

3 Assimetria da volatilidade no domínio do tempo e da frequência

3.1 Hipótese do mercado heterogêneo

Os agentes do mercado, em geral, usam todas as informações disponíveis, mas não podem ser considerados homogêneos. A distribuição e a capacidade de processamento de informação não são igualitárias. Além disso, a liberdade de ação dos diferentes agentes, a capacidade de investimento, os custos de transação aos quais estão submetidos, entre outros aspectos, são distintos. Essa hipótese, porém, vai diretamente de encontro à hipótese do mercado eficiente e às teorias neoclássicas, que estabelece justamente a homogeneidade dos agentes do mercado, através de um agente-representativo.

A forma mais direta de verificar a heterogeneidade do mercado é diferenciar os agentes por escala temporal de atuação.

“The long and the short-term traders thus have different trading opportunities: the shorter the trading horizon, the greater the opportunity set. A market participant’s response to outside events should always be viewed as relative to their intrinsic opportunity.”¹

Podemos definir cinco categorias de investidores [01]: *market makers*, especuladores intradiários, *hedge funds*², gestores de carteiras, bancos centrais e fundos de pensão. Os *market-makers* são importantes agentes do mercado, operando as ordens de compra e venda no horizonte temporal mais curto possível. O especulador intradiário está constantemente observando as pequenas flutuações de preço e executa transações em alta frequência, com o objetivo de realizar ganhos. Em grande parte dos casos esses agentes precisam desfazer suas posições antes do final do pregão. Já os agentes de médio e longo prazo não precisam

¹ *An Introduction to High Frequency Finance*. Cap 12 Pag 359. Dacorogna M. et al

² *Hedge Funds* são fundos de investimentos fechados para investidores qualificados e institucionais. Até a crise de crédito em 2008, a regulamentação sobre as operações desses fundos era praticamente inexistente. Dessa forma, eram permitidas diversas técnicas agressivas de investimento, tais como alavancagem, venda a descoberto e negociação de diversos tipos exóticos de derivativos.

observar o mercado a cada minuto, fazendo análise dos preços e da volatilidade no intervalo de dias, semanas ou mesmo meses. Bancos centrais e fundos de pensão podem trabalhar com prazos até da ordem de anos. É da atuação dos investidores em diferentes horizontes temporais que resulta o valor do preço do mercado de um ativo. Além disso, a chegada de informações associadas aos diversos ciclos do ambiente econômico, sejam elas de interesse dos investidores de longo ou curto prazo, também contribui para a heterogeneidade temporal da atuação dos agentes.

É claro que a resolução temporal na qual cada agente atua não é definida de forma estrita. Por exemplo, o agente intradiário também será influenciado pela tendência local dos preços de mercado em maior horizonte temporal, pois isso pode indicar oportunidades. Apesar de não ser trivial relacionar cada agente a uma resolução temporal específica, é possível relacionar a volatilidade dos preços em distintas escalas temporais com o comportamento dos agentes do mercado.

Muller e Dacorogna associam o comportamento da volatilidade à hipótese de mercado heterogêneo [17]:

- A volatilidade de determinada escala temporal reflete as ações e percepções dos agentes de mercado que atuam naquela escala.
- A resolução na qual a volatilidade é medida é portanto um parâmetro muito importante. A volatilidade de alta resolução temporal contém informações diferentes da volatilidade de baixa resolução.
- A correlação entre volatilidades de diferentes resoluções pode revelar a interdependência da atuação de curto e de longo prazo dos participantes do mercado.

Há outras evidências que confirmam a heterogeneidade do mercado. Uma delas é que, se ele fosse homogêneo, maiores volumes a atividade de negociação fariam o preço convergir mais rapidamente para o preço justo. Dessa forma, a volatilidade deveria ser negativamente correlacionada com essas duas grandezas. Empiricamente, porém, isso não acontece. Um dos motivos possíveis é que os diversos agentes do mercado podem optar por definir diferentes preços de compra/venda para os mesmos ativos e executar suas transações em diferentes situações, ou seja, eles agem de forma heterogênea. Dessa forma, ao invés de levar o preço mais rapidamente para o de equilíbrio e diminuir a magnitude de

flutuação, atividade dos agentes causa o contrário, a grosso modo, ela *cria* a volatilidade [10].³

Há três fatos estilizados da volatilidade que possuem características ligadas à conexão entre os agentes nas diversas resoluções temporais: memória persistente; dependência assimétrica entre volatilidades locais de diferentes resoluções temporais; assimetria no fluxo de informação ao longo do tempo. As propriedades de *clustering* e de memória já foram explicadas em detalhe no capítulo dois, mas lá não mencionamos a relação dessas propriedades com a heterogeneidade do mercado. Por isso, na próxima seção deste capítulo voltaremos a esse assunto sob a luz dessa nova característica.

Já as duas últimas características são pouco documentadas, principalmente se tratando de mercados emergentes. Por isso entraremos em maiores detalhes sobre elas nas próximas seções deste capítulo, comprovando que elas também são válidas no mercado brasileiro.

3.2 Clustering e Memória Persistente

Como já mencionamos, a volatilidade é um processo que apresenta memória persistente e *clustering*. Essa propriedade já é bastante investigada na literatura, mas a novidade aqui apresentada é a idéia de que a interconexão entre as volatilidades de diferentes resoluções temporais possa justificar o formato do decaimento da autocorrelação dessa grandeza para uma dada resolução fixa.

Estudos para mercados desenvolvidos indicam que a função de autocorrelação da volatilidade pode ser bem representada por uma equação hiperbólica [10]. Podemos citar o estudo de Dacorogna *et al* [17] que analisa dados de preços da cotação USD-DEM com espaçamento de 20 minutos durante quatro anos (entre 1986 e 1990). A figura a seguir reproduz esse resultado, onde a volatilidade é estimada através do módulo do retorno.

³ Dacorogna *et al*, An Introduction to High Frequency Finance, pág. 210

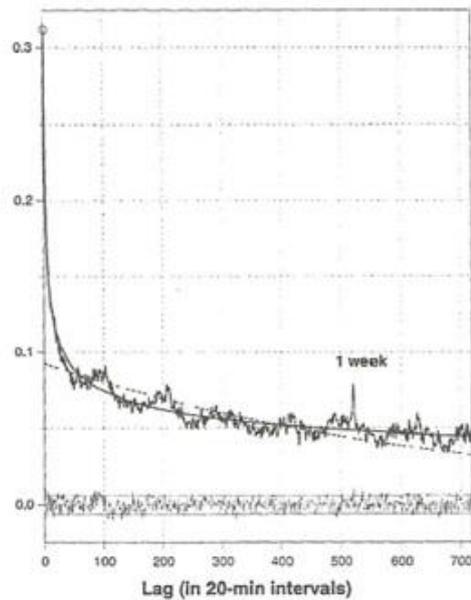


Figura 3.2.1: Função de autocorrelação da volatilidade (estimada de acordo com a eq. 2.3.1A) de USD-DEM. A linha sólida é o ajuste hiperbólico e a linha tracejada é o ajuste exponencial.

Como mostra a figura 3.2.1, a função hiperbólica pode ser um bom modelo para descrever o comportamento da autocorrelação desses dados. A heterogeneidade do mercado seria uma das justificativas para o decaimento função de autocorrelação em forma de lei de potência. Considere que cada tipo de agente tenha um tempo característico de reação às informações equivalente ao horizonte temporal de influência dos preços passados assim como à própria frequência de negociação de cada grupo. Por exemplo, para um *trader* intradiário, é possível identificar a influência do comportamento passado dos preços no intervalo de até 1h atrás. No caso dos bancos centrais ou fundos de pensão, a memória utilizada para tomada de decisão pode envolver semanas ou meses. Assim, a autocorrelação observada para a volatilidade dos preços é gerada pela agregação das múltiplas memórias do mercado.

Considerando um *kernel* de memória exponencial para cada grupo, a superposição dos efeitos de memória, com constantes temporais características cobrindo escalas arbitrariamente diferentes, levaria ao decaimento invariante por transformação de escala da autocorrelação da volatilidade.

No entanto, no caso do IBOVESPA, verificou-se que a autocorrelação é melhor descrita por uma função exponencial dupla, como mostrado na seção 2.4.1. Nosso resultado vai de encontro ao estudo mencionado anteriormente, mas isso é compreensível, já que há várias diferenças entre os dois tipos de dados

financeiros. Os mercados de FX são muito particulares, pois estão relacionados diretamente à situação político-econômica de dois países e podem ficar abertos 24h por dia. Isto contribui para ausência de escala temporal característica nos efeitos de memória decorrentes da atuação agregada dos agentes dos dois países. Além disso, o fato de o Brasil ser um mercado emergente e menos eficiente que o mercado de moedas entre Estados Unidos e Europa também contribui para que haja diferença no comportamento da autocorrelação da volatilidade. O mercado brasileiro não tem a diversidade de agentes com a capacidade de enfrentar riscos de magnitude e de duração arbitrárias como a que existe no mercado americano e europeu, o que implica em não possuir investidores com uma gama tão ampla de escalas temporais de memória de atuação.

De fato, os resultados mostrados na tabela 2.4.1 indicam que as escalas temporais de memória do mercado nacional são mais restritas, concentradas em uma escala intradiária (cerca de 3h30) e em outra de um mês aproximadamente. Pela constante A dessa tabela, podemos ver que o maior peso está na constante intradiária. Naturalmente esses números oferecem uma idéia aproximada da composição dos agentes presentes no mercado brasileiro.

3.3

Dependência vertical assimétrica da volatilidade

As propriedades de memória e de *clustering* provenientes da auto-correlação da volatilidade, podem ser chamadas de dependências *horizontais*, pois descrevem o comportamento da volatilidade de uma dada resolução temporal no domínio do tempo.

O fato estilizado analisado aqui é chamado de *vertical*, no sentido de que trata da relação entre estimadores simultâneos de volatilidade no domínio da frequência, isto é, em diferentes resoluções temporais.

Inicialmente, para compararmos volatilidades em diferentes resoluções temporais, é necessário definir a volatilidade na resolução mais longa (*coarse*), denominada daqui por diante por v_c e na resolução mais fina, denominada daqui por diante por v_f .

Considere a volatilidade v_c definida pelo estimador dado pela eq. 2.3.7, onde $T=\tau_c$ é uma resolução longa de variação de preço utilizada para avaliar a volatilidade:

$$v_c(t) \equiv v_{\tau_c}(t) \quad (\text{eq. 3.3.1})$$

Já a volatilidade v_f é definida pela média do estimador dado pela eq. 2.3.7 para uma escala mais fina $T=\tau_f$, calculada ao longo do intervalo de resolução da escala mais longa:

$$v_f(t) \equiv \frac{1}{n_\tau} \sum_{t'=1}^{n_\tau} v_{\tau_f}(t') \quad (\text{eq. 3.3.2})$$

Na equação acima, $n_\tau=\tau_c/\tau_f$ é o número de intervalos da escala mais fina que existem dentro da escala mais longa. A transformação extra dada pela eq 3.3.2 para o cálculo de $v_f(t)$ é necessária para garantir que ela fique definida para a mesma grade no tempo que $v_c(t)$.

Espera-se que exista uma interdependência entre os estimadores simultâneos de volatilidade de diferentes resoluções temporais. Nosso estudo focaliza o fluxo de informação da volatilidade com resolução de baixa frequência para a de alta-frequência, que revela o impacto das ações dos agentes de longo prazo sobre os de curto prazo. Observa-se para os mercados desenvolvidos que esta dependência é assimétrica com respeito à magnitude [18], no sentido de que são muito diferentes quando se considera os regimes de baixa ou de alta volatilidade para a escala *coarse*.

O objetivo dessa seção é investigar a assimetria na dependência vertical da volatilidade para o mercado brasileiro. Para tanto, analisamos as séries temporais de volatilidade do índice BOVESPA para seis escalas temporais, ordenadas da mais curta para a mais longa, mostradas na tabela a seguir:

Escalas	Resolução temporal
1	30 minutos
2	60 minutos
3	120 minutos
4	1 dia
5	1 semana

Tabela 3.3.1: Descrição das escalas temporais utilizadas no estudo.

A série temporal da volatilidade, obtida para cada resolução temporal, foi mapeada em uma série de 2 estados, de alta ou baixa magnitude, de acordo com o valor da volatilidade local relativo ao valor médio nesta resolução.

Calculamos a probabilidade condicional de que, dado que a volatilidade em uma dada escala *coarse* (k) esteja no regime de alta ou baixa magnitude, a volatilidade na escala fina de resolução temporal imediatamente mais curta ($k-1$) esteja no regime de alta ou baixa magnitude. O quadro a seguir resume os dados obtidos com essa análise:

Escala	Alta / Alta	Alta / Baixa	Baixa / Alta	Baixa / Baixa
$k = 5$	65.96%	34.04%	20.90%	79.10%
$k = 4$	52.08%	47.92%	27.71%	72.29%
$k = 3$	51.32%	48.68%	28.64%	71.36%
$k = 2$	52.35%	47.65%	28.60%	71.40%

Tabela 3.3.2: Probabilidade condicional para a transição entre as escalas temporais $k \rightarrow k-1$. Os valores sob o título **Alta / Baixa** por exemplo, indicam a probabilidade da escala menor apresentar baixa volatilidade, dado um regime de volatilidade alta na escala maior.

A tabela mostra que a dependência vertical entre os regimes de baixa volatilidade (coluna **Baixa / Baixa** da tabela) é significativamente mais forte do que a dependência entre os regimes de alta volatilidade (coluna **Alta / Alta**) para todas as escalas temporais analisadas. Isso significa que um regime de alta volatilidade em dada resolução não garante que a volatilidade em resolução menor também esteja neste regime. Isto pode ser explicado pelo fato de que o mercado de alta frequência se acalma mais rapidamente do que o mercado de baixa frequência. Assim, a probabilidade de haver simultaneidade de estado do regime de alta volatilidade na escala *coarse* k com o regime da baixa volatilidade na escala fina $k-1$ (coluna **Alta / Baixa**) é relativamente grande (cerca de 50% para escalas *coarse* menores que um dia - $k \leq 4$).

Estes resultados estabelecem um importante fato estilizado para o mercado brasileiro: a volatilidade exibe uma forte assimetria em sua dependência vertical com respeito à magnitude, no sentido de que regimes de baixa volatilidade entre

diferentes escalas possuem dependência forte, enquanto os regimes de alta volatilidade possuem dependência mais fraca.

A dependência forte observada no regime de volatilidade baixa pode ser identificada com o predomínio de flutuações finas incoerentes (probabilidade **Baixa / Baixa**), devido à atuação espontânea dos agentes no regime normal de mercado. Por outro lado, a dependência fraca observada no regime de volatilidade alta pode ser identificada com a existência de 2 processos distintos, que contribuem de forma equivalente para a formação da turbulência de preços no prazo mais longo: por um lado, o efeito da agregação das fortes incertezas dos agentes de curto prazo, (probabilidade **Alta / Alta**), e por outro, o surgimento de persistência nas flutuações mais finas (dada pela probabilidade **Alta / Baixa**), devido ao *efeito manada* da atuação dos agentes de curto prazo.

Podemos estabelecer um paralelo com a literatura existente sobre o assunto. *Gençay et al* (2003) [18] faz uma análise semelhante do índice Dow Jones Industrial Average (DJIA) abrangendo as escalas de 2 horas até um mês. A tabela abaixo compara a transição entre os regimes de volatilidade entre as escalas de um dia e duas horas do IBOVESPA e DJIA⁴.

	Alta/Alta	Alta/Baixa	Baixa/Alta	Baixa/Baixa
IBOVESPA	52.08%	47.92%	27.71%	72.29%
DJIA	45.71%	54.29%	5.13%	94.87%

Tabela 3.3.3: Comparação entre as probabilidades condicionais da transição entre os regimes de volatilidade entre as escalas de 1 dia e 2 horas dos índices IBOVESPA e DJIA [18].

A tabela 3.3.3 mostra que, enquanto a transição **Alta / Alta** do DJIA está no mesmo patamar que o IBOVESPA, a probabilidade de transição **Baixa / Baixa** encontrada foi mais de 90%. Isso ocorre em todas as resoluções temporais analisadas em [18]. Logo, a assimetria da dependência vertical no caso do DJIA é mais forte do que no IBOVESPA, indicando que no regime normal, o mercado americano é mais eficiente na transmissão de informação entre os diferentes tipos de *players*. Novamente, esse resultado é justificável pela diferença entre os dois mercados. Um mercado menor e menos desenvolvido, está mais sujeito a mudanças repentinas de regime de volatilidade no curto prazo a partir da entrada de novas informações no sistema. Isso contribui para a existência de regimes

⁴ No caso da análise do DJIA [17], considera-se probabilidade de transição entre um conjunto de escalas finas entre 2h-4h e um conjunto de escalas *coarse* entre 0.6 e 1.2 dia.

diferentes em escalas temporais diferentes, devido à maior “inércia” dos agentes de prazo mais longo.

3.4

Assimetria no fluxo de informação entre volatilidade de longo e de curto prazo

No capítulo 2 analisamos a volatilidade em uma dada escala temporal, no domínio do tempo. Já na última seção analisamos essa grandeza no domínio da frequência. A partir de agora vamos estudar a volatilidade tanto no domínio do tempo (correlação *lagged*) quanto no domínio da frequência, procurando relacionar diversas escalas temporais de volatilidade.

Para investigar se existe relação de causalidade entre $v_c(t)$ e $v_f(t)$ vamos calcular a correlação *lagged*, que considera duas series temporais com translação relativa:

$$C(\Delta t) = \langle \langle v_c(t)v_f(t + \Delta t) \rangle \rangle = \frac{\langle v_c(t)v_f(t+\Delta t) \rangle - \langle v_c(t) \rangle \langle v_f(t+\Delta t) \rangle}{\sqrt{\text{var}(v_c(t))\text{var}(v_f(t+\Delta t))}} \quad (\text{eq. 3.4.1})$$

onde o operador $\langle \rangle$ significa média ao longo da série temporal. A correlação *lagged* revela a existência de relação causal entre as séries analisadas: se elas são geradas através de um fluxo sincronizado de informação, ela deve ser simétrica, isto é, $C(\Delta t) = C(-\Delta t)$. Porém, se houver alguma relação de causalidade entre as duas séries, teremos uma assimetria entre os resultados de correlação $C(\Delta t)$ e $C(-\Delta t)$ que irá além das flutuações estatísticas. Isto significa que existe uma assimetria no fluxo de informação que deu origem às duas séries, e que deve ser investigada.

Para melhor a visualizar as possíveis diferenças entre a *lags* positiva e negativa, criamos a métrica de assimetria *Delta*:

$$D(\Delta t) = \theta(\Delta t)[C(\Delta t) - C(-\Delta t)] \quad (\text{eq. 3.4.2})$$

onde $\theta(\Delta t)$ é uma função degrau. Em nosso primeiro exemplo, v_c é um dia e v_f é 15 minutos. Nesse caso o número de intervalos da menor escala dentro da maior

escala é, em média, 29. Lembramos que a transformação dada pela eq. 3.3.2 para o cálculo de $v_f(t)$ é necessária para garantir que ela fique definida para a mesma grade no tempo que $v_c(t)$. O gráfico a seguir mostra a correlação *lagged* $C(\Delta t)$ e a assimetria $D(\Delta t)$ para os dados de volatilidade nas escalas v_c diária e na escala v_f de 15 minutos estimados na grade diária:

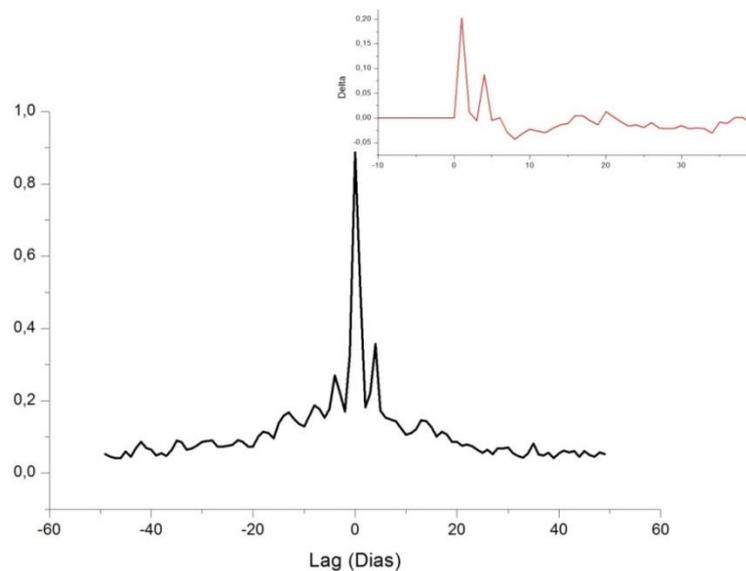


Figura 3.4.1: Correlação *lagged* $C(\Delta t)$ e assimetria $D(\Delta t)$ entre volatilidades em escalas $\tau_c=1$ dia e $\tau_f=15$ min, definidas segundo as equações 3.4.1 e 3.4.2 respectivamente.

Como podemos observar, há uma assimetria que indica maior dependência entre v_c passada e v_f futura, mas o contrário não se aplica. Isso sugere que v_c prevê melhor v_f do que o contrário. Esta assimetria apresenta resultados significantes⁵ até lag 5.

Uma das explicações para esse fato é justamente a heterogeneidade dos agentes de mercado. Os especuladores de curto-prazo precisam se preocupar tanto com a volatilidade de curto prazo, como com a de longo prazo, pois esta última indicará as expectativas globais do mercado e se há tendência no movimento dos preços. Assim, eles também reagem às mudanças de mercado de longo prazo, negociando e provocando mudanças dos preços e da volatilidade no curto prazo. Por outro lado, as variações de curto prazo da volatilidade não alteram as estratégias de atuação dos agentes de longo prazo, que utilizam uma análise fundamentalista do valor da ação, que não é impactada pelos movimentos diários

⁵ Esses resultados estão acima do intervalo de confiança a nível 95% de um random walk, que nesse caso é 0,04.

dos preços mas sim pelos acontecimentos macroeconômicos. Dessa forma, vemos que a volatilidade de resolução temporal mais longa impacta todos os tipos de agentes, enquanto a volatilidade de resolução temporal curta impacta apenas os agentes que atuam naquele horizonte temporal.

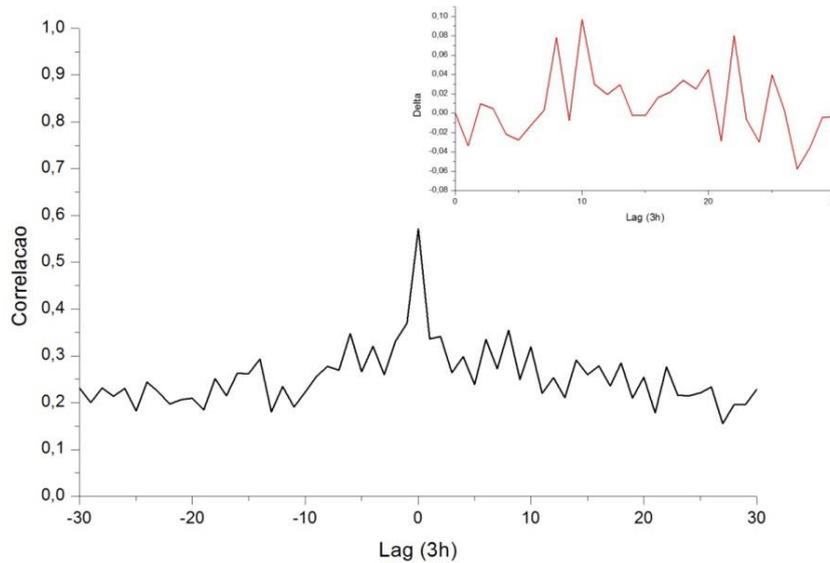


Figura 3.4.2: : Correlação *lagged* $C(\Delta t)$ e assimetria $D(\Delta t)$ entre volatilidades em escalas $\tau_c=3h$ e $\tau_f=30min$, definidas segundo as equações 3.4.1 e 3.4.2 respectivamente.

Esse efeito também pode ser observado em escalas temporais intradiárias. Fizemos a análise comparando a volatilidade $v_c = 3h$ (calculada através da eq. 3.3.8 a partir de dados de 30 minutos) e $v_f = 30$ minutos (calculada através da eq. 3.3.8 a partir dos dados de 5 minutos).

Também nesse caso a correlação é predominantemente maior entre v_c passada e v_f futura, embora isso não esteja tão evidente quanto na escala diária⁶. Isso mostra que esse fato estilizado se estende para escalas intradiárias, como é demonstrado também pela literatura para mercados desenvolvidos [17], ou seja, a observação de correlação *lagged* assimétrica se estende para todas as resoluções temporais analisadas.

Estendemos essa análise investigando o comportamento da assimetria do fluxo de informação de acordo com a magnitude das volatilidades, em particular quando privilegiamos as volatilidades altas ou baixas. Com esse objetivo, calculamos a correlação *lagged* dada pela eq. 3.4.1 considerando o quadrado ou o

⁶ $D(\Delta t)$ ultrapassa o valor do intervalo de confiança mais vezes para o lado positivo.

inverso do quadrado das volatilidades respectivamente. O primeiro caso analisado foi o de magnitudes altas, para o qual consideramos a correlação *lagged* da forma:

$$C'(\Delta t) = \langle \langle v_c^2(t) v_f^2(t + \Delta t) \rangle \rangle \quad (\text{eq. 3.4.3})$$

onde $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ é a operação definida na eq. 3.4.1. De forma análoga a eq. 3.4.2, $D'(t)$ é a métrica de assimetria utilizada.

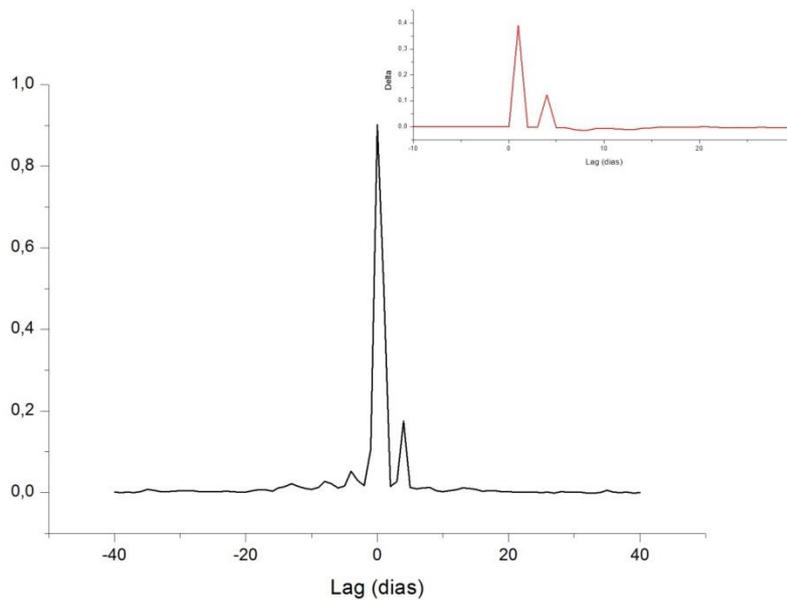


Figura 3.4.3: Correlação *lagged* $C'(\Delta t)$ dada pela Eq. 3.4.3 e assimetria $D'(\Delta t)$ entre volatilidades quadráticas em escalas $\tau_c=1$ dia e $\tau_f=15$ min.

A característica mais notável desse gráfico é que, analisando apenas as volatilidades altas, a assimetria é ainda mais forte do que no caso anterior. No entanto, é importante salientar que a assimetria é persistente durante no máximo cinco dias nos dois casos. Observa-se também que as correlações são insignificantes a partir de dez dias, enquanto no gráfico da figura 3.4.1 é possível ver que até o intervalo de 20 dias ainda há correlação positiva significativa.

Para investigar a assimetria no fluxo de informação entre volatilidades de baixa magnitude consideramos a correlação *lagged* da forma:

$$C''(\Delta t) = \langle \langle v_c^{-2}(t) v_f^{-2}(t + \Delta t) \rangle \rangle \quad (\text{eq. 3.4.4})$$

e a respectiva métrica de assimetria $D''(t)$.

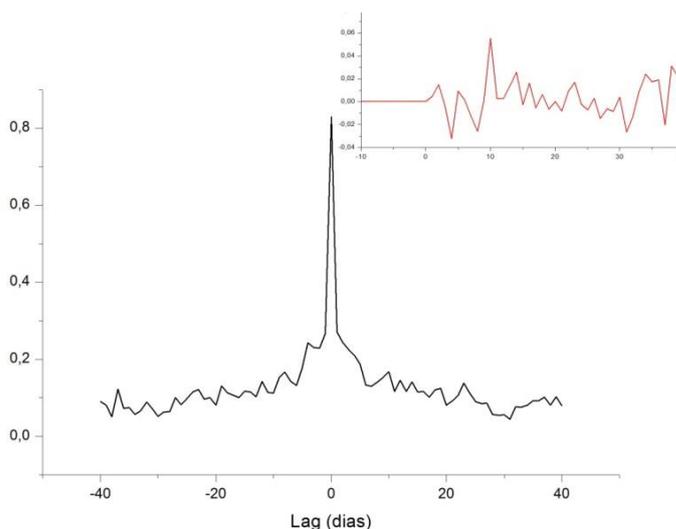


Figura 3.4.4: Correlação *lagged* $C''(\Delta t)$ dado pela eq. 3.4.4 e assimetria $D''(\Delta t)$ entre os inversos dos quadrados das volatilidades em escalas $\tau_c=1$ dia e $\tau_f=15$ min.

Nesse caso não há uma assimetria significativa como acontece para volatilidades altas. Apesar disso, vemos uma persistência muito maior na correlação para Δt mais longo.

A análise das figuras 3.4.3 e 3.4.4 mostra uma característica importante: em um mercado mais “nervoso”, o regime de volatilidades altas é responsável pela assimetria observada, isto é, pela existência de relação causal entre volatilidade *coarse* e *fine*, enquanto em um mercado tranquilo, o regime de volatilidades baixas é responsável pela persistência da memória entre as diferentes escalas.

Analisamos também as correlações cruzadas entre v_c de alta magnitude e v_f de baixa magnitude e vice-versa. No primeiro caso, não observamos nenhuma relação causal. Até mesmo para $\tau=0$ essa correlação é insignificante, mostrando que quando privilegiamos o regime de volatilidades altas, não existe correlação com o regime de volatilidades baixas em escalas temporais mais finas, de acordo com nossos resultados (colunas **Alta/Alta** e **Alta/Baixa** das tabelas 3.3.2).

Quando privilegiamos o regime de volatilidades baixas na escala *coarse* e de volatilidades alta na escala *fine*, encontramos correlações ligeiramente negativas, como esperado, devido ao predomínio na configuração **Baixa/Baixa** na tabela 3.3.2.

3.5

Fluxo de informação através das escalas temporais: cascata multiplicativa do mercado

A propriedade de assimetria mostra que a informação sobre a incerteza dos preços se propaga no sentido da maior para a menor resolução temporal. Embora também exista um fluxo no caminho contrário, esse fenômeno é bem mais fraco que o anterior.

Considere a volatilidade $\sigma_\tau(t)$ em uma dada escala τ . Uma abordagem fenomenológica proposta na literatura consiste em descrevê-la por uma *cascata multiplicativa* [19]:

$$\sigma_\tau = \prod_{i=0}^{n-1} W_{\tau_{i+1}, \tau_i} \sigma_T \quad (\text{eq. 3.5.1})$$

onde σ_T é a volatilidade na maior escala considerada e as grandezas W_{τ_{i+1}, τ_i} seriam as *taxas de fluxo de informação* através de uma seqüência decrescente de escalas. A volatilidade pode então ser decomposta multiplicativamente para qualquer escala menor $\{\tau_i = T s^i\}_{i=1, \dots, n}$, com $\tau_0 = T$ (uma escala máxima) e $\tau_n = \tau_{\min}$ (escala mínima).

Esse modelo de cascata implica que a volatilidade na escala T influencia a volatilidade nos dois subperíodos de escala $T/2$ com pesos aleatórios W_1 e W_0 . Na seqüência, a volatilidade na escala $T/2$ influencia a volatilidade na escala $T/4$ por taxas aleatórias W_{00} e W_{01} para o primeiro subperíodo, W_{10} e W_{11} para o segundo subperíodo, e assim sucessivamente. A cascata continuaria até a menor escala analisada. Assim, a volatilidade em uma dada escala temporal tem relação causal com volatilidades em horizontes temporais mais longos, conforme análise empírica anterior.

Considere a cascata multiplicativa entre duas escalas temporais sucessivas na eq. 3.5.1 e a eq. 3.3.2, que fornece a volatilidade em escala fina transformada, de forma a ser definida na grade temporal da escala larga. Podemos escrever ($\tau_f \equiv \tau_{i+1}$ e $\tau_c \equiv \tau_i$):

$$v_f(t) = \frac{1}{n_\tau} \sum_{t'=1}^{n_\tau} W_{\tau_f, \tau_c}(t') v_c(t) \quad (\text{eq. 3.5.3})$$

Definindo $\tilde{W}_{\tau_f, \tau_c}(t) = \frac{1}{n_\tau} \sum_{t'=1}^{n_\tau} W_{\tau_f, \tau_c}(t')$ como a média das taxas locais de informação entre as escalas,

$$v_f(t) = \tilde{W}_{\tau_f, \tau_c}(t) v_c(t) \quad (\text{eq. 3.5.4})$$

Na hipótese de que as taxas $\tilde{W}_{\tau_{i+1}, \tau_i}$ sejam estatisticamente independentes e tenham mesma distribuição (independente da escala inicial), $\tilde{W}_{\tau_{i+1}, \tau_i} \equiv \tilde{W}_s(t)$, obtendo-se:

$$\langle v_f(t) \rangle = \langle \tilde{W}_s(t) \rangle \langle v_c(t) \rangle \quad (\text{eq. 3.5.5})$$

onde a resolução temporal fine $\tau_f = s \tau_c$. Processos descritos pela eq. 3.5.5 são auto-afins e podem ser caracterizados por um expoente de escala H . Pode-se mostrar (ver apêndice 2) que para cascata multiplicativa homogênea:

$$\langle \tilde{W}_s \rangle = s^H \quad \text{ou} \quad H = \frac{\ln \langle \tilde{W}_s \rangle}{\ln s} \quad (\text{eq. 3.5.6})$$

A partir dos dados empíricos (ver tabela 3.5.1), obtém-se estimativa da média das taxas de informação intradiária para o fator $s=1/2$ $\langle \tilde{W}_{1/2} \rangle = 0.67 \pm 0.01$, fornecendo o expoente de escala $H = 0.58 \pm 0.02$. Este valor é consistente com o expoente de escala $H(1)$ mostrado na tabela 2.5.1, associado a outro estimador de volatilidade.

	30x60	60x120	90x180	180x360
μ_f	0,002623	0,003962	0,004904	0,007290
μ_c	0,003962	0,005787	0,007290	0,011067
W	0,661927	0,684595	0,672758	0,658715

Tabela 3.5.1: Volatilidade média (μ) nas escalas temporais fina e larga para cada par com razão $s=1/2$ e respectiva estimativa da taxa de informação W .

É possível também obter informações sobre as taxas de fluxo de informação $\langle \tilde{W}_s \rangle$ através da caracterização da função de correlação *lagged* $C(\Delta t)$ de volatilidades em uma hierarquia de resoluções temporais. Vamos também investigar a assimetria no fluxo de informação do sinal financeiro que se manifesta na assimetria temporal $D(\Delta t)$.

Com este fim, calculamos $C(\Delta t)$ e $D(\Delta t)$ envolvendo as escalas 30, 60, 90, 120, 180 e 360 minutos. A hipótese mais simples de que os fatores W na eq. 3.5.1 são variáveis i.i.d. implica em colapso de dados de $C(\Delta t)$ entre escalas τ_c, τ_f com mesma razão s para $\sup(\tau_c) < \Delta t < T$. A figura abaixo mostra a correlação *lagged* da volatilidade entre as escalas 30x60, 60x120, 90x180 e 180x360, a fim de analisar o fluxo de informação entre escalas com mesma razão $s=1/2$.

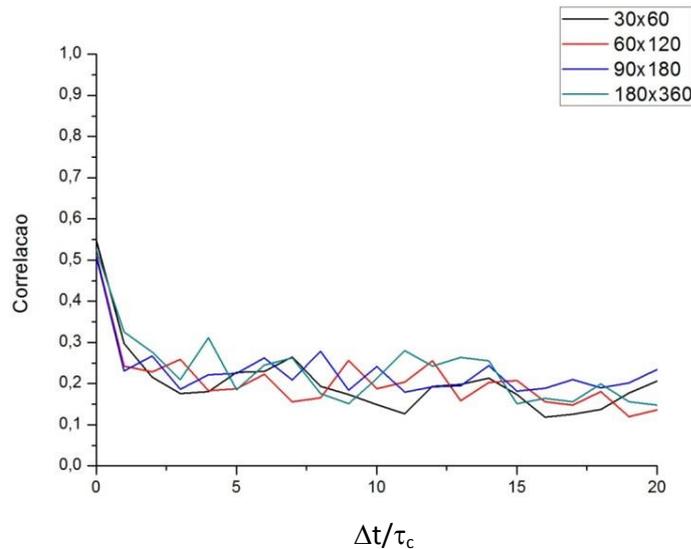


Figura 3.5.1: Correlação *lagged* $C(\Delta t)$ dado pela eq. 3.4.4 para os pares de escalas $\tau_c=60$ min e $\tau_f=30$ min (1), $\tau_c=120$ min e $\tau_f=60$ min (2), $\tau_c=180$ min e $\tau_f=90$ min (3), $\tau_c=360$ min e $\tau_f=180$ min (4). Para todos esses pares, a razão entre τ_f e τ_c é $1/2$.

Observa-se que não há evidência empírica de violação dessa hipótese para o fluxo de informação entre escalas com fator $s=1/2$.

Nos gráficos abaixo vamos analisar a importância da escala *coarse* na assimetria do fluxo de informação. Com este fim, comparamos a métrica de assimetria $D(\Delta t)$ entre as escalas 30x60, 60x120, 90x180 e 180x360, com mesma razão $s=1/2$.

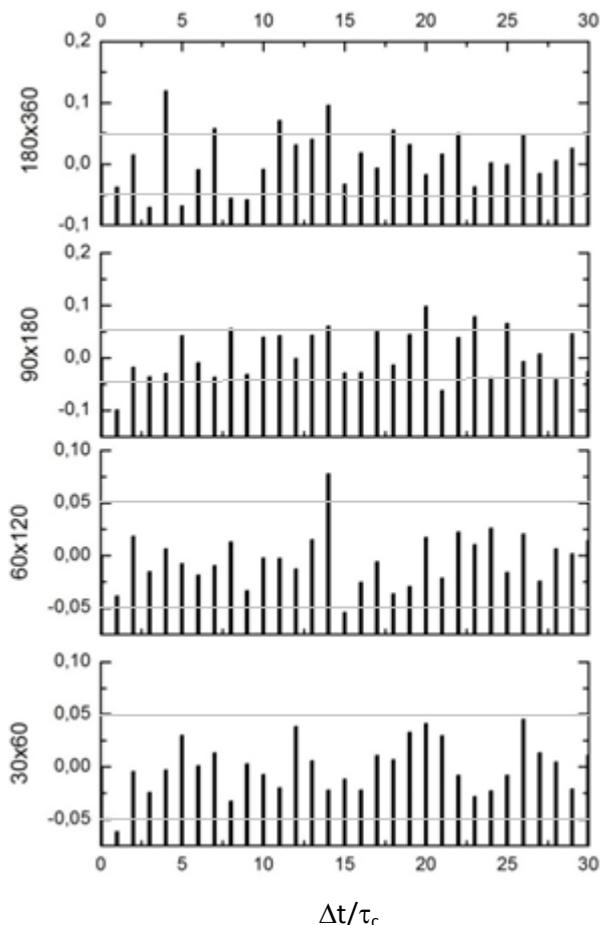


Figura 3.5.2: Assimetria no fluxo de informação $D(\Delta t)$ entre as escalas indicadas, cuja razão é $s=1/2$. O intervalo de confiança de 95% é aproximadamente 0.05 e está indicado por linhas horizontais.

Neste caso, apenas as escalas maiores mostram uma assimetria significativa (180x360), sugerindo que a escala *coarse* inicial é um fator relevante na observação de correlação assimétrica.

É também possível observar a ocorrência de uma pequena assimetria contrária à que esperamos (por exemplo, no caso de 30x60). Essa característica pode ser justificada pelo fato de que, para escalas temporais próximas, há uma interinfluência entre os agentes. Por exemplo, não podemos dizer que há uma diferença significativa entre os *traders* de 30 ou 60 minutos. Normalmente os agentes intradiários verificam o mercado continuamente, e por isso as informações relevantes que chegam na escala 30 minutos, também podem ser consideradas relevantes na escala 1h.

Por outro lado, de acordo com o modelo dado na eq. 3.5.2, espera-se que quanto maior a razão entre as escalas temporais, maior o número de taxas intermediárias W_{ij} . Isso significa que mais diversificado será o fluxo de

informação entre as escalas larga e fina, amplificando possíveis assimetrias entre W_{ij} e W_{ji} . De fato, observou-se que a razão entre as escalas é um fator relevante para o efeito de assimetria entre os dados de alta frequência. Quanto maior esta razão, mais assimétrico é o fluxo de informação entre as volatilidades v_c e v_f . Ilustramos esse resultado na Fig. 3.5.3, que mostra as correlações entre a escala $\tau_f = 30$ minutos e as escalas $\tau_c = 60, 120, e 360$ minutos. Nesse gráfico, novamente é possível observar que entre as escalas mais próximas não há assimetria muito relevante. No entanto, comparando a escala de 30 minutos com a de 6h, obtém-se $D(\Delta t)$ positivos bem mais claramente.

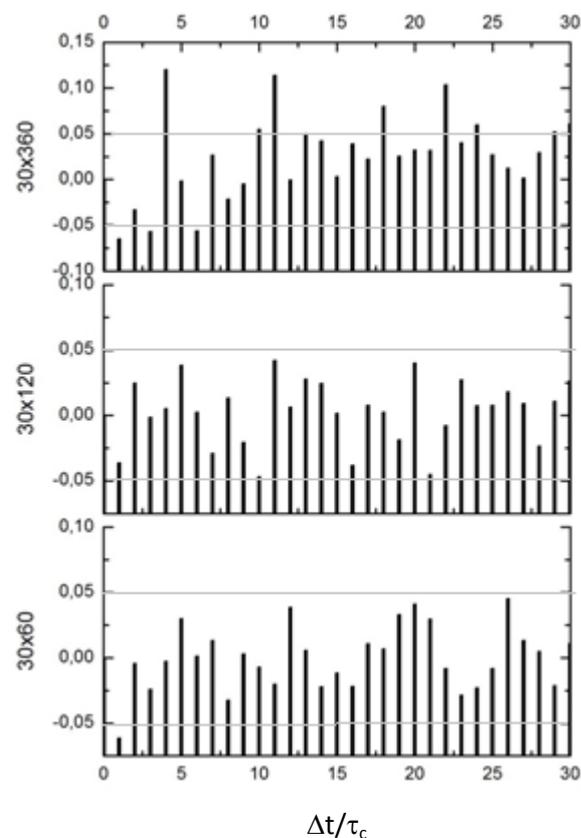


Figura 3.5.3: Assimetria $D(\Delta t)$ entre a escala $\tau_f = 30$ minutos e as escalas $\tau_c = 1h, 2h$ e $6h$. O eixo horizontal é representado em unidades da escala mais longa. O intervalo de confiança de 95% é aproximadamente 0.05 e está indicado por linhas horizontais.

Também comparamos os dados de correlação entre volatilidades na escala $\tau_f = 60$ minutos e $\tau_c = 120, 180$ e 360 minutos e obtivemos resultados semelhantes, como pode ser observado na figura 3.5.4. O único gráfico que mostra uma assimetria bem definida dentre esses três é o de 60×360 minutos, enquanto nos outros dois não há evidência de assimetria no fluxo de informação, confirmando

nossas observações anteriores de que não há diferenciação entre os agentes atuando em horizontes intradiários próximos.

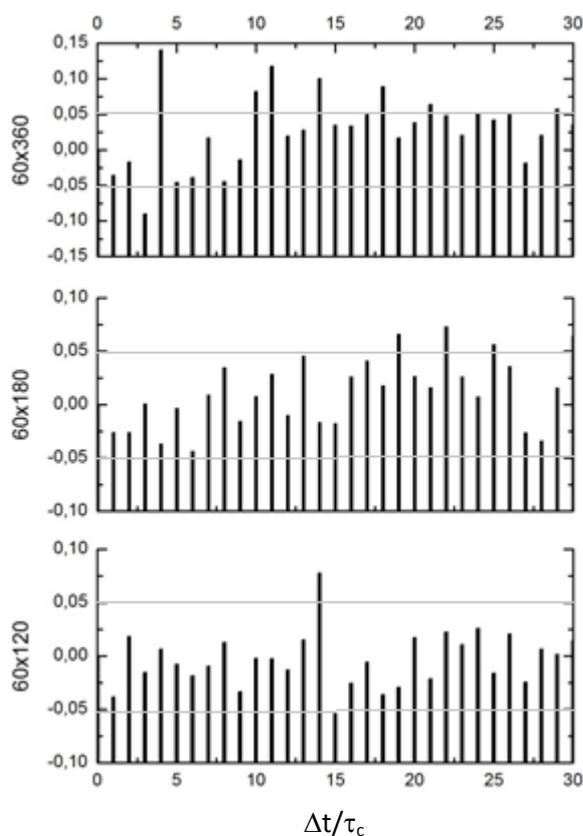


Figura 3.5.4: Assimetria $D(\Delta t)$ entre a escala $\tau_f = 60$ minutos e as escalas $\tau_c = 120, 180$ e 360 minutos. O eixo horizontal é representado em unidades da escala mais longa. O intervalo de confiança é aproximadamente 0.05 e está indicado por linhas horizontais..

De acordo com nossos resultados, quando se trata de escalas intradiárias, um fator mínimo $s=1/4$ entre as escalas é necessário para que possamos observar um efeito significativo de assimetria no fluxo de informação no mercado. Mas quando a escala larga se aproxima da escala diária (por exemplo, 360 minutos), uma assimetria muito significativa já se manifesta para um fator $s=1/2$, como ilustrado pela correlação entre as escalas 180 e 360 minutos da figura 3.5.2.

Os gráficos a seguir apresentam o conjunto de resultados empíricos sobre as correlações *lagged* obtidas neste trabalho. A figura 3.5.5 apresenta as correlações acumuladas, na qual podemos observar as escalas temporais que produzem correlações mais significativas e a contribuição de cada uma para um dado *lag*. A figura 3.5.6 também apresenta a métrica Delta acumulada. Um valor acumulado positivo para um dado *lag* indica uma tendência global de assimetria positiva

entre as escalas *coarse* e *fine* analisadas, enquanto um valor negativo indica tendência de assimetria negativa.

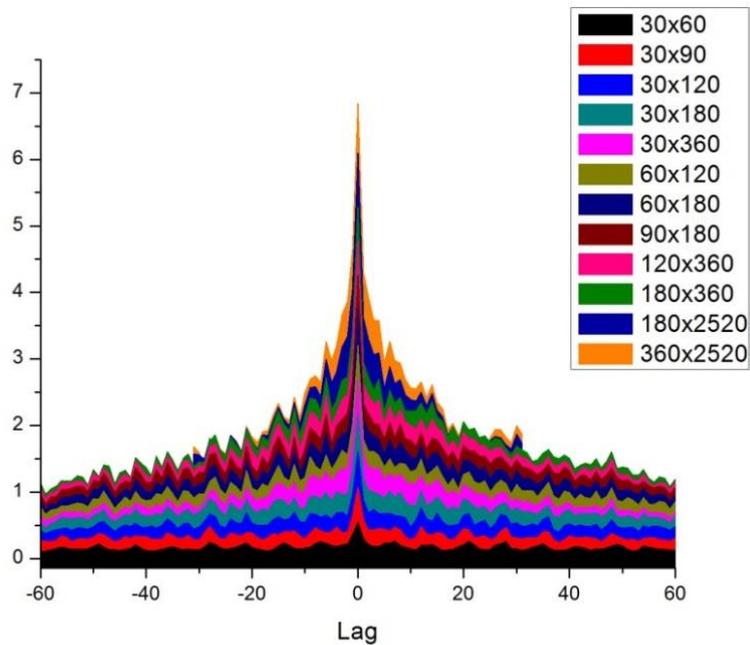


Figura 3.5.5: Gráfico da correlação *lagged* inter-escalas envolvendo todas as escalas do estudo. Os valores sucessivos de correlação (das escalas menores para as maiores) para cada *lag* são acumulados a fim de melhor visualização.

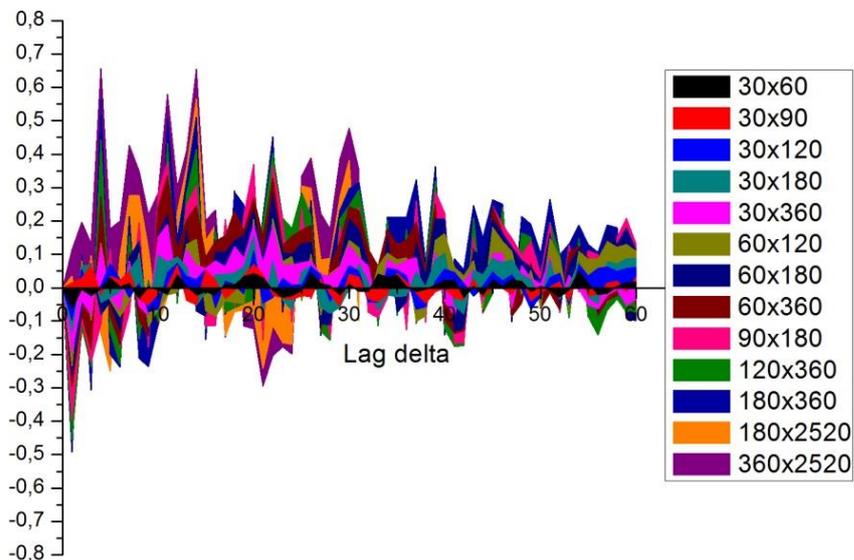


Figura 3.5.6: Gráfico da assimetria $D(\Delta t)$ para as correlações da fig 3.5.5. Os valores sucessivos de assimetria também foram acumulados para cada *lag*.

Essas figuras fornecem evidência de assimetria no fluxo de informação entre escalas temporais no mercado brasileiro com valor de $D(\Delta t)$ predominantemente positivo.

Em resumo, obtivemos que a série de volatilidade apresenta comportamento coerente ao longo de um grande alcance de escalas temporais. Além disso, volatilidades de diferentes resoluções temporais apresentam fluxo de informação mútua, principalmente para tempos iguais. Por outro lado, apresentam uma propagação assimétrica de informação, com volatilidade em horizonte longo influenciando causalmente (no futuro) a volatilidade em resolução curta.