

3

Formulação Teórica da Modelagem Numérica de Problemas de Fluência em Evaporitos

Neste capítulo são apresentados os conceitos do comportamento quase-estático do sal, formulação de fluência, análise do conceito de visco-elasticidade, modelos reológicos mais conhecidos, as leis empíricas de fluência, as leis constitutivas usadas por diversos grupos de pesquisa e a lei constitutiva usada para as simulações desta tese.

Também é feita uma descrição dos algoritmos para a solução do comportamento quase-estático.

3.1. Conceitos do comportamento quase-estático do sal

Costa (1984) classifica como quase-estático o comportamento das estruturas cuja deformação dos materiais que as constituem são dependentes da variável tempo, com acelerações pequenas que permitem desprezar os efeitos secundários das forças de inércia na equação de equilíbrio estrutural. Este autor quis dizer que a variável tempo é imprescindível na análise dos materiais que possuem comportamento quase-estático.

Analisando matematicamente a deformação, percebe-se que ela realmente depende da variável tempo, devido ao comportamento em parte viscoso do material. Fisicamente a deformação do material é dependente das propriedades mecânicas do próprio material, da temperatura e da tensão a que o material está exposto (variáveis de estado).

Segundo vários autores (Costa, 1984; Jaeger & Cook, 1971; Lama & Vutukuri, 1978; Goodman, 1989), a teoria da visco-elasticidade estuda o fenômeno de fluência, em que as deformações permanentes são funções da variável tempo. Finalmente, o termo “fluência” caracteriza a evolução com o tempo de deformações reversíveis ou irreversíveis, simuladas matematicamente por leis constitutivas baseadas na teoria da visco-elasticidade.

3.2. Formulação de fluência (elasto/visco-elasticidade)

Segundo Carter *et al.* (1993), a deformação uniaxial de um sólido é dada pela seguinte equação:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{pl} + \varepsilon_p + \varepsilon_s + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

Onde ε é a deformação uniaxial total, ε_e é a deformação elástica, ε_{pl} é a deformação plástica, ε_p é a deformação primária ou transiente de fluência, ε_s é a deformação secundária ou permanente de fluência e ε_t é a deformação terciária ou acelerada de fluência.

Neste estudo, as análises das simulações se concentram nas deformações elástica, transiente e permanente. Na Figura 3.1 é ilustrada uma curva típica de fluência uniaxial (Jaeger & Cook, 1971; Lama & Vutukuri, 1978; Goodman, 1989), que apresenta inicialmente uma resposta instantânea, que é a deformação elástica (ε_e), e depois as deformações ao longo do tempo (t), aonde $\dot{\varepsilon}$ é a taxa de deformação ($\frac{d\varepsilon}{dt}$), $\dot{\varepsilon}_p$ é a taxa de deformação de fluência primária ou transiente, $\dot{\varepsilon}_s$ é a taxa de deformação de fluência secundária ou permanente, $\dot{\varepsilon}_t$ é a taxa de deformação de fluência terciária ou acelerada.

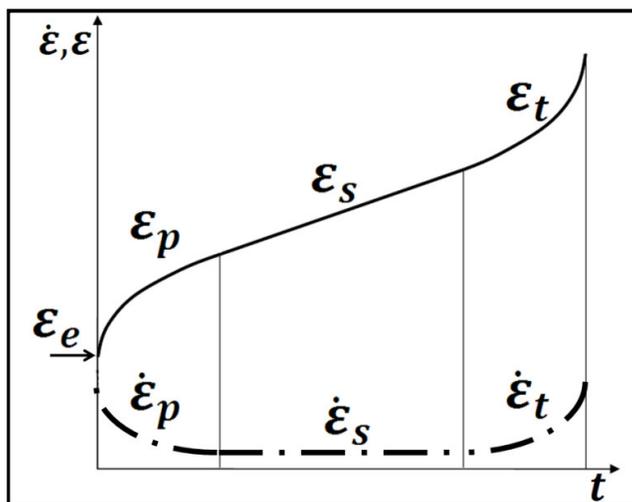


Figura 3.1: Estágios de deformação por fluência e taxas de deformação.

Pode-se observar neste gráfico que a taxa de deformação representada pela linha traço ponto traço, que inicialmente (na fluência primária) diminui de

valor até ser constante na fluência secundária, finalmente mostra um aumento dos valores na fluência terciária.

Segundo vários autores (Jaeger & Cook, 1971; Lama & Vutukuri, 1978; Goodman, 1989) se houver relaxamento de tensão até chegar a um ponto onde não se tenha tensão aplicada no primeiro estágio de fluência a deformação resultante seria igual a 0. No entanto se acontecer isto na fluência secundária haveria uma deformação permanente.

3.2.1. Modelos reológicos

Através da combinação e associação dos elementos de mola (lei de Hooke) e de amortecedor (fluido viscoso) foram formados modelos que se ajustam às curvas experimentais de materiais viscoelásticos, que variam seu comportamento com o tempo e que são capazes de simular as tensões e deformações atuantes sob carregamento uniaxial.

A seguir se apresenta a Tabela 3.1 que resume estes modelos mais usados na literatura, incluindo a equação, a representação gráfica dos elementos e a curva carregamento vs deslocamento ou deformação vs tempo.

Tabela 3.1: Modelos reológicos. (Modificado de Lama & Vutukuri, 1978; Goodman, 1989)

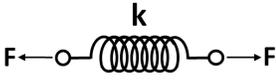
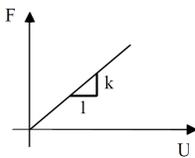
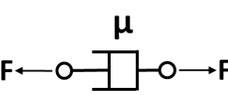
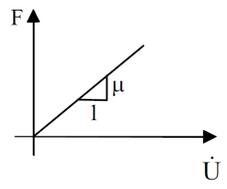
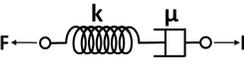
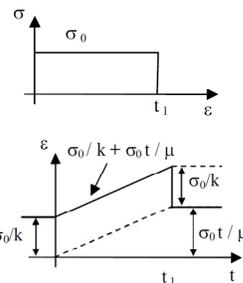
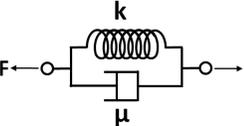
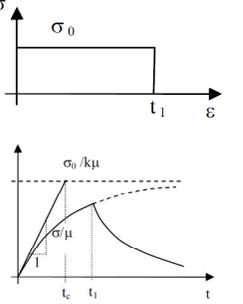
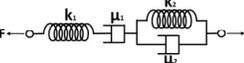
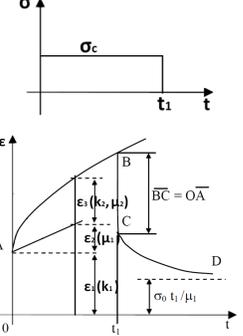
Modelo	Equação	Representação Gráfica dos elementos	Gráfico
Modelo Elástico	$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3.2)$ <p>σ: tensão. E: módulo de elasticidade. ε: deformação.</p>	 <p>k: constante da mola, representando o módulo de elasticidade.</p>	 <p>F: força. U: deslocamento.</p>

Tabela 3.1: Modelos reológicos. (continuação)

Modelo	Equação	Representação Gráfica dos elementos	Gráfico
Modelo Fluido Viscoso	$\sigma = \mu \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \mu \cdot \dot{\varepsilon} \quad (3.3)$ <p>μ: viscosidade. $\dot{\varepsilon}$: taxa de deformação.</p>	 <p>μ: coeficiente de viscosidade.</p>	 <p>\dot{U}: taxa de deslocamento</p>
Modelo de Maxwell	$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{k} + \frac{\sigma}{\mu} \quad (3.4)$ $\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{k} + \frac{\sigma_0}{\mu} \cdot t \quad (3.5)$ <p>$\frac{\sigma_0}{k}$: valor da intercessão do eixo das coordenadas ε. $\frac{\sigma_0}{\mu}$: a inclinação da reta.</p>	<p>Acoplamento em série</p> 	
Modelos de Kelvin	$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k \cdot t}{\mu}} \right) \quad (3.6)$	<p>Acoplamento em paralelo</p> 	
Modelo de Burgers	$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c}{k_1} + \frac{\sigma_c}{k_2} \left(1 - e^{-\frac{k_2 \cdot t}{\mu_2}} \right) + \frac{\sigma_c}{\mu_1} \cdot t \quad (3.7)$	<p>Acoplamento em série dos Modelos de Maxwell e Kelvin</p> 	

3.2.2. Leis empíricas de fluência

No estudo de geomecânica de sal, dependendo da escala de tempo requerida (dias, meses ou anos), o primeiro e segundo estágio de fluência foram estudados por vários autores, Carter *et al.* (1993), Dawson & Munson (1983), Munson *et al.* (1990), Fossum & Frederich (2002) e Urai & Spiers (2007). A seguir apresenta-se uma descrição da fluência primária e secundária encontradas na literatura.

As leis empíricas partem do princípio de tentar ajustar, por uma equação matemática o resultado experimental de uma curva de fluência.

3.2.2.1. Fluência primária

Na Tabela 3.2 pode-se observar que estas leis empíricas só fornecem soluções para a fluência primária, o que pode ser comprovado, verificando a taxa de deformação das três leis empíricas amostradas. Não tem como identificar um autor específico para estas três leis já que se trata de leis gerais usadas por vários autores e que se ajustam a resultados de ensaios de fluência.

Tabela 3.2: Tipos de leis empíricas de fluência primária.

Lei empírica	Equação	Gráfico
Lei Potencial	$\varepsilon(t) = A \cdot t^M \quad (3.8)$ $0 < M < 1$ <p>ε: deformação. t: tempo. A, M: constantes dependentes da temperatura e tensão.</p>	<p>Lei Potencial Deformação vs Tempo</p> $\varepsilon(t) = A \cdot t^M$
	$\dot{\varepsilon}(t) = A \cdot M \cdot t^{M-1} \quad (3.9)$ <p>$\dot{\varepsilon}$: taxa de deformação. A, M, t: <i>Idem a (3.8)</i></p>	<p>Lei Potencial Taxa de Deformação vs Tempo</p> $\dot{\varepsilon}(t) = A \cdot M \cdot t^{M-1}$

Tabela 3.2: Tipos de leis empíricas de fluência primária. (continuação)

Lei empírica	Equação	Gráfico
Lei Logarítmica	$\varepsilon(t) = A \cdot \ln(t) \quad (3.10)$ <p>t: tempo. A: constante dependente da temperatura e tensão.</p>	<p>Lei Logarítmica Deformação vs Tempo</p> $\varepsilon(t) = A \cdot \ln(t)$
	$\dot{\varepsilon}(t) = A \cdot \frac{1}{t} \quad (3.11)$ <p>t, A: Idem a (3.10)</p>	<p>Lei Logarítmica Taxa de Deformação vs Tempo</p> $\dot{\varepsilon}(t) = A \cdot \frac{1}{t}$
Lei Exponencial	$\varepsilon(t) = A \cdot t^B \cdot e^{\frac{C}{T}} \quad (3.12)$ <p>A, B, C: constantes dependentes da tensão. T: temp.</p>	<p>Lei Exponencial Deformação vs Tempo</p> $\varepsilon(t) = A \cdot t^B \cdot e^{\frac{C}{T}}$
	$\dot{\varepsilon}(t) = A \cdot B \cdot t^{B-1} \cdot e^{\frac{C}{T}} \quad (3.13)$ <p>A, B, C, T: Idem a (3.12)</p>	<p>Lei Exponencial Taxa de Deformação vs Tempo</p> $\dot{\varepsilon}(t) = A \cdot B \cdot t^{B-1} \cdot e^{\frac{C}{T}}$

A fluência primária ou transiente segundo Carter *et al.* (1993) se ajusta a vários ensaios de fluência em laboratório com amostras do domo salino *Avery Island* (AI) em Louisiana:

$$\varepsilon_p = B \cdot t^m = B_0 \cdot t^m \cdot \sigma^n \cdot \exp\left(-\frac{Q}{R \cdot T}\right) \quad (3.14)$$

Onde B_0 , m e n são constantes do material e Q é a energia de ativação aparente (J mol^{-1}), R é a constante universal do gás ($8,32 \text{ J mol}^{-1}$), T é a temperatura absoluta em K e σ é a tensão equivalente.

Munson *et al.* (1990) propuseram que a taxa total de deformação macroscópica inelástica por fluência é devido aos seguintes fatores expressos nas seguintes equações, esta equação não tem relação com a Equação 3.1:

$$\dot{\epsilon}_p = F \cdot \dot{\epsilon}S_i + \dot{\epsilon}^\omega \quad (3.15)$$

$$\dot{\epsilon}^\omega = a \cdot \omega \cdot H(\sigma^\omega) \cdot \left[\sinh \left(\frac{b \cdot \sigma^\omega \cdot H(\sigma^\omega)}{(1-\omega)\mu} \right) \right]^c \quad (3.16)$$

Os processos de deslocamento são caracterizados por um componente transiente (F) com endurecimento, equilíbrio e recuperação e uma componente no estado permanente ($\dot{\epsilon}S_i$), a, b e c são constantes do material, ω é a variável de dano, μ é o módulo cisalhante e H é a função Heaviside com σ^ω como argumento. A função Heaviside é uma função descontínua cujo valor é 0 para argumentos negativos e 1 para argumentos positivos.

3.2.2.2. Fluência secundária

A seguir apresentam-se diferentes formulações de fluência secundária para diferentes tipos de sal de diferentes localidades.

Para o caso específico do domo salino *Avery Island* (AI) vai se analisar os ensaios de amostras do sal do domo salino AI. A parcela de deformação por fluência primária através dos dados de resultados de ensaios de laboratório mostram que pode ser bem representada por uma lei potencial de fluência como foi explicado no anterior item. No entanto a fluência secundária, que tem uma taxa de deformação constante é apresentada a seguir pelos seguintes autores:

Segundo Carter *et al.* (1993), Weertman & Weertman (1970) usaram a seguinte equação para os domos salinos AI (>99% halita):

$$\dot{\epsilon}_S = A \cdot \exp \left(-\frac{Q_s}{R \cdot T} \right) \cdot \sigma^n \quad (3.17)$$

Onde A ($\text{MPa}^{-n} \cdot \text{s}^{-1}$) é a constante dependente da temperatura e Q_s é a energia de ativação aparente do mecanismo de fluência.

Também segundo Carter *et al.* (1993), Horseman *et al.* (1972), através de ensaios em amostras e também por modelagem numérica, encontraram a seguinte relação:

$$\dot{\epsilon}_S = 6,4 \cdot 10^{-5} \cdot \exp\left(-\frac{69,2}{R \cdot T} \cdot 10^{-3}\right) \cdot \sigma^{5,9} \quad (3.18)$$

Urai & Spiers (2007) para o estado de fluência secundária ou permanente fazem referência às seguintes equações:

$$\dot{\epsilon}_{DC} = A \cdot \exp\left(-\frac{Q_{DC}}{R \cdot T}\right) \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)^n \quad (3.19)$$

Para a fluência secundária devido ao efeito mecânico de pressão nos grãos:

$$\dot{\epsilon}_{PS} = B \cdot \exp\left(-\frac{Q_{PS}}{R \cdot T}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{T \cdot D^m}\right) \quad (3.20)$$

Então a taxa de deformação secundária total é:

$$\dot{\epsilon}_S = \dot{\epsilon}_{DC} + \dot{\epsilon}_{PS} \quad (3.21)$$

Onde $\dot{\epsilon}_{DC}$ é a taxa de deformação secundária de energia devido a ativação do deslocamento e $\dot{\epsilon}_{PS}$ é a taxa de deformação secundária devido a fluência secundária devido ao efeito mecânico de pressão nos grãos A e B são parâmetros que dependem do tipo de material, Q_{DC} e Q_{PC} representam respectivamente a energia de ativação do deslocamento e da fluência de solução por efeito mecânico de pressão nos grãos, R é a constante do gás, T é a temperatura absoluta, σ_1 e σ_3 são as tensões principais, D é o tamanho do grão, n e m são os expoentes da tensão e tamanho do grão respectivamente.

3.2.3. Leis de fluência associadas a processos físicos

3.2.3.1. Lei constitutiva baseada no modelo de multimecanismos de deformação (M-D)

A lei constitutiva de fluência baseada no modelo de deformação por vários mecanismos (*multimechanism deformation model*, M-D) no sal foi elaborada por

Munson e Dawson (1984) em 1979 no grupo de pesquisa Sandia (*Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico*).

Esta lei se fundamenta nos mecanismos micro-mecânicos de deformação que controlam a deformação da matriz rochosa e de iteração a cada intervalo de tensão, estado de deformação, taxa de deformação, de temperatura e de microestrutura. São cinco os mecanismos que regem o comportamento de fluência do sal, mas são três os mecanismos que interessam à indústria de petróleo (Munson 1984): “*dislocation climb*”, “*dislocation glide*” e um mecanismo indefinido.

Segundo Costa et al. (2010), o mecanismo indefinido foi recentemente identificado com a fluência no contato dos grãos de sal, isto é, a fluência provocada pela dissolução do sal em função do aumento da solubilidade sobre pressões elevadas no contato dos grãos de sal.

É importante entender que no mapa de mecanismos de deformação no sal (ver Figura 3.2), uma temperatura considerada alta na indústria de petróleo (110 °C), é considerada baixa no mapa, já que a temperatura no ponto de fusão é de 803,85 °C (1077 K), máximo valor analisado.

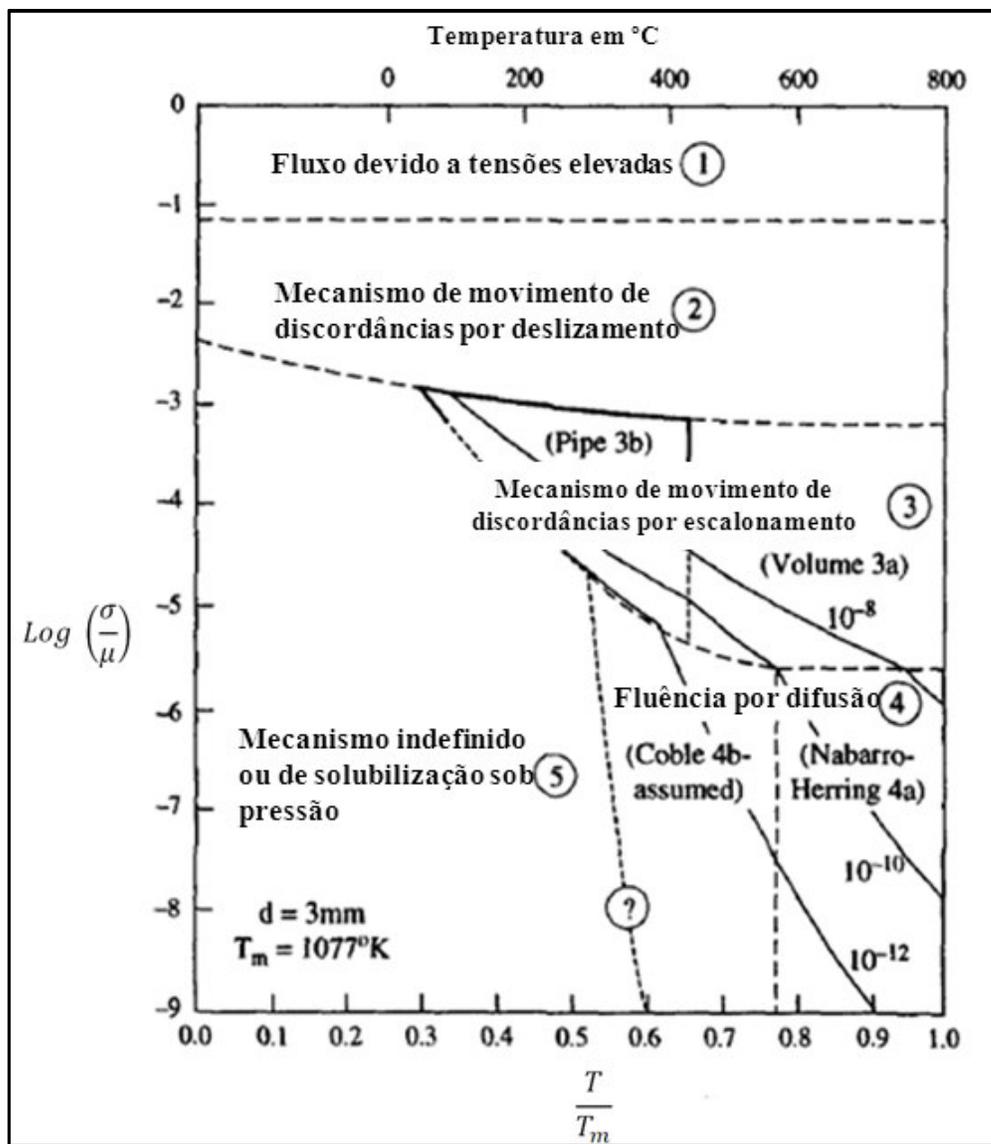


Figura 3.2: Mapa de mecanismos de deformação para o sal (Munson, 1984).

Na Figura 3.2, σ é a tensão desviadora, μ é o módulo de cisalhamento e T_m é a temperatura no ponto de fusão do sal (K), d é o diâmetro do grão de sal. Coble e Nabarro-Herring é uma subdivisão da fluência por difusão, trata-se de um mecanismo de mudança da forma do grão por transporte do material, para o caso em que o transporte é devido a difusão do contorno do grão é Coble e o Nabarro-Herring é para o caso em que o transporte é devido a difusão por volume é Nabarro-Herring.

A Tabela 3.3 apresenta os mecanismos de deformação de sal que interessam a este estudo.

Tabela 3.3: Mecanismos de Deformação.

Tipo de Mecanismo	Equação	Conceito
Mecanismo de movimento de discordâncias por escalonamento ou "Dislocation climb" Munson & Dawson (1981)	$\dot{\epsilon} = A_1 \cdot \left(\frac{\sigma}{G}\right)^{n_1} \cdot e^{\left(\frac{-Q_1}{RT}\right)} \quad (3.22)$ <p> $\dot{\epsilon}$: taxa de deformação de fluência na condição de regime permanente. A_1: constante. σ: tensão equivalente. G: módulo de cisalhamento. Q_1: energia de ativação. R: constante universal dos gases. T: temperatura absoluta. n_1: expoente de tensão. </p>	É um mecanismo de ativação térmica que depende da tensão.
Mecanismo de movimento de discordâncias por deslizamento ou "Dislocation glide" Munson & Dawson (1981)	$\dot{\epsilon} = H \left(B_1 \cdot e^{-\frac{Q_1}{RT}} + B_2 \cdot e^{-\frac{Q_2}{RT}} \right) \cdot \sinh\left(\frac{q \cdot (\sigma - \sigma_0)}{G}\right) \quad (3.23)$ <p> H: função Heaviside. B_1 e B_2: constantes. Q_1 e Q_2: energia de ativação. R: constante universal dos gases. T: temperatura absoluta. σ: tensão equivalente. q: volume de ativação. σ_0: tensão de referência. G: módulo de cisalhamento. </p>	Este mecanismo é formado por modelos micro-mecânicos de deslizamento, em que todos são termicamente ativados e são dependentes exponencialmente da tensão.

Tabela 3.3: Mecanismos de Deformação. (continuação)

Tipo de Mecanismo	Equação	Conceito
Mecanismo Indefinido ou de solubilização sob pressão “ <i>pressure solution</i> ” Munson & Dawson (1981)	$\dot{\epsilon} = A_2 \cdot \left(\frac{\sigma}{G}\right)^{n_2} \cdot e^{\left(\frac{-Q_2}{R \cdot T}\right)} \quad (3.24)$ <p> A_2: constante. n_2: expoente de tensão. Q_2: energia de ativação. R: constante universal dos gases. T: temperatura absoluta. σ: tensão equivalente. G: módulo de cisalhamento. </p>	<p>Este mecanismo leva este nome porque não está associado a nenhum modelo micromecânico, é simplesmente empírico e definido por ensaios laboratoriais.</p> <p>Preferencialmente se usa esta equação quando o evaporito está sujeito a baixas temperaturas e a baixo regime de tensão.</p>

3.2.3.2. Lei constitutiva baseada no duplo mecanismo de deformação

Esta lei foi proposta por Costa *et al.* (1997, 2005, 2009) e é baseada no trabalho de Munson (1984) que se concentra na fluência estacionária do mecanismo duplo de deformação:

$$\dot{\epsilon}_s = \dot{\epsilon}_o \cdot \left(\frac{\sigma_{ef}}{\sigma_o}\right)^n \cdot e^{\left(\frac{Q}{R \cdot T_o} - \frac{Q}{R \cdot T}\right)} \quad (3.25)$$

$$n = n_1 \rightarrow \sigma_{ef} \leq \sigma_o \quad (3.26)$$

$$n = n_2 \rightarrow \sigma_{ef} > \sigma_o \quad (3.27)$$

Em que $\dot{\epsilon}_s$ é a taxa de deformação por fluência na condição de regime permanente (*steady-state*), $\dot{\epsilon}_o$ é a taxa de deformação por fluência de referência (1/h), σ_{ef} é a tensão efetiva ou tensão equivalente de Tresca $\sigma_{eqTresca} = \sigma_1 - \sigma_3$, aonde σ_1 é tensão principal maior e σ_3 é tensão principal menor. σ_o é a tensão efetiva de referência, Q é a energia de ativação para a halita ($\text{kcal} \cdot \text{mol}^{-1}$), $Q=12 \text{ kcal} \cdot \text{mol}^{-1}$ (Costa et al. 2005), R é a constante universal dos gases ($\text{kcal} \cdot \text{mol}^{-1} \text{K}^{-1}$), $R= 1,9858 \text{ E-03}$, T_o é a temperatura de referência (K) no qual a rocha foi testada no laboratório $T_o = 86 \text{ }^\circ\text{C} = 359.15 \text{ K}$, T é a temperatura da rocha na

profundidade em estudo (K), n é o coeficiente que depende do nível das tensões aplicadas.

Segundo Costa & Poiate (2009), a taxa de deformação por fluência de referência $\dot{\epsilon}_o$ corresponde à taxa de deformação em regime permanente (*steady-state*) ou secundário, alcançada num ensaio realizado na temperatura T_o quando se aplica uma tensão desviadora igual à σ_o , e marca o limiar de mudança de um regime de deformação para o seguinte, na escala de incremento de tensão desviadora.

Ou seja, o par de valores $(\sigma_o, \dot{\epsilon}_o)$ corresponde à intersecção de duas retas ajustadas no diagrama de representação das velocidades de deformação em regime permanente das curvas $(\dot{\epsilon} \times t)$ versus a tensão desviadora aplicada, na escala $(\log(\dot{\epsilon}) \times \log(\sigma_{ef}))$.

O termo $e^{\left(\frac{Q}{R \cdot T_o} - \frac{Q}{R \cdot T}\right)}$ da equação é conhecido como fator de ativação térmica e pode ser considerado como um fator multiplicador da velocidade de deformação de referência, ou seja, uma constante definida em função da temperatura.

Este termo refere-se à equação de Arrhenius $\left(k = e^{\left(-\frac{Q}{R \cdot T}\right)}\right)$, k é uma constante de velocidade na ativação de processos térmicos. Os parâmetros $\epsilon_o, \sigma_o, n_1, n_2$ são obtidos através de ensaios de laboratório de fluência sob condições controladas de temperatura e tensão desviadora.

Esta lei está baseada, segundo seus autores, por um duplo mecanismo de deformação, ou seja, são considerados os mecanismos de deslocamento por deslizamento “*dislocation glide = dislocation slip*” e o mecanismo indefinido apresentado por Munson (1991).

3.2.4. Leis constitutivas do programa ABAQUS

As leis de *creep* do programa ABAQUS estão baseadas na lei empírica potencial, especificamente a teoria de endurecimento pelo tempo transcorrido e a teoria do endurecimento por deformação.

A teoria de endurecimento por deformação é função da teoria de endurecimento pelo tempo transcorrido e é a mais recomendada quando o estado de tensões varia com o tempo, já a teoria de endurecimento pelo tempo se ajusta melhor quando a tensão é constante.

A seguir são apresentadas as duas leis e então a generalização das leis para um estado de tensões multiaxial:

Lei potencial baseada na teoria de endurecimento por tempo transcorrido:

$$\dot{\varepsilon} = A \cdot q^n \cdot t^m \quad (3.28)$$

Onde $\dot{\varepsilon}$ é a taxa de deformação, q é a tensão desviadora (tensão equivalente de Mises), t é o tempo e A , n e m são constantes definidas em função da temperatura. A e n devem ser positiva, e m ($-1 \leq m \leq 0$).

Lei potencial baseada na teoria do endurecimento por deformação, integrando a anterior lei, temos:

$$\dot{\varepsilon} = A \cdot q^n \cdot t^m \rightarrow \varepsilon = \frac{A \cdot q^n \cdot t^{m+1}}{m+1} \quad (3.29)$$

Resolvendo t :

$$\therefore t = \left(\frac{\varepsilon(m+1)}{A \cdot q^n} \right)^{\frac{1}{m+1}} \quad (3.30)$$

Finalmente:

$$\dot{\varepsilon} = \{A \cdot q^n [(m+1) \cdot \varepsilon]^m\}^{\frac{1}{m+1}} \quad (3.31)$$

Agora generalizando estas leis para um estado multiaxial de tensões e assumindo que a formulação deve ser reduzida para uma formulação uniaxial, que o material é incompressível, que a fluência é função somente do segundo invariante do tensor desviador de tensões (as equações constitutivas não devem ter influencia das tensões hidrostáticas), para materiais isotrópicos as direções principais de tensões e deformações devem coincidir (Apêndice C).

Pode-se assumir as seguintes ponderações:

$$\sigma_{ij} = \sigma_v \cdot \delta_{ij} + S_{ij} \quad (3.32)$$

Onde σ_{ij} é o tensor de tensões:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_v & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_v & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Onde $\sigma_v \cdot \delta_{ij}$ é o tensor de tensões hidrostático, e δ_{ij} é o delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1 \rightarrow i = j$) e $\delta_{ij} = 0 \rightarrow i \neq j$, σ_v é a média da tensão normal do tensor de tensões σ_{ij} :

$$\sigma_v = \frac{1}{3} \cdot \sigma_{kk} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (3.34)$$

S_{ij} é o tensor desviador:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} \quad (3.35)$$

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_v & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_v & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_v \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Agora com o tensor desviador:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \zeta \cdot S_{ij} \quad (3.37)$$

Onde ζ é um fator de proporcionalidade. A partir da tensão equivalente σ_e ou de Von Mises usados para prever o comportamento do material sob carregamento triaxial de resultados de ensaios uniaxiais:

$$\sigma_e = \sqrt{3 \cdot J_{2D}} \quad (3.38)$$

$$J_{2D} = \frac{S_{ij} \cdot S_{ij}}{2} \quad (3.39)$$

$$J_{2D} = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 \quad (3.40)$$

Onde J_{2D} é o segundo invariante do tensor de tensões.

Assim:

$$\sigma_e = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6 \cdot (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

A taxa de deformação efetiva de fluência é:

$$\dot{\varepsilon}_e^f = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot I_2 \quad (3.42)$$

$$I_2 = \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}^f \dot{\varepsilon}_{ij}^f}{2} \quad (3.43)$$

$$I_2 = \frac{1}{6} [(\dot{\varepsilon}_{11}^f - \dot{\varepsilon}_{22}^f)^2 + (\dot{\varepsilon}_{22}^f - \dot{\varepsilon}_{33}^f)^2 + (\dot{\varepsilon}_{33}^f - \dot{\varepsilon}_{11}^f)^2] + (\dot{\varepsilon}_{12}^f)^2 + (\dot{\varepsilon}_{13}^f)^2 + (\dot{\varepsilon}_{23}^f)^2 \quad (3.44)$$

$$\dot{\varepsilon}_e^f = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right) [(\dot{\varepsilon}_{11}^f - \dot{\varepsilon}_{22}^f)^2 + (\dot{\varepsilon}_{22}^f - \dot{\varepsilon}_{33}^f)^2 + (\dot{\varepsilon}_{33}^f - \dot{\varepsilon}_{11}^f)^2 + 6 \cdot ((\dot{\varepsilon}_{12}^f)^2 + (\dot{\varepsilon}_{13}^f)^2 + (\dot{\varepsilon}_{23}^f)^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.45)$$

Substituindo 3.39 em 3.38:

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e \quad (3.46)$$

Substituindo 3.43 em 3.42:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^f = \dot{\varepsilon}_e^f \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (3.47)$$

Assim o coeficiente de proporcionalidade pode ser definido como:

$$\zeta = \frac{3}{2 \cdot \sigma_e} \cdot \frac{d\varepsilon_e^f}{dt} \quad (3.48)$$

Generalizando para o caso da teoria do endurecimento por tempo transcorrido e substituindo q por σ_e na equação 3.28:

$$\zeta = \frac{3}{2} \cdot A \cdot \sigma_e^{n-1} \cdot t^m \quad (3.49)$$

Substituindo o fator de proporcionalidade na equação original:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^f = \frac{3}{2} \cdot S_{ij} \cdot A \cdot \sigma_e^{n-1} \cdot t^m \quad (3.50)$$

Da mesma forma, para o caso da teoria de endurecimento por deformação:

$$\zeta = \frac{3}{2 \cdot \sigma_e} \cdot \frac{d\varepsilon_e^f}{dt} = \frac{3}{2} \cdot \left\{ A \cdot \sigma_e^{n-1(m+1)} [(m+1) \cdot \varepsilon^f]^m \right\}^{\frac{1}{m+1}} \quad (3.51)$$

Substituindo o fator de proporcionalidade na equação original:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^f = \frac{3}{2} \cdot S_{ij} \cdot \left\{ A \cdot \sigma_e^{n-1(m+1)} [(m+1) \cdot \varepsilon^f]^m \right\}^{\frac{1}{m+1}} \quad (3.52)$$

3.2.5. Lei de fluência utilizada nas simulações no ABAQUS, através de sub-rotina do Programa FORTRAN

Partindo do conceito apresentado por Costa & Poiate (2009), de que as leis constitutivas de fluência, baseadas em mecanismos de deformação, passaram a ser recomendadas pela literatura técnica internacional (por representarem o comportamento intrínseco do material), decidiu-se adotar a equação constitutiva do duplo mecanismo de deformação para as simulações que serão realizadas no ABAQUS.

Esta lei foi implementada no ABAQUS através de programa Fortran. Os valores numéricos das variáveis nas equações para a halita foram obtidos a partir de ensaios de fluência realizados no IPT em amostras de sal da mina Taquari-Vassouras. A Figura 3.2 apresenta resultados destes testes.

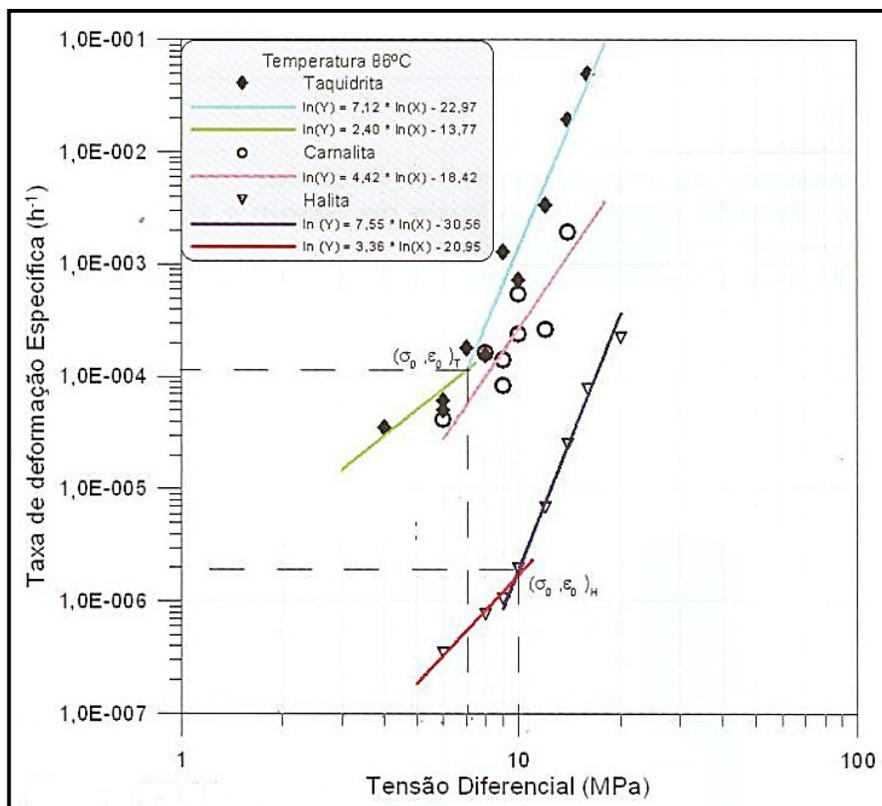


Figura 3.3: Resultados da taxa de deformação específica, em regime de fluência permanente, para diferentes faixas de tensão desviadora ou diferencial (Modificado de Costa & Poiate, 2009).

Na Tabela 3.4 apresentam-se os valores de referência para a halita.

Tabela 3.4: Valores de variáveis da taxa de deformação segundo a Figura 3.2.

Tipo de Sal	Halita	
Equação de taxa de deformação específica (1/h)	Para <10 MPa:	
	$\ln(\dot{\epsilon}) = 3,36 \cdot \ln(\sigma_e) - 20,95 \rightarrow \dot{\epsilon} = \frac{\sigma_e^{3,36}}{e^{20,95}}$ (3.53)	
Valores de referência	Para >10 MPa	
	$\ln(\dot{\epsilon}) = 7,55 \cdot \ln(\sigma_e) - 30,56 \rightarrow \dot{\epsilon} = \frac{\sigma_e^{7,55}}{e^{30,56}}$ (3.54)	
Valores de referência	$\sigma_0 = 9,9 \text{ MPa}$	$\epsilon_0 = 1,888 \cdot 10^{-6}$
Coeficiente dependente do nível de tensões	$n_1 = 3,36$	$n_2 = 7,55$

A equação constitutiva de duplo mecanismo de deformação (3.25) para ser inserida no programa Abaqus deve ter o incremento de deformação equivalente para a solução explícita e para a solução implícita:

Modelo constitutivo baseado no duplo mecanismo de deformação:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_o \cdot \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_o} \right)^n \cdot \exp\left(\frac{Q}{R^*T_o} - \frac{Q}{R^*T}\right) \rightarrow \varepsilon = \dot{\varepsilon}_o \cdot \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_o} \right)^n \cdot \exp\left(\frac{Q}{R^*T_o} - \frac{Q}{R^*T}\right) \cdot t \quad (3.55)$$

Solução explícita - incremento de deformação equivalente de fluência uniaxial:

$$\Delta \bar{\varepsilon}^{cr} = \dot{\varepsilon}_o \cdot \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_o} \right)^n \cdot \exp\left(\frac{Q}{R^*T_o} - \frac{Q}{R^*T}\right) \cdot ((t + \Delta t) - t) \quad (3.56)$$

$$\Delta \bar{\varepsilon}^{cr} = \dot{\varepsilon}_o \cdot \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_o} \right)^n \cdot \exp\left(\frac{Q}{R^*T_o} - \frac{Q}{R^*T}\right) \cdot \Delta t \quad (3.57)$$

Solução Implícita:

$$\frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^{cr}}{\partial \tilde{q}} = n \cdot \dot{\varepsilon}_o \cdot \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_o} \right)^n \cdot \sigma_{eq}^{-1} \cdot e^{\left(\frac{Q}{R^*T_o} - \frac{Q}{R^*T}\right)} \cdot \Delta t \quad (3.58)$$

$$\sigma_{eq} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) \quad (3.59)$$

Onde: σ_{eq} é a tensão equivalente de Tresca, σ_1 , σ_2 e σ_3 são as tensões principais, os outros parâmetros estão apresentados na equação 3.25.

3.3. Descrição do Método dos Elementos Finitos aplicado ao problema de fluência

Neste trabalho, o método numérico escolhido para simular o comportamento quase-estático do sal foi o método dos elementos finitos (MEF). A principal característica deste método é a habilidade de discretizar o meio contínuo e encontrar assim mais facilmente através de cálculo numérico os deslocamentos e tensões atuantes no meio.

Segundo Vázquez e López (2001), devido à complexidade das equações governantes das estruturas contínuas, torna-se imprescindível a utilização do MEF.

Concordando com Costa (1984), as equações diferenciais de equilíbrio quase-estático são obtidas pelo princípio dos trabalhos virtuais e depois integradas no tempo por algoritmos de integração.

No programa Abaqus este procedimento de algoritmo não é apresentado de uma forma inteligível, então serão apresentados mais adiante os algoritmos amostrados por Costa (1984) para entender o processo de integração.

3.3.1. Algoritmos para a solução do comportamento quase-estático

São apresentados dois algoritmos aplicados a análise quase-estática de estruturas pelo MEF. Estes algoritmos estão explicados no Apêndice A e B e foram reproduzidos a partir da tese de Costa (1984).

Estes algoritmos são incrementais. No caso do algoritmo explícito de Euler, é incremental condicionalmente estável, de pequenos intervalos de tempo, para integração no tempo das deformações não-lineares. No entanto, o algoritmo implícito incremental iterativo é mais complexo em sua formulação matemática, mas apresenta uma solução incondicionalmente estável, permitindo o emprego de grandes intervalos de tempo na integração no tempo das deformações por fluência.

3.3.1.1. Algoritmo explícito

Este algoritmo baseia-se no algoritmo explícito de Euler. Antes de começar com a explicação são apresentados os seguintes conceitos:

Nestas equações não foram consideradas as forças concentradas.

Pelo princípio dos trabalhos virtuais:

$$\int_V [{}^t\sigma]^T \cdot [\varepsilon^*] dV - \int_V [{}^t f_v]^T \cdot [u^*] dV - \int_S [{}^t f_s]^T \cdot [u^*] \cdot dS = 0 \quad (3.60)$$

Onde $[{}^t f_v]$ e $[{}^t f_s]$ são as forças volumétricas e superficiais no instante t . Admitindo-se que o tensor de deformações total seja definido pela soma de uma parcela elástica e uma parcela não linear.

$$[{}^t \varepsilon] = [{}^t \varepsilon_e] + [{}^t \varepsilon^f] \quad (3.61)$$

O estado de tensões no instante t é dado por:

$$[{}^t \sigma] = [C][{}^t \varepsilon_e] = [C]\{[{}^t \varepsilon] - [{}^t \varepsilon^f]\} \quad (3.62)$$

Sabendo-se que:

$$[u] = [N][U] \text{ e } [u^*] = [N][U^*] \quad (3.63)$$

$$[\varepsilon] = [\partial][u] = [\partial][N][U] = [B][U] \quad (3.64)$$

E substituindo-se as equações 3.62, 3.63 e 3.64 em 3.60, tem-se:

$$\int_V [{}^t \varepsilon^*]^T [C]([{}^t \varepsilon] - [{}^t \varepsilon^f]) dV - [u^*]^T \int_V [N]^T [f_v] dV - [u^*]^T \int_S [N]^T [f_s] dS = 0 \quad (3.65)$$

$$u^* \left\{ \int_V [B]^T [C][B] dV [{}^t U] = \int_V [B]^T [C] [{}^t \varepsilon^f] dV + [{}^t F] \right\} \quad (3.66)$$

Onde:

$$[{}^t F] = \int_V [N]^T [{}^t f_v] dV + \int_S [N]^T [{}^t f_s] dS \quad (3.67)$$

A equação de equilíbrio em um instante t qualquer pode então ser escrita por:

$$\int_V [B]^T [C][B] dV [{}^t U] = \int_V [B]^T [C] [{}^t \varepsilon^f] dV + [{}^t F] \quad (3.68)$$

Agora em função dos conceitos expostos, a seguir apresenta-se a sequência do processo incremental de integração do tensor de deformações por fluência aplicável a problemas de perfuração de poços em zonas de sal.

Primeiro passo: geração do estado inicial de tensões nos pontos de integração dos elementos, devido ao peso da coluna litostática:

$$\sigma_y = \gamma_m \cdot H \text{ e } \sigma_z = \sigma_x = K_h \cdot \sigma_y, \tau_{xy} = 0 \quad (3.69)$$

Onde γ_m é a densidade média da coluna litostática, H é a profundidade do ponto de integração, σ_y é a tensão vertical, $\sigma_z = \sigma_x$ são as tensões horizontais, K_h coeficiente de empuxo horizontal, normalmente considerado como sendo igual a 1.0 no caso de cavidades em depósitos evaporíticos.

O cálculo das forças nodais equivalentes ao estado inicial de tensões se aplicável ao problema:

$$[F_{\sigma_o}] = \int_V [B]^T \cdot [\sigma_o] dV \quad (3.70)$$

Segundo passo: cálculo do estado de tensões para $t=n+1$:

$$\int_V [B]^T [C][B]dV[U]^{t=0} = \int_V [N]^T [f_v]^{t=0} dV - \int_S [N]^T [f_v]^{t=0} dS + [F_{\sigma_o}] \quad (3.71)$$

$$[K] \cdot [U] = [R]^{t=0} - [F_o] \quad (3.72)$$

$$[\varepsilon] = [B] \cdot [U] \quad (3.73)$$

$$[\sigma] = [\sigma_o] + [C]\{[\varepsilon]\} \quad (3.74)$$

Terceiro passo: cálculo do incremento no tensor de deformações por fluência entre dois instantes t_n e t_{n-1} por Odqvist (1974):

$$[\Delta\varepsilon^f] = \frac{3}{2} \frac{\Delta\varepsilon_e}{\sigma_{e,t=t_o}} \cdot [S_{t=t_o}] \quad (3.75)$$

Onde $[S]$ é o tensor de tensões desviadoras, σ_e é a tensão generalizada ou efetiva de fluência, $\Delta\varepsilon_e$ é o incremento da deformação generalizada ou efetiva e é obtida com base em resultados de ensaios de laboratório ou com parâmetros aferidos através de análise de sensibilidade por comparação com resultados de experimentação de campo:

$$\Delta\varepsilon_e = \{A[t_n - \lambda(t_{n-1})]^a \cdot \theta_{n-1}^b \cdot \sigma_{n-1}^c - A[t_{n-1} - \lambda(t_{n-2})]^a \cdot \theta_{n-2}^b \cdot \sigma_{n-2}^c\} \quad (3.76)$$

A dedução da equação de cálculo do incremento no tensor de deformações por fluência entre dois instantes t_n e t_{n-1} por Odqvist (1974), é explicada no apêndice C.

Quarto passo: cálculo do tensor acumulado de deformações por fluência

$$[{}^{t_n}\varepsilon^f] = [{}^{t_{n-1}}\varepsilon^f] + [\Delta\varepsilon_n^f] \quad (3.77)$$

Quinto passo: cálculo do campo de deslocamentos $[{}^{t_n}U]$ de modo a se alcançar o equilíbrio estrutural, admitindo uma deformação inicial $[{}^{t_n}\varepsilon^f]$:

$$[K] \cdot [{}^{t_n}U] = {}^{t_n}[R] + \int_V [B]^T [C][{}^{t_n}\varepsilon^f] dV - [F_o] \quad (3.78)$$

$$[{}^{t_n}\varepsilon] = [B] \cdot [{}^{t_n}U] \quad (3.79)$$

$$[{}^{t_n}\sigma] = [C]\{[{}^{t_n}\varepsilon] - [{}^{t_n}\varepsilon^f]\} + [\sigma_o] \quad (3.80)$$

Sexto passo: cálculo do parâmetro $\lambda(t_n)$:

$$\lambda(t_n) = t_n - \left\{ [t_n - \lambda(t_{n-1})]^a \cdot \left(\frac{\theta_{n-1}}{\theta_n}\right)^b \cdot \left(\frac{\sigma_{en-1}}{\sigma_{en}}\right)^c \right\}^{\frac{1}{a}} \quad (3.81)$$

Sétimo passo: reinício do processo no quarto passo.

Este algoritmo fornece uma solução condicionalmente estável exigindo a aplicação de pequenos intervalos de tempo na fase de fluência primária, correspondente à fase de redistribuição de tensões antes da solução “*steady state*”.

Devido à extensa aplicação do algoritmo explícito de Euler, principalmente por pesquisadores envolvidos no estudo de fluência de estruturas metálicas, foram desenvolvidos diversos critérios para a determinação do intervalo de tempo crítico acima do qual a solução se tornaria instável. Por este critério o intervalo crítico é dado por:

$$\Delta t < \frac{4(1+\nu)}{3} \frac{1}{E A \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sigma_e^{c-1} \cdot \theta^{b-1} \cdot t^{a-1}} \quad (3.82)$$

Quando se utiliza para equação de fluência a expressão do tipo:

$$\varepsilon_e = A \cdot \sigma_e^c \cdot t^a \cdot \theta^b \quad (3.83)$$

3.3.1.2. Algoritmo implícito

Este algoritmo está baseado no algoritmo implícito incremental iterativo, método “ α ” de integração das deformações por fluência com o tempo. Para entender de melhor forma este algoritmo serão apresentados os seguintes conceitos, melhor explicados no Apêndice B.

Para este algoritmo emprega-se o método “ α ” de integração. Entre os instantes t e $t+\Delta t$ a deformação por fluência varia, bem como a tensão diferencial e a temperatura.

O incremento da deformação efetiva é dado por:

$$\Delta \varepsilon_e^f = \Delta t \cdot {}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \dot{\varepsilon}_e^f \quad (3.84)$$

Onde:

$${}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \dot{\varepsilon}_e^f = a \cdot A \cdot (t + \alpha \cdot \Delta t)^{a-1} \cdot {}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \theta^b \cdot {}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \sigma_e \quad (3.85)$$

$${}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \sigma_e = (1 - \alpha) \cdot {}^t \sigma_e + \alpha \cdot {}^{t+\Delta t} \sigma_e \quad (3.86)$$

$$[{}^{t+\alpha \cdot \Delta t} S] = (1 - \alpha) \cdot [{}^t S] + \alpha \cdot [{}^{t+\Delta t} S] \quad (3.87)$$

Sendo $[{}^{t+\alpha \cdot \Delta t} S]$ o tensor de tensões desviadoras.

O método proposto está ilustrado na Figura B.2 e consiste em se obter o valor da derivada no instante $t + \alpha \cdot \Delta t$ empregando-se os valores extremos das variáveis de estado temperatura e tensão.

Com base nas equações 3.85, 3.86 e 3.87 e aplicando-se a lei por Odqvist, o tensor de deformações por fluência no instante $t + \Delta t$ pode ser escrito por:

$$[{}^{t+\Delta t} \varepsilon^f] = [{}^t \varepsilon^f] + \Delta t \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{{}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \sigma_e} \cdot {}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \dot{\varepsilon}_e^f \cdot [{}^{t+\alpha \cdot \Delta t} S] \quad (3.88)$$

E substituindo-se $[S] = [D] \cdot [\sigma]$ em 3.88:

$$[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f] = [{}^t\varepsilon^f] + \Delta t \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_e} \cdot {}^{t+\alpha\Delta t}\dot{\varepsilon}_e^f \cdot [D] \cdot [{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma] \quad (3.89)$$

$${}^{t+\alpha\Delta t}\gamma = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_e} \cdot {}^{t+\alpha\Delta t}\dot{\varepsilon}_e^f \quad (3.90)$$

$$\rightarrow [{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f] = [{}^t\varepsilon^f] + \Delta t \cdot {}^{t+\alpha\Delta t}\gamma \cdot [D] \cdot [{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma] \quad (3.91)$$

A sequência do processo incremental iterativo de integração do tensor de deformações por fluência aplicável pode-se resumir a solução do seguinte sistema:

$$[K] \cdot [{}^{t+\Delta t}U] = [{}^{t+\Delta t}R] - \int_V [B]^T \cdot [\sigma_o] dV + \int_V [B]^T \cdot [C] \cdot [{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f] dV \quad (3.92)$$

$$\text{Onde } [{}^{t+\Delta t}R] = \int_S [N]^T \cdot [{}^{t+\Delta t}f_s] dS + \int_V [N]^T \cdot [{}^{t+\Delta t}f_v] dV \quad \text{e} \quad [K] = \int_V [B]^T \cdot [C][B] dV.$$

Por observação do sistema de equações em 3.92 é fácil se constatar a não-linearidade do problema. Como $[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f]$ é função de $[{}^{t+\Delta t}\sigma]$ e por sua vez $[{}^{t+\Delta t}\sigma]$ é função de $[{}^{t+\Delta t}\varepsilon]$, que por sua vez é função de $[{}^{t+\Delta t}U]$, conclui-se ser o sistema não-linear, devendo ser resolvido passo a passo.

Além do sistema de equações ser não linear a equação constitutiva é também não linear.

$$[{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f] = [{}^t\varepsilon^f] + \Delta t \cdot {}^{t+\alpha\Delta t}\gamma \cdot [D] \cdot [{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma] \quad (3.93)$$

$$[{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma] = (1 - \alpha) \cdot [{}^t\sigma] + \alpha \cdot [{}^{t+\Delta t}\sigma] \quad (3.94)$$

$$[{}^{t+\Delta t}\sigma] = [C] \cdot ([{}^{t+\Delta t}\varepsilon] - [{}^{t+\Delta t}\varepsilon^f]) + [\sigma_o] \quad (3.95)$$

Existem dois métodos de resolução, o método de substituição sucessiva e o método de Newton-Raphson na solução do sistema não-linear que fornece o valor de ${}^{t+\Delta t}\varepsilon^f$. No método de substituição sucessiva todo o processo realizado não garante a convergência da integração.

3.3.1.2.1. Aplicação do método de Newton-Raphson na solução do sistema não-linear que fornece o valor de ${}^{t+\Delta t}\varepsilon^f$

Em duas iterações sucessivas no estado de tensões tem-se ${}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1}$ e ${}^{t+\Delta t}\sigma_k$, desenvolvendo-se ${}^{t+\Delta t}\varepsilon^f$ em série de Taylor no entorno de ${}^{t+\Delta t}\sigma_k$, tem-se:

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon_{k+1}^{f(i)} = {}^{t+\Delta t}\varepsilon_k^{f(i)} + \left\{ \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\varepsilon^f}{\partial \sigma} \right\}_{[{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_k^{(i)}]} \cdot \left([{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_{k+1}^{(i)}] - [{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_k^{(i)}] \right) \quad (3.96)$$

$$\left\{ \frac{\partial \varepsilon^f}{\partial \sigma} \right\}_{[{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_k^{(i)}]} = \Delta t \cdot [D] \cdot [{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_k] \cdot \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} \right\}_{[{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_k^{(i)}]} + \Delta t \cdot {}^{t+\alpha\Delta t}\gamma_k^{(i)} \cdot [D] \quad (3.97)$$

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1} = [C] \cdot \left([{}^{t+\Delta t}\varepsilon_k^{(i)}] - [{}^{t+\Delta t}\varepsilon_{k+1}^{f(i)}] \right) + [\sigma_o] \quad (3.98)$$

Substituindo-se 3.96 e 3.97 em 3.98:

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1}^{(i)} = [C] \cdot \left\{ [{}^{t+\Delta t}\varepsilon_k^{(i)}] - [{}^{t+\Delta t}\varepsilon_k^{f(i)}] - \left(\Delta t \cdot [D] \cdot [{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_k^{(i)}] \cdot \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} \right\}_{[{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_k^{(i)}]} + \Delta t \cdot {}^{t+\alpha\Delta t}\gamma_k^{(i)} \cdot [D] \right) \cdot \left([{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_{k+1}^{(i)}] - [{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_k^{(i)}] \right) \right\} + [\sigma_o] \quad (3.99)$$

Mas,

$$[{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_{k+1}^{(i)}] = (1 - \alpha) \cdot [{}^t\sigma] + \alpha \cdot [{}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1}^{(i)}] \quad (3.100)$$

$$[{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_k^{(i)}] = (1 - \alpha) \cdot [{}^t\sigma] + \alpha \cdot [{}^{t+\Delta t}\sigma_k^{(i)}] \quad (3.101)$$

Substituindo 3.107 e 3.108 em 3.106:

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{k+1}^{(i)} = [C] \cdot \left\{ [{}^{t+\Delta t}\varepsilon_k^{(i)}] - [{}^t\varepsilon^f] - \Delta t \cdot [{}^{t+\alpha\Delta t}\gamma_k] \cdot [D] \cdot [{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_k^{(i)}] - \left(\Delta t \cdot [D] \cdot [{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_k^{(i)}] \cdot \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} \right\}_{[{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_k^{(i)}]} + \Delta t \cdot {}^{t+\alpha\Delta t}\gamma_k^{(i)} \cdot [D] \right) \cdot \left((1 - \alpha) \cdot [{}^t\sigma] + \alpha \cdot [{}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_{k+1}^{(i)}] - (1 - \alpha) \cdot [{}^t\sigma] - \alpha \cdot [{}^{t+\Delta t}\sigma_k^{(i)}] \right) \right\} + [\sigma_o] \quad (3.102)$$

Fazendo-se as devidas modificações na equação matricial em 3.126 chega-se à equação matricial recursiva para convergência do estado de tensões:

$$\left\{ [I] + \alpha \cdot \Delta t \cdot [C] \cdot \left([D] \cdot [{}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \sigma_k^{(i)}] \cdot \left\{ \frac{\partial \gamma}{[\partial \sigma]} \right\}_{[{}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \sigma_k^{(i)}]} + {}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \gamma_k \cdot [D] \right) \right\} \cdot [{}^{t+\Delta t} \sigma_{k+1}^{(i)}] = [C] \cdot \left\{ [{}^{t+\Delta t} \varepsilon^{(i)}] - [{}^t \varepsilon^f] - \Delta t \cdot [{}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \gamma_k^{(i)}] \cdot [D] \cdot [{}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \sigma_k^{(i)}] + \alpha \cdot \Delta t \cdot \left([D] \cdot [{}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \sigma_k^{(i)}] \cdot \left\{ \frac{\partial \gamma}{[\partial \sigma]} \right\}_{[{}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \sigma_k^{(i)}]} + {}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \gamma_k^{(i)} \cdot [D] \right) \cdot {}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \sigma_k \right\} + [\sigma_o] \quad (3.103)$$

A equação matricial em 3.103 pode ser deduzida aplicando-se diretamente Newton-Raphson sobre a equação:

$$f([{}^{t+\Delta t} \sigma]) = [{}^{t+\Delta t} \sigma] - [C] \cdot \left([{}^{t+\Delta t} \varepsilon^{(i)}] - [{}^{t+\Delta t} \varepsilon^f(i)] \right) + [\sigma_o] \quad (3.104)$$

Calculado o valor do tensor de tensões ${}^{t+\Delta t} \sigma_{k+1}$ pode-se obter o tensor de deformações por fluência $[{}^{t+\Delta t} \varepsilon_{k+1}^f(i)]$:

$$[{}^{t+\Delta t} \varepsilon_{k+1}^f(i)] = [{}^t \varepsilon^f] + \Delta t \cdot [{}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \gamma_k^{(i)}] \cdot [D] \cdot [{}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \sigma_k^{(i)}] + \alpha \cdot \Delta t \cdot \left([D] \cdot [{}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \sigma_k^{(i)}] \cdot \left\{ \frac{\partial \gamma}{[\partial \sigma]} \right\}_{[{}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \sigma_k]} + {}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \gamma_k \cdot [D] \right) \cdot \left([{}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \sigma_{k+1}^{(i)}] - [{}^{t+\alpha \cdot \Delta t} \sigma_k^{(i)}] \right) \quad (3.105)$$

O processo é interrompido quando:

$$\left([{}^{t+\Delta t} \sigma_{k+1}^{(i)}] - [{}^{t+\Delta t} \sigma_k^{(i)}] \right) \leq tol \quad (3.106)$$

Substituindo-se $[{}^{t+\Delta t} \sigma_{k+1}^{(i)}]$, após ter sido satisfeito o critério de convergência, no sistema de equações de equilíbrio, obtém-se mais um passo iterativo no campo de deslocamentos e, portanto mais um passo iterativo no campo das deformações, ou seja:

$$[K] \cdot [\Delta U^{i+1}] = [{}^{t+\Delta t} R] - \int_V [B]^T \cdot [{}^{t+\Delta t} \sigma_{k+1}^{(i)}] dV \quad (3.107)$$

$$[{}^{t+\Delta t} U^{i+1}] = [{}^{t+\Delta t} U^i] + [\Delta U^{i+1}] \quad (3.108)$$

$$[{}^{t+\Delta t} \varepsilon^{i+1}] = [B] \cdot [{}^{t+\Delta t} U^{i+1}] \quad (3.109)$$

Se $[\Delta U^{i+1}]$ não satisfaz uma tolerância pré-determinada, reinicia-se o processo global iterativo utilizando-se o novo valor de $[t+\Delta t \ \varepsilon^{i+1}]$ na recursividade em (3.110). Pode-se provar que o processo incremental iterativo do algoritmo implícito anterior é incondicionalmente estável para $\alpha > \frac{1}{2}$.