

4

Simplificação por Difusão Geométrica Markoviana

Neste capítulo introduzimos uma nova maneira de simplificar malhas com base em Difusão Geométrica de Markov, um processo de difusão de informação em malhas que envolve Cadeias de Markov Geométricas - construídas com núcleos que apresentam natureza geométrica - e um processo de simplificação de malhas que preserva feições.

A difusão se baseia na evolução de equações não-lineares na geometria, definida pela forma da superfície envolvida. Em malhas, atua na suavização enquanto enfatiza as feições existentes. O espectro de matrizes Markovianas descreve transições locais e conduz a uma representação das informações dos dados para um modo macroscópico, usando diferentes escalas (7, 9).

Este capítulo foi dividido de forma a apresentar todo o processo de Difusão Geométrica Markoviana, assim como o estudo de sua complexidade:

- O Contexto da Álgebra Linear.
- Difusão Geométrica Markoviana.
- O Processo de Remoção.
- Um critério de parada.
- Ordem de complexidade.

4.1

O Contexto da Álgebra Linear

Definição 4.1 (Traço de uma Matriz) *O traço de uma matriz M , denotado por $tr(M)$, é a soma dos elementos presentes em sua diagonal principal.*

Teorema 4.1 (Traço) *A soma dos n autovalores, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, de uma matriz M é igual ao seu traço (37),*

$$tr(M) = \sum_{i=1}^N \lambda_i, \quad (4-1)$$

O teorema 4.1 faz uma associação entre os valores presentes na diagonal da matriz e o conjunto de seus autovalores. Com ele é possível a utilização da diagonal para a remoção dos vértices da malha e estabelecer um controle de erro em função dos autovalores associados (10).

Teorema 4.2 (Hoffman-Wielandt) *Sejam M e Q , matrizes simétricas, $n \times n$, com autovalores $\lambda_1^M \leq \lambda_2^M \leq \dots \leq \lambda_n^M$ e $\lambda_1^Q \leq \lambda_2^Q \leq \dots \leq \lambda_n^Q$ (10). Então*

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i^M - \lambda_i^Q|^2 \leq \text{tr}(M - Q)^2. \quad (4-2)$$

Os autovalores de uma matriz simétrica não mudam muito por pequenas variações em seu traço. Considerando Q , do teorema 4.2, como uma matriz que elimina uma linha e coluna da matriz M , o erro cometido no espectro de M não é maior que o valor contido na diagonal da linha removida. Remover um vértice com valor baixo na diagonal insere uma baixa distorção no espectro, mantendo a assinatura da estrutura da malha.

4.2

Difusão Geométrica Markoviana

O processo de Difusão Geométrica Markoviana consiste nos seguintes elementos associados a malha:

1. As estrelas dos vértices.
2. Um conjunto de vetores normais definidos nos vértices da malha. Em geral, esse conjunto é definido usando a estrela de cada vértice.
3. Um processo de identificação e remoção dos vértices seguida da retriangulação da estrela desse mesmos vértices. Esse processo de difusão tem base nas cadeias de Markov geométricas.

4.2.1

Definição do Núcleo de Difusão

Uma propriedade essencial de um método de simplificação é a avaliação da representatividade dos elementos nos quais atua. Aqueles considerados pouco representativos são removidos sem que o conjunto perca sua configuração característica. Um modo de agregar informação a cada elemento do conjunto está associado à análise das variações de suas propriedades.

O estudo das variações de propriedades utilizando conceitos de difusão geométrica é capaz de avaliar a concentração de informação que cada elemento apresenta. A difusão está diretamente relacionada com as variações locais das propriedades da forma avaliada. A escolha dessas propriedades depende do resultado final que se deseja da simplificação.

A diferença entre as normais de dois vértices conectados por uma aresta de uma malha define a curvatura direcional (39) que se propaga na direção dessa ligação. Assim, sugere-se que a propriedade mapeada, ao longo do conjunto de pontos, seja dada em termos dos vetores normais presentes nos vértices. O uso de normais estabelece relações entre a vizinhança de um vértice no 1-esqueleto da malha e o comportamento da curvatura direcional (38).

O núcleo é responsável por associar uma estrutura de vizinhança de um vértice no 1-esqueleto a com o conjunto de vetores normais dos vértices da malha. Ele foi escolhido observando-se as características que deve possuir um núcleo como definidas anteriormente. Aqui faremos uso de um núcleo gaussiano, definindo-o por diferenças de normais:

$$kn(x_i, x_j) = \begin{cases} e^{-\|N_i - N_j\|^2}, & \text{se } x_i \text{ e } x_j \text{ estão conectados por uma aresta.} \\ 0 & \text{se não.} \end{cases} \quad (4-3)$$

onde N_i e N_j são vetores normais unitários definidos nos vértices x_i e x_j , respectivamente.

4.2.2

Propagação das Informações do Comportamento das Normais

Os valores presentes na diagonal da matriz de transição inferem o quão semelhante ou destoante é a relação de um vértice com aqueles de sua estrela. Como consequência do núcleo aqui utilizado, definido na equação 4-3, a obtenção de um valor baixo na diagonal indica uma alta semelhança entre as normais de uma vizinhança enquanto um valor alto ressalta um desvio grande entre as suas direções de propagação, as arestas. Portanto, um valor baixo de um elemento na diagonal da matriz de transição indica probabilidade alta de proximidade entre as normais dos vértices conectados, sugerindo regiões onde a simplificação deve atuar. Por outro lado, um valor alto caracteriza as feições, que devem ser preservadas.

O valor encontrado na diagonal, e representativo de cada vértice, ainda sofre influência da conectividade que este possui em virtude da normalização aplicada durante a construção da difusão geométrica. Essa influência pode

comprometer a avaliação da representatividade de um vértice, uma vez que os pontos podem ter um número variado de conexões.

No contexto de remoção a interpretação matricial é que a matriz B da desigualdade (4-2) elimina todas as conexões de um vértice com a malha se zerarmos a linha e a coluna que lhe corresponde. Se o valor que o vértice apresenta na diagonal for o menor entre todos os da diagonal, a diferença entre os espectros da matriz original e o da simplificada é mínimo. Isto reflete em um menor impacto na estrutura da malha, quando removemos este vértice.

Para tornar as probabilidades da diagonal comparáveis entre si, propõe-se ajustá-las de modo a ficarem dependentes da conectividade que cada vértice possui. A multiplicação do grau de cada vértice x_i por sua probabilidade correspondente na diagonal gera valores contidos em uma mesma escala de medida (26). Deste modo, a nova medida gerada, $V(x_i)$, associada ao vértice x_i da malha, tem a forma

$$V(x_i) = P_{ii} \cdot Deg(x_i) \quad (4-4)$$

onde $Deg(x_i)$ e P_{ii} são, respectivamente, o grau do ponto x_i e o seu valor correspondente na diagonal da matriz de transição.

O teorema 4.1 considera que a matriz utilizada deve ser simétrica, o que não se verifica na matriz de transição, que é não-simétrica (anisotrópica). O operador simétrico associado, definido em (3-10), é utilizado como referência. Na nova matriz, que não precisa ser calculada explicitamente, os valores da diagonal e os autovalores são os mesmos da matriz de transição. Nota-se que o valor da diagonal, $a(x_i, x_i)$, associado ao ponto x_i , no operador simétrico, é dado por

$$a(x_i, x_i) = \sqrt{\frac{\pi(x_i)}{\pi(x_i)}} p(x_i, x_i) = p(x_i, x_i). \quad (4-5)$$

4.2.3

Difusão Geométrica como Estratégia para Remoção de Vértices

Os valores $V(x_i)$ definidos na seção anterior são dependentes do mapa de normais que a malha possui. Não existe uma escala fixa que indique um limite para os valores nos vértices que são ou não representativos. Para isso, propõe-se um modelo que compara os valores obtidos entre si, tornando a seleção da representatividade de cada vértice adaptativa e dependente dos valores de todos os vértices que formam a malha.

Um modelo gaussiano é capaz de aprender sobre a distribuição formada por um conjunto de valores. A distribuição fornece um intervalo de confiança para a escolha dos valores dos vértices que poderão ser removidos. Isso permite

a remoção de uma grande quantidade de vértices a cada avaliação de sua representatividade. Em caráter efetivo, àqueles que tem baixa probabilidade em termos de representatividade do conjunto de vértices são eliminados (22).

O intervalo de confiança é definido como $]0, \mu - \kappa\sigma]$, onde μ e σ correspondem, respectivamente, à média e ao desvio-padrão da gaussiana construída com os valores $V(x_i)$. O termo $\kappa \geq 0$ especifica uma margem de segurança para a escolha do intervalo. Sua presença é necessária para que nenhum dos pontos representativos seja escolhido para remoção. A Figura 4.1 apresenta uma gaussiana, com cores representativas dos intervalos, que indica a representatividade dos vértices da malha.

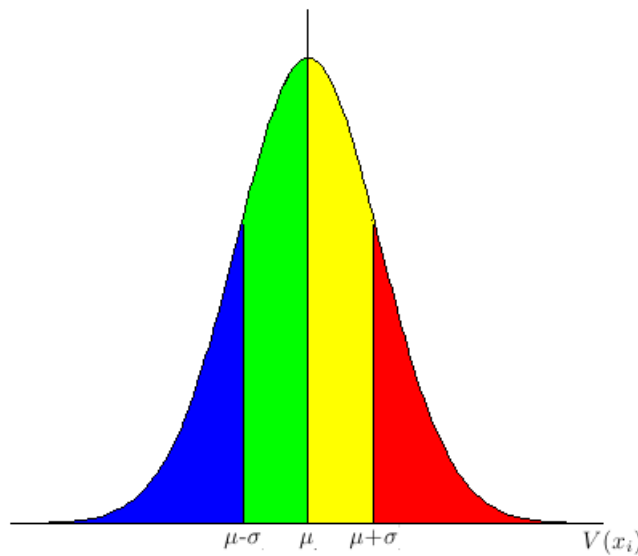


Figura 4.1: Representação gráfica do modelo gaussiano. Um mapa de cores é utilizado para especificar, graficamente, a representatividade de seus vértices.

A Figura 4.2 mostra o modelo *bunny* cujos pontos foram coloridos conforme os valores de impotância associados. Os intervalos e suas cores, correspondentes a $\kappa = 1$, são: $]0, \mu - \sigma]$:azul, $[\mu - \sigma, \mu]$:verde, $[\mu, \mu + \sigma]$:amarelo e $]\sigma, +\infty[$:vermelho. Observa-se que as feições possuem valores altos, destacados em vermelho.

A noção de representatividade de um vértice muda a cada etapa de eliminação em virtude da retirada de uma quantidade significativa de vértices da malha. O uso do modelo gaussiano é importante justamente por se adaptar às mudanças que a estrutura sofre durante a remoção.

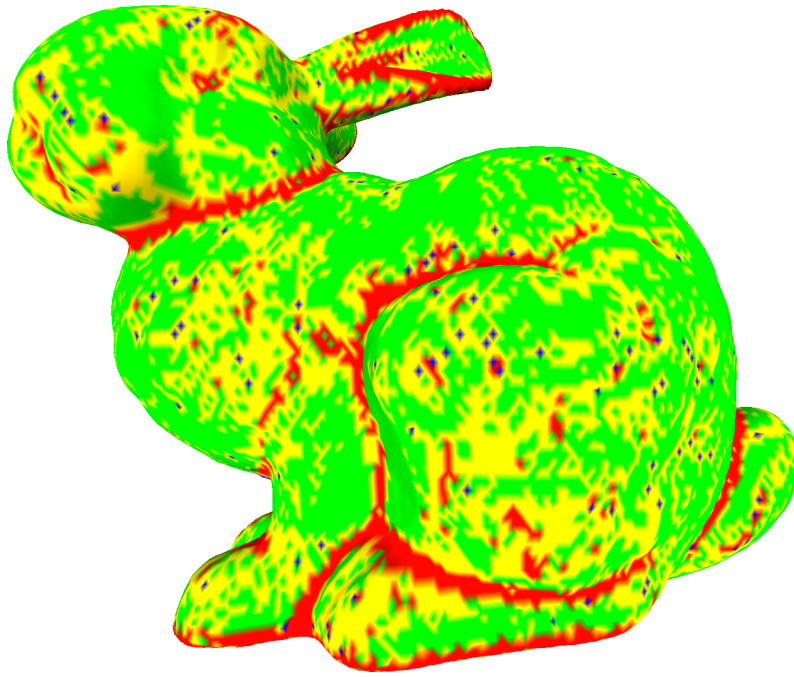


Figura 4.2: Modelo *bunny* e a representatividade de seus vértices definida pelo mapa de cores da Figura 4.1.

4.2.4

O Processo de Remoção

O processo de remoção baseia-se na identificação de cada vértice a ser eliminado e a efetiva remoção de sua estrela mas preservando o seu elo. Uma questão fundamental está na triangulação do buraco deixado pela remoção cujos vértices são aqueles do elo, garantindo a continuidade da malha.

A topologia do elo pode torná-lo apto ou não para triangulação após a remoção do vértice. A nova triangulação da malha só será possível nos seguintes casos:

1. O elo é um polígono fechado com uma só componente. Portanto vértices do bordo ou aqueles que o elo tem mais de uma componente são descartados;
2. Vértices que no arquivo original são localmente não-variedades também são descartados.
3. Vértices cujas estrelas não são convexas.

A Figura 4.3 mostra configurações gerais para as estruturas dos elos aqui discutidos (17, 27, 33) e a Figura 4.4 mostra uma estrela que se apresenta de forma não-convexa.

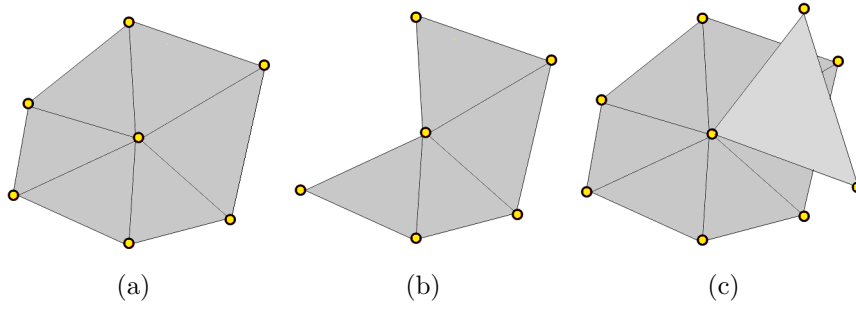


Figura 4.3: Exemplos de configurações topológicas para os elos de vértices presentes na malha. Em (a) um simples, em (b) o próprio vértice está no elo, denotando um vértice de bordo e tornando-o não- simples, e em (c) um elo complexo.

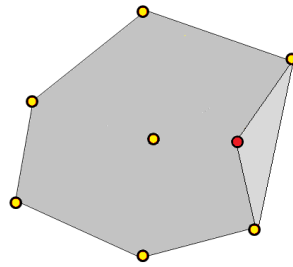


Figura 4.4: Elo de estrela com ponto não-convexo em relação ao seu centro. Observa-se o ponto considerado destacado em vermelho e também o triângulo externo formado por ele e seus vizinhos.

A habilitação de muitos pontos para remoção ao mesmo tempo pode gerar problemas de inconsistências na malha durante o processo de simplificação, tornando-a uma não-variedade. A falha no processo ocorre quando duas estrelas da malha têm uma aresta interna em comum. A Figura 4.5 mostra exemplos de estrelas destacando o conjunto de pontos selecionados para remoção.

Definição 4.2 (Conjunto Independente) *Um conjunto independente de uma malha M é um conjunto S de vértices de M tal que não existem dois vértices adjacentes contidos em S .*

O modo de garantir uma informação válida sobre a vizinhança de qualquer ponto utilizado foi feito usando conjuntos independentes (12, 18). Dentre todos os pontos selecionados são removidos apenas aqueles que não possuem aresta em comum. No caso de pontos pertencentes a uma mesma aresta, apenas um deles é escolhido para remoção.

A triangulação obtida na grande maioria das vezes não gera triângulos de

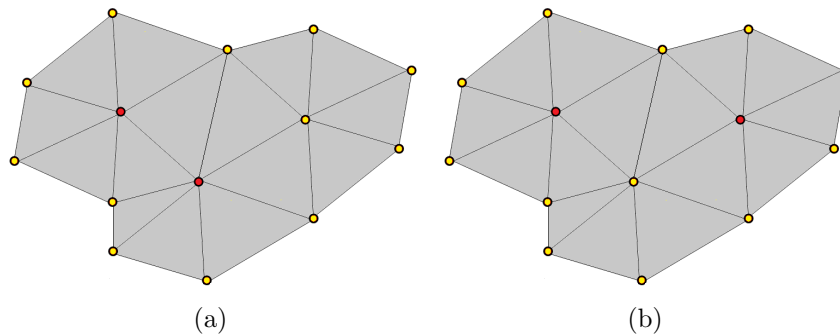


Figura 4.5: Em vermelho estão destacados os pontos selecionados para serem removidos. Em (a) observa-se uma configuração inválida para remoção: os pontos selecionados pertencem a uma mesma aresta; em (b) os pontos estão em estrelas diferentes.

boa qualidade. Uma forma encontrada para melhorá-la é através da troca de arestas entre triângulos adjacentes, do interior do elo triangulado. Um par de triângulos, com um aresta em comum é escolhido para ser manipulado. Calcula-se a média da razão de aspecto, definida na equação (2-1), dos triângulos envolvidos. Uma simulação da troca de aresta é feita e novamente a média das razões de aspecto é calculada para os novos triângulos adquiridos. Escolhe-se a configuração que possuir maior média resultante.

O processo de melhoria é realizado em toda a estrela até que nenhuma troca possa ser realizada. Os triângulos da estrela estarão o mais próximo possível de triângulos equiláteros. A Figura 4.6 apresenta malhas representativas de um toro. Duas simplificações são visualizadas: uma com melhoria da triangulação proposta e outra que não releva a qualidade dos triângulos gerados.

4.3

Critério de Parada

O método proposto utiliza iterações no processo de simplificação. Quando o primeiro conjunto independente de vértices é removido, as representatividades dos pontos que sobraram são reavaliadas pela repetição do método. Pontos pouco importantes que não foram removidos, em virtude da construção dos conjuntos independentes, podem ser removidos posteriormente.

No início existe um conjunto com um número muito grande de pontos cujos níveis de importância são muito próximos. Até a remoção deles, que ocorrerá depois de várias iterações, ocorre um aumento no desvio-padrão. Quando a multi-resolução da malha não se torna significativa ele começa a cair, indicando que todos os pontos possuem chances de remoção muito próximas.

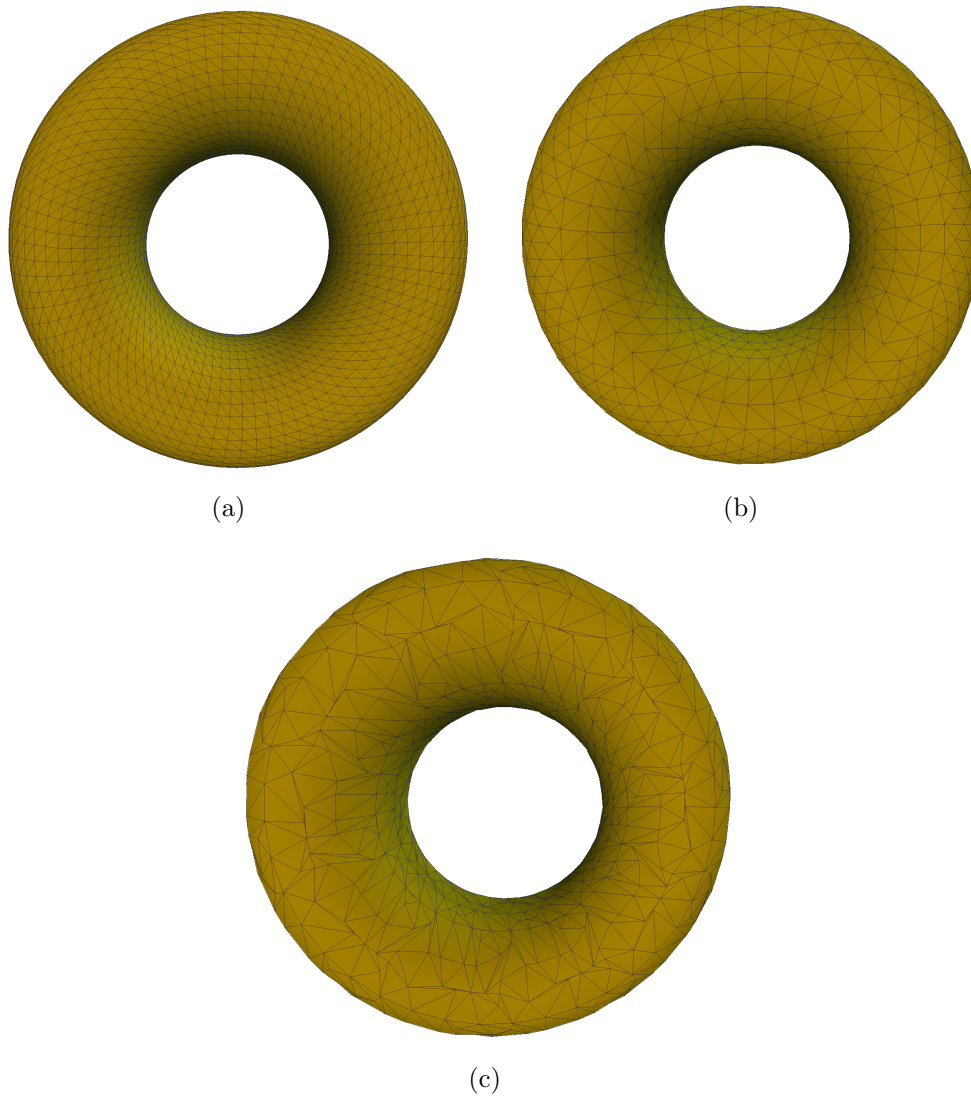


Figura 4.6: Malha representativa de um toro e os resultados de sua simplificação. Em (a) o modelo original, em (b) resultado da simplificação que utiliza a melhoria proposta e em (c) quando nenhuma melhoria é aplicada.

Já a média vai caindo a cada iteração feita.

A convergência do método, assim como o critério utilizado para decidir a sua parada, foram relacionados com a velocidade de decaimento da média do modelo. Em termos práticos, calcula-se a diferença entre as médias da iteração anterior e da atual. A obtenção de um valor pequeno nessa diferença informa que poucos pontos foram removidos na última iteração realizada. A Figura 4.7 mostra o gráfico de convergência para a média e a variância para o modelo *bunny*. Os métodos de simplificação existentes não possuem um critério interno para decidir sua parada. Em geral, utilizam como parâmetro uma porcentagem correspondente ao número de vértices que o usuário deseja remover.

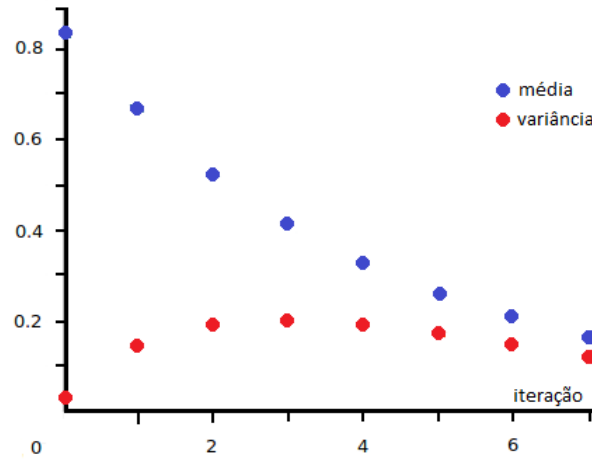


Figura 4.7: Gráfico de comportamento da média e variância do modelo *bunny*.

4.4

Ordem de Complexidade

Neste tópico são discutidas as ordens de complexidade existentes nas etapas que compõem o método proposto. Ao fim da discussão estas complexidades são somadas com o objetivo de se definir o custo total de execução da simplificação por difusão geométrica.

1. Considerando m o maior número de vizinhos de um vértice, e n o número de pontos da malha, a construção da matriz de transição, que envolve os pontos e sua vizinhança possui ordem de complexidade $O(mn)$, que é linear em n , considerando que $m \ll n$.
2. A montagem do modelo gaussiano para avaliação da importância dos pontos exige $O(2n)$, para o cálculo da média e da variância.
3. O processo de escolha de qual ponto será removido exige $O(n)$ para a associação entre o ponto e seu respectivo intervalo de importância.
4. A remoção em si, também consome $O(mn)$, denotando a remoção dos pontos escolhidos e a otimização da triangulação, dependente do número de vizinhos.

Todas as etapas do método foram reduzidas a ordens de complexidade lineares, ou seja $O(n)$. O método completo também possui esta ordem, que é resultante da soma de suas partes, que explicitamente vale $O((2m + 3)n)$. Malhas bem-definidas possuem $m < 10$.