2
Referencial Teórico

Este capítulo busca explorar de forma aprofundada os temas referentes aos modelos utilizados para apreçamento de produtos estruturados com *autocall* que são: o de Árvore Trinomial e o modelo de Diferenças Finitas. Também será abordada a teoria propriamente dita do *autocall* (englobando os tipos mais comuns e formas de pagamento dos mesmos).

2.1.
Modelo de Árvore Trinomial

A árvore trinomial foi introduzida pela primeira vez por Boyle (1986) e é explicada nos livros didáticos por Hull (2006) e Haug (1998). A mesma é vista como uma extensão da abordagem de apreçamento desenvolvida na árvore binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979), e são conceitualmente similares. Porém, o modelo trinomial é considerado mais preciso para produzir resultados do que o modelo binomial já que é mais flexível na medida em que os três movimentos são possíveis ao invés de apenas dois (em uma árvore trinomial, em qualquer nó o preço do ativo pode se mover para cima ou para baixo, ou manter o mesmo preço).

Para opções do tipo padrão, como aumenta o número de passos, os resultados rapidamente convergem, e o modelo binomial é então preferido devido à sua simples implementação. Porém, para opções exóticas modelo trinomial (ou adaptações) demonstram resultados mais estáveis e precisos - independente do tamanho do passo.

De acordo com o método trinomial, o preço da ação subjacente é modelado como uma árvore de recombinação, onde, em cada nó o preço tem três caminhos possíveis: para cima, para baixo e um estável ou do meio. Encontram-se estes valores multiplicando o valor no nó atual pelo fator apropriado, onde:

$$\text{Eq. (1)}\ u = e^{\sigma \times \sqrt{2 \times \Delta T}}$$

$$\text{Eq. (2)} \quad d = e^{-\sigma \times \sqrt{2 \times \Delta T}} = \frac{1}{u}$$

$$\text{Eq. (3)} \quad m = 1$$

Sendo:

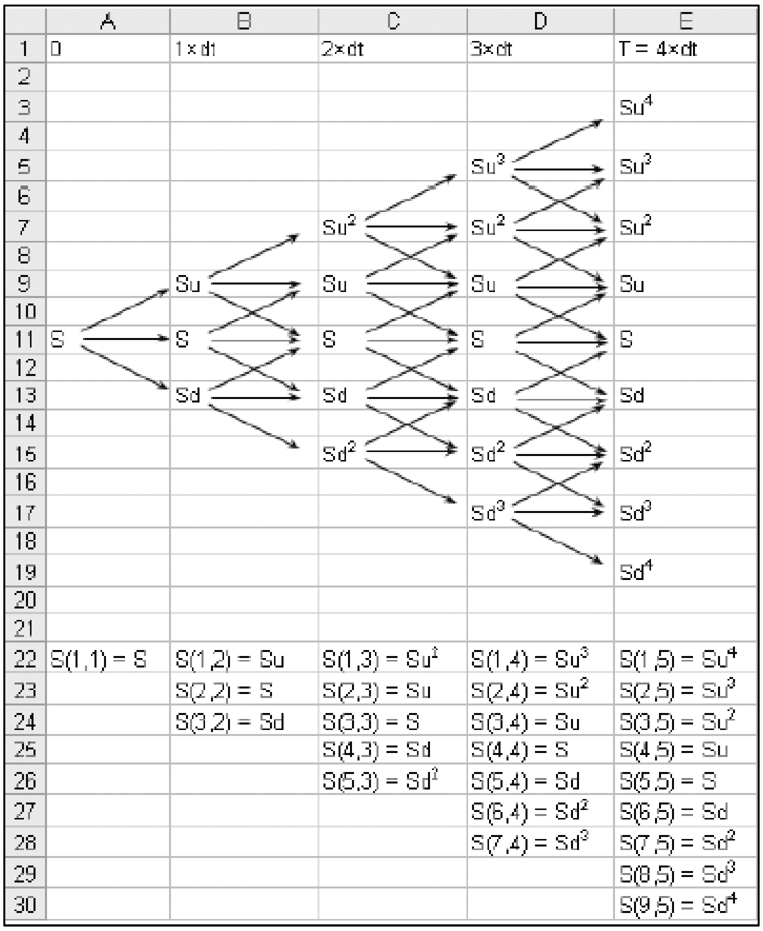
u = Fator multiplicativo incremental de subida do preço x;

d = Fator multiplicativo incremental de descida do preço x;

m = Fator multiplicativo de permanência do preço x.

A figura 3 ilustra a dinâmica dos preços de ações na árvore trinomial, usando n = 4 passos (referente ao tempo).

Figura 3: Demonstração do Modelo Trinomial.



Fonte: Rouah e Vainberg (2007).

Para conter todos os movimentos de preços possíveis debaixo de uma árvore trinomial com n passos, necessita-se de uma matriz com 2n + 1 linhas e n + 1 colunas, correspondendo a uma matriz de dimensão (9 × 5).

As probabilidades correspondentes de subida, descida e permanência são representadas (nesta ordem) pelas fórmulas abaixo:

$$\text{Eq. (4)}\ Pu = \left(\frac{e^{(r-q)\times\Delta T/2} - e^{-\sigma\times\sqrt{\Delta T/2}}}{e^{\sigma\times\sqrt{\Delta T/2}} - e^{-\sigma\times\sqrt{\Delta T/2}}}\right)^2$$

$$\text{Eq. (5)}\ \mathrm{Pd} = \left(\frac{e^{\sigma\times\sqrt{\Delta T/2}} - e^{(r-q)\times\Delta T/2}}{e^{\sigma\times\sqrt{\Delta T/2}} - e^{-\sigma\times\sqrt{\Delta T/2}}}\right)^2$$

$$\text{Eq. (6)}\ \mathrm{Pm} = 1 - (\mathrm{Pu} + \mathrm{Pd})$$

Onde "Δt" é o período de tempo, "σ" é a volatilidade adotada, "r" a taxa de juros paga, "q" representa o pagamento de dividendos (que neste caso seria zero) e "Pu" e "Pd" são incondicionalmente positivos.

A modificação da árvore para apreçamento de produtos estruturados com variáveis complexas é introduzida pela primeira vez neste trabalho e será pormenorizada mais a diante na metodologia como um modelo que busca a simplificação de cálculo adotando uma dinâmica de processamento baixo em termos de capacidade computacional.

Vale frisar que este modelo foi escolhido, pois, para Anderson, Pletcher e Tannehill (1997), fica claro que métodos implícitos exigem uma computação adicional e eles podem ser muito mais difíceis de serem implementados. Métodos implícitos são usados em problemas em que o uso de um método explícito exigiria passos impraticavelmente pequenos para manter os erros limitados. Para atingir a precisão desejada em tais problemas, leva-se muito menos tempo computacional do que quando um método implícito é usado. Eles geralmente são incondicionalmente estáveis, o que quer dizer que pode-se usar maiores valores nos passos para que a solução possa ser encontrada mais rapidamente, porém o custo computacional também aumenta consideravelmente, o que também aumenta a necessidade de processamento de grandes bases de dados.

Uma modelagem similar ao modelo trinomial pode ser encontrada no método explícito de diferenças finitas que será descrito logo em seguida.

2.2.
O Modelo de Diferenças Finitas

Segundo Collatz (1966), o método das diferenças finitas é um método de resolução de equações diferenciais que se baseia na aproximação de derivadas por diferenças finitas. As fórmulas de diferenças finitas podem ser obtidas através do desenvolvimento em série de Taylor - ver, por exemplo, Ames (1977), Roache (1976), e Lagidus e Piner (1982).

O operador de diferenças finitas para derivada pode ser obtido a partir da série de Taylor para a função:

$$\int(x\ +h)\ =\ \int(x)\ +\ \int'(x)\,h\ +o(h^2)$$

Portanto a derivada pode ser escrita como uma diferença mais um termo de erro:

$$\int'(x)\ =\ \frac{\int(x\ +h)\ -\ \int(x)}{h}+o(h)$$

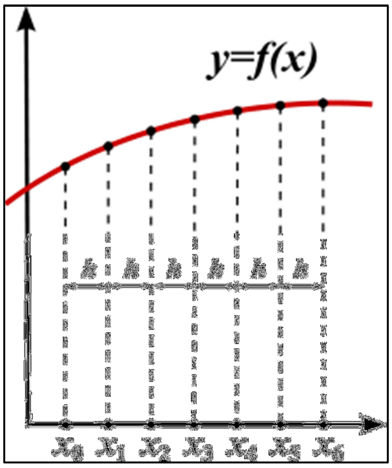
Ignorando-se o termo de erro tem-se o operador de diferenças finitas para a primeira derivada (*forward*) de “f” definido como:

Eq.(7) $$D\int(x)\ =\ \frac{\int(x\ +h)-\int(x)}{h}$$

Segundo Vista (2010), para com relação à precisão e ordem, o erro na solução de um método é definido como a diferença entre sua aproximação e a solução analítica exata. As duas fontes de erro nos métodos de diferenças finitas são: o erro de arredondamento (que é a perda de precisão devido ao arredondamento computacional de quantidades decimais – que também pode ocorrer no trinomial, prejudicando modelos muito sensíveis), e erro de truncamento (que é o resíduo resultante quando se substitui a solução exata da variável dependente na equação discretizada do modelo matemático).

Para usar um método de diferença finita para tentar resolver ou, geralmente, aproximar a solução de um problema, deve-se primeiro discretizar domínio do problema. Isso geralmente é feito pela divisão do domínio em uma grade uniforme, assim como pode ser vito na figura 4.

Figura 4: Discretização de uma Função em Grade.



Fonte: Kaw (2009).

Note que isto significa que os métodos de diferenças finitas produzem conjuntos discretos aproximações numéricas para a derivada (de forma temporal em passsos).

Os exemplos mais comuns deste método são expressos na forma de equações diferencias ordinárias e na equação do calor.

2.2.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Por exemplo, considere a equação diferencial ordinária:

$$u'(x) = 3u(x) + 2$$

O método de Euler para resolver esta equação utiliza o quociente de diferenças finitas:

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \approx u'(x)$$

Para aproximar a primeira equação diferencial, primeiro substituindo u'(x) e ao desenvolver chega-se a: $u(x\ + h)\ = u(x)\ + h(3u(x)\ + 2)$.

Logo, esta última equação é uma equação de diferença finita (para este exemplo), e ao resolver a mesma encontra-se uma solução aproximada para a equação diferencial.

2.2.2 Equação do Calor

Considere a equação do calor normalizada em uma dimensão, com condições de contorno homogêneas de Dirichlet:

$$U_t\ =\ U_{xx}$$
$$U(0,t)\ = U\ (1,t)\ \text{(Condição de Contorno)}$$
$$U(x,0)\ = U_0(x)\ \text{(Condição Inicial)}$$

Uma maneira de resolver numericamente esta equação é aproximar todas as derivadas por diferenças finitas. Parte-se o domínio no espaço usando uma malha $x_0, \dots, x_J$ e no tempo usando uma malha $t_0, \dots, t_N$. Assumi-se uma partição uniforme tanto no espaço quanto no tempo, de modo que à diferença entre dois pontos consecutivos no espaço será h, e entre dois pontos de tempo consecutivos será k, os pontos $u(x_j, t_n) = u_j^n$ represetarão a aproximação numérica de $u(x_j, t_n)$.

Na equação do calor, há a divisão em: método explícito, implícito e por Crank-Nicolson (os métodos basicamente diferem em como aproximam as derivadas).

Na abordagem do modelo utilizado por Deng et al. (2011) para apreçamento de produtos com *autocall*, o autor trabalha com o cálculo explícito de Diferenças Finitas e utiliza Equações Difenciais Pariciais (EDP) com a fórmula de Black-Scholes, assim como apresentado por Zvan, Vetzal e Forsyth (2000) que tratam a respeito da metodologia de EDP para apreçamento de opções de barreira. Também vale ressaltar que o Modelo de Monte Carlo seria outra opção de método numérico para desenvolver o apreçamento de produtos estruturados.

2.3.
O *Autocall*

Segundo Fries e Joshi (2008) e Georgieva (2005), pecebe-se que produtos estruturados com *autocall* tem se tornado comum nos ultimos anos, inclusive pelo fato de atuarem de maneira similar a um investidor racional que tem uma visão ampla sobre o ativo subjacente.

Segundo Deng et al. (2011), muitos investidores pelo mundo que aplicavam um alto valor percebiam como um fator negativo que a maioria dos produtos estruturados possuíssem em uma longa duração (cerca de cinco anos ou mais).

Uma maneira interessante de potencializar a redução do prazo de investimento veio à tona com a inclusão do recurso de *autocall,* que de acordo com Alexander e Sheedy (2007) essencialmente atua de maneira similar a uma opção de barreira europeia, de tal forma que, se em uma data definida no futuro, o mercado está acima de um nível de desencadeamento definido, a estrutura será automaticamente rescindida e os fundos serão pagos ao investidor juntamente com um retorno especificado.

Nota-se ao longo dos anos o surgimento de inovações no campo do *autocall* que foram originandos a partir de lapidações do mesmo, e que segundo o Citifirst são:

- *Performance Autocall* > No qual o cupom do *autocall* não é fixado em um nível específico, mas paga a maior percentagem e o desempenho real do ativo subjacente no caso de um evento de resgate automático;
- Crescendo *Autocall* > O evento de resgate depende de dois elementos (ativos subjacentes) estarem acima do nível de *autocall* e, além disso, há uma condição adicional no qual o segundo ativo subjacente prevê um financiamento adicional de cupons mais elevados de *autocall*;
- *Escalator autocall* > A barreira diminui a cada período, aumentando a probabilidade que um evento de *autocall* ocorra (de forma a reduzir a probabilidade de capital de risco);
- *Bonus Plus Autocall* > Além do cupom recebido no resgate automático, os investidores também recebem um cupom de bônus, de maneira que o efetivo por cupom anual é elevado nos primeiros anos em comparação com uma nota de *autocall* padrão, e vai desta maneira reduzindo o valor do pagamento de cupom

até o vencimento (o melhor é correr o *autocall* o quanto antes do vencimento do produto, nesse caso);

- *Premium Express* > No qual a barreira de *autocall* é inferior a 100% do nível de preço inicial a fim de corroborar para uma alta probabilidade de *autocall* com total proteção do capital.

Bouzoubaa e Osseiran (2010) fazem uma análise descritiva explicativa para com os principais tipos de *autocall* considerando: os pagamentos, a *performance* e o próprio efeito de dispersão (considerando cenários hipotéticos a fim de aumentar a clareza do entendimento que serão vistos a seguir).

2.3.1.
Ativos Únicos Passiveis de *Autocall*

I) Descrição de Pagamentos.

Considerando um produto com *autocall* baseado em um único ativo S, a estrutura que paga o cupom depende basicamente da *performance* subjacente em atingir dos gatilhos H (do *autocall*) e B (do cupom), e tem pagamentos definidos (como segue) em cada data de observação t_i, (i = 1...n) tem-se:

Eq. (8) $$\text{Cupom (ti)} = \text{Invst}_{(0)} \times \text{C} \times 1_{[\text{Ret}_{(\text{ti})} \geq \text{B}]} \times 1_{[\text{Max j} = 1,\ldots\ldots,\text{i}-1 \ (\text{Ret}_{(\text{tj})}) < \text{H}]}$$

Aonde Invst $_{(0)}$ é o investimento inicial C é o cupom predeterminado e Ret (ti) = S (ti) / S(0) é o retorno no período t_i no nível inicial S(0).

Desde que é aplicada uma estratégia de *wrapper*[1] na nota, o titular recebe de volta 100% do Invst $_{(0)}$ exceto que, nesse caso o tempo de pagamento não seja fixo. O resgate do Invst $_{(0)}$ pode ser em qualquer data de observação, não necessariamente no final da vida do produto:

Eq. (9) $$\text{Resgate (ti)} = \text{Invst}_{(0)} \times 1_{[\text{Ret}_{(\text{ti})} \geq \text{H}]} \times 1_{[\text{Max j} = 1,\ldots\ldots,\text{i}-1 \ (\text{Ret}_{(\text{tj})}) < \text{H}]}$$

[1] Um contrato juridicamente vinculativo entre o cliente e um banco de investimento, indicando os termos específicos que foram acordados. *Wrappers* comuns são de notas estruturadas e *swaps*.

Do pagamento descrito acima, é importante observar que o titular do produto não recebe pagamento adicional se H foi alcançado em alguma das datas de observação. Então, o produto é descrito como tendo um *autocall* desde que o mesmo tenha seu ciclo de vida interrompido uma vez que a barreira H seja atingida pelo ativo subjacente na data de observação específica. A estrutura de *autocall* em si não possui um ciclo de vida fixo até seu vencimento. O que é considerado vencimento, na verdade, é o tempo máximo que o produto consiga permanecer ativo.

H é chamado de gatilho do *autocall*. É um nível predeterminado acima no qual a estrutura do *autocall* chega ao seu fim e o investidor recebe o $Invst_{(0)}$ investido. O gatilho pode ser fixo durante a vida do produto ou variável. Em alguns casos também, o gatilho pode aumentar ou diminuir conforme o passar do tempo.

B é o gatilho do cupom, também chamado de nível de cupom. É um nível predeterminado acima no qual o investidor recebe um cupom periódico. Em outras palavras, se o nível subjacente de observação é maior que o gatilho do cupom, um cupom baseado no $Invst_{(0)}$ é pago ao investidor.

Algumas estruturas envolvendo *autocall* são caracterizadas por terem o gatilho do *autocall* e do cupom iguais. Nesse caso, fala-se sobre *autocalls* com cupons *knock-out*. Entretanto, quando o cupom é pago, o produto sofre *autocall* ao mesmo tempo desde que o gatilho do *autocall* seja alcançado. Portanto, essa estrutura paga um único cupom em uma data de observação durante toda a vida do produto. No caso em que o nível de cupom seja diferente do gatilho de *autocall*, se fala em *autocall* com cupons *knock-in*.

II) Mecanismos de Pagamento.

Aqui serão esclarecidos os mecanismos de pagamento por meio da simulação de cenários, mostrados na tabela 1 acompanhando a figuras 5, com um caso mais específico para melhor entendimento da estrutura de *autocall*.

Considerando um investidor de varejo em um banco de investimento que invista US$ 5.000,000 em um produto estruturado com *autocall* no índice CAC 40 e com três anos de validade (em observações discretizadas).

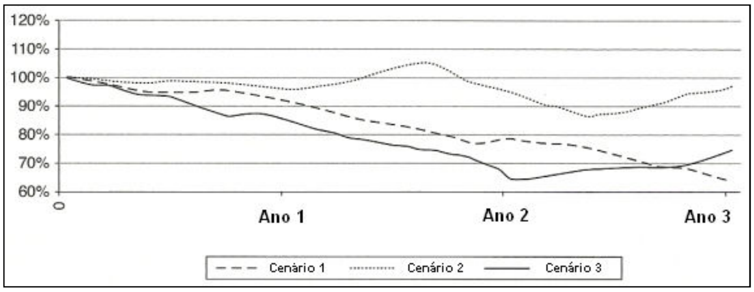
A cada ano, observa-se a *performance* do índice subjacente desde a interceptação Ret (t_i) = I(t_i) / I (0). Se esse retorno é maior que 70%, o cliente recebe um cupom de US$ 400,000, que é 8% do Invst $_{(0)}$. Além disso, se o nível observado do índice CAC 40 é maior que 100%, a estrutura sofre *autocall* e o investidor recebe de volta o dinheiro investido. No final do terceiro ano, se o nível do índice nunca foi acima de 100%, o investidor recebe de volta o capital investido.

Tabela 1: Cenários de Pagamento para um Produto Estruturado com *Autocall* Envolvendo o Índice CAC40.

	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3
Cupom no final do ano 1	8%	8%	8%
Cupom no final do ano 2	8%	8%	0%
Cupom no final do ano 3	100%	108%	108%

Fonte: Bouzoubaa e Osseiran (2010, pág. 188).

Figura 5: Cenários de Retorno do Produto com o Índice CAC 40 em que a Estrutura Nunca Sofreu *Autocall*.



Fonte: Bouzoubaa e Osseiran (2010, pág. 189).

2.3.2.
Nota de Participação com *Autocall*

A nota de participação com resgate automático (*Autocallable Participating Note* – APN) é uma estrutura que oferece 100% de proteção do capital e pode ser usada para se aproveitar a alta do mercado.

Ao se considerar, por exemplo, uma ação *Alpha* que apresenta um desempenho constantemente positivo, um investidor pode querer considerar converter uma parte do portfólio de *Alpha* em uma APN (tabela 2). Assim, olhando os ganhos atuais (desde que as notas oferecem 100% de proteção do principal) pode-se ainda manter a capacidade de lucrar de uma contínua apreciação, via uma estrutura de *autocall* com 250% de participação no caso da nota nunca sofrer o *autocall*.

Tabela 2: Termo para um Produto Envolvendo APN.

Ativo Subjacente	Alpha
Invst (0)	$ 10.000,00
Moeda	USD
Vencimento	3 anos
Nível de autocall	110%, 120%
Frequência do Autocall	Anual
Nível de Cupom	110%, 120%
Frequência do Cupom	Anual
Valor do Cupom	10% a.a.
Participação	250%
Preço da Nota	98%
Proteção do Capital	Sim

Fonte: Bouzoubaa e Osseiran (2010, pág. 192).

A nota descrita na tabela 2 faz os seguintes pagamentos:

$$APN_{pagamento}(t_1) = 110\% \text{ x Invst}_{(0)} \text{ x } 1_{[Ret\,(t1) \geq 110\%]}$$

$$APN_{pagamento}(t_2) = 110\% \text{ x Invst}_{(0)} \text{ x } 1_{[Ret\,(t2) \geq 120\%]} \text{ x } 1_{[Ret\,(t2) < 110\%]}$$

$$APN_{pagamento}(T) = \text{Invst}_{(0)} \text{ x } [\ 1 + \text{Participação x Max}\ (\ 0, Ret\,(T) - 1)] \text{ x } 1_{[Ret\,(t1) < 110\%]} \text{ x } 1_{[Ret\,(t2) < 120\%]}$$

T é o vencimento (terminando no terceiro ano) e t_1, t_2 são as datas de observação anuais que acontecem respectivamente no fim do primeiro e segundo ano. Ret (t_i) = S (t_1) / S (0) é o retorno no tempo t_i com o nível inicial S(0). O preço desta nota é 98% do Invst $_{(0)}$. Isso significa que o investidor vai receber 100% do Invst $_{(0)}$ que é mais do que o dinheiro aplicado inicialmente (não importando onde a *performance* do ativo subjacente esteja).

O primeiro cenário (acompanhando a Tabela 3 e Figura 6) mostra o caso do *Alpha* alcançando o primeiro gatilho (110%) no final do primeiro ano. A APN paga ao titular da nota um cupom de 10% mais 100% no Invst $_{(0)}$ no final do primeiro ano e expira em t_1.

Tabela 3: Cenários de Pagamentos para a APN de Três Anos.

	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3
Cupom no final do ano 1	110%	0%	0%
Cupom no final do ano 2	-	110%	0%
Cupom no final do ano 3	-	-	126,20%

Fonte: Bouzoubaa e Osseiran (2010, pág. 193).

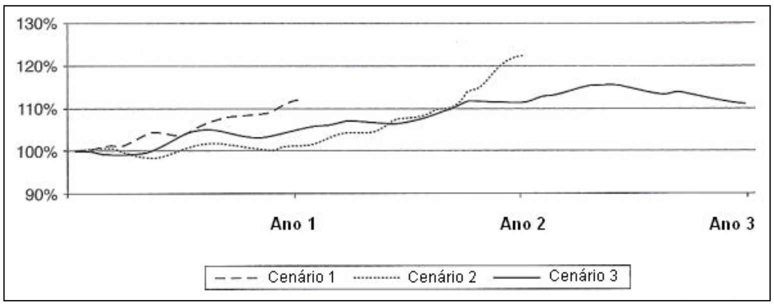
No segundo cenário, nenhum cupom é pago em t_1, já que o primeiro gatilho não foi alcançado nesta data. Observando-se a segunda data t_2, o retorno do *Alpha* é maior que o segundo gatilho (120%), assim o titular recebe 10% de cupom mais 100% do Invst $_{(0)}$ e o APN expira.

No terceiro cenário, o APN não sofre *autocall*. Em t_1 nenhum cupom é pago já que o retorno de *Alpha* é menor que 110%. Em t_2, nenhum cupom é pago já que o retorno de *Alpha* é menor que o segundo gatilho de 120%. No vencimento final, o retorno de *Alpha* de 110,48%; assim, de acordo com a fórmula de pagamento, o titular recebe o pagamento no fim do terceiro ano igual a:

$$100\% + 250\% \text{ x } \max(0, 110{,}48\% - 100\%) = 126{,}20\%.$$

Baseado no caso descrito acima (como pode ser visto na Figura 6), o gatilho do *autocall* não era fixo, estava aumentando: 110% em t_1 e 120% em t_2. Também, os gatilhos de cupom eram iguais aos do *autocall*. Portanto, esta nota fez um único pagamento de cupom. Na medida em que o gatilho do cupom aumenta, a probabilidade de pagamento do cupom diminui o preço do *autocall*.

Figura 6: Cenários de Retorno de Alpha para a APN de Três Anos.



Fonte: Bouzoubaa e Osseiran (2010, pág. 193).

2.3.3. *Autocalls Down-and-In* das Opções de Venda

I) Adicionando a característica da Opção de Venda.

Se o investidor acredita que o índice subjacente não irá diminuir a um nível específico na data de vencimento final, pode-se adicionar uma característica da opção de venda na estrutura do *autocall* para aumentar os ganhos potenciais do cupom a ser recebido. Isto significa que o capital não está mais protegido, na medida em que o titular agora terá na data de vencimento T uma opção de venda.

A opção de venda pode ser uma opção de venda europeia padrão no dinheiro cujo término de vencimento é o mesmo que o do *autocall*. Mas na maioria das vezes, o comprador está em uma posição vendida *down-and-in* no dinheiro na opção de venda, que pode ser tanto americana quanto europeia. O nível de barreira é determinado dependendo da visão do investidor para com a *performance* esperada subjacente.

As opções de venda *down-and-in* no dinheiro com barreiras de monitoração diárias são as mais populares associações de opções de venda associadas ao *autocall*.

Utilizando o exemplo descrito anteriormente a respeito da CAC 40, se o investidor acreditar que tal índice nunca estará abaixo de 60% nos próximos três anos, ele pode adicionar uma característica da opção de venda *down-and-in* no dinheiro de 60%. Ele gostaria, então, de ser compensado por tomar este risco adicional em recebendo um cupom de 12% (ao invés de 8%), por exemplo, se o retorno subjacente é maior que o gatilho do cupom.

Quando um intermediário ou agente econômico vende um *autocall* com uma ferramenta de venda no vencimento, o mesmo estará em uma posição vendida com o *autocall* e comprada para com a venda. A fim de fazer o apreçamento deste produto estruturado, deve-se desenvolver o apreçamento do *autocall* e deduzir o preço da opção de venda.

II) Ganhos Gêmeos.

O chamado ganhos gêmeos (*twin-wins*) é um produto sem proteção do principal ligado a um único ativo e possui uma característica de resgate antecipado. Na realidade, é um *autocall* com uma opção de venda *down-and-in*, com o potencial de capturar uma *performance* absoluta subjacente no vencimento do produto. O nome *twin-wins* vem do fato que essa nota permite que o titular tenha participação tanto em movimentos de alta quanto de queda do ativo subjacente.

Considera-se um exemplo de uma nota *twin-wins* de dois anos, descrita na tabela 4, fazendo pagamentos semi-anuais (semestrais) com datas de observação em t_1,t_2,t_3 e T, em cada data de observação t_i (i = 1...3):

Tabela 4: Termo para um Produto Envolvendo Ganhos Gêmeos.

Ativo Subjacente	Vodafone
Invst (0)	₤10.000,00
Moeda	GBP
Vencimento	2 anos
Nível de autocall	105%
Frequência do Autocall	Semi-Anual
Nível de Cupom	75%
Frequência do Cupom	Semi-Anual
Valor do Cupom	10% a.a.
Nível de *Knock-in* (Fechamento Diário)	75%
DI *Put Strike*	100%
Taxa de participação no *Upside*	115%
Taxa de participação no *Downside*	55%
Preço da Nota	99%
Proteção do Capital	Não

Fonte: Bouzoubaa e Osseiran (2010, pág. 195).

$$\text{Cupom}\ (t_i) = 5\%\ \text{x Invst}_{\ (0)}\ \text{x}\ 1_{\ [\text{Ret(i)} \geq 75\%]}\ \text{x}\ 1_{\ [\max j = 1,\ldots,\ i\ -1(\text{Ret (j)} < 105\%]}$$

O resgate do Invst $_{(0)}$ pode ser feito em qualquer data de observação t_i:

$$\text{Resgate}\ (t_i) = \text{Invst}_{\ (0)}\ \text{x}\ 1_{\ [\text{Ret(i)} \geq 105\%]}\ \text{x}\ 1_{\ [\max j = 1,\ldots,\ i\ -1(\text{Ret (j)} < 105\%]}$$

Se o produto não sofrer *autocall*, o resgate no vencimento do produto irá ocorrer da seguinte forma:

a) Se o fechamento for maior ou igual ao preço inicial, à nota é resgatada a: 100% + 115% x [Ret (T) – 1].

b) Se o fechamento ocorrer abaixo do preço inicial, mas nunca fechou abaixo do nível de *kwock-in* durante toda a vida do produto, a nota é resgatada a: 100% + 55% x [1 – Ret (T)].

c) Se o fechamento for abaixo do preço inicial, e sempre fechou abaixo do nível de *knock-in* durante toda a vida do produto, a nota é convertida em ações físicas no exercício final (*strike*).

III) *Autocall* com Cupom de Bônus.

O *autocall* com cupom de bônus (ACB) é um produto sem proteção do principal ligado a um único ativo, e possui uma característica de resgate antecipado. Essencialmente, o produto é uma estrutura de *autocall* com níveis de gatilhos decrescentes *(stepping-down)*, e, em adição, um cupom contingente pode ser pago na data final de vencimento mesmo se o nível de *autocall* não for alcançado.

Na tabela 5, considera-se uma nota ACB baseada em pagamentos trimestrais de cupom realizado pelo Citigroup. É importante notar que o gatilho do *autocall* e do cupom são os mesmos; o ACB paga apenas um cupom. Em cada data de observação trimestral t_i (i = (1,...,3):

Tabela 5: Termo para um Produto Estruturado com *Autocall* de Cupom de Bônus.

Ativo Subjacente	Citigroup
Invst (0)	$5.000,00
Moeda	USD
Vencimento	1 ano
Nível de autocall	98%, 95%, 92%, 89%
Frequência do Autocall	Trimestral
Nível de Cupom	98%, 95%, 92%, 89%
Frequência do Cupom	Trimestral
Valor do Cupom	24% a.a.
Nível de *Knock-in* (Fechamento Diário)	80%
DI *Put Strike*	100%
Cupom de Bônus	20%
Preço da Nota	100%
Proteção do Capital	Não

Fonte: Bouzoubaa e Osseiran (2010, pág. 197).

$$\text{Eq. (10) } Cupom\ (ti) = Invst_{(0)} \times (1 + i + C) \times 1_{[Ret1_{(ti)} - Ret2_{(ti)} \geq Cushion]} \times 1_{[(Max\ j = 1,\ldots\ldots,i-1\ (Ret1_{(ti)})) < Cushion]}$$

Aonde C(i) = (24% x i) / 4 e H(i) é o nível de gatilho no período t_i. No vencimento final, o resgate é determinado como segue:

a) Se o retorno subjacente é maior que ou igual ao nível de *autocall* final (89%), a nota é resgatada a 100% + cupom do *autocall*;

b) Se o retorno final estiver abaixo do nível final de *autocall*, e nunca foi fechado abaixo do nível de *knock-in*, a nota é resgatada a 100% + Cupom de Bônus;

c) Se houver o fechamento abaixo do preço inicial, e sempre esteve abaixo do nível de *knock-in* durante a vida do produto, a nota é convertida em ações físicas no exercício final (*strike*).

2.3.4.
Autocalls com mais de um Ativo

I) *Performance* baseada no pior dos *Autocalls*.

Admitindo-se que o produto inicie com uma composição de n ativos S_1, S_2,...,S_n, então, o mesmo segue a seguinte linha de pagamento em cada observação na data t_i:

$$\text{Eq. (11) } Cupom\ (t_i) = \text{Invst}_{(0)} \times \text{C} \times 1_{[\text{WRet}_{(\text{ti})} \geq \text{B}]} \times 1_{[(\text{Max j} = 1,\ldots,\text{i}-1(\text{WRet(tj)})) < \text{H}]}$$

Deve-se ressaltar que H e B são respectivamente os gatilhos do *autocall* e do cupom.

Desde que seja aplicada uma estratégia de *wrapper* no produto, o titular recebe de volta 100% do Invst $_{(0)}$ sempre que o produto sofre *autocall*. Em outros casos, o Invst $_{(0)}$ é pago no vencimento.

$$\text{Eq. (12) } \mathrm{Resgate(ti)} = \mathrm{Invst}_{(0)} \times 1_{[\mathrm{WRet(ti)} \geq \mathrm{H}]} \times 1_{\left[\left(\mathrm{Max}\ j=1,\ldots,i-1\ (\mathrm{WRet(tj)})\right) < \mathrm{H}\right]}$$

Tomando como exemplo um investidor que queira aplicar no setor bancário em 2009, sendo que a maioria dos bancos sofreu com a crise e suas ações caíram significativamente, o investidor em questão acredita que esses bancos vão recuperar suas perdas em três anos. Ele decide investir £ 10 milhões em quatro bancos da Bélgica e Holanda. Foi oferecido ao investidor um produto composto por KBC, ING, FORTIS e DEXIA tal como na tabela 6.

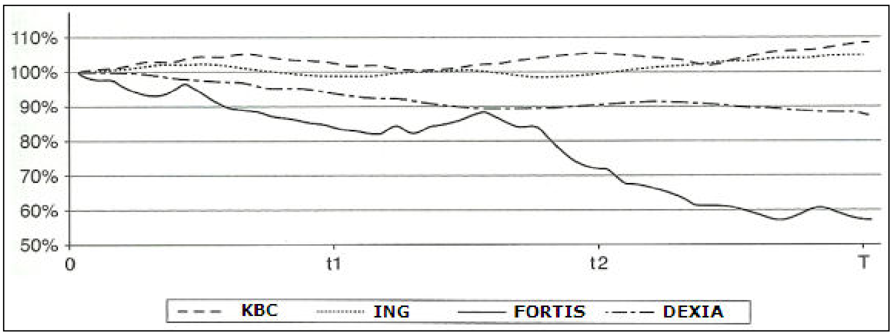
Tabela 6: Termo Envolvendo um Produto Estruturado Baseado na *Performance* do Pior dos *Autocalls*.

Ativo Subjacente	KBC, ING, FORTIS, DEXIA
Invst (0)	₤10.000,00
Moeda	GBP
Vencimento	3 anos
Nível de autocall	100%
Frequência do Autocall	Anual
Nível de Cupom	60%
Frequência do Cupom	Anual
Valor do Cupom	25% a.a.
Preço da Nota	98%
Proteção do Capital	Sim

Fonte: Bouzoubaa e Osseiran (2010, pág. 199).

No cenário presente na figura 7, o titular do produto recebe cupons anuais baseados na *performance* da pior das ações. Ao final do primeiro ano, todas as performances das ações estão acima de 60%, mas a ação de pior *performance* (KBC) está acima de 100%. Portanto, o primeiro cupom é igual a 25% do Invst $_{(0)}$ e a estrutura não sofre *autocall*. No final do segundo ano, o produto não sofre *autocall* já que existe pelo menos uma ação abaixo de 100% (que é o gatilho do *autocall*), que faz com que o segundo cupom seja de 25%. No vencimento, uma das ações demonstra uma *performance* menor que 60% (FORTIS). Logo, não há cupom no fim do terceiro ano e o investidor recebe 100% do Invst $_{(0)}$ nesta última data de observação.

Figura 7: Cenários de Retorno para Ações Baseadas na *Performance* do Pior dos *Autocalls*.



Fonte: Bouzoubaa e Osseiran (2010, pág. 199).

II) O Efeito Bola de Neve e a *Performance* Baseada no pior dos *Autocalls* com Ferramentas de Opção de Venda.

Normalmente, quando o gatilho do *autocall* é o mesmo que o do cupom, o produto tem seu fim imediatamente depois do pagamento do cupom. Em outras palavras, somente um cupom é pago. Porém, pode-se modificar o pagamento dos cupons criando os chamados “cupons bola de neve”.

Se o produto continuar ativo até o ano “i”, isso significa que o investidor não recebeu anteriormente os cupons periódicos. A estrutura “bola de neve” permite que o investidor receba um cupom igual à soma de todos os cupons anteriores se o gatilho for alcançado. O investidor então recupera suas perdas durante os períodos de não recebimento dos cupons anteriormente.

Pode-se adicionar também na *performance* baseada no pior *autocall* uma ferramenta de opção de venda *down-and-in* na estrutura do *autocall*. Isto acontece quando o investidor está disposto a incrementar o potencial de recebimento dos cupons e acredita que todos os produtos que compõem a cesta vão atuar acima de um nível específico. Isso significa que o capital não está mais protegido já que o investidor está em uma posição vendida para com relação a uma opção de venda no vencimento do produto.

Como é o caso de *autocalls* para um único ativo, a opção de venda também pode ser uma opção de venda padrão europeia, subjacente a cesta de ativos com data de expiração igual ao vencimento final do *autocall*.

No exemplo, será considerado que o investidor está em uma posição vendida no pior dos casos com uma opção de venda *down-and-in* no dinheiro e com barreira europeia, o que significa que o *knock-in* é determinado apenas na data de vencimento do produto.

Admitindo-se que inicie com uma composição de n ativos $S_1, S_2,...,S_n$, então, o pior dos casos envolvendo *autocall* segue o seguinte pagamento em cada observação na data t_i:

$$\text{Eq. (13) } \mathrm{Cupom(ti)} = \mathrm{Invst}_{(0)} \times [1 + \mathrm{i} + \mathrm{C}] \times 1_{[\mathrm{WRet\,(ti)} \geq \mathrm{H}]} \times 1_{[\mathrm{Max\,j} = 1,\ldots,\mathrm{i}-1(\mathrm{WRet\,(tj)}) < \mathrm{H}]}$$

Se o produto não sofrer *autocall*, o resgate no vencimento irá ocorrer da seguinte forma:

a) Se todos os ativos que compõem a cesta fecharem acima do nível de *knock-in*, a nota é resgatada a 100%;

b) Se pelo menos um ativo fechar abaixo do nível de *knock-in*, a nota é convertida em ações físicas no exercício final (*strike*).

A tabela 7 mostra um exemplo de um produto estruturado com tal dinâmica:

Tabela 7: Termo para um Produto Baseado na *Performance* do Pior dos *Autocalls* Envolvendo Opções de Venda *Down-and-In* no Vencimento.

Ativo Subjacente	KBC, ING, FORTIS, DEXIA
Invst (0)	£10.000,00
Moeda	GBP
Vencimento	3 anos
Nível de autocall	100%
Frequência do Autocall	Anual
Nível de Cupom	100%
Frequência do Cupom	Anual
Valor do Cupom	10%,20%,30%
Nível de *Knock-in*	60%
DI *Put Strike*	100%
Preço da Nota	99%
Proteção do Capital	Não

Fonte: Bouzoubaa e Osseiran (2010, pág. 201).

III) *Autocall* de *Auto-performance*.

Considerando-se dois ativos S_1 e S_2, o *autocall de auto-performance* é baseado na *auto-performnce* de S_1 *vs* S_2 que tipicamente funciona como uma opção no estilo europeia com pagamentos de cupom C em cada data de observação no qual $S_1 - S_2$ possuem um nível de *auto-performance* específico chamado *cushion*[2].

Essa estrutura de *auto-performance* possui uma ferramenta de *autocall* que paga cupom sobre o resgate antecipado. O produto possui pagamentos em cada observação t_i como segue:

Eq. (14) $$\text{Cupom}(ti) = \text{Invst}_{(0)} \times [1 + i + C] \times 1_{[\text{Ret1}(ti) - \text{Ret2}\,(ti) \geq \text{Cushion}]} \times 1_{\left[\left(\text{Max}\ j=1,\dots,i-1\ (\text{Ret1}\ (ti))\right) < \text{Cushion}\right]}$$

No qual $\text{Ret}_i\,(t) = Si\,(t) / S_i\,(0)$.

Como exemplo, pode-se imaginar que um investidor acredite que o banco HSBC irá sofrer maiores perdas ao se comparar o mesmo dentro do setor bancário no mercado asiático. A maioria dos analistas concordavam em 2010 que nos próximos dois anos haveria uma baixa probabilidade do HSBC ter uma *auto-performance* no índice *Hang Seng* maior que -35%.

O investidor decide comprar a estrutura presente na tabela 8:

Tabela 8: Termo para um Produto Envolvendo *Autocall* de *Auto-Performance*.

Ativo Subjacente	Índice Hang Seng *vs* HSBC
Invest(0)	£ 20.000,00
Moeda	GPB
Vencimento	2 anos
Cushion	-35%
Frequência do Autocall	Semi-Anual
Valor do Cupom (bola de neve)	20% a.a.
Preço da Nota	100%
Proteção do Capital	Sim

Fonte: Bouzoubaa e Osseiran (2010, pág. 202).

Nesse caso o gatilho do *autocall* é igual ao de cupom e esses cupons são do tipo "bola de neve". No final de cada observação semi-anual "i", se a diferença

[2] Período de tempo durante o qual um título não pode ser resgatado. Pagamentos de juros são garantidos durante o *cushion*, mas não depois, como o título pode ser prematuramente resgatado a qualquer momento após a data de resgate.

entre a *performance* do índice *Hang Seng* e a *performance* do HSBC for maior ou igual ao *cushion*, o produto é resgatado a 100% + C (i), aonde C (i) = i x 20% / 2.

No vencimento, o titular recebe 100% do Invst $_{(0)}$ investido no HSBC, se o mesmo tiver alcançado sempre uma *auto-performance* do índice bancário superior a -35% nas diferentes datas de observação.