Referências Bibliográficas

[01] HORTON, B.. **Noise-modulated distance measuring systems**. Proceedings of the IRE, 47(5):821–828, 1959. 1, 2.5

[02] COOPER, G.; MCGILLEM, C.; SMITH, J.; WEEKS, W.; BENNETT, L.; EMMERT, R.; GASSNER, R. ; WALTMAN, W.. **Random signal radar**. 1970. 1

[03] DAWOOD, M.; NARAYANAN, R.. **Ambiguity function of an ultrawideband random noise radar**. In: ANTENNAS AND PROPAGATION SOCIETY INTERNATIONAL SYMPOSIUM, 2000. IEEE, volumen 4, p. 2142–2145. IEEE, 2000. 1

[04] LUKIN, K.; KULYK, V. ; ZEMLYANIY, O.. **Application of dynamical chaos for design of random waveform generators**. In: PROC. 1ST INT. WORKSHOP ON NOISE RADAR TECHNOLOGY, p. 127–135, 2002. 1

[05] THAYAPARAN, T.. **Noise radar technology basics**. Technical report, DTIC Document, 2006. 1, 2.5

[06] MIDDLETON, D.. **On the distribution of energy in noise-and signal-modulated waves**. Quarterly of Applied Mathematics, (Part I), 1952. 1

[07] STEWART, J.. **The power spectrum of a carrier frequency modulated by gaussian noise**. Proceedings of the IRE, 42(10):1539–1542, 1954. 1, 7

[08] AXELSSON, S.. **Noise radar using random phase and frequency modulation**. Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on, 42(11):2370–2384, 2004. 1

[09] MEIKLE, H.. **Modern radar systems**. Artech House on Demand, 2008. 2, 5.1, 5.3, 6.6, 7

[10] SKOLNIK, M.. **Introduction to radar**. Radar Handbook, p. 1990, 1962. 2, 2.4, 3.1, 3.1, 3.2, 3.3, 3.3, 4, 6

[11] CHEN, V.; LI, F.; HO, S. ; WECHSLER, H.. **Micro-doppler effect in radar: phenomenon, model, and simulation study**. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 42(1):2–21, 2006. 2

[12] LUKIN, K.; NARAYANAN, R.. **Fifty years of noise radar**. In: PROC. 11TH INTERNATIONAL RADAR SYMPOSIUM (IRS), VILNIUS, p. 504–506, 2010. 2.5

[13] HAYKIN, S.; MOHER, M.. **Modern wireless communication**. Prentice Hall, 2004. 3, 3, 3, 3, 4

[14] CARLSON, A.; CRILLY, P. ; RUTLEDGE, J.. **Communication systems: An introduction to signals and noise in electrical communication**. Guía Académica, p. 129, 1986. 3.1, 4, 4.2.1

[15] SWERLING, P.. **Probability of detection for fluctuating targets**. Information Theory, IRE Transactions on, 6(2):269–308, 1960. 3.1

[15] VAN TREES, H.. **Detection, estimation, and modulation theory: Detection, estimation, and linear modulation theory**. Wiley, 1968. 3.1, 3.1

[16] COOKE, C.. **The early history of pulse compression radar-the history of pulse compression at sperry gyroscope company**. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 24(6):825–833, 1988. 4

[17] SIEBERT, W.. **The early history of pulse compression radar-the development of an/fps-17 coded-pulse radar at lincoln laboratory**. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 24(6):833–837, 1988. 4

[18] COHEN, M.; FOX, M. ; BADEN, J.. **Minimum peak sidelobe pulse compression codes**. In: RADAR CONFERENCE, 1990., RECORD OF THE IEEE 1990 INTERNATIONAL, p. 633–638. IEEE, 1990. 4

[19] COXSON, G.; RUSSO, J.. **Efficient exhaustive search for optimal-peak-sidelobe binary codes**. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 41(1):302–308, 2005. 4

[20] CILLIERS, J.; SMIT, J.. **Pulse compression sidelobe reduction by minimization of lp-norms**. Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 43(3):1238–1247, 2007. 4

[21] MOW, W.. **Best quadriphase codes up to length 24**. Electronics Letters, 29(10):923–925, 1993. 4

[22] MECCA, V.; RAMAKRISHNAN, D. ; KROLIK, J.. **Mimo radar space-time adaptive processing for multipath clutter mitigation**. In: SENSOR ARRAY AND MULTICHANNEL PROCESSING, 2006. FOURTH IEEE WORKSHOP ON, p. 249–253. IEEE, 2006. 4

[23] DICKE, R.. **Object detection system**, 1953. US Patent 2,624,876. 4.1

[24] ATHANASIOS, P.. **Probability, random variables and stochastic processes**. McGraw-Hill, 1991. 4.2.1

[25] SCHATTE, P.. **On sums modulo 2π of independent random variables**. Mathematische Nachrichten, 110(1):243–262, 1983. 4.2.1, 4.3

[26] STERN, B.. **Interactive data language**. ASCE, 2000. 4.6, 5, 5.2, 6

A
Potência do sinal e do ruído na saída do bloco integrador, quando sinais de transmissão determinísticos são utilizados

A envoltória complexa $\tilde{y}_{int}(t)$ na saída do integrador e, consequentemente, entrada do decisor, relativos à cadeia de recepção ilustrada na Figura 3.4, é dada, a partir de (3-11) por

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{int}(t) &= \sum_{i=1}^{n_p} \tilde{y}_i(t) = \sum_{i=1}^{n_p} [\tilde{x}_i(t) + \tilde{n}_i(t)] \\ &= \sum_{i=1}^{n_p} A_i \tilde{s}_i(t - T_0) + \sum_{i=1}^{n_p} \tilde{n}_i(t) \end{aligned} \quad \text{(A-1)}$$

Considerando-se que o pulso de transmissão não se altera entre transmissões, o que normalmente ocorre com sistemas radar clássicos, que empregam sinais determinísticos como forma de onda de transmissão, e que as distorções sofridas pelos n_p pulsos recebidos em uma única passada da antena é independente do tempo, dada por A, tem-se que a envoltória complexa $\tilde{z}(t)$ pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{int}(t) &= \sum_{i=1}^{n_p} [\tilde{x}(t) + \tilde{n}_i(t)] \\ &= \sum_{i=1}^{n_p} A\tilde{s}(t - T_0) + \sum_{i=1}^{n_p} \tilde{n}_i(t) \\ &= n_p \, A \, \tilde{s}(t - T_0) + \tilde{n}_{int}(t) \end{aligned} \quad \text{(A-2)}$$

onde, $\tilde{n}_{int}(t)$ é a envoltória complexa do ruído na saída do integrador, dado por $\tilde{n}_{int}(t) = \sum_{i=1}^{n_p} \tilde{n}_i(t)$.

A envoltória complexa do ruído na saída do integrador, $\tilde{n}_{int}(t)$, é caracterizada por um processo estocástico gaussiano, cuja função média é dada por

$$E[\tilde{n}_{int}(t)] = E\left[\sum_{i=1}^{n_p} \tilde{n}_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{n_p} E[\tilde{n}_i(t)] = 0 \quad \text{(A-3)}$$

A função autocorrelação deste processo, $\tilde{n}_{int}(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} R_{\tilde{n}_{int}}(t,u) &= E\left[\sum_{i=1}^{n_p}\tilde{n}_i(t)\sum_{j=1}^{n_p}\tilde{n}_j^*(u)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n_p}\sum_{j=1}^{n_p}E[\tilde{n}_i(t)\tilde{n}_j^*(u)] \\ &= \sum_{i=1}^{n_p}R_{\tilde{n}_i\tilde{n}_i}(t,u)+\sum_{i=1}^{n_p}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n_p}R_{\tilde{n}_i\tilde{n}_j}(t,u) \end{aligned} \tag{A-4}$$

Observa-se que, se $t = u$, então

$$R_{\tilde{n}_{int}}(t,t) = \sum_{i=1}^{n_p}R_{\tilde{n}_i}(t,t)+\sum_{i=1}^{n_p}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n_p}R_{\tilde{n}_i\tilde{n}_j}(t,t) \tag{A-5}$$

Note que as variáveis aleatórias $\tilde{n}_i(t)$ e $\tilde{n}_j(t)$ estão, na verdade, separadas no tempo, uma vez que o instante de tempo da envoltória complexa do ruído $\tilde{n}_i(t)$ tem como referência o início da transmissão do i-ésimo pulso, enquanto que o instante de tempo da envoltória complexa do ruído $\tilde{n}_j(t)$ tem como referência o início da transmissão do j-ésimo pulso. Considera-se, aqui, que a diferença de tempo entre o início da transmissão do pulso i e do pulso j é suficientemente grande para que $\tilde{n}_i(t)$ e $\tilde{n}_j(t)$ sejam descorrelatadas para todo $i \neq j$. Assim, o segundo termo de (A-5) é nulo, resultando

$$R_{\tilde{n}_{int}}(t,t) = \sum_{i=1}^{n_p}R_{\tilde{n}_i}(t,t) \tag{A-6}$$

Considerando $\tilde{n}_i(t)$ estacionário no sentido amplo, então

$$R_{\tilde{n}_i}(t,t) = R_{\tilde{n}_i}(0) = P_{\tilde{n}_i} \tag{A-7}$$

onde $P_{\tilde{n}_i}$ é a potência média da envoltória do ruído $\tilde{n}_i(t)$ na entrada do integrador. Considerando que $P_{\tilde{n}_i} = P_{\tilde{n}}\forall i$, tem-se que a potência do ruído na saída do integrador, $P_{\tilde{n}_{int}}$, é, então, dada por

$$P_{\tilde{n}_{int}} = R_{\tilde{n}_{int}}(0) = n_p P_{\tilde{n}} \tag{A-8}$$

Note, ainda, a partir de (A-2), que a potência do sinal na saída do integrador,

$P_{\tilde{x}_{int}}$, é dada por

$$P_{\tilde{x}_{int}} = \left| \sum_{i=1}^{n_p} \tilde{x}_i(t) \right|^2 = n_p^2 \mid \tilde{x}(t) \mid^2 \qquad \text{(A-9)}$$

B
Resposta do filtro receptor que maximiza a razão sinal ruído associada a sua saída

Considerando-se a envoltória complexa $\tilde{x}_i(t)$, definia em (3-12), determinística, a relação que se deseja maximizar é a razão sinal ruído instantânea na saída do i-ésimo filtro, definida por

$$SNR_i'(T_0) = \frac{\mid \tilde{x}_i'(T_0) \mid^2}{P_{\tilde{n}_i'}} \tag{B-1}$$

onde $\mid \tilde{x}_i'(T_0) \mid$ é o valor do módulo do sinal de saída do i-ésimo filtro no instante T_0 e $P_{\tilde{n}_i'}$ é a potência média do ruído na saída do i-ésimo filtro.

Uma vez que o ruído na entrada do filtro é gaussiano e plano na faixa de frequências (banda) do filtro receptor, tem-se que a potência média da envoltória complexa do ruído na saída do filtro receptor é dada por

$$P_{\tilde{n}_i'} = N_0 \int_{-\frac{B_i}{2}}^{\frac{B_i}{2}} \mid \tilde{H}_i(f) \mid^2 df \tag{B-2}$$

onde N_0 é o valor do nível espectral da envoltória complexa do ruído na entrada dos filtros receptores e B_i a largura de banda do i-ésmio filtro, que neste caso é considerada suficientemente grande para não desperdiçar energia do sinal recebido

O valor absoluto da tensão do sinal de saída de um filtro receptor com resposta em frequência $\tilde{H}_i(f)$ é dado por

$$\mid \tilde{x}_i'(t) \mid = \mid \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}_i(f)\tilde{H}_i(f)e^{j2\pi ft}df \mid \tag{B-3}$$

onde $\tilde{X}_i(f)$ é a transformada de Fourrier da envoltória complexa do sinal de entrada no filtro, $\tilde{x}_i(t)$.

A partir de (B-3), (B-2) e (B-1), tem-se que esta última pode ser reescrita como

$$SNR_i'(T_0) = \frac{\mid \int_{-\frac{B_i}{2}}^{\frac{B_i}{2}} \tilde{X}_i\tilde{H}_i(f)e^{j2\pi fT_0}df \mid^2}{N_0 \int_{-\frac{B_i}{2}}^{\frac{B_i}{2}} \mid \tilde{H}_i(f) \mid^2 df} \tag{B-4}$$

A desigualdade de Schwartz afirma que se P e Q são duas funções complexas, então

$$\int P^* P dx \int Q^* Q dx \geq \mid \int P^* Q dx \mid^2 \qquad \text{(B-5)}$$

A igualdade em (B-5) é obtida quando $Q = kP$, onde k é uma constante. Suponha, então, que $P^* = \tilde{X}_i(f)e^{j2\pi f T_0}$ e que $Q = \tilde{H}_i(f)$, e lembrando que $\int P^* P dx = \int \mid P \mid^2$, então, aplicando desigualdade de Schwartz no numerador de (B-4) tem-se que

$$SNR_i'(T_0) \leq \frac{\int_{-\frac{B_i}{2}}^{\frac{B_i}{2}} \mid \tilde{H}_i(f) \mid^2 df \int_{-\frac{B_i}{2}}^{\frac{B_i}{2}} \mid \tilde{X}_i(f) \mid^2 df}{N_0 \int_{-\frac{B_i}{2}}^{\frac{B_i}{2}} \mid \tilde{H}_i(f) \mid^2 df} = \frac{\int_{-\frac{B_i}{2}}^{\frac{B_i}{2}} \mid \tilde{X}_i(f) \mid^2 df}{N_0} \qquad \text{(B-6)}$$

O teorema de Parseval, afirma que a energia do sinal de entrada no filtro receptor, E_i, pode ser derivada tanto através do sinal no domínio do tempo quanto deste no domínio da frequência. Adicionalmente, conforme dito anteriormente, a largura de banda do i-ésimo filtro receptor é suficientemente grande para não desperdiçar energia do sinal, sendo assim, tem-se que a energia do sinal na entrada do filtro receptor é dada por

$$E_{\tilde{x}_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \mid \tilde{x}_i(t) \mid^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mid \tilde{X}_i(f) \mid^2 df = \int_{-\frac{B_i}{2}}^{\frac{B_i}{2}} \mid \tilde{X}_i(f) \mid^2 df \qquad \text{(B-7)}$$

Desta forma, conclui-se que a razão sinal ruído na saída do filtro é limitada, dada, para cada pulso i, por

$$SNR_i'(T_0) \leq \frac{E_{\tilde{x}_i}}{N_0} \qquad \text{(B-8)}$$

Conforme descrito anteriormente, o valor máximo da razão sinal ruído da saída, $SNR_i'(T_0)$, é obtido quando (B-5) atinge a igualdade, ou seja, quando $\tilde{H}_i(f) = k\tilde{X}_i^*(f)e^{-j2\pi f T_0}$, onde k é uma constante, que sem perda de generalidade, será assumida 1. Desta forma, tem-se que a função de transferência do equivalente passa-baixa do filtro de recepção que maximiza a relação sinal ruído de sua saída é dada, a partir do exposto e de (3-11) por

$$\tilde{H}_i(f) = \tilde{X}_i^*(f)e^{-j2\pi f T_0} = A_i \tilde{S}_i^*(f) \qquad \text{(B-9)}$$

onde $\tilde{S}_i^*(f) = \mathcal{F}[\tilde{s}_i^*(-t)]$, sendo que $\mathcal{F}[\cdot]$ representa o operador transformada de Fourier. Observa-se que, da mesma forma como foi considerado ao longo da análise realizada no Capítulo 3, A_i foi considerado independente do tempo. A razão sinal ruído associada à saída do filtro casado é dada por

$$SNR_i'(T_0) = \frac{E_{\tilde{x}_i}}{N_0} \qquad \text{(B-10)}$$

Frente ao exposto, a resposta impulsional do equivalente passa-baixa do filtro receptor é dada por (B-11), o qual recebe, na literatura, o nome de filtro casado.

$$\tilde{h}_i(t) = \tilde{s}_i^*(-t) \tag{B-11}$$

C
Autocorrelação da envoltória complexa do sinal determinístico modulado linearmente em frequência

A autocorrelação da envoltória complexa do sinal determinístico modulado linearmente em frequência com relação à frequência central de transmissão é dada, através de (4-13) e (4-15) por

$$\begin{aligned}
R_{\tilde{s}\tilde{s}}(\tau) &= \frac{1}{T_{int}} \int_0^{T_{int}} 2Pe^{j\frac{K_p t^2}{2} - j\frac{K_p \tau_s t}{2} - j\frac{K_p (t-\tau)^2}{2} + j\frac{K_p \tau_s (t-\tau)}{2}} dt \\
&= \frac{2P}{T_{int}} \int_0^{T_{int}} e^{-j\frac{K_p \tau_s \tau}{2} + jK_p t\tau - j\frac{K_p \tau^2}{2}} dt \\
&= \frac{2P}{T_{int}} e^{-j\frac{K_p \tau^2}{2} - j\frac{K_p \tau_s \tau}{2}} \int_0^{T_{int}} e^{jK_p t\tau} dt
\end{aligned} \tag{C-1}$$

Observa-se que a variável λ não tem influência sobre o resultado. Em (C-1), considerando a parcela fora da integral como um variável complexa $A(\tau) = Ae^{j\phi(\tau)}$ cujo módulo é $A = \frac{2P}{T_{int}}$ e a fase é dada por $\phi(\tau) = -\frac{K_p(\tau^2)}{2} - \frac{K_p \tau_s \tau}{2}$, tem-se que a autocorrelação da envoltória complexa deste sinal determinístico é dada por

$$\begin{aligned}
R_{\tilde{s}\tilde{s}}(\tau) &= A(\tau) \left[\frac{e^{jK_p T_{int} \tau} - 1}{jK_p \tau} \right] \\
&= \frac{A(\tau) T_{int}}{e^{\frac{-jK_p T_{int} \tau}{2}}} \left[\frac{e^{\frac{jK_p T_{int} \tau}{2}} - e^{\frac{-jK_p T_{int} \tau}{2}}}{2j\frac{K_p T_{int} \tau}{2}} \right]
\end{aligned} \tag{C-2}$$

A relação de Euller define que

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \tag{C-3}$$

Desta forma, utilizando (C-3), tem-se que (C-2) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
R_{\tilde{s}\tilde{s}}(\tau) &= A(\tau) T_{int} e^{\frac{jK_p T_{int} \tau}{2}} \left[\frac{\sin(\frac{K_p T_{int} \tau}{2})}{\frac{K_p T_{int} \tau}{2}} \right] \\
&= A(\tau) T_{int} e^{j\frac{K_p T_{int} \tau}{2}} sinc\left(\frac{K_p T_{int} \tau}{2} \right)
\end{aligned} \tag{C-4}$$

Uma vez que, neste trabalho considera-se apenas radares pulsados, então o sinal de transmissão tem duração finita, dada por τ_s, o que equivale a dizer que, $T_{int} = \tau_s$. Desta forma, a função autocorrelação no tempo da envoltória complexa do sinal determinístico com relação à frequência central de transmissão é, então, dada por

$$R_{\tilde{s}\tilde{s}}(\tau) = A(\tau)\tau_s e^{j\frac{K_p \tau_s \tau}{2}} sinc\left(\frac{K_p \tau_s \tau}{2}\right) \quad \text{(C-5)}$$

onde $A(\tau)$ é dada por

$$A(\tau) = Ae^{j\phi(\tau)} = \frac{2P}{T_{int}} e^{j\left[-\frac{K_p(\tau^2)}{2} - \frac{K_p \tau_s \tau}{2}\right]} \quad \text{(C-6)}$$

D
Propriedades do sinal de transmissão proposto, caracterizado por um processo estocástico

D.1
Potência Média

A potência média, P_m, do sinal de transmissão, $s(t)$, é calculada como o valor esperado do sinal $s(t)$, descrito em (4-20), elevado ao quadrado, conforme (D-1).

$$\begin{aligned} P_m &= E[s^2(t)] = E[2P\cos^2(2\pi f_c t + \theta(t) + \lambda)] \\ &= E\left[P(1 + \cos(4\pi f_c t + 2\theta(t) + 2\lambda))\right] \\ &= E[P] + [P\cos(4\pi f_c t + 2\theta(t) + 2\lambda)] \end{aligned} \tag{D-1}$$

O teorema do valor esperado atesta que o valor esperado de uma função de duas variáveis, $g(\theta, \lambda)$ pode ser calculado como

$$E[g(\theta,\lambda)] = E_{\theta(t)}\{E_\lambda[g(\theta,\lambda)|\theta = \Theta]\} \tag{D-2}$$

Assim, utilizando (D-2), a segunda parcela de (D-1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} P\,E\left[\cos(4\pi f_c t + 2\theta(t) + 2\lambda))\right] &= P\,E_{\theta(t)}\left\{E_{\lambda(t)}\left[\cos(4\pi f_c t + 2\theta(t) + 2\lambda) \mid \theta(t) = \Theta(t)\right]\right\} \\ &= P\,E_{\theta(t)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\cos(4\pi f_c t + 2\Theta(t) + 2\lambda)p_\lambda(\Lambda)d\Lambda\right\} \end{aligned} \tag{D-3}$$

Conforme previamente descrito no equacionamento do sinal de transmissão, (4-20), λ é uma variável aleatória uniforme, distribuída entre $(0, 2\pi]$. Sendo assim, $p_\lambda(\Lambda) = \frac{1}{2\pi}$ e por esta razão, (D-3) pode ser reescrita como

$$P\,E\left[\cos(4\pi f_c t + 2\Theta(t) + 2\lambda)\right] = P\,E_{\theta(t)}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(4\pi f_c t + 2\Theta(t) + 2\lambda)d\Lambda\right\} \tag{D-4}$$

A integral descrita em (D-4) é nula, uma vez que corresponde à integral de uma senoide cujos limites de integração equivalem à um número inteiro de períodos da mesma. Assim, chega-se que a potência média do sinal de transmissão é dada por

$$P_m = E[P] + PE\left[\cos(4\pi f_c t + 2\theta(t) + 2\lambda)\right] = P \tag{D-5}$$

D.2
Função Média

A função média, $m_s(t)$, do sinal de transmissão, $s(t)$, é calculada como o valor esperado do sinal $s(t)$, descrito em (4-20), como

$$m_s(t) = E[s(t)] = E[\sqrt{2P}\cos(2\pi f_c t + \theta(t) + \lambda)] \tag{D-6}$$

Conforme descrito na seção anterior deste Apêndice, o teorema do valor esperado atesta que o valor esperado de uma função de duas variáveis, $g(\theta, \lambda)$ pode ser calculado conforme (D-2). Assim, (D-6) é reescrita como

$$\begin{aligned} E\left[\sqrt{2P}\cos(2\pi f_c t + \theta(t) + \lambda)\right] &= E_{\theta(t)}\left\{E_{\lambda(t)}\left[\sqrt{2P}\cos(2\pi f_c t + \theta(t) + \lambda) \mid \theta(t) = \Theta(t)\right]\right\} \\ &= E_{\theta(t)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2P}\cos(\pi f_c t + \Theta(t) + \lambda) p_\lambda(\Lambda) d\Lambda\right\} \end{aligned} \tag{D-7}$$

Assim como na derivação da potência média, realizada na seção anterior, na presente análise também se leva em consideração o fato de λ ser uma variável aleatória uniforme, distribuída entre $(0, 2\pi]$. Desta forma, $p_\lambda(\Lambda) = \frac{1}{2\pi}$ e por consequência, (D-7) é dada por

$$E\left[\sqrt{2P}\cos(2\pi f_c t + \Theta(t) + \lambda)\right] = E_{\theta(t)}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \sqrt{2P}\cos(2\pi f_c t + \Theta(t) + \lambda) d\Lambda\right\} \tag{D-8}$$

A integral descrita em (D-8) é nula, uma vez que corresponde à integral de uma senoide cujos limites de integração equivalem à um número inteiro de períodos da mesma. Assim, chega-se que a média do sinal de transmissão é constante e nula, ou seja,

$$m_s(t) = 0 \tag{D-9}$$

D.3

Função Autocorrelação

A função autocorrelação de um Processo Estocástico $x(t)$, real, $R_x(t_1, t_2)$, é dada por

$$R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] \tag{D-10}$$

Ainda, se $x(t)$ for Estacionário no Sentido Amplo (ESA), (D-10) é dada em função apenas da diferença entre os instantes de tempo, $\tau = t_1 - t_2$, como

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t-\tau)] \tag{D-11}$$

Consequentemente, a densidade espectral de potência do processo, $S_x(f)$, é, conforme descrito pelo teorema de Wiener-Khintchine, dada por,

$$S_x(f) = \mathcal{F}^{-1}\left[R_s(\tau)\right] \tag{D-12}$$

A função autocorrelação do processo estocástico real $s(t)$, descrito em (4-20), é, então, definida a partir de (D-10) por

$$\begin{aligned} R_s(t_1, t_2) &= E[s(t_1)s(t_2)] \\ &= E\left[2P\cos(2\pi f_c t + \theta(t_1) + \lambda)\cos(2\pi f_c t + \theta(t_2) + \lambda)\right] \end{aligned} \tag{D-13}$$

Sabe-se que o produto de dois cossenos pode ser escrito como

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \tag{D-14}$$

Desta forma, utilizando-se (D-14), (D-13) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} R_s(t_1, t_2) &= E\Big[P\Big(\cos\left(2\pi f_c(t_1+t_2) + \theta(t_1) + \theta(t_2) + 2\lambda\right) + \\ &\quad + \cos\left(2\pi f_c(t_1 - t_2) + \theta(t_1) - \theta(t_2)\right)\Big)\Big] \end{aligned} \tag{D-15}$$

Analisando-se o valor esperado das duas parcelas de (D-15) separadamente, tem-se que o valor esperado da primeira parcela é dado por

$$E[\cos(2\pi f_c(t_1+t_2) + \theta(t_1) + \theta(t_2) + 2\lambda)] = E[g(\theta(t_1), \theta(t_2), \lambda)] \tag{D-16}$$

Utilizando-se (D-2), descrita no cálculo da potência média, escreve-se (D-16) como

$$E[g(\theta_1,\theta_2,\lambda)] = E_{\theta_1\theta_2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(2\pi f_c(t_1+t_2)+\Theta_1+\Theta_2+2\lambda\right) p_\lambda(\Lambda)d\Lambda\right\} \tag{D-17}$$

onde $\theta(t_1) = \Theta_1$ e $\theta(t_2) = \Theta_2$.

Conforme descrito anteriormente, λ é uma variável aleatória uniforme distribuída entre $(0, 2\pi]$. Sendo assim, $p_\lambda(\Lambda) = \frac{1}{2\pi}$ logo, (D-17) é escrita como

$$E[g(\theta_1,\theta_2\lambda)] = E_{\theta_1\theta_2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(2\pi f_c(t_1+t_2)+\Theta_1+\Theta_2+2\lambda\right) d\Lambda\right\} \tag{D-18}$$

Desta maneira, observa-se que, assim como no cálculo da potência média do sinal, a integral descrita por (D-18) é nula. Sendo assim, chega-se que a função autocorrelação do sinal de transmissão é dada por

$$R_s(t_1,t_2) = PE\left[\cos(2\pi f_c(t_1-t_2)+\theta(t_1)-\theta(t_2))\right] \tag{D-19}$$

Utilizando-se as relações de Euller, pode-se escrever (D-19) como

$$\begin{aligned} R_s(t_1,t_2) &= PE\left[Re\left\{e^{j(2\pi f_c(t_1-t_2)+\theta(t_1)-\theta(t_2))}\right\}\right] \\ &= PE\left[Re\left\{e^{j2\pi f_c(t_1-t_2)}e^{j(\theta(t_1)-\theta(t_2))}\right\}\right] \\ &= PRe\left\{E\left[e^{j2\pi f_c(t_1-t_2)}e^{j(\theta(t_1)-\theta(t_2))}\right]\right\} \\ &= PRe\left\{e^{j2\pi f_c(t_1-t_2)}E\left[e^{j(\theta(t_1)-\theta(t_2))}\right]\right\} \end{aligned} \tag{D-20}$$

D.4
Média e variância da diferença entre fases do sinal de transmissão em momentos distintos

A diferença entre fases do sinal de transmissão em momentos distintos é representada pela variável aleatória $x_{t_1t_2}$, definida em (4-27). Neste apêndice deriva-se a sua média e variância.

Primeiramente deriva-se a média m de $x_{t_1t_2}$ como função do sinal modulador $a(t)$. Reescrevendo-se (4-27), a partir de (4-22) tem-se que

$$x_{t_1t_2} = K_p\int_{-\infty}^{t_1} a(\alpha)d\alpha - K_p\int_{-\infty}^{t_2} a(\alpha)d\alpha = K_p\int_{t_2}^{t_1} a(\alpha)d\alpha \tag{D-21}$$

O valor esperado da variável $x_{t_1t_2}$ é então dado por

$$m = E[x_{t_1t_2}] = K_p \int_{t_2}^{t_1} E[a(\alpha)]d\alpha \tag{D-22}$$

Note que, se o sinal modulador $a(t)$ tiver média nula, (D-22) também será nula, ou seja, $E[x_{t_1t_2}] = 0$.

A variância de de $x_{t_1t_2}$, σ^2, pode ser derivada de duas maneiras distintas: (i) em função de $\theta(t)$; (ii) em função do sinal modulador, $a(t)$. Note, a partir de (D-21) e (4-22), que a variância, σ^2, de $x_{t_1t_2}$ é escrita como

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E\left[(x_{t_1t_2} - m)^2\right] = E[x^2_{t_1t_2}] \\
&= E\left[K_p \int_{t_2}^{t_1} a(\alpha)d\alpha K_p \int_{t_2}^{t_1} a(\beta)d\beta\right] \\
&= K_p^2 \int_{t_2}^{t_1} \int_{t_2}^{t_1} E[a(\beta)a(\alpha)]d\alpha d\beta \\
&= K_p^2 \int_{t_2}^{t_1} \int_{t_2}^{t_1} R_a(\alpha - \beta)d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{D-23}$$

A solução de (D-23) advém reescrevendo-a como função de $g(x)$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{, se } t_2 < x < t_1; \\ 0 & \text{, caso contrário .} \end{cases} \tag{D-24}$$

A equação (D-23) é, então, dada por

$$\sigma^2 = K_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)g(\beta)R_a(\alpha - \beta)d\alpha d\beta \tag{D-25}$$

Seja a mudança de variável $\alpha - \beta = \gamma \rightarrow d\alpha = d\gamma$. Então, (D-25) é reescrita como

$$\sigma^2 = K_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_a(\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} g(\gamma + \beta)g(\beta)d\beta d\gamma \tag{D-26}$$

Observa-se que a integral sobre a variável β é uma convolução de dois retângulos de tamanho $t_1 - t_2 = \tau$. Sendo assim, sua solução é conhecida na literatura e é dada por uma função triângulo, $f(\gamma)$ descrita como

$$f(\gamma) = \begin{cases} \tau - |\gamma| & \text{, se } |\gamma| < \tau; \\ 0 & \text{, caso contrário .} \end{cases} \tag{D-27}$$

Como a função autocorrelação do sinal modulador, $R_a(\gamma)$ é uma função par, então tem-se, a partir de (D-27) e (D-26) que a variância, σ^2, de $x_{t_1 t_2}$ é dada por

$$\sigma^2 = 2K_p^2 \int_0^{|\tau|} R_a(\gamma)[\tau - |\gamma|]d\gamma \tag{D-28}$$

Alternativamente, a variância de $x_{t_1 t_2}$ também pode ser derivada em função do processo estocástico $\theta(t)$. Sabe-se que

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E\left[(x_{t_1 t_2} - m)^2\right] = E[x_{t_1 t_2}] \\ &= E\left[\theta(t_1)^2\right] - 2E\left[\theta(t_1)\theta(t_2)\right] + E\left[\theta(t_2)^2\right] \end{aligned} \tag{D-29}$$

E

Cálculo da função autocorrelação da envoltória complexa dos sinais de transmissão propostos, caracterizados por portadoras moduladas em frequência faixa larga

A função autocorrelação da envoltória complexa do sinal de transmissão, com respeito à frequência central, é dada conforme (4-63). Nota-se que a parcela dentro da integral pode ser reescrita, utilizando-se a relação trigonométrica

$$\frac{1 - cos(2a)}{2} = \sin^2 a \tag{E-1}$$

Assim, utilizando-se a relação trigonométrica descrita em (E-1), pode-se reescrever a função autocorrelação da envoltória complexa do sinal de transmissão, com respeito à frequência central, dada por (4-63) como

$$\begin{aligned} R_{\tilde{s}}(\tau) &= 2Pe^{-\left[\frac{K_p^2\tau^2}{2B_a}\int\limits_0^{B_a}\frac{\sin^2(\pi f\tau)}{\pi^2 f^2\tau^2}df\right]} \\ &= 2Pe^{[g_1(\tau)g_2(\tau)]} \end{aligned} \tag{E-2}$$

onde a função $g_1(\tau)$ é dada por

$$g_1(\tau) = \frac{K_p^2\tau^2}{2B_a} \tag{E-3}$$

e a função $g_2(\tau)$ é dada por

$$g_2(\tau) = \int\limits_0^{B_a}\frac{\sin^2(\pi f\tau)}{\pi^2 f^2\tau^2}df \tag{E-4}$$

Diz-se que uma modulação FM é de faixa larga se a constante de modulação K_p for muito maior do que a largura de banda do sinal modulador, B_a, conforme (E-5).

$$K_p \gg B_a \tag{E-5}$$

Se (E-5) for verdade, então, observa-se que $g_1(\tau)$ cresce muito rápido conforme τ aumenta e consequentemente, $e^{-\frac{K_p^2\tau^2}{2B_a}}$ decresce muito rápido. Assim sendo, apenas para valores de τ pequenos $R_s(\tau)$ não assumirá valores próximos de 0.

Consequentemente, considerando apenas valores τ pequenos, pode-se dizer que

$$\sin(\pi f \tau) \approx \pi f \tau \tag{E-6}$$

Desta forma, o valor da função $g_2(\tau)$ é dado, aproximadamente, por B_a. Assim, a função autocorrelação da envoltória complexa com respeito à frequência central do sinal de transmissão com modulação em frequência faixa larga é dada, a partir de (E-2) e das aproximações descritas por

$$R_{\tilde{s}}(\tau) \;=\; 2Pe^{-\left[\frac{K_p^2\tau^2}{2B_a}B_a\right]} = 2Pe^{-\left[\frac{\tau^2}{2\frac{1}{K_p^2}}\right]} \tag{E-7}$$

F
Cálculo da largura de banda dos sinais de transmissão propostos, caracterizados por portadoras moduladas em frequência faixa larga

Neste trabalho, define-se a largura de banda da envoltória complexa do sinal de transmissão com respeito à frequência central, como a faixa de frequências que concentra uma determinada porcentagem da potência total do sinal. Assim, pode-se escrever

$$kP_{total} = \int_{-B_{\tilde{s}}/2}^{B_{\tilde{s}}/2} S_{\tilde{s}}(f)df \tag{F-1}$$

onde k é a porcentagem da energia total concentrada dentro da largura de banda $B_{\tilde{s}}$ da envoltória complexa do sinal de transmissão, $s(t)$.

Para portadoras moduladas em frequência faixa larga, tem-se, a partir de (F-1) e (4-66), que

$$k2P = 2P \int_{-B_{\tilde{s}}/2}^{B_{\tilde{s}}/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-f^2}{2\sigma^2}} df \tag{F-2}$$

onde $\sigma = \frac{K_p}{2\pi}$.

Realizando-se uma mudança de variável, $\gamma = \frac{f}{\sigma} \longrightarrow d\gamma = \frac{df}{\sigma}$ tem-se que (F-2) pode ser reescrita como

$$k = \int_{-\frac{B_{\tilde{s}}}{2\sigma}}^{\frac{B_{\tilde{s}}}{2\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\gamma^2}{2}} d\Gamma \tag{F-3}$$

A análise de (F-3) é feita utilizando-se a função Q conhecida na literatura (4-72), conforme (F-4).

$$k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\frac{B_{\tilde{s}}}{2\sigma}}^{\infty} e^{\frac{-\gamma^2}{2}} d\gamma - \int_{\frac{B_{\tilde{s}}}{2\sigma}}^{\infty} e^{\frac{-\gamma^2}{2}} d\gamma \right]$$

$$= Q\left[-\frac{B_{\tilde{s}}}{2\sigma}\right] - Q\left[\frac{B_{\tilde{s}}}{2\sigma}\right] \tag{F-4}$$

Utilizando-se a propriedade da função $Q(x)$ que diz que $Q(-x) = 1 - Q(x)$, tem-se que

$$\begin{aligned} 1 - 2Q\left[\frac{B_{\tilde{s}}}{2\sigma}\right] &= k \\ Q\left[\frac{B_{\tilde{s}}}{2\sigma}\right] &= \frac{1-k}{2} \end{aligned} \tag{F-5}$$

G
Função autocorrelação do sinal de saída do filtro casado quando os sinais de transmissão propostos, caracterizados por portadoras moduladas em frequência por sinais aleatórios, são utilizados

A função autocorrelação do processo estocástico que caracteriza o sinal de saída do filtro casado, $\tilde{x}_i'(t)$ é dada por

$$R_{\tilde{x}'(t)}(\tau) = E[\tilde{x}'(t+\tau)\tilde{x}'^*(t)] \tag{G-1}$$

Esta função, é escrita, a partir de (3-41) como

$$R_{\tilde{x}'(t)}(\tau) = A^2 \int_0^{T_{int}} \int_0^{T_{int}} E[\tilde{s}(\alpha - T_0)\tilde{s}^*(\alpha - t - \tau)\tilde{s}^*(\beta - T_0)\tilde{s}(\beta - t)] d\alpha d\beta \tag{G-2}$$

onde $A = A_i$.

Reescreve-se (G-2), a partir de (4-47), como

$$R_{\tilde{x}'(t)}(\tau) = A^2 4P^2 \int_0^{T_{int}} \int_0^{T_{int}} E[e^{[\theta(\alpha - T_0) - \theta(\alpha - t - \tau) - \theta(\beta - T_0) + \theta(\beta - t)]}] d\alpha d\beta \tag{G-3}$$

Seja, então, a variável aleatória x, dada por

$$x = \theta(\alpha - T_0) - \theta(\alpha - t - \tau) - \theta(\beta - T_0) + \theta(\beta - t) \tag{G-4}$$

Observa-se, então, que x pode ser escrita, em notação matricial, como

$$x = \mathbf{A}\ \mathbf{x} \tag{G-5}$$

onde

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \tag{G-6}$$

e

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta(\alpha - T_0) \\ \theta(\alpha - t - \tau) \\ \theta(\beta - T_0) \\ \theta(\beta - t) \end{bmatrix} \tag{G-7}$$

Assim, uma vez definida a variável x, note que (G-3) é, então, dada por

$$\begin{aligned} R_{\tilde{x}'(t)}(\tau) &= A^2 4P^2 \int_0^{T_{int}} \int_0^{T_{int}} E[e^{jvx}] d\alpha d\beta \\ &= A^2 4P^2 \int_0^{T_{int}} \int_0^{T_{int}} M_x(1) d\alpha d\beta \end{aligned} \tag{G-8}$$

onde $M_x(1)$ é a função característica da varíavel x.

Uma vez que $\theta(t)$ é uma variável aleatória gaussiana com média nula, então, note que a variável x também é uma variável aleatória gaussiana e de média nula. Desta forma, (G-8) pode ser reescrita como

$$R_{\tilde{x}'(t)}(\tau) = A^2 4P^2 \int_0^{T_{int}} \int_0^{T_{int}} e^{-\frac{\sigma^2(\tau)}{2}} d\alpha d\beta \tag{G-9}$$

onde $\sigma^2(\tau)$ é a variância de x, dada por

$$\sigma^2(\tau) = AKA^T \tag{G-10}$$

onde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} R_\theta(0) & R_\theta(t+\tau-T_0) & R_\theta(\alpha-\beta) & R_\theta(\alpha-\beta-T_0+t) \\ R_\theta(T_0-t-\tau) & R_\theta(0) & R_\theta(\alpha-\beta+T_0-t-\tau) & R_\theta(\alpha-\beta-\tau) \\ R_\theta(\beta-\alpha) & R_\theta(\beta-\alpha-T_0+t+\tau) & R_\theta(0) & R_\theta(t-T_0) \\ R_\theta(\beta-\alpha+T_0-t) & R_\theta(\beta-\alpha+\tau) & R_\theta(T_0-t) & R_\theta(0) \end{bmatrix} \tag{G-11}$$

onde $R_\theta(t)$ é a função autocorrelação da variável $\theta(t)$ definida em (4-62).

Então, $\sigma^2(\tau)$ é dado por

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau) &= 4R_\theta(0) + 2\Big[- R_\theta(t+\tau-T_0) - R_\theta(\alpha-\beta) + R_\theta(\alpha-\beta-T_0+t) \\ &+ R_\theta(\alpha-\beta+T_0-t-\tau) - R_\theta(\alpha-\beta-\tau) - R_\theta(t-T_0)\Big] \end{aligned} \tag{G-12}$$

Por fim, de (G-9) e (G-12), chega-se na função autocorrelação do sinal de saída do filtro correlator.

H
Potência do ruído de saída do filtro correlator quando os sinais de transmissão propostos, caracterizados por portadoras moduladas em frequência por sinais aleatórios, são utilizados

O valor esperado da potência média do ruído na saída de i-ésimo filtro, $P_{\tilde{n}'_i}$, é dado, a partir de (3-37) e (B-9) por

$$P_{\tilde{n}'_i} = N_0 E\left[\int_{-\frac{B_{\tilde{s}_i}}{2}}^{\frac{B_{\tilde{s}_i}}{2}} \left|\tilde{S}_i^*(f)\right|^2\right] df \tag{H-1}$$

onde N_0 é o nível espectral da envoltória complexa do ruído na entrada do i-ésimo filtro casado e $B_{\tilde{s}_i}$ e $\tilde{S}_i^*(f)$ são, respectivamente, a largura de banda e o complexo conjugado da transformada de Fourier da envoltória complexa do i-ésimo pulso de transmissão.

Note que o valor esperado descrito em (H-1) pode ser escrito como

$$E\left[\int_{-\frac{B_{\tilde{s}_i}}{2}}^{\frac{B_{\tilde{s}_i}}{2}} \left|\tilde{S}_i^*(f)\right|^2\right] df = \int_{-\frac{B_{\tilde{s}_i}}{2}}^{\frac{B_{\tilde{s}_i}}{2}} E\left[\left|\tilde{S}_i^*(f)\right|^2\right] df \tag{H-2}$$

O valor esperado descrito em (H-2), por sua vez, pode ser escrito como

$$E\left[\left|\tilde{S}_i^*(f)\right|^2\right] = E\left[\tilde{S}_i^*(f)\tilde{S}_i(f)\right] \tag{H-3}$$

Note que $\tilde{S}_i(f)$ é a transformada de Fourier do sinal de transmissão $s_i(t)$. Assim, reescrevendo (H-3), tem-se

$$\begin{aligned}
E\left[\left|\tilde{S}_i^*(f)\right|^2\right] &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s} *_i (\alpha) e^{j2\pi\alpha} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_i(\beta) e^{-j2\pi\beta} d\beta\right] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_i(\beta) e^{-j2\pi\beta} \tilde{s} *_i (\alpha) e^{j2\pi\alpha} d\alpha d\beta\right] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s} *_i (\alpha)\tilde{s}_i(\beta) e^{-j2\pi(\beta-\alpha)} d\alpha d\beta\right] \qquad \text{(H-4)}
\end{aligned}$$

Realizando uma mudança de variável, $\gamma = \beta - \alpha \rightarrow d\gamma = -d\alpha$, e observando que os limites de integração são dados pelo intervalo $(0, T_{int}]$, onde T_{int} é o tempo de integração, (H-4) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} E\left[\left|\tilde{S}_i^*(f)\right|^2\right] &= \int_0^{T_{int}}\int_{-\infty}^{\infty} E\left[\tilde{s}*_i(\beta-\gamma)\tilde{s}_i(\beta)\right]e^{-j2\pi\gamma}d\gamma d\beta \\ &= \int_0^{T_{int}}\int_{-\infty}^{\infty} R_{\tilde{s}_i}(-\gamma)e^{-j2\pi\gamma}d\alpha d\beta \end{aligned} \quad \text{(H-5)}$$

onde $R_{\tilde{s}_i}(\tau)$ é a função autocorrelação da envoltória complexa do sinal de transmissão.

Note que, de acordo com o teorema de Wiener-Khintchine (D-12) e, observando que a função autocorrelação da envoltória complexa do sinal de transmissão é par, ou seja, $R_{\tilde{s}}(-\gamma) = R_{\tilde{s}}(\gamma)$, (H-5) pode, finalmente, ser escrita como

$$E\left[\left|\tilde{S}_i^*(f)\right|^2\right] = T_{int}S_{\tilde{s}_i}(f) \quad \text{(H-6)}$$

onde $S_{\tilde{s}_i}(f)$ é a densidade espectral de potência da envoltória complexa do sinal de transmissão.

A potência média da envoltória complexa do ruído na saída do filtro casado, descrita em (H-1), é, então, dada por

$$P_{\tilde{n}_i'} = N_0 T_{int}\int_{-\frac{B_{\tilde{s}_i}}{2}}^{\frac{B_{\tilde{s}_i}}{2}} S_{\tilde{s}_i}(f)df \quad \text{(H-7)}$$

Para sinais caracterizados por portadoras moduladas em frequência faixa larga, a potência média da envoltória complexa do ruído na saída do filtro casado (H-7) é dada, a partir de (F-5), por

$$P_{\tilde{n}_i'} = N_0 T_{int} 2P\left[1 - 2Q\left(\frac{B_{\tilde{s}_i}}{2\pi}\right)\right] \quad \text{(H-8)}$$

onde T_{int} é o tempo de integração e $2P$ é a potência média da envoltória complexa do sinal de transmissão.

I
Potência da interferência causada por ambiguidade em distância na saída da compressão de pulsos, quando os sinais de transmissão propostos, caracterizados por portadoras moduladas em frequência por sinais aleatórios, são utilizados

A potência da interferência provocada por alvos ambíguos em distância, $\tilde{u}'_i(t)$ (5-42), no instante t, na saída da compressão de pulsos, é dada por

$$P_{\tilde{u}'_i(t)}(t) = E\left[|\ \tilde{u}'_i(t)\ |^2\right] \quad = \quad E[\tilde{u}'_i(t)\tilde{u}'^*_i(t)] = \sum_{\substack{j=1\\ j,k\neq i}}^{N}\sum_{k=1}^{N} \tilde{x}'_{ij}(t)\tilde{x}'^*_{ik}(t) \tag{I-1}$$

De acordo com (5-46), tem-se que (I-1) é dada por

$$\begin{aligned} E\left[|\ \tilde{u}'_i(t)\ |^2\right] &= \sum_{\substack{j=1\\ j,k\neq i}}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int_0^{T_{int}}\int_0^{T_{int}} A_jA_kE\left[\tilde{s}_j(\alpha-T_j)\tilde{s}^*_k(\beta-T_k)\tilde{s}^*_i(\alpha-t)\tilde{s}_i(\beta-t)\right]d\alpha d\beta \\ &= \sum_{\substack{j=1\\ j,k\neq i}}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int_0^{T_{int}}\int_0^{T_{int}} A_jA_kR_{\tilde{s}_j\tilde{s}_k}(\alpha-\beta+T_k-T_j)R_{\tilde{s}_i}(\beta-\alpha)d\alpha d\beta \end{aligned} \tag{I-2}$$

Note que, se $j \neq k$, então, a partir de (4-52) tem-se que $R_{\tilde{s}_j\tilde{s}_j}(\tau) = 0$, $\forall\ \tau$. Desta forma, (I-2) pode ser reescrita como

$$E\left[|\ \tilde{u}'_i(t)\ |^2\right] = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} A_j^2\int_0^{T_{int}}\int_0^{T_{int}} R_{\tilde{s}_j}(\alpha-\beta)R_{\tilde{s}_i}(\beta-\alpha)\, d\alpha\, d\beta \tag{I-3}$$

Uma vez que a função autocorrelação é igual para todos os pulsos de transmissão, ou seja, $R_{\tilde{s}_j}(t) = R_{\tilde{s}_i}(t)$, $\forall\ i,j$, e ainda, sabendo que esta é uma função par, então (I-3) é reescrita como

$$E\left[|\ \tilde{u}'_i(t)\ |^2\right] = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} A_j^2\int_0^{T_{int}}\int_0^{T_{int}} R^2_{\tilde{s}_j}(\alpha-\beta)d\alpha d\beta \tag{I-4}$$

Note que (I-4) pode ser reescrita, utilizando-se duas funções retângulos, definidas em (4-54), como

$$E\left[|\ \tilde{u}_i'(t)\ |^2\right] = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} A_j^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ret_T(\alpha)ret_T(\beta)R_{\tilde{s}_j}^2(\alpha-\beta)d\alpha d\beta \tag{I-5}$$

Seja a mudança de variável $\gamma = \alpha - \beta \rightarrow d\gamma = -d\beta$. Então, (I-5) é dada por

$$E\left[|\ \tilde{u}_i'(t)\ |^2\right] = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} A_j^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ret_T(\alpha)ret_T(\gamma-\alpha)d\alpha\ R_{\tilde{s}_j}^2(\gamma)d\gamma \tag{I-6}$$

Note que a integral sobre a variável α é uma convolução de dois retângulos de tamanho T_{int}, resultando em um triângulo de tamanho $2T_{int}$. Assim, (I-6) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} E\left[|\ \tilde{u}_i'(t)\ |^2\right] &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} A_j^2 T_{int} \int_{-T_{int}}^{T_{int}} \left(1 - \frac{|\gamma|}{T_{int}}\right) R_{\tilde{s}_j}^2(\gamma)d\gamma \\ &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} A_j^2 2T_{int} \int_{0}^{T_{int}} \left(1 - \frac{\gamma}{T_{int}}\right) R_{\tilde{s}_j}^2(\gamma)d\gamma \end{aligned} \tag{I-7}$$

A expressão apresentada em (I-7) representa a formulação geral da potência da interferência causada por ambiguidade em distância, na saída da compressão de pulsos, em sistemas que empregam formas de onda caracterizadas por portadoras moduladas em frequência onde o sinal modulador é aleatório. Conforme dito anteriormente, a potência da interferência não depende do instante de tempo t, ou seja, a potência instantânea da mesma é igual a sua potência média.

Considerando-se sinais de transmissão caracterizados por portadoras moduladas em frequência faixa larga, então, a partir de (4-65) tem-se que (I-7) pode ser reescrita como

$$E\left[|\ \tilde{u}_i'(t)\ |^2\right] = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} A_j^2 4P^2 2T_{int} \left[\int_0^{T_{int}} e^{-\frac{\gamma^2}{\frac{1}{K_p^2}}} - \int_0^{T_{int}} \frac{\gamma}{T_{int}} e^{-\frac{\gamma^2}{\frac{1}{K_p^2}}} d\gamma\right] \tag{I-8}$$

A solução da primeira integral descrita em (I-8) é conhecida e dada através da função $Q(x)$ e o segundo termo também é integrável. Sendo assim, (I-8) é finalmente escrita como

$$E\left[\mid \tilde{u}_i'(t) \mid^2\right] = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} A_j^2 4P^2 T_{int}^2 \left[\frac{a\sqrt{\pi}}{B_{\tilde{s}}T_{int}}\left(1-2Q\left(\sqrt{2}\frac{B_{\tilde{s}}T_{int}}{a}\right)\right)-\frac{a^2}{B_{\tilde{s}}^2 T_{int}^2}\left(1-e^{-\frac{B_{\tilde{s}}^2 T_{int}^2}{a^2}}\right)\right] \tag{I-9}$$

onde $a = \frac{B_{\tilde{s}}}{K_p}$.

J
Resolução em distância de sistemas que empregam os sinais de transmissão propostos, caracterizados por portadoras moduladas em frequência por sinais aleatórios

Neste Apêndice, investiga-se a resolução em distância de sistemas radar que empregam as formas de ondas de transmissão propostas, caracterizadas por portadoras moduladas em frequência por sinais aleatórios. Conforme descrito no Capítulo 3, este parâmetro está associado à largura de 3dB da saída do módulo filtro correlator, (3-44). Uma vez que o valor esperado da saída do filtro correlator é dado por (5-3), então, faz-se necessário analisar as larguras de 3dB da função autocorrelação das envoltórias complexas dos sinais de transmissão propostos.

Seja, então, a modulação em frequência faixa larga. Observa-se, de (4-65), que o máximo de $R_{\tilde{s}}(\tau)$ ocorre para $\tau = 0$. Como a função autocorrelação é uma função par, a largura de 3dB do receptor é dada por duas vezes o valor de τ_{3dB} para o qual tem-se que a relação descrita em (J-1) é valida.

$$R_{\tilde{s}}(\tau_{3dB}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \max R_{\tilde{s}}(\tau) \tag{J-1}$$

Então, tem-se, a partir de (J-1) e de (4-65), que os valores τ_{3dB} responsáveis pela resolução em distância são dados por

$$2Pe^{-\left[\frac{K_p^2 \tau_{3dB}^2}{2}\right]} = \frac{2P}{\sqrt{2}} \longrightarrow \tau_{3dB} = \pm \frac{\sqrt{\ln 2}}{K_p} \tag{J-2}$$

Então, o valor esperado da resolução em distância do sistema que emprega o sinal proposto, caracterizado por uma portadora modulada em frequência faixa larga, associado à largura de 3dB da função autocorrelação do processo estocástico que caracteriza a envoltória complexa deste sinal, descrita em (4-65), é dado, de (3-44), por

$$\Delta R_{\tau_{3dB}} = \frac{c}{2}\frac{2\sqrt{\ln 2}}{K_p} \approx \frac{c}{2}\frac{1,665}{K_p} \tag{J-3}$$

K
Razão entre a potência de pico e a potência de lóbulos secundários quando os sinais de transmissão propostos, caracterizados por portadoras moduladas em frequência por sinais aleatórios, são utilizados

A potência do sinal de saída da compressão de pulsos em um determinado instante de tempo t, quando os sinais de transmissão propostos, caracterizados por portadoras moduladas em frequência por sinais aleatórios, são utilizados, é dada por

$$P_{\tilde{x}'_i}(t) = E\left[\mid \tilde{x}'_i(t) \mid^2\right] \tag{K-1}$$

Seja $\lambda = t - T_0$, então, de (G-9), (K-1) é dada por

$$R_{\tilde{x}'_i(t)}(0) = A_i^2 4P^2 \int_0^{T_{int}} \int_0^{T_{int}} e^{-\frac{\sigma^2(0)}{2}} d\alpha d\beta \tag{K-2}$$

onde $\sigma^2(0)$ é dada, conforme (G-12), por

$$\sigma^2(0) \quad = \quad 4R_\theta(0) - 4R_\theta(\lambda) - 4R_\theta(\alpha-\beta) + 2R_\theta(\alpha-\beta+\lambda) + 2R_\theta(\alpha-\beta-\lambda) \tag{K-3}$$

Então, a partir de (K-3), e realizando-se a mudança de variável de integração $\gamma = \alpha - \beta \;\rightarrow\; d\gamma = -d\beta$, tem-se que (K-2) é dada por

$$R_{\tilde{x}'_i(t)}(0) \quad = \quad A_i^2 4P^2 \int_0^{T_{int}} \int_\alpha^{\alpha - T_{int}} e^{-\frac{1}{2}[4R_\theta(0)-4R_\theta(\lambda)-4R_\theta(\gamma)+2R_\theta(\gamma+\lambda)+2R_\theta(\gamma-\lambda)]} d\gamma\, d\alpha \tag{K-4}$$

A partir de (4-62), tem-se que (K-4) é dada por

$$R_{\tilde{x}'_i(t)}(0) \quad = \quad A_i^2 4P^2 \int_0^{T_{int}} \int_\alpha^{\alpha - T_{int}} e^{-\frac{K_p^2}{4\pi^2 B_a}\left[\int_0^{B_a} \frac{2}{f^2} - \frac{2\cos(2\pi f\lambda)}{f^2} - \frac{2\cos(2\pi f\gamma)}{f^2} + \frac{\cos(2\pi f(\gamma+\lambda))}{f^2} + \frac{\cos(2\pi f(\gamma-\lambda))}{f^2} df\right]} d\gamma\, d\alpha \tag{K-5}$$

Utilizando-se a relação trigonométrica

$$1 - \cos(2a) = 2\sin^2(a) \tag{K-6}$$

tem-se que (K-5) é dada por

$$R_{\tilde{x}_i'(t)}(0) = A_i^2 4P^2 e^{-\frac{K_p^2}{\pi^2 B_a^2} f(\pi\lambda B_a)} \int_0^{T_{int}} \int_\alpha^{\alpha - T_{int}} e^{-\frac{K_p^2}{2\pi^2 B_a^2}[2f(\pi\gamma B_a) - f(\pi(\gamma+\lambda)B_a) + f(\pi(\gamma-\lambda)B_a)]} d\gamma\, d\alpha \tag{K-7}$$

onde

$$f(x) = x \int_0^x \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2} d\alpha \tag{K-8}$$

A expressão apresentada em (K-7) refere-se à potência da saída da compressão de pulsos em um determinado instante de tempo $\lambda = t - T_0$, quando sinais de transmissão caracterizados por portadoras moduladas em frequência, aqui propostos, são utilizados.

Reescrevendo a integral dupla descrita em (K-7) como uma integral simples, conforme feito anteriormente, tem-se que (K-7) pode ser escrita como

$$R_{\tilde{x}_i'(t)}(0) = C_i e^{-\frac{K_p^2}{\pi^2 B_a^2} f(\pi\lambda B_a)} \frac{2}{T_{int}^2} \int_0^{T_{int}} T_{int} \left(1 - \frac{\gamma}{T_{int}}\right) e^{-\frac{K_p^2}{2\pi^2 B_a^2}[2f(\pi\gamma B_a) - f(\pi(\gamma+\lambda)B_a) + f(\pi(\gamma-\lambda)B_a)]} d\gamma \tag{K-9}$$

onde $C_i = A_i^2 4P^2 T_{int}^2$.

Consequentemente, de (5-12), (K-1) e (K-9), tem-se que a razão entre a potência do sinal em um determinado instante de tempo t e a potência do pico associada à saída da compressão de pulsos, quando sinais de transmissão caracterizados por portadoras moduladas em frequência faixa larga são utilizados, é dada por

$$\frac{P_{\tilde{x}_i'}(t)}{P_{\tilde{x}_i'}(T_0)} = e^{-\frac{K_p^2}{\pi^2 B_a^2} f(\pi\lambda B_a)} \frac{2}{T_{int}^2} \int_0^{T_{int}} T_{int} \left(1 - \frac{\gamma}{T_{int}}\right) g(\gamma, \lambda) d\gamma \tag{K-10}$$

onde

$$g(\gamma, \lambda) = e^{-\frac{K_p^2}{2\pi^2 B_a^2}[2f(\pi\gamma B_a) - f(\pi(\gamma+\lambda)B_a) + f(\pi(\gamma-\lambda)B_a)]} \tag{K-11}$$

A potência do sinal de saída do bloco integrador em um determinador instante de tempo t, quando sinais de transmissão caracterizados por portadoras moduladas em frequência faixa larga são utilizados, é dada por

$$P_{\tilde{x}'_{int}}(t) = E\left[\mid \tilde{x}'_{int}(t) \mid^2\right] \quad \text{(K-12)}$$

Seja, novamente, $\lambda = t - T_0$. A potência do sinal na saída do integrador em um determinado instante de tempo λ é dada, a partir de (3-34), como

$$\begin{aligned} E\left[\mid \tilde{x}'_{int}(t) \mid^2\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{n_p}\sum_{j=1}^{n_p} \tilde{x}'_i(t)\tilde{x}'^*_j(t)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n_p} E\left[\mid \tilde{x}'_i(t) \mid^2\right] + \sum_{i=1}^{n_p}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n_p} E\left[\tilde{x}'_i(t)\tilde{x}'^*_j(t)\right] \end{aligned} \quad \text{(K-13)}$$

Considerando-se que os sinais de saída da compressão de pulsos em instantes de tempo distintos são estatisticamente independentes, então, utilizando-se (K-9), (5-3) e (4-65), tem-se que a potência do sinal na saída do integrador é dada por

$$P_{\tilde{x}'_{int}}(t) = n_p C_i e^{-\frac{K_p^2}{\pi^2 B_a^2} f(\pi\lambda B_a)} \left(\frac{2}{T_{int}^2}\int_0^{T_{int}} T_{int}\left(1 - \frac{\gamma}{T_{int}}\right) g(\gamma,\lambda)d\gamma + (n_p - 1)\right) \quad \text{(K-14)}$$

Consequentemente, de (5-16), (K-12) e (K-14), tem-se que a razão entre a potência do sinal em um determinado instante de tempo t, e a potência do pico associada à saída do bloco integrador, quando os sinais de transmissão propostos são utilizados, é dada por

$$\frac{P_{\tilde{x}'_{int}}(t)}{P_{\tilde{x}'_{int}}(T_0)} = \frac{1}{n_p} e^{-\frac{K_p^2}{\pi^2 B_a^2} f(\pi\lambda B_a)} \left(\frac{2}{T_{int}^2}\int_0^{T_{int}} T_{int}\left(1 - \frac{\gamma}{T_{int}}\right) g(\gamma,\lambda)d\gamma + (n_p - 1)\right) \quad \text{(K-15)}$$