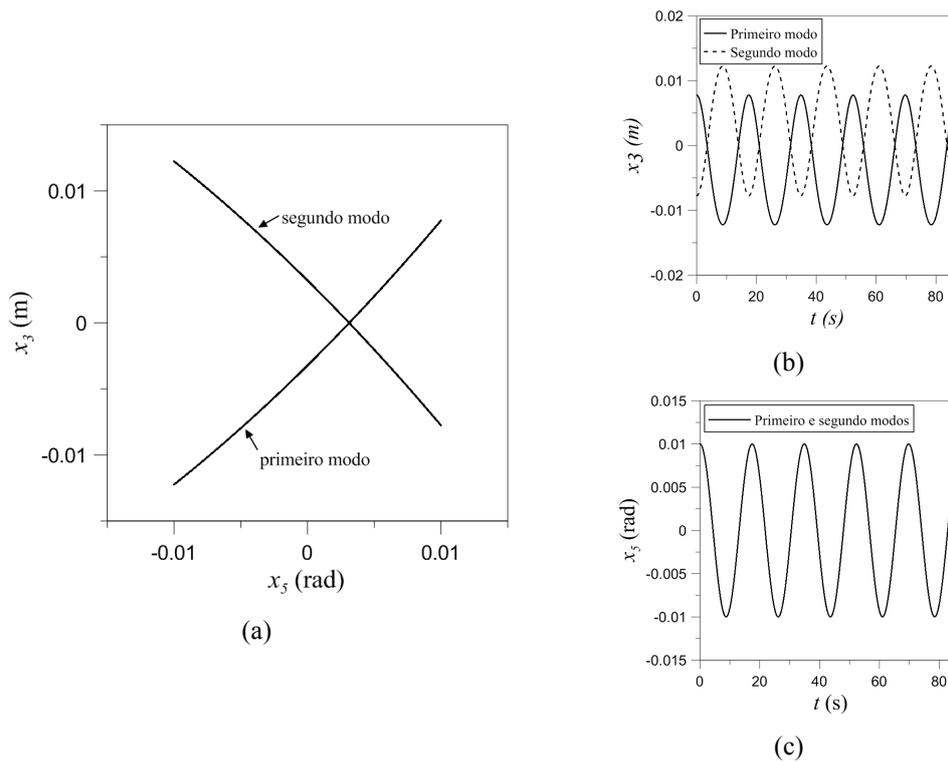


Figura 5-5 Resposta no tempo para os modos normais não lineares, c.i. : (0,010; 0,000; 0,012; 0,000): (a) $x_3 \times x_5$; (b) $x_3 \times t$; (c) $x_5 \times t$.

$$\Omega^2 - 1,000 + 0,013X_1 + 0,432X_1^2 + 0,108X_2^2 + 0,052\Omega^2 X_2^2 = 0; \quad (5-37)$$

onde Ω é um parâmetro adimensional de frequência definido como:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{05}} \quad (5-38)$$

Para o segundo modo obtém-se:

$$X_1 + 0,007X_1^2 + 0,003X_2^2 - 0,144X_1^3 - 0,216X_1X_2^2 - 0,104\Omega^2 X_1X_2^2 = 0; \quad (5-39)$$

$$\Omega^2 - 1,000 - 0,013X_1 + 0,432X_1^2 + 0,108X_2^2 + 0,052\Omega^2 X_2^2 = 0 \quad (5-40)$$

A diferença entre o sistema de equações (5-36) e (5-37) para o primeiro modo e o sistema de equações (5-39) e (5-40) para o segundo modo está apenas nos sinais invertidos nos coeficientes provenientes dos termos de não linearidade quadrática. Como a magnitude desses coeficientes é pequena se comparada com os coeficientes provenientes dos termos cúbicos, as curvas de ressonância mostradas nas Figura 5-6 (a) e (b), onde $X^* = X_1 + |X_2|$, se mostram bastantes semelhantes para ambos os modos. Assim também o efeito da assimetria

provocado pelos termos quadráticos é desprezível nessas curvas. Observa-se um alto grau de não linearidade das curvas de ressonância para ambos os modos com o sistema apresentando forte perda de rigidez.

Alguns pontos obtidos da integração direta das equações originais de movimento são também mostrados nas Figura 5-6 (a) e (b) como solução de referência. Utiliza-se o método numérico com as equações levemente amortecidas apresentado na seção 3.2.5 para obtenção da solução de referência. A comparação entre a solução de referência e a solução utilizando-se o modelo reduzido obtido por meio dos modos normais não lineares mostra uma boa correspondência até amplitudes de movimento menores que 1 rad, o que já corresponde a oscilações de grande amplitude, revelando desse modo a validade das aproximações usadas no processo de derivação das expressões (5-24) a (5-27).

A precisão da solução aproximada representada pela eq. (5-35) pode ser estudada adicionando-se mais harmônicos à série, de acordo com o tipo de não linearidade das equações. Utilizam-se, assim, as seguintes aproximações com respectivamente três e quatro termos:

$$u(t) = X_1 + X_2 \cos(\omega t) + X_3 \cos(2\omega t) \quad (5-41)$$

$$u(t) = X_1 + X_2 \cos(\omega t) + X_3 \cos(2\omega t) + X_4 \cos(3\omega t) \quad (5-42)$$

As curvas utilizando-se as expressões (5-35), (5-41) e (5-42) são mostradas na Figura 5-7 (a). Observa-se que a contribuição dos harmônicos adicionais é insignificante na obtenção das curvas frequência-amplitude para o exemplo considerado.

Estuda-se, a seguir, a influência dos termos não lineares retidos nas equações dos osciladores modais (5-28) e (5-29). Os resultados obtidos considerando-se somente até os termos quadráticos e, a seguir, incluindo a não linearidade cúbica, são mostrados na Figura 5-7 (b) e comparados com a solução de referência. Observa-se a relevância dos termos de não linearidade cúbica na obtenção de um modelo reduzido preciso. Isso acontece mesmo que ainda os termos cúbicos estejam incompletos nas equações dos osciladores modais, já que nas expansões polinomiais para obtenção das equações de restrição foram utilizados somente termos quadráticos. Os termos cúbicos sofrem alterações no caso de aproximações de ordens mais elevadas para as variedades invariantes. A importância da inclusão dos termos cúbicos se deve ao fato, conforme observação

de Pesheck (2000), de que a contribuição dos modos escravos incide nos termos cúbicos do oscilador não linear, no caso da presença de não linearidades quadráticas. Desse modo, os termos cúbicos, mesmo que imprecisos, são responsáveis pela descrição adequada da dinâmica do sistema pelo modelo de ordem reduzida.

Com base nesses resultados utiliza-se nas análises das seções subsequentes o modelo reduzido com não linearidades quadráticas e cúbicas, expresso pelas equações dos osciladores modais (5-28) e (5-29). Quanto às expansões, utilizadas

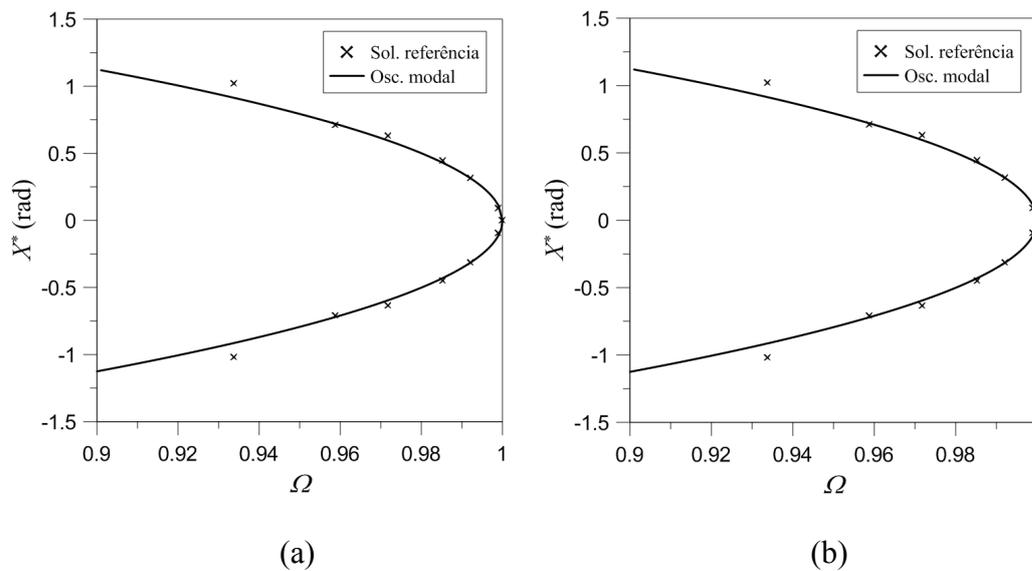


Figura 5-6 Curvas frequência-amplitude: (a) primeiro modo; (b) segundo modo.

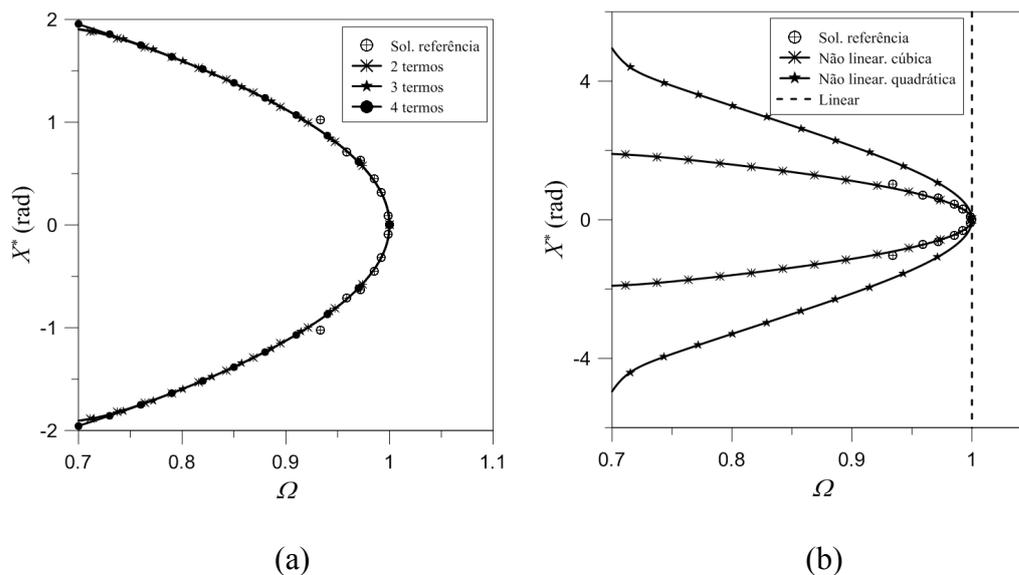


Figura 5-7 Estudo de convergência das curvas de frequência-amplitude: (a) efeito do número de termos na expansão da solução; (b) efeito da não linearidade do oscilador modal.

para aproximação de soluções periódicas, é sempre adotada a expressão dada pela eq. (5-35), acrescida de um harmônico senoidal no caso da presença de amortecimento.

5.6. Espaço de fase

O domínio de validade das expansões polinomiais também pode ser determinado comparando-se as órbitas dos movimentos correspondentes aos modos normais não lineares nos planos de fase obtidos da integração direta das equações originais de movimento e dos osciladores modais. Como no caso das curvas de ressonância, os planos de fase para ambos os modos são praticamente idênticos, e, portanto somente um deles é mostrado na Figura 5-8. Observa-se uma boa concordância entre as soluções de referência e a solução do modelo de ordem reduzida dentro dos limites fisicamente aceitáveis de oscilações. Assim como nas curvas de ressonância, a correspondência entre ambos os resultados se mantém com boa precisão até amplitudes de movimento menores que 1 rad.

5.7. Vibração forçada

Ainda que as equações de movimento do modelo utilizado para a plataforma “spar” consistam de uma excitação paramétrica, é comum que se utilize a análise de vibração forçada harmônica como fase preliminar no estudo da dinâmica não linear do problema (Hann e Benaroya, 2000b). Essa fase preliminar permite a obtenção de conhecimentos básicos sobre o comportamento do sistema quando em vibração forçada, muito adequada na fase inicial de projeto. Desse modo os termos de excitação paramétrica das equações (5-12) e (5-13) são desprezados nessa seção.

Como na análise aqui realizada a amplitude da força externa é pequena quando comparada as amplitudes do movimento, pode-se utilizar os modos normais obtidos na análise da vibração livre para dedução de um modelo reduzido forçado (Wang, 2008), obtido pela inserção da força harmônica externa nos osciladores modais (5-28) e (5-29), o que resulta em:

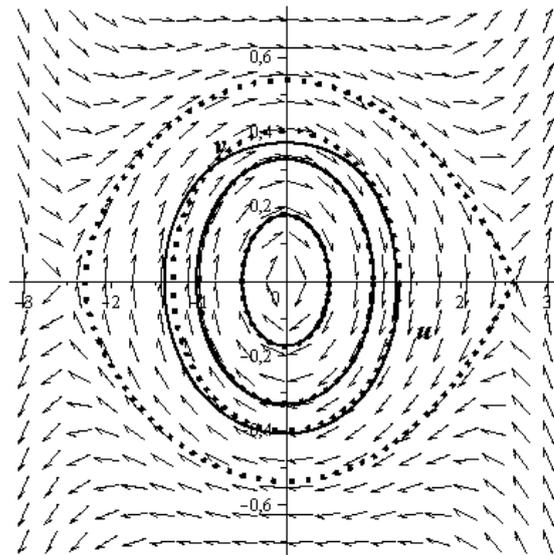


Figura 5-8 Espaço de fase para o primeiro e segundo modo, (linhas contínuas – solução de referência; linhas pontilhadas – modelo reduzido).

$$\ddot{u} + \omega_{05}^2 u + 2\mu_5 \dot{u} - \bar{a}_5 u^2 - \frac{\bar{a}_5 (\bar{a}_3 - \bar{a}_5) (\omega_{03}^2 - 2\omega_{05}^2)}{\omega_{03}^2 (\omega_{03}^2 - 4\omega_{05}^2)} u^3 + 2 \frac{\bar{a}_5 (\bar{a}_3 - \bar{a}_5)}{\omega_{03}^2 (\omega_{03}^2 - 4\omega_{05}^2)} u \dot{u}^2 = \bar{k}_5(\omega) \cos(\omega t) \quad (5-43)$$

$$\ddot{u} + \omega_{05}^2 u + 2\mu_5 \dot{u} + \bar{a}_5 u^2 - \frac{\bar{a}_5 (\bar{a}_3 - \bar{a}_5) (\omega_{03}^2 - 2\omega_{05}^2)}{\omega_{03}^2 (\omega_{03}^2 - 4\omega_{05}^2)} u^3 + 2 \frac{\bar{a}_5 (\bar{a}_3 - \bar{a}_5)}{\omega_{03}^2 (\omega_{03}^2 - 4\omega_{05}^2)} u \dot{u}^2 = \bar{k}_5(\omega) \cos(\omega t) \quad (5-44)$$

A análise da dinâmica forçada dos osciladores (5-43) e (5-44) é mais simples que a análise direta do sistema original de equações. As curvas de ressonância, diagramas de bifurcação e estabilidade são obtidos nas próximas seções utilizando-se os valores numéricos da Tabela 5-2.

5.7.1.

Curvas de ressonância

As curvas de ressonância para vibração forçada amortecida de ambos os modos são obtidas pelos métodos do balanço harmônico e do comprimento de arco, utilizando-se a seguinte expressão:

$$u(t) = X_1 + X_2 \cos(\omega t) + X_3 \sin(\omega t) \quad (5-45)$$

As curvas são muito semelhantes para ambos os modos e os efeitos do amortecimento e da amplitude da onda são mostrados respectivamente na Figura

5-9 (a) e na Figura 5-9 (b), onde $X^* = X_1 + (X_2^2 + X_3^2)^{1/2}$ e $\xi_5 = \xi$. Ambas as figuras mostram o efeito do salto dinâmico, exibindo trechos de soluções estáveis e instáveis. O salto dinâmico sofre uma influência acentuada do fator de amortecimento, como se observa na Figura 5-9 (a), desaparecendo na medida em que se aumentam os valores de amortecimento, sendo que nessas regiões a solução se aproxima da resposta linear. Já a Figura 5-9 (b) mostra a influência do valor da amplitude de onda. Essa influência tem a sua relevância limitada à região da ressonância.

A precisão do modelo reduzido obtido pelo uso dos modos normais não lineares pode ser verificada comparando-se as curvas de ressonância obtidas pela aplicação do método do balanço harmônico ao sistema original de equações (5-12) e (5-13), assumida como solução de referência, para as curvas obtidas por meio da aplicação do método do balanço harmônico para o oscilador modal, eq. (5-43) e (5-44). Os resultados para $\eta_0 = 4,000$ m e $\xi = 0,100$ são mostrados na Figura 5-10, onde se utilizam para ambos os graus de liberdade do sistema original de equações aproximações iguais à expressa pela eq. (5-45). Os resultados, assim como no caso da vibração livre, apresentam uma boa aproximação até amplitudes da ordem de 1 rad.

5.7.2. Diagramas de bifurcação

Os diagramas de bifurcação para ambos os modos são mostrados em termos das rotações e velocidades rotacionais nas Figura 5-11 (a) e Figura 5-11 (b), respectivamente, onde Γ é um parâmetro adimensional de amplitude da carga definido como:

$$\Gamma = \frac{\bar{K}_5(\omega)\eta_0}{\bar{K}_5(\omega)4,000} = \frac{\eta_0}{4,000} \quad (5-46)$$

Os diagramas da Figura 5-11 mostram uma bifurcação tridente supercrítica, onde uma solução inicial estável bifurca (para $\Gamma = 13,250$) dando origem a três soluções: duas estáveis (P1 e P3) e uma instável (P2). Continuando-se a aumentar o parâmetro de carga, todas as soluções tornam-se instáveis. A Figura 5-12 mostra os planos de fase e as seções de Poincaré para cada um dos 3 pontos indicados na Figura 5-11, cujas coordenadas estão listadas na Tabela 5-3. Todas as órbitas

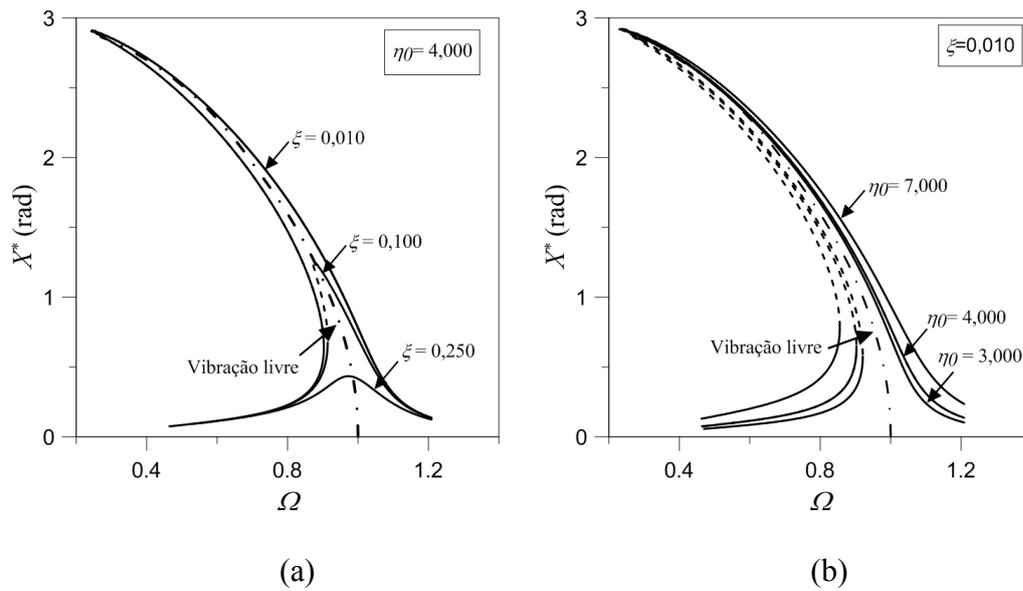


Figura 5-9 Curvas de ressonância – primeiro e segundo modos: (a) Efeito do amortecimento; (b) Efeito da onda. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.

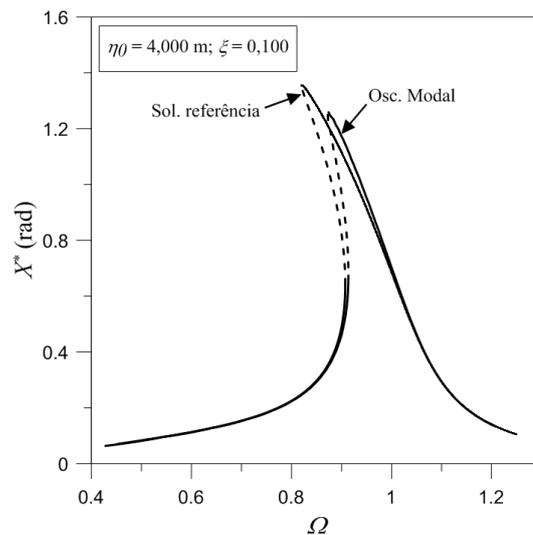


Figura 5-10 Curvas de ressonância – primeiro e segundo modos. Comparação entre modelo reduzido e solução numérica do sistema original. Ramos estáveis – linhas contínuas; ramos instáveis – linhas tracejadas.

obtidas são elípticas, correspondendo a soluções periódicas de período igual ao da força, uma vez que a seção de Poincaré se reduz a um ponto.

5.7.3. Estabilidade

Além das curvas de ressonância e diagramas de bifurcação, a estabilidade da solução dos modelos reduzidos obtidos pelo uso dos modos normais não lineares pode ser estudada utilizando-se os diagramas de estabilidade para a equação de Mathieu. O domínio de estabilidade da solução em termos dos parâmetros de frequência Ω e amplitude X^* para ambos os modos é dado por:

$$\left(\frac{0,250}{\Omega^2} + \frac{0,054X^{*2}}{\Omega^2} - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{0,022X^{*4}}{\Omega^4} + \frac{0,033\xi^2}{\Omega^2} > 0 \quad (5-47)$$

As curvas mostrando os limites das regiões estáveis e instáveis para alguns valores de amortecimento ξ são mostradas na Figura 5-13 (a), onde se observa que a influência do amortecimento é bastante acentuada na região de ressonância e menos relevante em outras regiões. Combinando-se as equações algébricas do método do balanço harmônico, utilizando-se a expressão (5-45) e a equação da fronteira de estabilidade (5-47), pode-se obter a fronteira de estabilidade em termos do parâmetro de carga Γ e frequência Ω . Os resultados são mostrados na Figura 5-13 (b).

5.8. Excitação paramétrica

Pela inclusão de um grau de liberdade fictício representando a carga externa, a vibração forçada paramétrica da estrutura é analisada utilizando-se o conceito de multimodo. Para isso consideram-se os seguintes pares mestres:

$$x_5 = u_1; \quad \dot{x}_5 = v_1; \quad \cos(\omega t) = u_f; \quad -\omega \operatorname{sen}(\omega t) = v_f \quad (5-48)$$

e as seguintes expansões modais:

$$x_3 = P(u_1, v_1, u_f, v_f) = a_1^1 u_1 + a_2^1 v_1 + a_3^1 u_1^2 + a_4^1 u_1 v_1 + a_5^1 v_1^2 + a_1^f u_f + a_2^f v_f + a_3^f u_f^2 + a_4^f u_f v_f + a_5^f v_f^2 + a_1^{1f} u_1 u_f + a_2^{1f} u_1 v_f + a_3^{1f} v_1 u_f + a_4^{1f} v_1 v_f \quad (5-49)$$

$$\dot{x}_3 = Q(u_1, v_1, u_f, v_f) = b_1^1 u_1 + b_2^1 v_1 + b_3^1 u_1^2 + b_4^1 u_1 v_1 + b_5^1 v_1^2 + b_1^f u_f + b_2^f v_f + b_3^f u_f^2 + b_4^f u_f v_f + b_5^f v_f^2 + b_1^{1f} u_1 u_f + b_2^{1f} u_1 v_f + b_3^{1f} v_1 u_f + b_4^{1f} v_1 v_f \quad (5-50)$$

Utilizando-se os valores numéricos da Tabela 5-2 e um valor de frequência adimensional (Ω) igual a 0,750 e uma amplitude de onda (η_0) igual a 4,000 m, são obtidas as seguintes funções de restrição modais para o primeiro modo:

$$P = u_1 + 17,165u_1^2 + 513,591v_1^2 + 52,618\cos(0,270t) + 0,572\cos^2(0,270t) + 1,246\sin^2(0,270t) - 34,734u_1\cos(0,270t) + 312,921v_1\sin(0,270t) \quad (5-51)$$

$$Q = v_1 - 40,690u_1v_1 - 14,220\sin(0,270t) - 24,082\cos(0,270t)v_1 - 31,242u_1\sin(0,270t) + 0,364\cos(0,270t)\sin(0,270t) \quad (5-52)$$

Substituindo-se as equações (5-51) e (5-52) na eq. (5-13), obtém-se para o primeiro modo o oscilador não linear com coeficientes variáveis:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 0,123u + 0,123\xi_3\dot{u} - 0,001u^2 - 0,041\cos(0,270t)u - 0,014u^3 - \\ 0,001\sin^2(0,270t)u - 0,430uu^2 - 0,001\cos^2(0,270t)u - \\ 0,262\sin(0,270t)uu\dot{u} + 0,029\cos(0,270t)u^2 = 0,011\cos(0,270t) \end{aligned} \quad (5-53)$$

Para o segundo modo, as funções de restrição são iguais a:

$$P = -u_1 + 17,150u_1^2 + 510,217v_1^2 + 52,618\cos(0,270t) + 0,572\cos^2(0,270t) + 1,246\sin^2(0,270t) - 36,061u_1\cos(0,270t) + 327,414v_1\sin(0,270t); \quad (5-54)$$

$$Q = -v_1 - 40,226u_1v_1 - 14,220\sin(0,270t) - 25,479\cos(0,270t)v_1 - 32,766u_1\sin(0,270t) + 0,364\cos(0,270t)\sin(0,270t) \quad (5-55)$$

Substituindo-se as equações (5-54) e (5-55) na eq. (5-13), obtém-se para o segundo modo o seguinte oscilador não linear:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 0,123u + 0,123\xi_3\dot{u} - 0,001u^2 - 0,041\cos(0,270t)u - 0,014u^3 - \\ 0,001\sin^2(0,270t)u - 0,427uu^2 - 0,001\cos^2(0,270t)u - \\ 0,274\sin(0,270t)uu\dot{u} + 0,030\cos(0,270t)u^2 = 0,010\cos(0,270t) \end{aligned} \quad (5-56)$$

As equações dos osciladores não lineares para os dois modos são praticamente idênticas, com pequenas diferenças nos valores dos coeficientes de alguns dos termos não lineares. Essas diferenças são desprezíveis nos diagramas e resultados obtidos a partir dos modelos reduzidos. Portanto, somente os resultados para o primeiro modo são mostrados nesta seção.

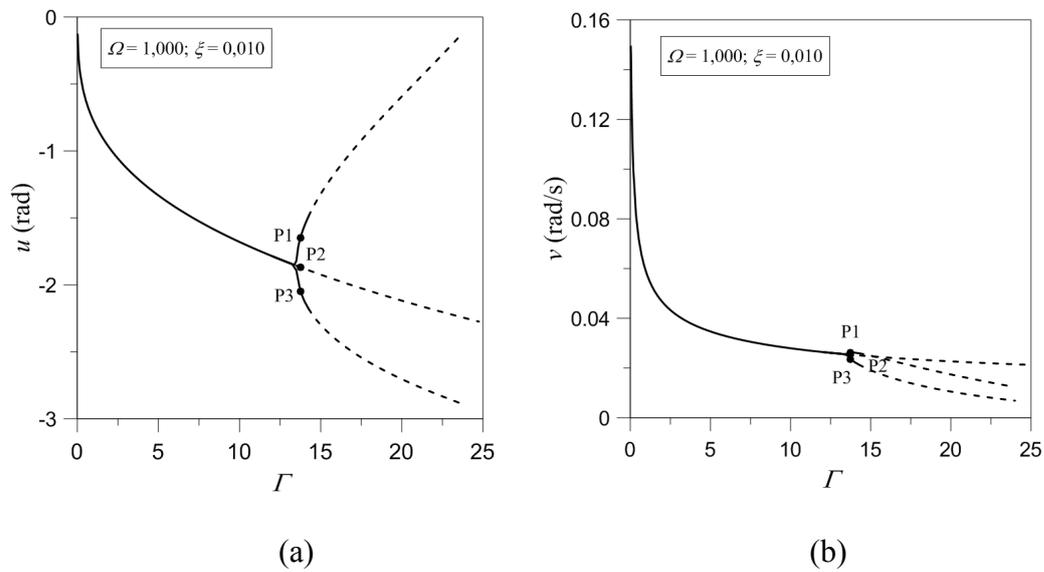


Figura 5-11 Diagrama de bifurcação – primeiro e segundo modos: (a) rotações; (b) velocidades rotacionais. Ramos estáveis – linhas contínuas; Ramos instáveis – linhas tracejadas.

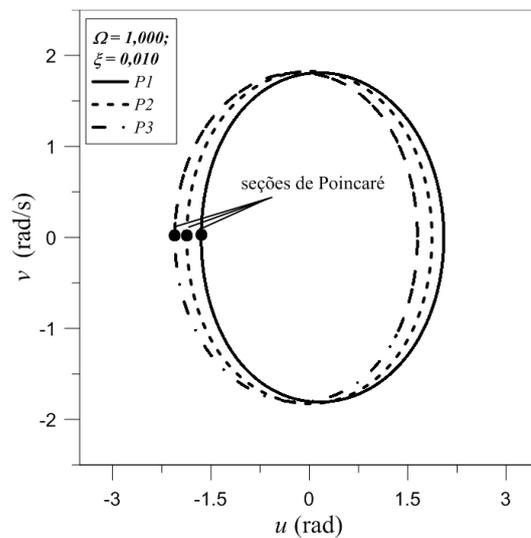


Figura 5-12 Órbitas no plano de fase e seções de Poincaré para os pontos da Figura 5-11

Ponto	Γ	u (rad)	v (rad/s)
P1	13,750	-1,648	0,026
P2	13,750	-1,869	0,025
P3	13,750	-1,367	0,024

Tabela 5-3 Coordenadas dos pontos dos diagramas de bifurcação da Figura 5-11.

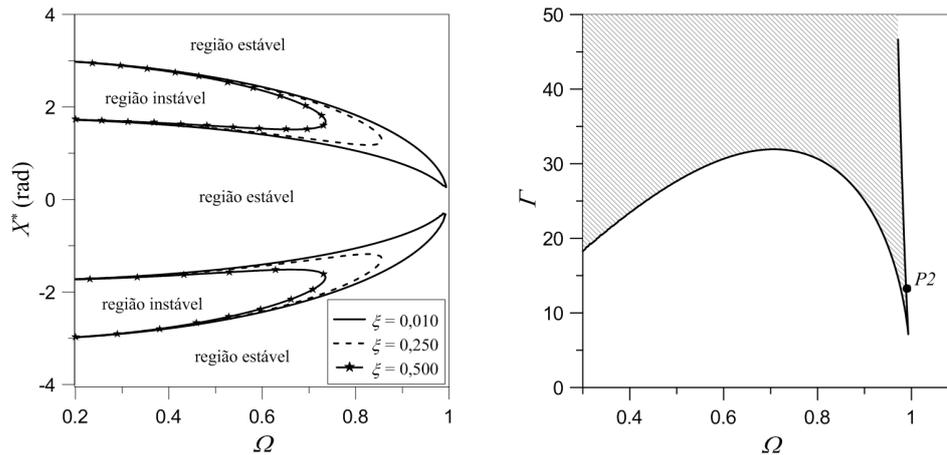


Figura 5-13 Influência do amortecimento no diagrama de estabilidade de Mathieu para o primeiro e o segundo modo: (a) amplitude x frequência; (b) $\Gamma \times \Omega$ ($\xi=0,010$).

As equações de restrição dadas pelas equações (5-51) e (5-52) dependem do tempo e variam harmonicamente com a frequência da onda, com um período igual a $T_f = 2\pi/\omega$. As Figura 5-14 (a) e Figura 5-14 (b) mostram a variação das seções das equações de restrição para respectivamente deslocamentos e velocidades ao longo de um período. Observa-se uma grande variação da forma e magnitude das seções com o tempo em relação à seção obtida com o modo não forçado (vibração livre). Desse modo, mesmo com amplitudes de carga externa pequenas, o uso das variedades invariantes obtidas na vibração livre para o estudo da vibração forçada paramétrica pode conduzir a resultados discrepantes quando comparados àqueles obtidos pelo uso dos modos forçados.

As funções de restrição também dependem da frequência da onda; essa dependência pode ser vista nas seções mostradas na Figura 5-15 (a) e na Figura 5-15 (b). Observa-se também que a influência da frequência da onda é grande sobre a forma e magnitude das equações de restrição, principalmente nas regiões de saltos dinâmicos, próximos à ressonância ($\Omega=0,750$).

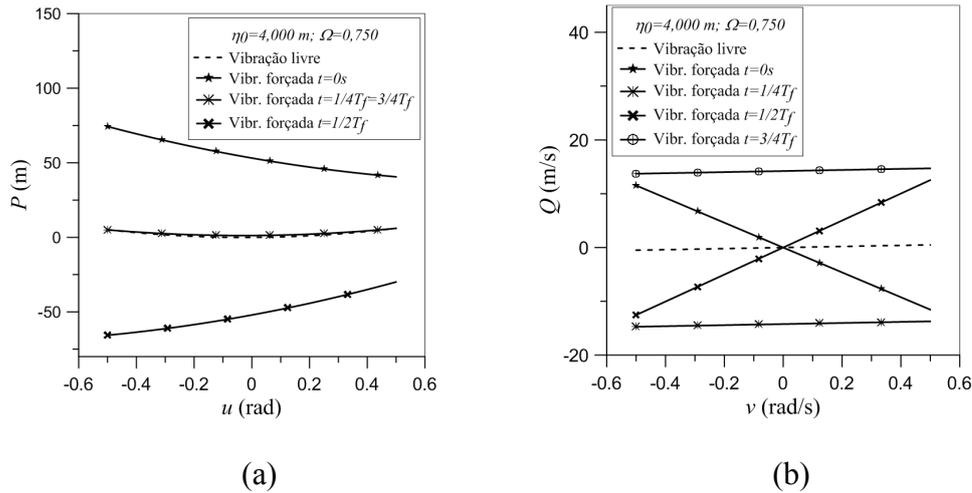


Figura 5-14 Variação das funções de restrição com o tempo – vibração paramétrica: (a) deslocamentos – seção $v=0$; (b) velocidades – seção $u=0$.

A influência da amplitude da onda sobre a forma e magnitude das funções de restrição é mostrada nas Figura 5-16 (a) e Figura 5-16 (b). Observa-se que comparada aos parâmetros de frequência e à variação no tempo, a amplitude da onda tem menor influência sobre a forma das seções, entretanto, quanto maior o valor da amplitude da onda, maior a diferença entre os valores das funções de restrição obtidos com o modo forçado e o modo não forçado.

5.8.1. Resposta no tempo

A resposta no tempo, obtida pela integração direta dos osciladores modais é utilizada para comparação entre as respostas dos modelos reduzidos obtidos para vibração forçada harmônica e paramétrica usando-se alguns valores de frequência de onda. Os valores de Ω iguais a 0,200; 0,750 e 1,200 foram utilizados e os resultados são mostrados respectivamente nas Figura 5-17, Figura 5-18 e Figura 5-19. Observa-se que, próximo à ressonância, a diferença entre as soluções considerando ou não os termos de excitação paramétrica nas equações de movimento é maior.

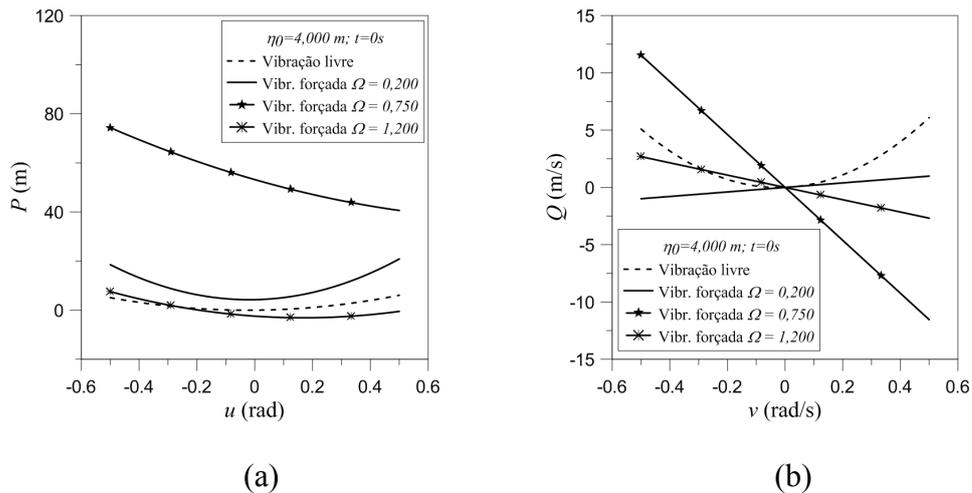


Figura 5-15 Variação das funções de restrição com a frequência da onda – vibração paramétrica: (a) deslocamentos – seção $v=0$; (b) velocidades – seção $u=0$.

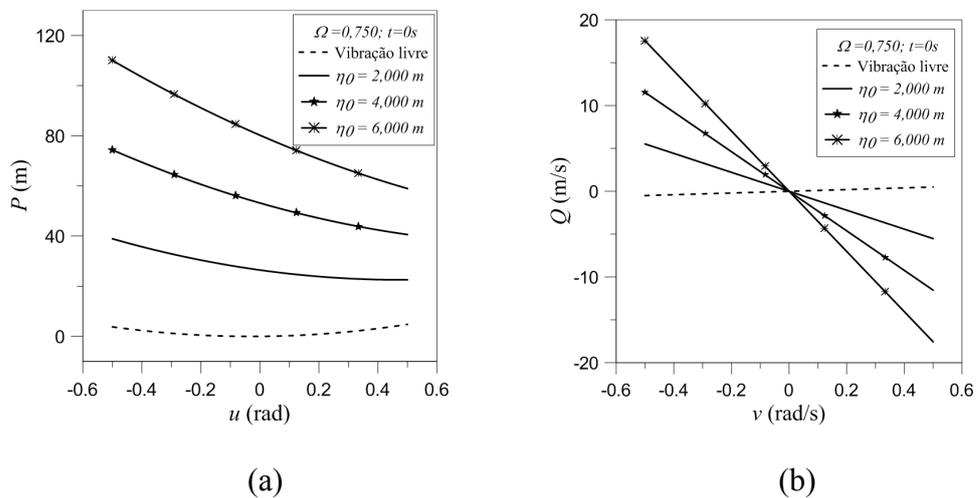


Figura 5-16 Variação das funções de restrição com a amplitude da onda – vibração paramétrica: (a) deslocamentos – seção $v=0$; (b) velocidades – seção $u=0$.

A comparação entre a solução obtida pelo modelo reduzido forçado e as equações originais de movimento é mostrada na Figura 5-20. Para $\Omega=0,300$, $\xi=0,010$ e $\eta=4,000$ a Figura 5-20 mostra boa concordância entre o modelo reduzido e o sistema completo de equações originais do sistema. Já para valores próximos à região de ressonância ($\Omega=0,850$), a Figura 5-21 mostra que a concordância diminui com o aumento do tempo, ainda que as amplitudes dos movimentos sejam as mesmas para ambos os resultados.

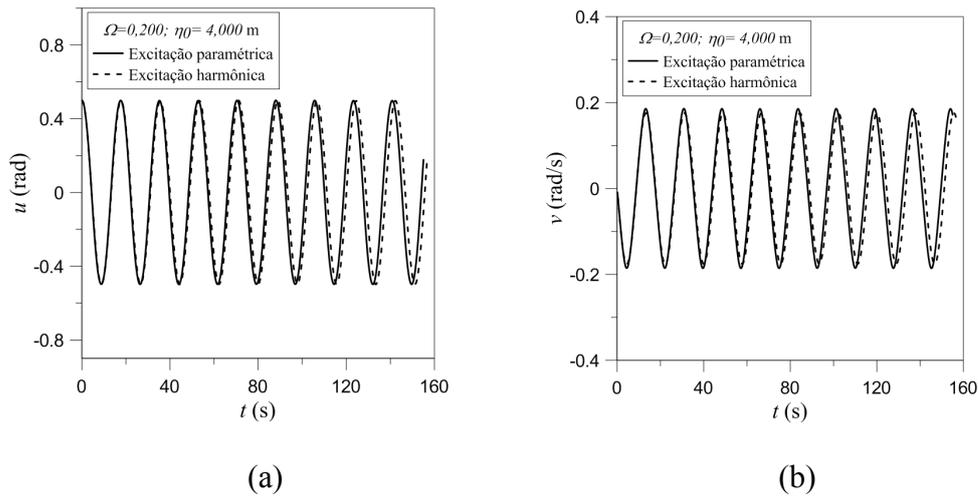


Figura 5-17 Resposta no tempo – $\Omega=0,200$: (a) rotações; (b) velocidades rotacionais.

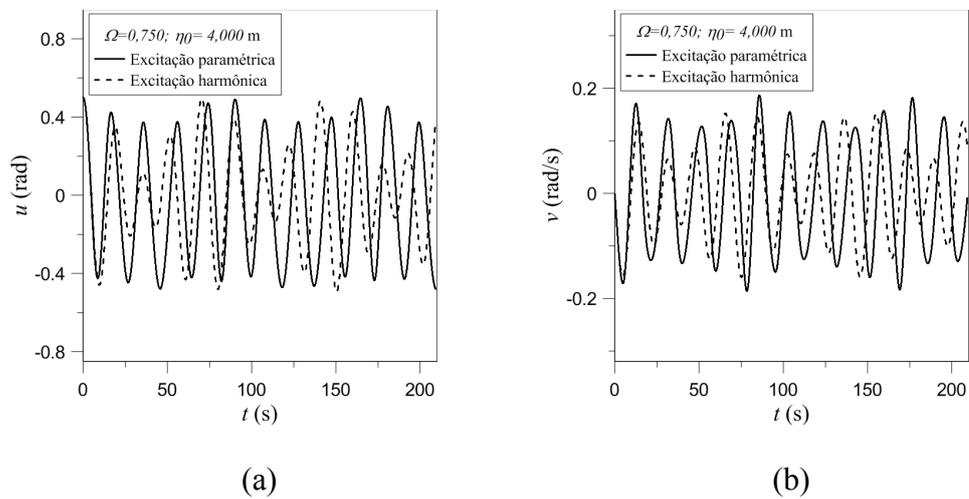


Figura 5-18 Resposta no tempo – $\Omega=0,750$: (a) rotações; (b) velocidades rotacionais.

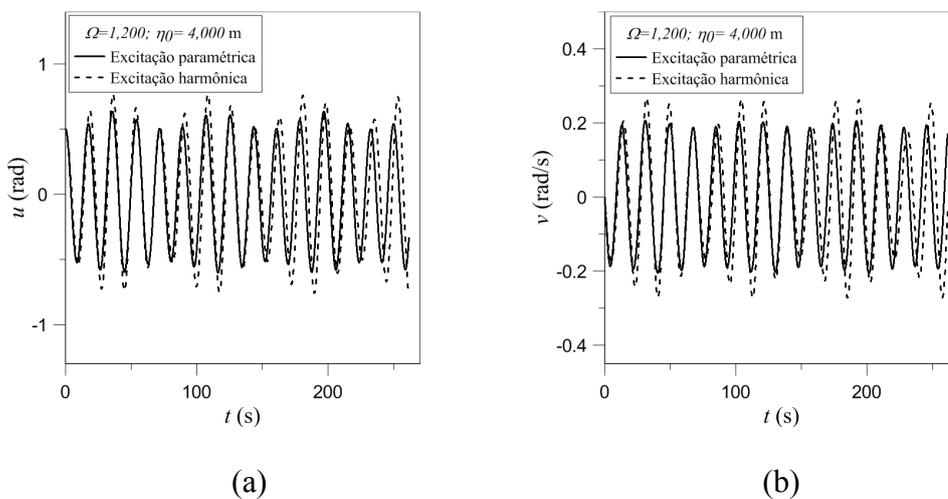


Figura 5-19 Resposta no tempo – $\Omega=1,200$. (a) rotações; (b) velocidades rotacionais.

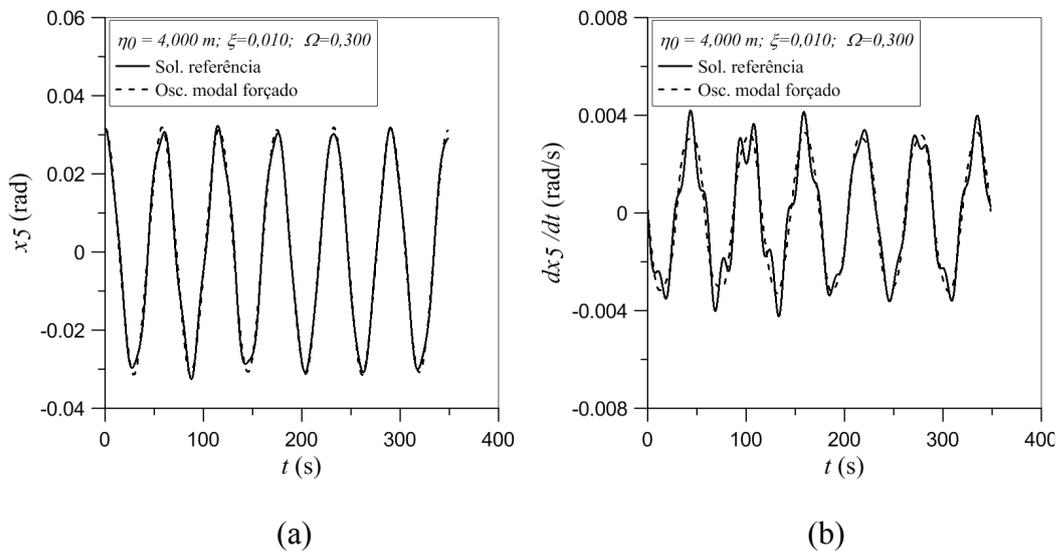


Figura 5-20 Resposta no tempo comparação modelo reduzido e sistema completo de equações: (a) rotações; (b) velocidades rotacionais.

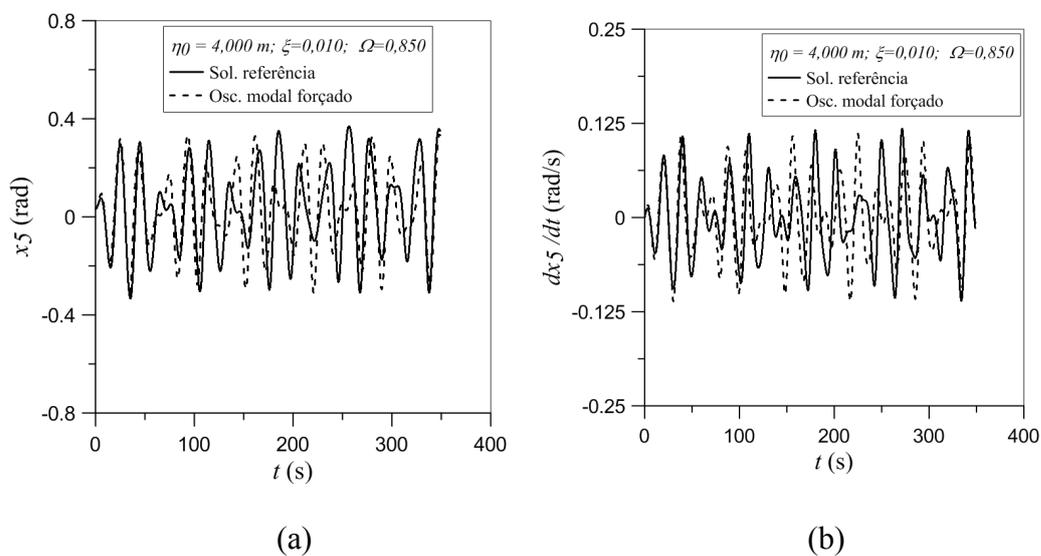


Figura 5-21 Resposta no tempo comparação modelo reduzido e sistema completo de equações na região de ressonância: (a) rotações; (b) velocidades rotacionais.

5.8.2. Estabilidade

As equações (5-53) e (5-56) não podem ser analiticamente transformadas em equações de Mathieu, por isso a fronteira de estabilidade deve ser construída

numericamente, utilizando-se os pontos de perda de estabilidade para vários valores de frequência de onda. Os resultados dessa análise numérica da estabilidade da solução podem ser vistos na Figura 5-23 e na Figura 5-22, onde as regiões instáveis estão abaixo da curva, e as estáveis acima dessa. Observam-se nas Figura 5-23 e Figura 5-22 algumas descontinuidades nos resultados. Essas descontinuidades advêm da inclusão do grau de liberdade adicional referente à carga externa nas variedades invariantes para obtenção dos multimodos.

A adição desse grau de liberdade fictício faz com que as ressonâncias externas sejam tratadas pelo método como ressonância interna, ou seja, violando a condição de invariância das variedades invariantes. Desse modo, essas ressonâncias internas fictícias fazem com que os coeficientes nas expansões (5-49) e (5-50) resultem em singularidades. Em função do grau de não linearidade considerado na análise, as singularidades na expansão surgem nas relações 1:1 e 1:2 entre a frequência da carga externa e dos graus de liberdade da plataforma (afundamento e arfagem). Apesar dessa limitação a análise pode ser empregada na vizinhança da ressonância como mostram a Figura 5-23 e a Figura 5-22.

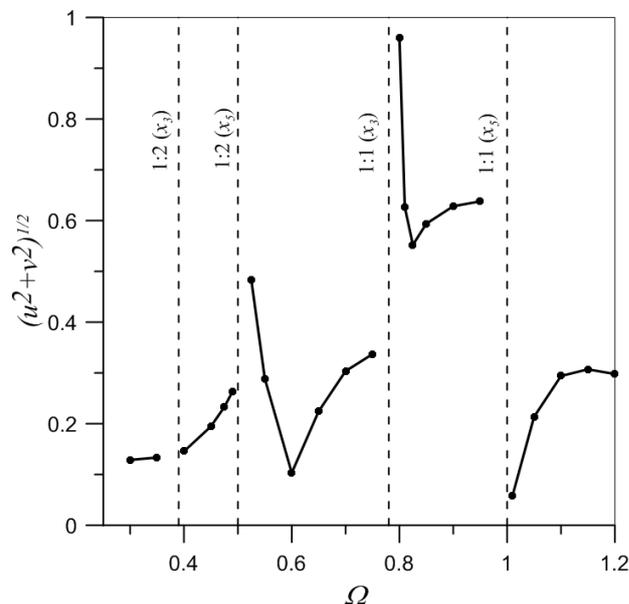


Figura 5-22 Fronteira de estabilidade, parâmetro de controle - amplitude das rotações e velocidades rotacionais ($\xi=0,010$).

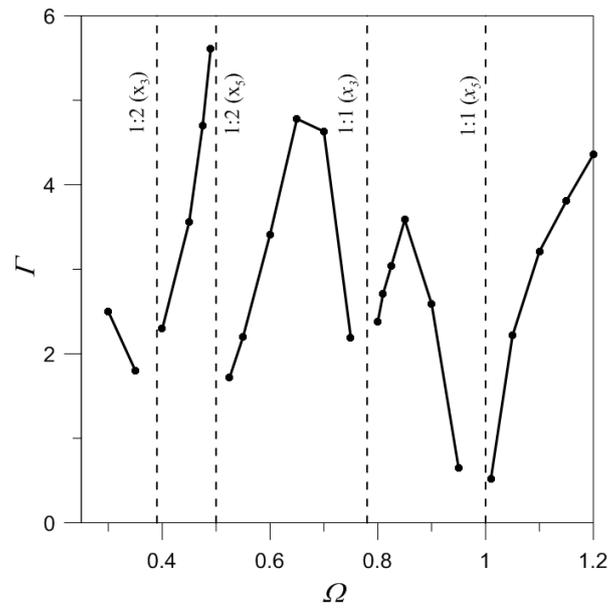


Figura 5-23 Fronteira de estabilidade, parâmetro de controle - amplitude da força externa ($\xi=0,010$).