

## 2 Modelagem de mercados financeiros

### 2.1 Origem da volatilidade dos preços

Para apresentar uma descrição adequada das séries temporais de preços, é necessário conhecer as características principais dos mercados financeiros. Nesse sentido, apresentamos uma definição de mercado aceita na literatura [02]:

*“Economistas definiriam o mercado como um ‘lugar’, onde compradores e vendedores se encontram para trocar ‘produtos’. A cada instante de tempo, o produto tem um preço. (...) Um tipo especial de mercado é o mercado financeiro, onde o produto negociado é, a grosso modo, dinheiro. No mercado financeiro, grandes somas de dinheiro são emprestadas e investidas em commodities, como metais ou milho, e valores imobiliários, como ações. Em princípio há duas maneiras de um investimento acontecer: na bolsa de valores ou comércio de balcão.”<sup>1</sup>*

O mercado de interesse nesse trabalho é o investimento que acontece nas bolsas de valores, onde são negociadas ações, opções e algumas *commodities*. E em nosso caso, tratamos especificamente das negociações feitas na Bolsa de Valores de São Paulo (BMF&BOVESPA), do Brasil.

Na figura a seguir apresentamos a série histórica de preços de fechamento diários do IBOVESPA a partir do Plano Real<sup>2</sup>. Vê-se que eventualmente os negociantes podem ter grandes perdas no curto prazo, embora haja tendência de crescimento do índice no longo prazo. Por exemplo, podemos ver claramente os resultados do *crash* em 2008 e da crise que se estendeu por parte de 2009, onde o preço do índice BOVESPA baixou para quase metade de seu valor abruptamente.

---

<sup>1</sup> Tradução da autora.

<sup>2</sup> Trabalhando com dados posteriores a 1994, não temos o efeito da hiperinflação que atingiu o país até essa data.

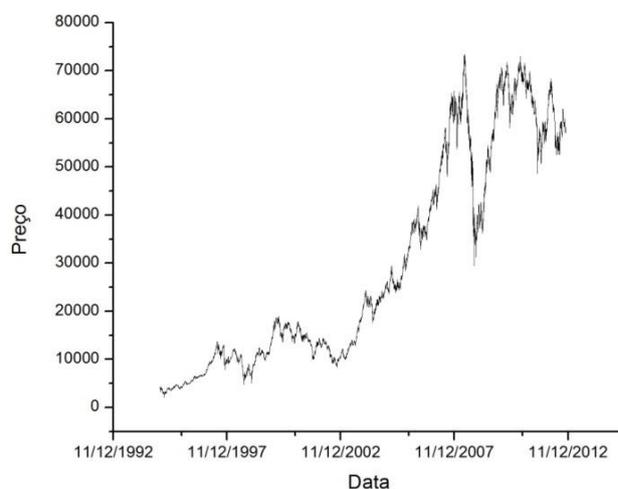


Figura 2.2.1: Série de preços diários do IBOVESPA não deflacionado (1994-2012). É possível observar que o comportamento da série é bastante irregular, apresentando tendências em determinados períodos, com crescimento no longo prazo.

Sendo a tendência de crescimento interpretada como uma taxa de retorno do investimento no longo prazo, podemos dizer que, subjacente a essa tendência de crescimento, existe uma componente aleatória, que pode provocar localizadamente crescimento ou queda nos preços. Essas flutuações são causadas principalmente pela expectativa futura dos preços dos ativos feitas pelos agentes<sup>3</sup>, que revelam as incertezas ou o conhecimento imperfeito que o mercado têm do futuro. Como os agentes não concordam quanto ao preço futuro, a evolução dos preços que emergem das negociações não é determinística, ou seja, a série de preços não seguirá um valor médio que representa a média das opiniões. Ao invés disso, terá um comportamento errático, tanto maior quanto maior for essa incerteza. A medida de incerteza que afeta as grandezas econômicas é chamada de **volatilidade**.

Em uma análise qualitativa, quando a componente aleatória é pequena, observa-se o crescimento dos preços subjacente às flutuações. Mas quando as flutuações ultrapassam certo limite, o comportamento da série pode ser muito diferente do crescimento determinístico esperado (valor médio), como acontece nos *crashes*. Dessa forma, a perturbação aleatória pode reduzir ou até mesmo destruir completamente (localmente) a tendência determinística de crescimento

<sup>3</sup> Existem muitos produtos do mercado de derivativos que indicam a antecipação dos preços.

dos preços. Daí a importância de se caracterizar e mensurar a volatilidade da série temporal dos preços.

Existem dois tipos de causas para a volatilidade. Por um lado, causas endógenas ao ambiente do mercado que dependem de fatores psicológicos, nível de confiança e aversão ao risco dos agentes, e por outro, causas exógenas, devido a choques reais que resultam da inovação tecnológica, mudança do padrão de consumo ou mudanças políticas.

No mercado financeiro, para um preço ser estabelecido, um sistema central deve trabalhar constantemente para o ajuste das ofertas de compra e de venda das ações. Tecnicamente, deve procurar manter a *liquidez* do mercado, minimizando a diferença entre os preços de compra e venda. Assim, podemos dizer que a volatilidade dos preços revela a dificuldade do mercado em encontrar o equilíbrio entre compradores e vendedores, necessário para a estabilidade dos preços.

Consequentemente, a volatilidade dos preços em geral é menor quanto mais diversificado e mais estruturado for o mercado. Nos países emergentes, a volatilidade também é maior devido à maior incerteza sobre o futuro.

Para introduzir uma análise quantitativa da volatilidade, vamos a partir de agora, apresentar algumas grandezas e formulações básicas do mercado financeiro.

## 2.2 Grandezas financeiras e modelagem

As variações de preços na literatura são chamadas de retornos. Essa grandeza é mais adequada para análise do que os preços porque é a variável de interesse dos negociadores, que a utilizam como medida direta do sucesso do investimento. Além disso, a série de retornos é quase-estacionária, enquanto a série de preços não.

O retorno clássico é o retorno percentual, dado por:

$$R_{\tau}(t) \equiv \frac{\Delta S}{S} = \frac{S(t) - S(t-\tau)}{S(t-\tau)} \quad (\text{eq. 2.2.1})$$

onde  $\tau$  é a escala temporal da medida do retorno, podendo ser intradiária, diária, semanal ou mensal, por exemplo. Apesar de a definição anterior ser muito comum

na prática do mercado, a maior parte da literatura em finanças utiliza a definição do retorno logarítmico:

$$r_{\tau}(t) \equiv \Delta(\ln S) = \ln S(t) - \ln S(t - \tau) = \ln \left( \frac{S(t)}{S(t-\tau)} \right) \quad (\text{eq. 2.2.2})$$

As duas definições acima apresentam medidas do lucro relativo e têm uma importante propriedade em comum: seus valores independem da unidade monetária utilizada para o preço, pois são dadas em função da razão entre preços sucessivos. No entanto, o retorno logarítmico apresenta uma vantagem adicional: possui a propriedade de aditividade, ou seja, podemos obter o retorno em uma escala mais longa  $T$  a partir da soma dos retornos na escala mais curta  $\tau$ :

$$r_T = \ln \left( \frac{S(t)}{S(t-\tau)} \frac{S(t-\tau)}{S(t-\tau-1)} \frac{S(t-\tau-1)}{S(t-\tau-2)} \dots \frac{S(t-T+1)}{S(t-T)} \right) \quad (\text{eq. 2.2.3 (A)})$$

$$r_T = \sum_{i=1}^{T/\tau} r_{\tau} \quad (\text{eq. 2.2.3 (B)})$$

Na figura abaixo mostramos a série de retornos logarítmicos do índice BOVESPA histórico.

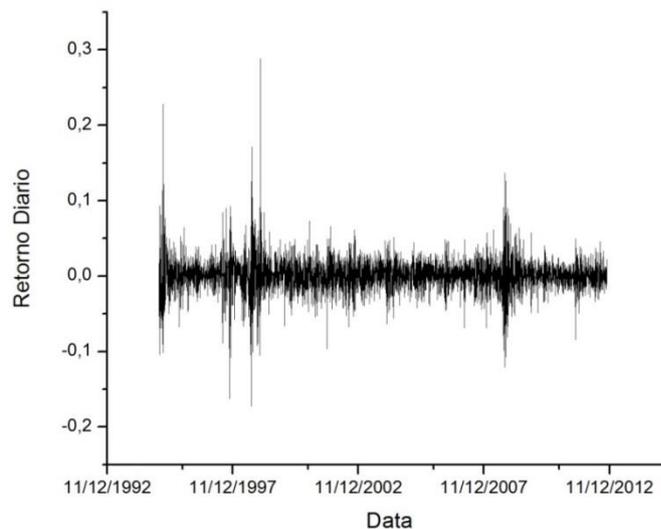


Figura 2.2.2: Série de retornos logarítmicos diários do IBOVESPA entre 02/1995 e 11/2012.

### 2.2.1 Modelo Padrão para a evolução temporal dos preços

O primeiro modelo para a dinâmica das flutuações nos preços, proposto em 1900 pelo matemático francês Louis Bachelier [03], define a evolução temporal dos preços como um processo difusivo. Ele só foi desenvolvido várias décadas depois.

Os modelos que foram propostos a partir de então tinham como pré-requisito a condição ideal de que o mercado fosse *eficiente*. Isso significa que todos os negociantes têm acesso às mesmas informações de maneira rápida e compreensível, além de haver liquidez no mercado, ou seja, há negociantes vendendo e comprando um determinado *título*<sup>4</sup> qualquer que seja o preço. Além disso, considera-se que os custos operacionais dos negócios (impostos, taxas, entre outros gastos) sejam muito pequenos se comparados com o volume negociado. Outra premissa importante é que as mudanças dos preços não têm memória, no sentido de que a variação futura dos preços não depende do que aconteceu nos instantes passados, ou seja, os preços seguiriam um processo estocástico Markoviano.

O modelo clássico para a dinâmica dos preços é o Modelo Padrão, introduzido pelo físico Osborne em 1959 [04]. Vamos obtê-lo aqui, a partir de argumentos simples.

Assumindo que um montante  $S(0)$  foi investido a uma taxa por unidade de tempo  $\mu$ , em um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ , o investimento inicial deve crescer para:

$$S(\Delta t) = S(0) ( 1 + \mu \Delta t )$$

Se esse pagamento é reinvestido  $n$  vezes até uma data  $t$ , temos:

$$S(t) = S(0) \left( 1 + \frac{\mu t}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(0) \exp(\mu t)$$

Assim, de acordo com esta formulação, a parte determinística da variação do preço é dada por:

$$dS = \mu S(t) dt$$

---

<sup>4</sup> Nesse caso, título é qualquer coisa que possa ser negociada no mercado financeiro (ações, opções, derivativos, entre outros produtos financeiros).

Considerando que há perturbações estocásticas no preço, podemos assumir variações de preço da forma:

$$dS = \sigma S(t)dW$$

onde  $dW$  é um processo de Wiener ( $dW \equiv N(0, 2dt)$ ). Adicionando essas duas contribuições, temos o processo estocástico dos preços descrito pelo Modelo Padrão:

$$dS = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW \quad (\text{eq. 2.2.4})$$

A eq 2.2.4 descreve a evolução dos preços como um processo Browniano Geométrico. Essa formulação sugere que o retorno absoluto não é interessante, e sim o retorno relativo ao capital investido. Podemos reescrever a eq. 2.2.4 da seguinte forma:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW \quad (\text{eq. 2.2.5})$$

Assim, identificamos que o retorno clássico dado pela eq. 2.2.1 é descrito por passos de um *random walk*, com média  $\mu dt$  e variância  $\sigma^2 dt$ . O termo  $\sigma$  representa nesse caso, a variabilidade desse retorno, e é interpretado como a **volatilidade** do mercado.

É possível analisar a evolução temporal dos retornos logarítmicos de acordo com esse modelo. Lembramos que a equação estocástica 2.2.5 é um processo de Itô<sup>5</sup>, pois os fatores de tendência e de ruído dependem da variável aleatória  $S(t)$ . Um processo de Itô é assim definido:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW \quad (\text{eq. 2.2.6})$$

---

<sup>5</sup> Para uma explicação sobre o processo de Itô ver [01], pags 40-45.

Facilmente se verifica a semelhança entre as equações 2.2.4 e 2.2.6 com  $a(S,t)=\mu S(t)$  e  $b(S,t)=\sigma S(t)$ . Aplicamos o lema de Itô à variável estocástica  $\ln S(t)$  e encontramos:

$$d(\ln S) = \left[ \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + \sigma dW \quad (\text{eq. 2.2.7})$$

Novamente, identificamos que o retorno logarítmico dado pela eq. 2.2.2 é descrito por passos de um *random walk*, porém com taxa de *drift*  $\mu'=\mu-\sigma^2/2$ . Assim, o processo estocástico dos preços em escala logarítmica é descrito pelo processo Browniano aritmético. É interessante apontar que os processos dados pelas equações 2.2.5 e 2.2.7 possuem a mesma fonte de incerteza  $dW$ .

A eq. 2.2.7, após a passagem de tempo  $T$ , leva a uma distribuição normal das variações  $\Delta(\ln S)$  com média  $\mu'T=(\mu-\sigma^2/2)T$  e variância  $\sigma^2T$ . Sabemos, ainda, que  $\Delta[\ln S]=\ln S(T)-\ln S(0)=\ln[S(T)/S(0)]$  é o retorno logarítmico  $x(T)$  na janela de tempo  $T$ . Portanto, a distribuição dos retornos logarítmicos será dada por uma Gaussiana com média e variância citadas acima:

$$P(x(T)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{T}}} \exp\left\{-\frac{[x(T) - (\mu - \sigma^2/2)T]^2}{2\sigma^2T}\right\} \quad (\text{eq. 2.2.8})$$

A eq. 2.2.8 nos mostra que a volatilidade quadrática pode ser interpretada como a variância dos retornos logarítmicos por unidade de tempo. Efetuando a mudança de variável  $x(T)=\ln[S(T)/S(0)]$  aplicada à distribuição de probabilidade na eq. 2.2.8 e usando que  $P(y)dy = P(x)dx$ , com  $y=S(T)$ , obtém-se a distribuição:

$$P(S(T)) = \frac{1}{S(T)\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{T}}} \exp\left\{-\frac{[\ln(S(t)/S(0)) - \mu'T]^2}{2\sigma^2T}\right\} \quad (\text{eq. 2.2.9})$$

Mostramos assim que o Modelo Padrão leva a uma distribuição Log-normal para os preços e a uma distribuição Gaussiana dos retornos.

### 2.2.2 O Mercado Real

No entanto, a hipótese de que os log-preços dos ativos evoluem como um processo difusivo se torna menos realística à medida que a escala temporal é reduzida. É um fato estilizado do mercado que os retornos não têm distribuição Gaussiana, exceto para escalas temporais bem longas (semanas, meses ou anos). A figura abaixo apresenta a evolução da distribuição dos retornos logarítmicos do IBOVESPA para escalas temporais desde  $\tau = 30$  segundos (curva superior) até  $\tau = 128$  dias. As distribuições estão mostradas em escala logarítmica, na qual a distribuição Gaussiana assume a forma parabólica. Observa-se que para escalas de até um dia ela possui caudas longas, indicando a ocorrência bem maior de eventos extremos do que a prevista pelo modelo clássico Gaussiano.

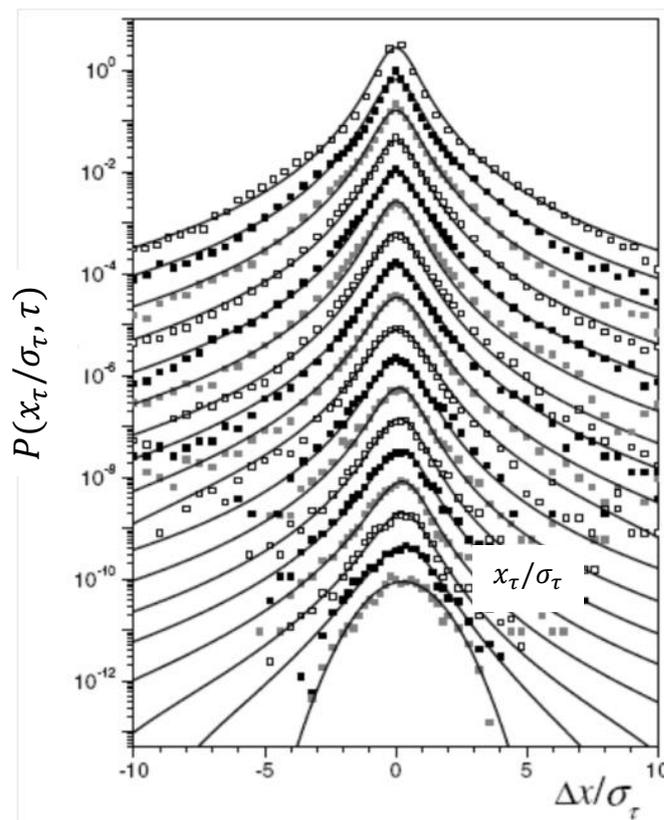


Fig. 2.2.3: Evolução da distribuição de retornos normalizados ( $x_\tau/\sigma_\tau$ ) do BOVESPA [05]. Escalas temporais variando de  $\tau=30$  segundos (curva superior) até  $\tau=128$  dias (curva inferior). As distribuições foram transladadas para melhor visualização.

A existência de caudas longas (curtose positiva) indica que o mercado real não é *eficiente* no sentido econométrico da palavra. Há custo nas transações, há

arbitragem<sup>6</sup> (embora ela não possa durar muito tempo), e o mercado funciona usualmente com informações parciais ou incompletas. Além disso, não é possível considerar que todos os agentes tenham igual capacidade de adquirir e processar as informações disponíveis, havendo ainda agentes com capacidade de influenciar o restante do mercado. Por outro lado, os agentes também são irracionais, com vieses cognitivos afetando suas decisões, por exemplo comportamento imitativo e de pânico. Como consequência, os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$ , como descritos na eq. 2.2.7, não são constantes, mas podem variar no tempo. Por exemplo, apesar dos mecanismos de formação de preços serem os mesmos, a existência de *feedback* positivo no processo de formação da bolha especulativa dos preços pode eventualmente mudar a direção do movimento dos preços no período de crise financeira. De fato, os agentes que geram as flutuações são os mesmos que geram a tendência nos preços e, portanto, a complexidade da série temporal no curto prazo é devido à natureza principalmente endógena de  $\mu$  e  $\sigma$ .

Diante disso, embora usem a eq. 2.2.7 como base teórica, as modelagens desenvolvidas recentemente consideram  $\mu$  e  $\sigma$  variando com o tempo, de acordo com as observações empíricas. Em particular, considere a solução Gaussiana dada pela eq. 2.2.8 com sendo condicionada a certo valor de  $\sigma$ ,  $p(x|\sigma)$ , e a existência de heterocedasticidade (valores heterogêneos de  $\sigma$ ). A distribuição (incondicional) de retornos  $p(x)$  ao longo de janelas temporais de observação de longo prazo é dada por:

$$p(x) = \int d\sigma \rho(\sigma)p(x|\sigma) \equiv \langle p(x|\sigma) \rangle \quad (\text{eq. 2.2.10})$$

onde  $\langle \dots \rangle$  significa média sobre realizações de  $\sigma$  ao longo do prazo de observação e  $\rho(\sigma)$  representa a distribuição dos valores de  $\sigma$ . Pode-se mostrar que, para uma forte heterocedasticidade,  $p(x)$  terá cauda longa [06].

---

<sup>6</sup>A arbitragem financeira é uma situação em que é possível gerar lucros sem exposição ao risco. Ela pode ser definida como a prática de conseguir gerar lucros a partir de diferenças de preço entre mercados distintos. Por exemplo, a cotação USD/BRL pode estar inconsistente com a cotação EUR/BRL, sendo possível lucrar a partir de uma operação de compra em uma moeda estrangeira e venda na outra. Embora ocorram no mercado real, essas situações são bem raras e duram muito pouco tempo, pois logo que a oportunidade de arbitragem surge, diversos agentes tentam aproveitá-la, o que equilibra o mercado novamente.

Embora o comportamento dos agentes tenha impacto de curto prazo nos preços, tem pouca influência no comportamento de longo prazo, que é governado pela tendência tecnológica, climática, etc. Assim, embora seja possível uma descrição do comportamento dos preços no longo prazo de forma determinística, em escalas temporais curtas ou intermediárias devemos utilizar métodos estocásticos. Em particular, o coeficiente de difusão  $\sigma$  também pode ser considerado como uma variável estocástica com dinâmica própria, subjacente ao processo estocástico dos preços, com a distribuição  $\rho(\sigma)$  descrita na eq. 2.2.10. Essa é a linha de trabalho dos estudos feitos na área de Econofísica atualmente e será a linha seguida nesse trabalho.

### **2.3 Estimadores de volatilidade**

Determinar o coeficiente de difusão  $\sigma$  da eq. 2.2.7 é essencial para que seja possível inferir a flutuação dos preços no futuro. Por isso há um esforço muito grande em entender como essa variável se comporta e se existem padrões que a governam.

As causas da volatilidade dos preços são várias. Ela é o resultado da chegada de novas informações, mas por outro lado, a constante negociação dentro dos mercados é responsável pela maior ou menor magnitude do movimento dos preços. A questão foi inicialmente estudada por Fama e French [07] [08]. Eles coletaram dados dos preços das ações a cada encerramento de dia de pregão da composição do portfólio do índice Standart&Poors entre 1953 e 1977 e calcularam a variância dos retornos dos preços no encerramento do pregão em duas situações: entre dois dias consecutivos, quando não havia nenhum intervalo sem negociação entre eles; e entre as sextas-feiras e as segundas-feiras. Se os dias úteis e o final de semana fossem equivalentes, deveríamos encontrar uma variância três vezes maior para os dias separados por final de semana do que para os dias consecutivos. Mas o resultado de Fama foi uma variância apenas 22% maior entre os dias envolvendo finais de semana e o de French foi similar, 19% maior. Segundo John Hull [09], isso sugere que a volatilidade dos preços tenha causas principalmente endógenas, geradas a partir da própria negociação, embora

a entrada de novas notícias também seja um fator relevante. Por esse motivo, todas as análises aqui apresentadas serão feitas com dados de base 252 dias úteis por ano.

A volatilidade não é um observável direto da mesma forma que o preço, sendo necessário estimá-la. Por isso, tanto no mercado quanto na literatura, várias definições tem sido utilizadas.

Nesse estudo, consideraremos a volatilidade *realizada*. O termo *realizada* refere-se à estimativa calculada a partir de uma *realização* de série passada de preços. É importante pontuar que existe outro tipo medida, a chamada volatilidade implícita. Essa grandeza é a projeção de  $\sigma$  para um determinado período futuro. Ela é largamente utilizada pelos agentes do mercado financeiro para apreçar opções, swaps de volatilidade e de variância<sup>7</sup>, e indica o quão arriscado está determinado ativo. Em mercados maiores, como o americano, é possível realizar estudos baseados nesse tipo de volatilidade, pois há um número suficientemente grande de opções sendo negociadas, tornando possível encontrar uma série confiável de volatilidade implícita. Já no Brasil, o mercado de opções ainda é muito restrito, impossibilitando o uso desse tipo de estimador.

A estimativa (“*error-free*”) de volatilidade realizada permite tratá-la como um observável, abrindo a possibilidade de modelá-la. No entanto, existem muitas formas de traduzir o conceito de incerteza da série passada dos preços através de uma definição matemática, e não existe até hoje uma definição universalmente aceita [09].

Devemos enfatizar que a volatilidade realizada depende de duas escalas temporais: a resolução  $\tau$  das mudanças de preços e a janela  $T \geq \tau$  no qual a métrica é avaliada. No caso de volatilidade variável, janelas muito longas escondem as variações locais e janelas muito curtas podem captar ruídos não significativos. Nos estudos empíricos, as janelas ótimas vão de  $T= 16\tau$  até  $T= 32\tau$ .

Apresentaremos a seguir uma série de estimadores conhecidos na literatura para que o leitor possa entender as vantagens do estimador por nós escolhido como estimador padrão para esse trabalho.

---

<sup>7</sup> Swaps de volatilidade são, em linhas gerais, swaps em que um agente paga uma volatilidade *strike* e recebe a volatilidade realizada após um período determinado. Para mais detalhes, veja em [http://www.ederman.com/new/docs/gs-volatility\\_swaps.pdf](http://www.ederman.com/new/docs/gs-volatility_swaps.pdf).

### 2.3.1 Módulo do retorno

Um estimador muito utilizado pelos agentes do mercado em geral interpreta a volatilidade realizada como o módulo do retorno:

$$v_{\tau}(t) = |r_{\tau}(t)| \quad (\text{eq. 2.3.1})(A)$$

ou ainda, em termos de volatilidade quadrática:

$$v_{\tau}^2(t) = |r_{\tau}(t)|^2 \quad (\text{eq. 2.3.1})(B)$$

Para justificar, esses estimadores, consideremos a eq. 2.2.7 com  $x=\ln S$  e  $\mu'=\mu-\sigma^2/2$ :

$$dx = \mu' dt + \sigma dW(t)$$

Fazendo a extração da tendência ou do valor médio dos retornos logarítmicos:

$$dx' = dx - \mu' dt ,$$

podemos descrever a dinâmica do mercado por outra equação estocástica mais simples:

$$dx'(t) = \sigma(t)dW(t) \quad (\text{eq. 2.3.2})$$

A eq. 2.3.2 leva a uma interpretação importante: o preço (extraída a tendência) está se modificando de acordo com o valor de  $\sigma(t)$  e de uma variável aleatória  $dW$ .

Como primeira aproximação, podemos substituir o ruído quadrático por seu valor médio e escrever a volatilidade quadrática como:

$$v^2(t) \equiv \sigma^2(t) = \frac{|dx'(t)|^2}{\langle |dW(t)|^2 \rangle}$$

Como  $\langle |dW(t)|^2 \rangle = dt$ , isso indica que a volatilidade é proporcional ao módulo do retorno no intervalo temporal considerado. Para intervalos de tempo unitários teremos:

$$v(t) \cong |dx'(t)|$$

ou seja, a volatilidade é aproximadamente o módulo do retorno, resultado que reproduz o estimador inicial.

No entanto, esse estimador não é adequado por ser muito ruidoso, seguindo o comportamento errático da magnitude dos retornos. Para descrever o comportamento da volatilidade característica de cada período é preciso considerar a magnitude da variação de preços no curto prazo, todavia, em uma janela temporal maior do que a escala do retorno. Isto permite que a série de volatilidade obtida seja mais suave, representando a predisposição subjacente do mercado a mudanças nos preços.

### 2.3.2 Média e desvio padrão Móveis dos módulos do retorno

No estimador média móvel, a volatilidade é calculada como a média dos módulos dos retornos em uma janela temporal  $T$ . Ele pode ser matematicamente definido pela seguinte equação:

$$v_\tau(t) = \frac{1}{T} \sum_{t'=t-T}^t |r_\tau(t')| \quad (\text{eq. 2.3.3})$$

onde  $r_\tau(t')$  é o retorno de uma dada escala temporal  $\tau$  definida dentro da janela  $T$ .

O desvio padrão móvel é semelhante ao estimador apresentado acima, mas ao invés do cálculo da média, calcula-se o desvio padrão:

$$v_\tau(t) = \left( \sum_{t'=t-T}^t \frac{1}{T} (r_\tau(t') - \bar{r}_\tau)^2 \right)^{1/2} \quad (\text{eq. 2.3.4})$$

onde  $\bar{r}_\tau$  é a média dos retornos de escala  $\tau$  no intervalo  $T$ . Esses estimadores têm a vantagem de tornar a série de volatilidade menos ruidosa e de diminuir o efeito dos eventos extremos. Porém, quando se usa uma janela muito grande de tempo, são bastante criticados porque os dados mais antigos de retorno têm a mesma relevância que os dados mais recentes para o cálculo da volatilidade.

### 2.3.3 Desvio padrão com alisamento exponencial (EWMA)

Muito utilizado pelos práticos do mercado, o EWMA tem a vantagem de diferir as contribuições das observações de retorno mais recentes, dando maior peso a elas. Na janela de tempo unitária (na escala  $\tau$ ), ele pode ser definido como:

$$v_\tau^2(t) = \lambda v_\tau^2(t - \tau) + (1 - \lambda)r_\tau^2(t - \tau)$$

onde  $\lambda < 1$  é um fator que determina o peso que será dado às observações de acordo com a antiguidade delas. Iterando a equação acima para janelas temporais mais longas, encontramos:

$$v_\tau^2(t) = (1 - \lambda)[r_\tau^2(t - \tau) + \lambda r_\tau^2(t - 2\tau)] + \lambda^2 v_\tau^2(t - 2\tau) + \dots$$

levando à generalização para janelas  $T = m\tau$ :

$$v_\tau^2(t) = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} r_\tau^2(t - i\tau) + \lambda^m v_\tau^2(t - m\tau) \quad (\text{eq. 2.3.5})$$

Então, para  $m$  suficientemente grande será possível ignorar o segundo termo e trabalhar apenas com os retornos passados. O valor de  $\lambda = 0.94$  é bastante utilizado no mercado para projetar a volatilidade futura a partir da volatilidade passada.

### 2.3.4 Desvio padrão intradiário reescalado

Os estimadores até agora apresentados só produzem, por exemplo, volatilidade diária a partir de retornos diários, e por isso não captam as mudanças intradiárias dos preços que caracterizaram o dia do pregão. No entanto, as flutuações dos preços não são homogêneas, podendo sofrer mudanças significativas ao longo do dia, como pode ser observado na figura abaixo:

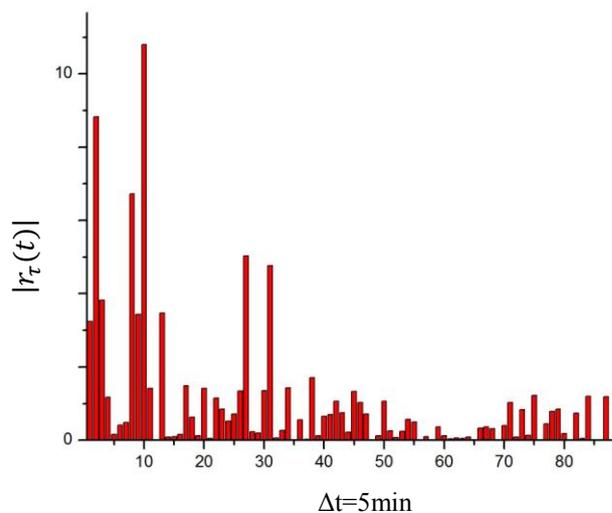


Figura 2.3.1: Volatilidade de 5 minutos segundo a definição da eq. 2.3.1 ao longo de um dia de pregão.

Podemos observar a partir da figura 2.3.1, que no início do pregão a volatilidade está bem alta, mas a partir da terceira hora do dia ela começou a baixar e se manteve nesse nível. Se compararmos com o valor do retorno entre o início e o fim do pregão, obtemos uma volatilidade alta, mas isso não reflete o que aconteceu em média durante toda a extensão do dia.

Assim, é conveniente encontrar uma medida que capte de maneira eficiente as mudanças do comportamento da volatilidade dentro do intervalo diário. Dessa forma, vamos considerar, como ponto de partida, o estimador dado pelo desvio padrão dos retornos (eq. 2.3.4) para uma determinada escala  $\tau$ , menor que um dia. Para maior parte de nossos dados experimentais,  $\tau=15$  minutos. Inicialmente, avaliamos o grau de dependência dos retornos de  $\tau=15$  minutos, calculando a função de autocorrelação (FAC) desses retornos.

Para analisar a FAC da série de retornos, considere a função de correlação entre duas séries temporais  $\{X(t)\}$  e  $\{Y(t)\}$ :

$$\rho_{xy}(\Delta t) = \frac{\text{cov}(X(t), Y(t+\Delta t))}{\sigma_x \sigma_y} \quad (\text{eq. 2.3.6})(A)$$

$$\text{cov}(X(t), Y(t + \Delta t)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X(i) - \mu_x)(Y(i + \Delta t) - \mu_y) \quad (\text{eq. 2.3.6})(B)$$

onde  $N$  é o tamanho da amostra e  $\Delta t$  é o intervalo de translação temporal entre as séries (em unidades de  $\tau$ );  $\mu_x$  e  $\mu_y$  ( $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ ) são, respectivamente, o valor médio (desvio padrão) das séries  $\{X(t)\}$  e  $\{Y(t)\}$ . Dessa forma,  $-1 < \rho_{xy}(\tau) < 1$ .

A figura abaixo ilustra o comportamento típico da FAC de retornos logarítmicos de 15 min do IBOVESPA:

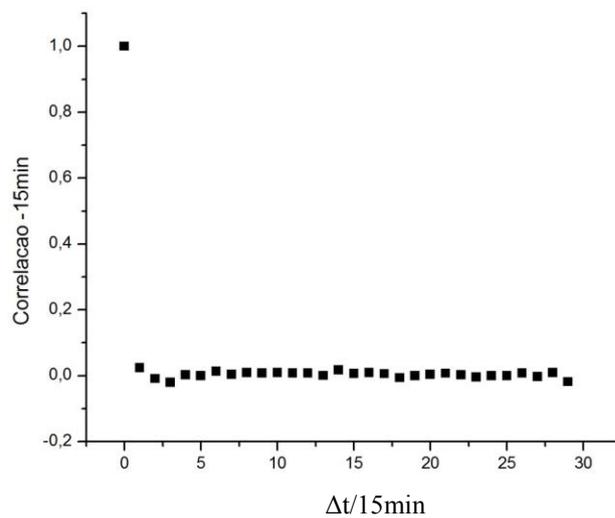


Figura 2.3.2: Autocorrelação dos retornos de 15 minutos.

A partir dessa figura, concluímos que os retornos intradiários têm dependência linear fraca, que caracteriza um comportamento difusivo.

Considerando que dentro de um dia teremos um número  $n_\tau(t)$  de retornos intradiários na escala  $\tau$  e considerando a aditividade dos retornos logarítmicos (eq.2.2.3), o retorno diário é a soma dos  $n_\tau$  retornos intradiários na escala  $\tau$ .

Assim, na aproximação de comportamento difusivo dos retornos intradiários de escala  $\tau$ , obtém-se como estimador da volatilidade diária ( $T=1$  dia):

$$v_T(t) = v_\tau(t) \sqrt{n_\tau(t)} \quad (\text{eq. 2.3.7})$$

A série de preços do IBOVESPA utilizada nesse trabalho contém dados intradiários entre 01 de novembro de 2002 a 31 de maio de 2011. Usando o estimador da eq. 2.3.7, para a volatilidade diária, obtida a partir de retornos de resolução  $\tau=15$  min, produzimos a série apresentada na figura abaixo.

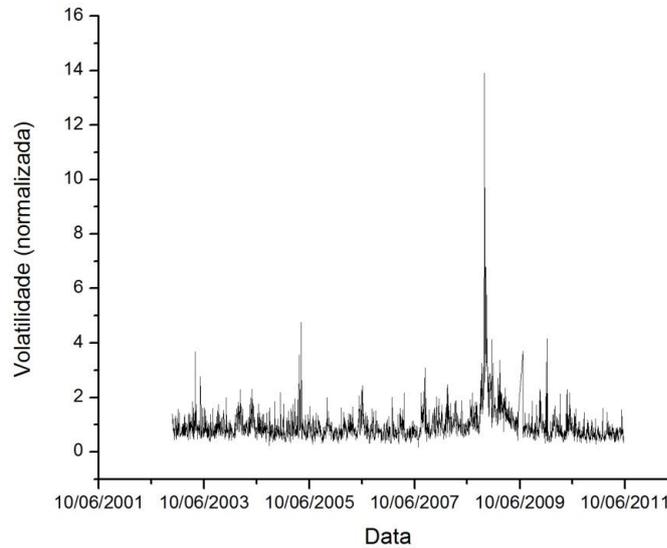


Figura 2.3.3: Série de volatilidade diária do IBOVESPA de 2002 a 2011.

Neste trabalho adotaremos sempre o estimador da eq. 2.3.7 para a análise da volatilidade do IBOVESPA em diversas escalas temporais.

### 2.3.5 Volatilidade histórica

Os estimadores definidos até aqui descrevem o comportamento da volatilidade do mercado localmente no tempo, usando janelas temporais de curto prazo. Também é possível definir uma volatilidade histórica ou de longo prazo para uma série de retornos que representa o nível médio da incerteza dos preços passados. A definição muito usada em finanças é dada basicamente pelo desvio padrão dos retornos (eq. 2.3.4) em janela de longo prazo.

## 2.4 Fatos estilizados da volatilidade

Foram observadas algumas características nos dados de volatilidade de vários mercados que contribuem para que possamos construir modelos que descrevam a dinâmica dessa grandeza. Essas características são comumente chamadas de fatos estilizados na literatura de finanças. Resumidamente, os fatos estilizados da volatilidade são:

- **Reversão a média:** A volatilidade segue uma dinâmica estocástica de reversão a média, tendendo a sempre retornar para uma média histórica, que depende do mercado estudado. Essa característica está presente em praticamente todos os modelos existentes na literatura. No capítulo quatro apresentaremos as leis de distribuição que mais se adequam à volatilidade empírica do índice BOVESPA a partir de modelos de reversão a média.
- **Dependência horizontal da volatilidade:** a série temporal da volatilidade apresenta característica de intermitência, associado ao fenômeno de *clustering* (períodos de alta volatilidade são, na maior parte das vezes, seguidos por períodos de alta volatilidade, e vice-versa). Essas características são exibidas por processos com memória, ou seja, a autocorrelação tem níveis significativos para intervalos de tempo varrendo períodos relativamente longos. Esta propriedade será tratada nas próximas seções desse capítulo.
- **Leis de escala:** a propriedade de agregação dos retornos descrita pela eq. 2.2.3 implica que a dispersão dos retornos aumenta de acordo com a escala temporal em que eles são medidos. A descrição deste crescimento através de leis de potência e sua extensão para momentos generalizados de ordem  $p$  dos retornos leva à estimação de expoentes de escala  $H(p)$  generalizados. Essa característica será tratada nas próximas seções desse capítulo.
- **Dependência vertical assimétrica:** explorando a interdependência do comportamento da volatilidade de curto e de longo prazo, foi observada uma assimetria de acordo com o nível de magnitude da volatilidade: volatilidades baixas em escala temporal larga são mais provavelmente acompanhadas por volatilidades baixas em escalas temporais mais curtas. Por outro lado, a ocorrência de alta volatilidade em escala temporal larga

não está necessariamente correlacionada com a observação de volatilidade alta em horizonte mais curto.

- **Assimetria do fluxo de informação:** o fluxo de informação entre volatilidades de diferentes resoluções temporais é assimétrico no tempo. Esse fluxo acontece predominantemente das escalas longas para as escalas curtas, isto é, mudanças de volatilidade de baixa frequência tem maior impacto sobre a volatilidade de alta frequência subsequente do que vice-versa.

- **Efeito *leverage*:** a correlação entre retorno e volatilidade é assimétrica: é negativa quando se trata de retornos passados e volatilidade futura, mas na direção inversa (volatilidade passada, retornos futuros) a correlação é insignificante. Esse assunto será tratado no capítulo cinco.

#### 2.4.1 Clustering e efeitos de memória

Reproduzimos na figura 2.4.1 a série temporal de volatilidade diária do IBOVESPA usando o estimador da eq. 2.3.7 com  $\tau=15$  minutos. É possível verificar que valores altos da volatilidade estão concentrados em algumas regiões temporais da figura. A isso chamamos de *clustering* de volatilidade, que representa um efeito persistência da magnitude das flutuações de preço.

A elipse vermelha indica o período da crise financeira de 2008, no qual observamos as maiores volatilidades do período. O auge da crise aconteceu entre agosto e novembro de 2008, e depois as volatilidades ficaram mais baixas, voltando ao seu patamar habitual. A elipse azul sinaliza o período de baixa volatilidade que se seguiu a partir do início de 2009, logo após a crise. Isso indica que a autocorrelação será positiva, pois valores acima da média tendem a ser seguidos por valores acima da média, e vice-versa. Podemos observar também que a série tende a voltar para uma média natural, que pode ser considerada como um nível histórico para a magnitude de flutuação dos preços.

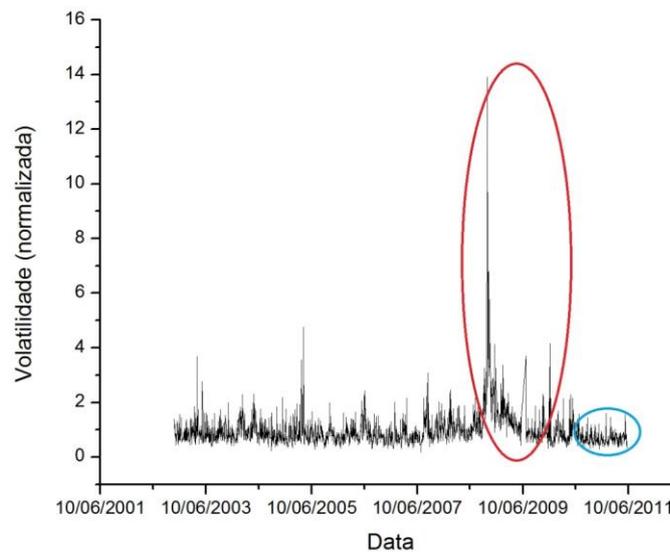


Figura 2.4.1: Série da volatilidade diária estimada pela eq. 2.3.7 para o índice BOVESPA. Os dados estão normalizados para melhor visualização. A média da volatilidade diária nesse período foi 0.0014143. A normalização foi feita dividindo-se cada termo da série por essa média.

Alguns estudos apontam que a FAC da volatilidade diária de índices de mercado mundiais tem decaimento lento, em formato de lei de potência assintótica  $\Delta t^{-\lambda}$ , no qual  $\lambda$  é um expoente com valor entre 0.1 e 0.3 [11]. Todavia, outros estudos indicam que a autocorrelação é caracterizada por uma exponencial com múltiplas escalas temporais [12].

Para calcular a autocorrelação da série do IBOVESPA, consideramos  $\rho_{xy}(\Delta t)$  dada pela eq. 2.3.7 para  $\{X(t)\}=\{Y(t)\}=\{v(t)\}$ . Realizamos testes para avaliar qual o decaimento mais adequado para a série empírica do índice BOVESPA e os resultados estão mostrados na figura abaixo:

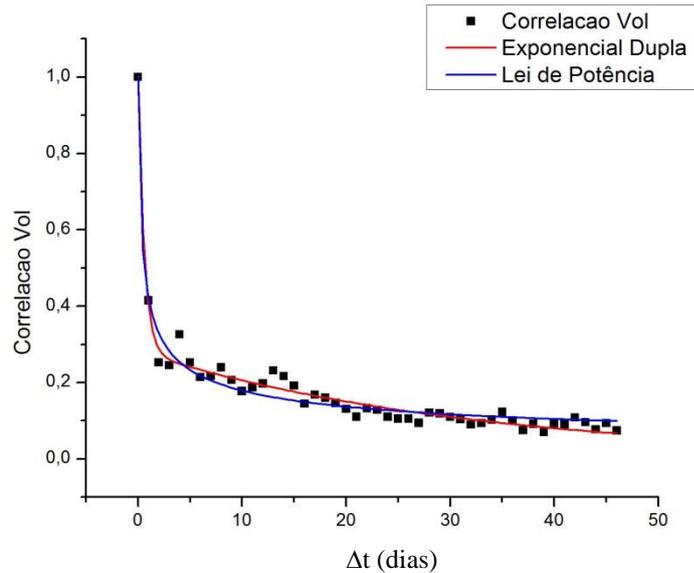


Figura 2.4.2: Função de autocorrelação da volatilidade diária do IBOVESPA e ajustes com lei de potência e com exponencial dupla (ver Tabela 2.4.1).

Pelos dados obtidos conseguimos comprovar que a volatilidade do mercado brasileiro possui memória que se estende a prazos longos. Consideramos duas funções de teste para descrever a autocorrelação (Realizamos testes com uma exponencial simples mas os resultados não foram satisfatórios). Os ajustes foram feitos com o software Origin 8.

O **Modelo 1** foi a exponencial dupla, representada por:

$$y = Ae^{-\frac{\Delta t}{\tau_1}} + (1 - A)e^{-\frac{\Delta t}{\tau_2}} \quad (\text{eq. 2.4.3})$$

Nesse caso,  $\tau_1$  e  $\tau_2$  definem duas escalas temporais características do decaimento da função. O **Modelo 2** considerado foi em forma de lei de potência, dada por:

$$y = \frac{A}{\left(1 + \frac{\Delta t}{\tau_1}\right)^\lambda} \quad (\text{eq. 2.4.4})$$

Os resultados dos ajustes dos modelos 1 e 2 são exibidos na figura. A tabela 2.4.1 apresenta os parâmetros encontrados nesses ajustes.

Parâmetros	Modelo 1	Erro	Modelo 2	Erro
A	0,7195	0,0110	0,9980	0,0283
$\tau_1$	0,5846	0,0635	8,0570	2,3228
$\tau_2$	31,9852	2,1292		
$\lambda$			0,3900	0,0240
<b>R<sup>2</sup> Ajustado</b>	0,9750		0,9609	

Tabela 2.4.1: Os parâmetros obtidos a partir dos ajustes da fig. 2.4.2.

Analisando os resultados da tabela 2.4.1, os dados dos coeficientes de determinação ajustado<sup>8</sup> mostram que o modelo dupla-exponencial apresentou melhor ajuste. Vemos também que o erro relativo nos parâmetros do Modelo 1 é bem menor que no Modelo 2, o que nos leva a concluir que o Modelo 1 é o mais adequado para o mercado brasileiro. Note que os dois modelos tem o mesmo número de parâmetros livres.

A partir do ajuste do Modelo 1 chegamos a uma conclusão importante: são necessárias duas escalas temporais de magnitudes muito diferentes para descrever a autocorrelação do mercado brasileiro, uma escala curta intradiária (cerca de ½ dia) e outra longa, da ordem de um mês (na base de dias úteis).

Uma observação importante diz respeito à ordem de grandeza dos tempos característicos obtidos. Em particular, foi possível detectar uma escala característica intradiária devido ao estimador considerado, que contém informação do movimento dos preços em resoluções temporais menores que 1 dia. Por outro lado, resultados da literatura utilizando o estimador de volatilidade dado pela eq. 2.3.1A, também encontram o modelo 1, porém com um dos tempos característicos bem maior [13]. Mas note que este estimador não é o mais adequado para representar o grau de volatilidade dos preços, conforme explicado na seção 2.3.1.

Para o ajuste dos dados empíricos pelo Modelo 1, a seguir rerepresentamos o ajuste da autocorrelação da volatilidade para escala semi-logarítmica, para intervalos intermediários:

---

<sup>8</sup> Em estatística, o coeficiente  $R^2$  ajustado é o chamado coeficiente de determinação, cujo valor está entre 0 e 1. Quanto mais próximo de 1, mais adequado será o modelo. O  $R^2$  ajustado, usado pelo Origin é um tipo de coeficiente de determinação, mas que também considera o número de parâmetros presentes no modelo. Isso é particularmente interessante em nosso caso, já que nossos modelos podem possuir um número diferente de parâmetros entre si.

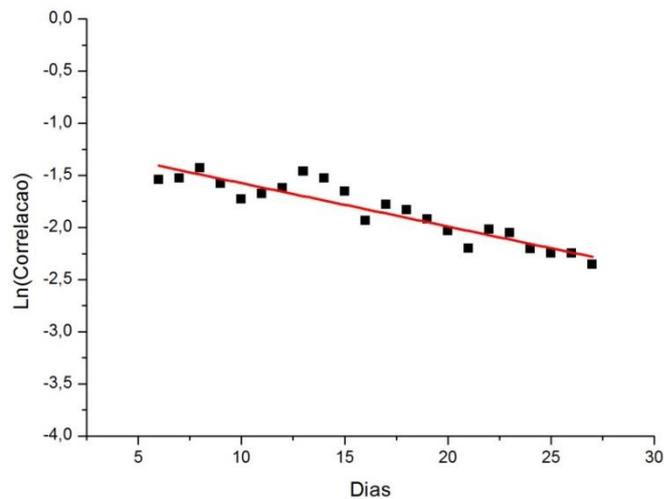


Figura 2.4.3: Ajuste da função de autocorrelação da volatilidade diária do IBOVESPA em escala logarítmica para intervalos  $\Delta t$  intermediários.

A regressão linear para escalas intermediárias fornece constante característica  $\tau \approx 23$  dias, consistente com a escala  $\tau_2$  (da tabela 2.4.1). Analisamos também os intervalos mais longos, mostrado no gráfico abaixo. Obtém-se um regime de decaimento bem lento, com constante característica  $\tau \approx 230$  dias. Porém, o erro associado a este parâmetro é de 38%, o que o torna estatisticamente não confiável. Este resultado foi confirmado pelo ajuste da FAC com modelo de exponencial tripla, que detectou uma terceira constante característica longa e com grande barra de erro percentual.

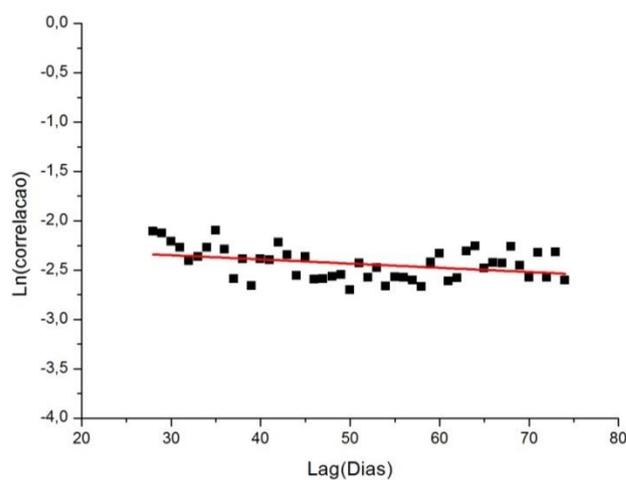


Figura 2.4.4: Ajuste da função de autocorrelação da volatilidade diária do IBOVESPA em escala logarítmica para intervalos  $\Delta t$  longos.

A existência de dois tempos característicos, um que descreve o comportamento da correlação no curto prazo e outro no médio-longo prazo nos leva à conclusão de que existem dois mecanismos de relaxação da volatilidade. Um deles é o mecanismo de resposta rápida, decorrente das informações que entram no mercado e geram reações imediatas dos agentes. O outro mecanismo seria a resposta correspondente às expectativas de consenso do mercado, ou às informações que terão impacto no futuro (um exemplo seriam as expectativas sobre política de juros ou sobre os resultados de empresas privadas). Esse resultado sugere então que os modelos de volatilidade precisam considerar a escala temporal de observação.

Comparando-se o comportamento da FAC de volatilidade (representada na fig. 2.4.2), com a FAC dos retornos (representada na fig. 2.3.2), surge o seguinte questionamento: que mecanismo levaria, concomitantemente, a uma volatilidade com dependência forte e a um retorno com dependência fraca? Isto pode ser explicado de forma simples considerando-se os estimadores das equações 2.3.1 e 2.3.2, que descrevem o comportamento do retorno sem tendência –  $dx'(t)$ . Vê-se que, se a variável  $dW(t)$  for um ruído branco, por exemplo, não haverá correlações lineares significativas para os retornos, mesmo que a volatilidade  $\sigma(t)$  seja altamente correlacionada. De fato, é um fato estilizado que o módulo do retorno, assim como o retorno quadrático possuem memória de longo alcance.

A função de autocorrelação (normalizada) dada pela eq. 2.3.6 avalia o grau de dependência linear entre duas séries, porém não dá informação sobre o papel da magnitude das grandezas consideradas. Com este objetivo, vamos analisar correlações não-lineares, utilizando na eq. 2.3.6  $X(t)=\{v(t)^\alpha\}$  e  $Y(t)=\{v(t)^\beta\}$ . Isso nos permite verificar o grau de dependência ao privilegiarmos diferentes magnitudes típicas de volatilidade em relação ao valor médio do período analisado. Note que estamos tratando dados normalizados, assim,  $v(t) >1$  ( $<1$ ) representam, respectivamente, volatilidade maior (menor) do que a média. Note ainda que, no caso de  $\alpha,\beta>0$ , estamos privilegiando as volatilidades altas em relação às baixas, enquanto que para  $\alpha,\beta<0$ , os pares de valores pequenos de volatilidade se tornam mais relevantes, com os pares de valores altos dando contribuição reduzida para  $\rho_{xy}(\Delta t)$ .

Primeiramente faremos  $\alpha = \beta = +2$  e  $\alpha = \beta = -2$ , para verificar o comportamento da FAC entre valores da mesma ordem de magnitude, sejam elas

altas ou baixas. É possível ver a comparação dessas FACs na fig. 2.4.5. Observa-se que as volatilidades de baixa magnitude são as maiores responsáveis pela memória de longo prazo (caso  $\alpha = \beta = -2$ ). Por outro lado, a correlação cai muito rapidamente para as volatilidades altas (caso  $\alpha = \beta = +2$ ). Isto pode ser explicado pela baixa frequência de ocorrência de valores altos de volatilidade.

Concluimos que as volatilidades baixas governam o comportamento de memória dessa grandeza, por sua maior significância estatística.

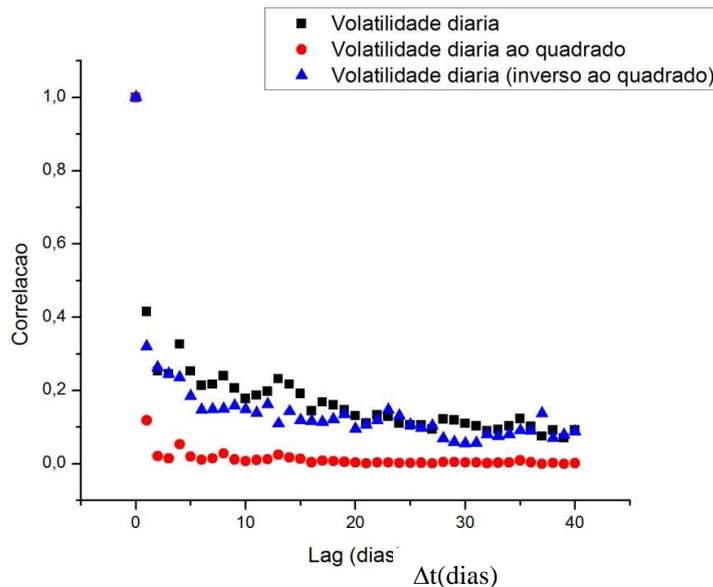


Figura 2.4.5: Função de autocorrelação de  $v(t)$ ,  $v(t)^2$  e  $v(t)^{-2}$ .

É possível inferir que isso ocorre por ser o regime de volatilidade baixa mais estável que o de volatilidade alta para regimes normais de mercado. Comprovamos essa hipótese analisando a FAC de altas volatilidades em períodos de regime extremo do mercado. O gráfico da FAC de altas volatilidades com os dados de 2007-2009 (anos que envolveram os sintomas e conseqüências da crise de 2008) mostram que a correlação de  $v(t)^2$  tem decaimento ainda mais lento que a FAC de  $v(t)^{-2}$  em regime normal.

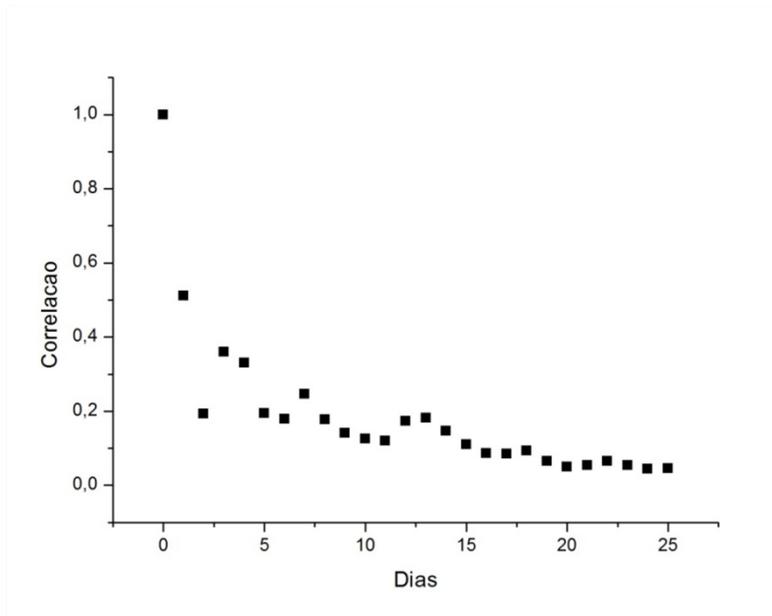


Figura 2.4.6: FAC de  $v(t)^2$  entre os anos de 2007-2009.

Realizamos também testes para verificar a função que melhor descreve a FAC de  $v(t)^2$  e de  $v(t)^{-2}$ . No primeiro caso não encontramos nenhuma função em lei de potência ou exponencial que pudesse ser utilizada, conforme esperado, devido ao seu decaimento rápido. O ajuste dos modelos 1 e 2 para a FAC de  $v(t)^{-2}$  podem ser observados na fig. 2.4.7.

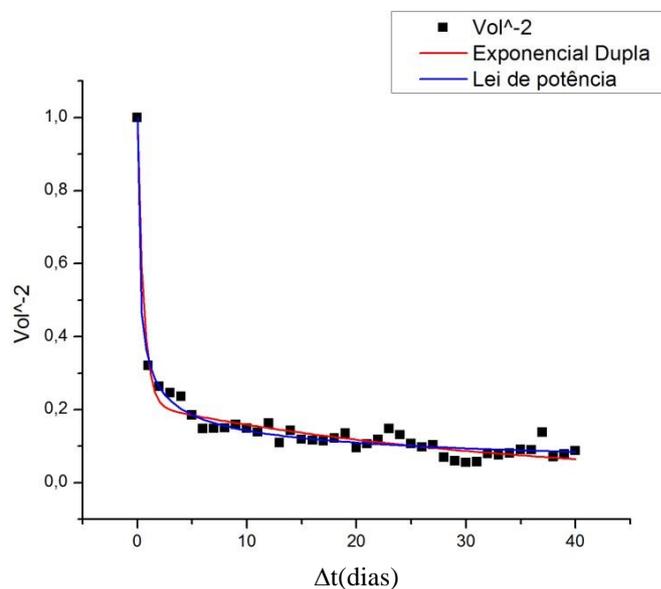


Figura 2.4.7: Função de autocorrelação de  $v(t)^{-2}$  e ajuste de uma lei de potência e de uma exponencial dupla (ver Tabela 2.4.2).

A análise estatística dos ajustes está mostrada na tabela 2.4.2. Observamos que o Modelo 1 continua sendo o que melhor descreve essa função de

autocorrelação<sup>9</sup>. As escalas temporais características da exponencial dupla para a FAC de  $v(t)^{-2}$  são semelhantes às da FAC de  $v(t)$ , corroborando a existência de escalas relevantes intradiária e mensal na série de volatilidade diária do IBOVESPA, com maior contribuição da dinâmica rápida.

Parâmetros	Modelo 1	Erro	Modelo 2	Erro
A	0,7834	0,0249	0,9990	0,0208
$\tau_1$	0,5547	0,0635	15,814	4,599
$\tau_2$	33,2453	2,1292		
$\Lambda$			0,3855	0,0219
<b>R<sup>2</sup> Ajustado</b>	0,9714		0,9800	

Tabela 2.4.2: Parâmetros obtidos para os ajustes mostrados na fig. 2.4.4, para FAC de  $v(t)^{-2}$ .

Analisamos também a FAC cruzada, ou seja, para  $\alpha = 1$  e  $\beta = -1$  e  $\alpha = 2$  e  $\beta = -2$ . Essa grandeza indica como é a relação de interdependência dos valores de diferentes magnitudes. Observamos uma correlação negativa, que pode ser vista na fig. 2.4.7.

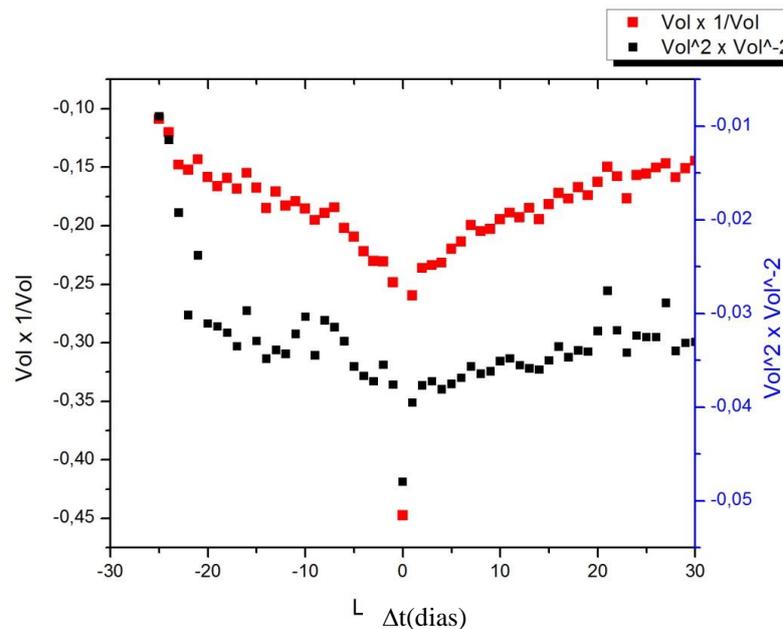


Figura 2.4.8: Correlações entre  $\{X(t)\}=\{v(t)^\alpha\}$  e  $\{Y(t)\}=\{v(t)^\beta\}$  onde os quadrados vermelhos representam a FAC para  $\alpha=1$  e  $\beta=-1$  e os quadrados pretos para  $\alpha=2$  e  $\beta=-2$ .

Vemos que os dados apresentam anticorrelação para os dois casos. Isto significa que a maioria das contribuições dos pares  $\langle X(t), Y(t) \rangle$  é menor do que o produto  $\langle X(t) \rangle \langle Y(t) \rangle$ , ou seja, a maioria dos pares é formado por dados com magnitudes inversas. Como  $\alpha$  e  $\beta$  tem sinais contrários, este resultado é

<sup>9</sup> Apesar do  $R^2$  ajustado estar maior no caso do Modelo 2, o erro relativo do parâmetro  $\tau_1$  chega a 30%, muito acima do limite de 5%, o que nos impede de considerá-lo um modelo válido.

consistente com a observação de correlação positiva para  $\alpha$  e  $\beta$  de mesmo sinal, mostrado nas figuras anteriores.

Verificamos também uma assimetria temporal a partir de intervalos longos (maiores que 20 dias), com a anti-correlação mais fraca quando privilegiamos as menores magnitudes no passado ( $\Delta t < 0$ ).

## 2.5 Leis de escala

A análise de escala revela propriedades estatísticas da série temporal de acordo com o tempo de observação  $T$  e da resolução temporal  $\tau$ . Tal propriedade é caracterizada por um expoente de escala  $H$ .

A princípio, devemos considerar propriedades estatisticamente significantes do sinal financeiro, como por exemplo, os momentos de ordem  $p$  da magnitude dos retornos. Podemos assumir a seguinte relação de escala:

$$\{E[|r_\tau|^p]\}^{1/p} = c(p)\tau^{H(p)} \quad (\text{eq. 2.5.1})$$

onde  $c(p)$  é um coeficiente e  $H(p)$  é o expoente de escala de ordem  $p$ , também são denominados expoentes de Hurst generalizados.

A métrica dada pela eq. 2.5.1 fornece uma estimativa robusta das propriedades de escala das flutuações e corresponde à análise de volatilidades “generalizadas” na escala  $\tau$ .

Podemos distinguir dois tipos de processos: (i) processos onde  $H(p)=H$ , independente de  $p$ ; (ii) processos onde  $H(p)$  não é constante. O primeiro caso caracteriza um processo uni-fractal ou auto-afim, nos quais as flutuações de diferentes frequências do sinal  $\{X(t)\}$  podem ser reescaladas de tal forma que a versão reescalada seja estatisticamente equivalente ao sinal original, ou seja,  $X(t) \sim \lambda^{-H}X(\lambda, t)$ . Este é o caso do movimento Browniano, onde  $H=1/2$  e do movimento Browniano fracionário, onde  $H \neq 1/2$ . No segundo caso, onde  $H(p)$  depende de  $p$ , o processo é conhecido como multi-fractal e representa sinais mais complexos.

Alguns valores de  $q$  estão associados a características especiais. O expoente  $H(1)$  está relacionado ao expoente de Hurst original, que fornece o comportamento de escala do alcance (média dos desvios absolutos) dos retornos. Já o expoente  $H(2)$  está associado ao comportamento da função de autocorrelação dos retornos e em particular,  $H(2) = 1/2$  caracteriza processo sem memória.

Estudos de mercado de câmbio e de mercado de ações mostraram que leis de escala empíricas são válidas para uma grande gama de escalas temporais, de minutos até alguns meses, caracterizando um comportamento de multi-escala do mercado financeiro [14].

Para realizar esse estudo utilizamos a série do IBOVESPA de 30s compreendendo o intervalo entre 01/11/2002 até 29/05/2009, totalizando aproximadamente  $1.1 \times 10^6$  dados. A partir dessa série construímos a série de preços de 5 minutos e, com base nela e na propriedade dada pela eq. 2.2.3(B), construímos séries de retornos logarítmicos com diferentes escalas temporais intradiárias ( $\tau = 5, 10, 15, 20, 30, 60, 360$  minutos). Calculamos os momentos da eq. 2.5.1 para  $p=1$  e  $p=2$  de cada série, obtendo-se os valores globais ou históricos. Aplicando-se o logaritmo em ambos os lados da Eq. 2.5.1, é possível estimar  $c$  e  $D$  a partir de uma regressão linear dos dados empíricos<sup>10</sup>.

Os resultados estão apresentados nas figuras 2.5.1 e 2.5.2 respectivamente e podem ser interpretados como descrevendo as propriedades de escala da volatilidade segundo o estimador da eq. 2.3.1.

---

<sup>10</sup> O resultado é tido como uma aproximação, pois há dependência entre  $E[|r_{\tau}|]$  para diferentes intervalos  $\tau$ . Os intervalos mais longos são agregados dos intervalos menores, então estamos tratando de observações fracamente dependentes. A análise é aceitável desde que os  $\tau$  sucessivos sejam suficientemente distantes um do outro.

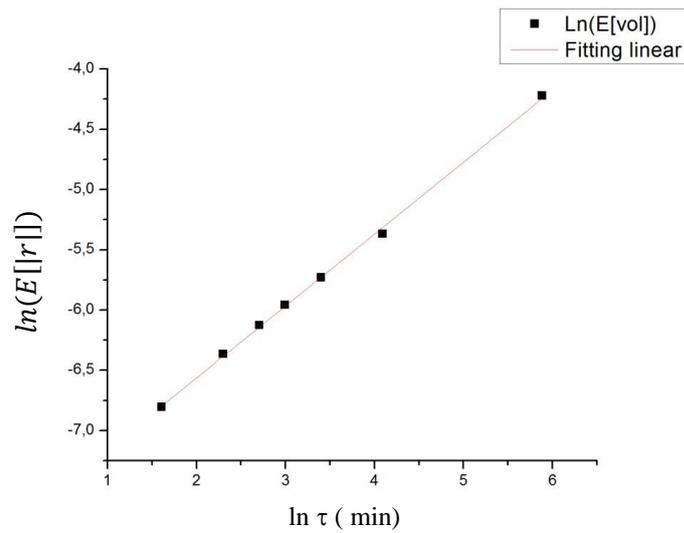


Figura 2.5.1: Valor esperado do módulo do retorno  $E[|r_\tau|]$  calculado para as escalas intradiárias  $\tau=5, 10, 15, 20, 30, 60$  e  $360$  minutos.

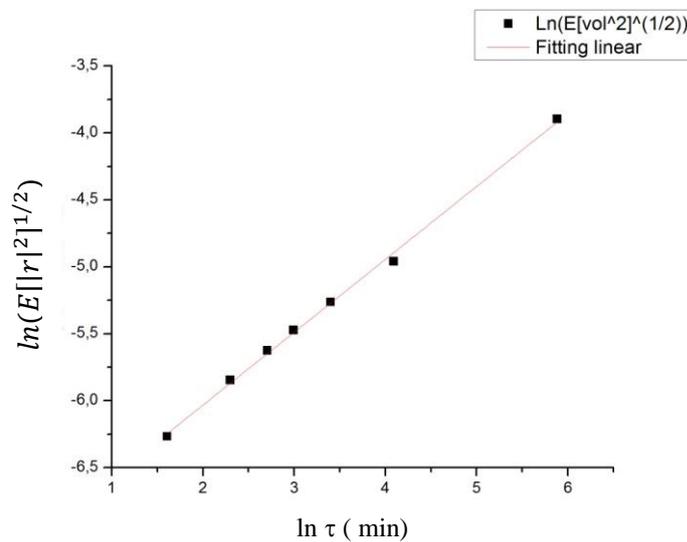


Figura 2.5.2: Valor esperado  $(E[r_\tau^2])^{1/2}$  para as escalas intradiárias  $\tau=5, 10, 15, 20, 30, 60$  e  $360$  minutos.

Resumimos os valores do expoente de escala  $H(p)$  e o coeficiente  $c(p)$  encontrados na tabela 2.5.1.

	$E[ r ]$ ( $p=1$ )		$(E[r_\tau^2])^{1/2}$ ( $p=2$ )	
	Valor	Erro	Valor	Erro
$H(p)$	0,596	0,01	0,544	0,01
$\text{Log}(c(p))$	-7,7	0,03	-7,1	0,04
$R^2$ Ajustado	0,998		0,997	

Tabela 2.5.1: Valores de parâmetros dos ajustes apresentados nas figuras 2.5.1 e 2.5.2.

Observa-se que há diferentes expoentes de escala, ou seja, o processo estocástico dos preços é regido, a princípio, por vários expoentes de escala, caracterizando um comportamento multifractal. Este resultado está em acordo com resultados da literatura para o mercado brasileiro obtidos com diversos métodos [15] e em particular, o valor de  $H(1)$  com o expoente de Hurst para retornos diários [16].

Considerando-se o erro associado aos valores de  $H(1)$  e  $H(2)$  mostrados na Tabela 2.5.1, os expoentes de escala não possuem valores  $1/2$ , dentro da respectiva barra de erro. Por outro lado, o expoente de escala do momento de segunda ordem  $E[r_t^2]$ , que está associado ao comportamento da função de auto-correlação dos retornos, gera expoente  $H$  de escala bem mais próximo de  $1/2$ .

Podemos analisar este resultado da seguinte forma: de acordo com o demonstrado no apêndice 1 (eq. A.1.6B), processos de retornos  $r_k(t)$  nos quais as correlações são de curto alcance com valores significantes até “lag”  $n$  também exibem comportamento superdifusivo, isto é, expoente de escala  $H(2) > 1/2$ , para escalas  $k \leq n$ . Assim, dado que analisamos apenas escalas menores que um dia, estamos detectando o efeito da correlação de curto alcance intradiária consistente com a escala temporal característica  $\tau_1$  da tabela 2.4.2.

Por outro lado, considerando que o valor de  $H(2)$  encontrado está bem próximo de  $1/2$ , podemos expandir:

$$\tau^{H(p)} = \tau^{1/2 + \delta H} \cong \tau^{1/2} [1 + \delta H \ln \tau + \dots] \quad (\text{eq 2.5.2})$$

Logo, na aproximação de primeira ordem em  $\delta H$ , podemos tratar o processo como aproximadamente difusivo, validando os resultados da Fig. 2.3.2.

Finalmente, uma vez que diferentes graus  $p$  privilegiam diferentes magnitudes no cálculo da média na Eq. 2.5.1, a obtenção de diferentes expoentes de escala  $H(p)$  significa que o processo reescalado não possui as mesmas propriedades estatísticas, evidenciando a presença de distribuições instáveis. Assim, nossos resultados da tabela 2.5.1 indicam a importância de analisarmos a volatilidade em diferentes resoluções temporais e sua interdependência, tema do próximo capítulo.