

3 Modelagem Matemática

A potência agregada interferente produzida no receptor do Serviço Fixo Terrestre (FS) pelos diversos satélites interferentes é dada, em Watt [W], por

$$I = \sum_{j=1}^m 10^{I_j/10} \quad (3-1)$$

onde m é o número de satélites “ativos” visíveis ao receptor FS e I_j é a potência interferente devida ao j -ésimo satélite, expressa em dB[W], dada por

$$I_j = pfd(\epsilon_j) + 10 \log \frac{\lambda^2}{4\pi} + G_{FS_j} - L_F - L_{At}(\theta, \epsilon_j) \quad (3-2)$$

onde $pfd(\epsilon_j)$ é a densidade de fluxo de potência produzida na superfície da Terra pelo j -ésimo satélite em condição de propagação de espaço livre expressa em dB[W/m²], que depende do ângulo de elevação ϵ_j do satélite j em relação à posição do receptor FS (ângulo de chegada). Ainda em (3-2), λ é o comprimento de onda associado à frequência da portadora interferente, G_{FS_j} é o ganho da antena receptora do receptor FS na direção do j -ésimo satélite, L_F é a perda do alimentador da antena do receptor FS e $L_{At}(\theta, \epsilon_j)$ é a atenuação devida aos gases atmosféricos, que depende da latitude θ do receptor FS e do ângulo de elevação ϵ_j do satélite j .

O cálculo de I_j em (3-2) depende da posição geográfica \mathbf{x}_j do satélite j , dada por sua distância ao centro da Terra r_j , sua latitude θ_j e sua longitude ϕ_j , ou seja

$$\mathbf{x}_j = (r_j \quad \theta_j \quad \phi_j)^T \in \mathbb{R}^3 \quad (3-3)$$

No caso de satélites não-geoestacionários (non-GSO), esta posição é variante no tempo e é aqui modelada como um vetor aleatório \mathbf{x}_j . Neste caso, as potências interferentes I_j são variáveis aleatórias e, conseqüentemente, a potência interferente I definida em (3-1) também é uma variável aleatória.

Assim, seja \mathbf{x} o vetor de dimensão $3m$ que especifica as posições dos m satélites

interferentes, definido por

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T \quad \mathbf{x}_2^T \cdots \mathbf{x}_m^T)^T \quad (3-4)$$

A função densidade de probabilidade da potência I pode então ser obtida por

$$p_I(\gamma) = \iint_{\Omega_{\mathbf{x}}} p_{I|\mathbf{x}=\mathbf{x}}(\gamma) p_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (3-5)$$

onde $\Omega_{\mathbf{x}}$ corresponde ao espaço de amostras do vetor \mathbf{x} , $p_{I|\mathbf{x}=\mathbf{x}}(\gamma)$ é a função densidade de probabilidade condicional da variável aleatória I dado que $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ e $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{X})$ denota a densidade de probabilidade conjunta do vetor \mathbf{x} . A função distribuição de probabilidade I definida como

$$F_I(\gamma) = P(I \leq \gamma) = \int_{-\infty}^{\gamma} p_I(\beta) d\beta \quad (3-6)$$

pode ser obtida substituindo-se (3-5) em (3-6), resultando

$$F_I(\gamma) = \int_{-\infty}^{\gamma} \iint_{\Omega_{\mathbf{x}}} p_{I|\mathbf{x}=\mathbf{x}}(\beta) p_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} d\beta \quad (3-7)$$

ou ainda,

$$F_I(\gamma) = \iint_{\Omega_{\mathbf{x}}} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}) \int_{-\infty}^{\gamma} p_{I|\mathbf{x}=\mathbf{x}}(\beta) d\beta d\mathbf{X} \quad (3-8)$$

$$F_I(\gamma) = \iint_{\Omega_{\mathbf{x}}} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}) F_{I|\mathbf{x}=\mathbf{x}}(\gamma) d\mathbf{X} \quad (3-9)$$

Observe agora que dado um valor de \mathbf{x} , por exemplo $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ a potência interferente I assume um determinado valor $I_{\mathbf{X}}$ com probabilidade 1. Assim, é possível considerar que a densidade de probabilidade de I , dado $\mathbf{x} = \mathbf{X}$, é dada por

$$p_{I|\mathbf{x}=\mathbf{x}}(\gamma) = \delta(\gamma - I_{\mathbf{X}}) \quad (3-10)$$

e conseqüentemente

$$F_{I|\mathbf{x}=\mathbf{x}}(\gamma) = u(\gamma - I_{\mathbf{X}}) \quad (3-11)$$

com $u(\gamma)$ denotando a função degrau unitário, definida por

$$u(\gamma) = \begin{cases} 0 & ; \gamma < 0 \\ 1 & ; \gamma \geq 0 \end{cases} \quad (3-12)$$

O valor de $I_{\mathbf{X}}$ em (3-10) e (3-11) é calculado utilizando-se (3-1) e (3-2).

Considerando-se (3-11), (3-9) se escreve

$$F_I(\gamma) = \iint_{\Omega_{\mathbf{x}}} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}) u(\gamma - I_{\mathbf{x}}) d\mathbf{X} \quad (3-13)$$

Observe que para cada valor de γ , $F_I(\gamma)$ pode ser vista como o valor esperado da variável aleatória $y_{\gamma} = u(\gamma - I_{\mathbf{x}})$ que, pelo Teorema Fundamental do Valor Esperado [4], pode ser escrito como (3-13). Assim, é possível escrever

$$F_I(\gamma) = E[u(\gamma - I_{\mathbf{x}})] \quad (3-14)$$

As expressões em (3-13) e (3-14) são utilizadas para determinar a função distribuição de probabilidade da potência interferente I que afeta a um receptor FS com características bem definidas, ou seja, com uma localização geográfica conhecida (latitude θ e longitude ϕ) e com o apontamento de sua antena receptora (azimute α e elevação ε) também conhecidas. Em trabalhos anteriores [1, 2], foi considerado um conjunto de receptores do FS localizados em latitudes θ iguais a 30°N, 20°N, 10°N, 0°N, 10°S, 20°S e 30°S, e longitudes que variam de 0° a 360° (de grau em grau). Além disso, foram considerados azimutes de 0° a 360° e elevação de 0° para o apontamento de suas antenas receptoras.

Neste trabalho, a elevação ε da antena receptora do sistema FS é modelada por uma variável aleatória com função densidade de probabilidade conhecida. Neste caso a função distribuição de probabilidade em (3-9) se escreve

$$F_I(\gamma) = \iint_{\Omega_{\mathbf{x}}} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{x}|\varepsilon=E}(\mathbf{X}) F_{I|\mathbf{x}=\mathbf{X},\varepsilon=E}(\gamma) p_{\varepsilon}(E) dE d\mathbf{X} \quad (3-15)$$

ou, considerando-se que \mathbf{x} e ε são estatisticamente independentes,

$$F_I(\gamma) = \iint_{\Omega_{\mathbf{x}}} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}) \int_{-\infty}^{\infty} F_{I|\mathbf{x}=\mathbf{X},\varepsilon=E}(\gamma) p_{\varepsilon}(E) dE d\mathbf{X} \quad (3-16)$$

Comparando-se (3-16) e (3-9), observa-se que quando ε é modelado por uma variável aleatória, (3-9) pode ser aplicada com

$$F_{I|\mathbf{x}=\mathbf{X}}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{I|\mathbf{x}=\mathbf{X},\varepsilon=E}(\gamma) p_{\varepsilon}(E) dE \quad (3-17)$$

Note que, dado os valores de \mathbf{x} e ε , por exemplo $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ e $\varepsilon = E$, a potência interferente I assume um determinado valor $I_{\mathbf{X},E}$ com probabilidade 1. Assim, é possível considerar que a função densidade de probabilidade de I , dado $\mathbf{x} = \mathbf{X}$

e $\varepsilon = E$, é dada por

$$p_{I|\mathbf{x}=\mathbf{x},\varepsilon=E}(\gamma) = \delta(\gamma - I_{\mathbf{x},E}) \quad (3-18)$$

e conseqüentemente

$$F_{I|\mathbf{x}=\mathbf{x},\varepsilon=E}(\gamma) = u(\gamma - I_{\mathbf{x},E}) \quad (3-19)$$

Levando-se em conta (3-19), (3-17) se escreve

$$F_{I|\mathbf{x}=\mathbf{x}}(\gamma) = f(\gamma, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\gamma - I_{\mathbf{x},E})p_{\varepsilon}(E)dE \quad (3-20)$$

O valor de $I_{\mathbf{x},E}$ em (3-18), (3-19) e (3-20) é calculado utilizando-se (3-1) e (3-2). Considerando-se (3-20), (3-9) se escreve

$$F_I(\gamma) = \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{X})f(\gamma, \mathbf{X})d\mathbf{X} \quad (3-21)$$

com

$$f(\gamma, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\gamma - I_{\mathbf{x},E})p_{\varepsilon}(E)dE \quad (3-22)$$

Observe que o resultado em (3-21) e (3-22) é idêntico ao que se obtém a partir de (3-13) considerando-se que, não apenas \mathbf{x} , mas \mathbf{x} e ε são quantidades aleatórias e estatisticamente independentes.

Para cada valor de γ , $F_I(\gamma)$ em (3-21), pode ser vista como o valor esperado da variável aleatória $y_{\gamma} = f(\gamma, \mathbf{x})$ que, pelo Teorema Fundamental do Valor Esperado [4], pode ser escrito como (3-21). Assim, é também possível escrever

$$F_I(\gamma) = E[f(\gamma, \mathbf{x})] \quad (3-23)$$

Para se verificar se o critério de proteção do receptor FS, definido na Recomendação ITU-R F.1495 e mostrado em (2-5) é satisfeito, basta que se determine a distribuição cumulativa de probabilidade (CDF *cumulative distribution function*) da razão I/N , dada por

$$CDF_{\frac{I}{N}}(\gamma) \triangleq P\left(\frac{I}{N} > \gamma\right) = P(I > \gamma N) = 1 - F_I(\gamma N) \quad (3-24)$$

Dadas as características do receptor FS vítima (localização, direção de apontamento da antena receptora, nível de ruído e ganho da antena receptora), existem basicamente duas maneiras conhecidas para calcular a função distribuição de probabilidade $F_I(\gamma)$ da interferência I .

A primeira delas utiliza o método analítico descrito na Recomendação ITU-R S.1529 [7, 5], que ao implementar (3-21) faz uso de uma expressão analítica para a função densidade de probabilidade $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{X})$ das posições dos

satélites da constelação não-geoestacionária, esta função densidade de probabilidade depende, obviamente, das características do sistema não-geoestacionário considerado. A técnica analítica em [7] é bastante precisa e indicada nos casos em que a obtenção, via simulação, de uma estimativa confiável de $F_I(\gamma)$ requer um tempo de computação exageradamente grande. A segunda maneira é estimar o valor esperado em (3-23) através da média aritmética da função $f(\gamma, \mathbf{x})$ obtidas a partir de amostras do vetor \mathbf{x} geradas pela simulação temporal do movimento dos satélites da constelação HEO interferente.

No caso de satélites com trilhas repetitivas, ou seja, quando o vetor \mathbf{x} das posições dos satélites da constelação é periódico no tempo, a simulação das posições \mathbf{x} dos satélites durante um período fornece resultados de precisão comparável àquela de resultados obtidos pelo método analítico. Como os satélites HEO analisados neste trabalho são todos de trilhas repetitivas, optou-se pela obtenção da função distribuição de probabilidade da interferência através da simulação temporal das posições dos satélites. As equações utilizadas nesta simulação são apresentadas no Apêndice A. No cálculo da interferência, foi necessário determinar a direção, a partir da localização do receptor FS vítima (azimute e elevação), da posição de cada satélite da constelação. As equações utilizadas neste cálculo são apresentadas no Apêndice B.

É oportuno observar que a distribuição cumulativa de probabilidade da razão I/N em (3-24) depende das características específicas do receptor FS vítima. Mais especificamente, depende da localização (longitude ϕ e latitude θ) do receptor FS, do ganho e do apontamento de sua antena (azimute e elevação) e da densidade de ruído térmico na entrada do receptor.

A título de exemplo, a Figura 3.1, ilustra as CDFs da razão I/N , ou seja, a probabilidade de I/N ser superior a γ , no caso da interferência agregada sofrida por um receptor FS localizado na latitude $\theta = 20^\circ\text{S}$ e longitude $\phi = 30^\circ\text{W}$. As curvas apresentadas correspondem a antenas receptoras do FS com ganho de 48 dBi, azimutes que variam de 0° a 360° e ângulo de elevação igual a 0° . A densidade de ruído térmico na entrada do receptor FS foi tomada igual a -140 dB(W/MHz). Cada CDF corresponde a um valor diferente de azimute. Nesta figura, omitiu-se o valor de azimute correspondente a cada um das curvas, uma vez que o valor do pior azimute (maior nível de interferência), depende da posição relativa do receptor FS e dos satélites HEO e pode ser igual a qualquer valor no intervalo $(0^\circ, 360^\circ]$. Os asteriscos presentes nesta mesma figura correspondem às restrições impostas pelo critério de proteção da Recomendação ITU-R F. 1495. Convém observar que os dois

critérios de interferência de curto prazo (Short Term) são satisfeitos para todos os azimutes. O mesmo não acontece com o critério de longo prazo (Long Term) onde se tem 8 valores de azimuth para os quais o critério não é atendido. Curvas como as apresentadas na Figura 3.1, obtidas utilizando-se (3-23) e (3-24) foram também determinadas nos estudos realizados em [1, 2].

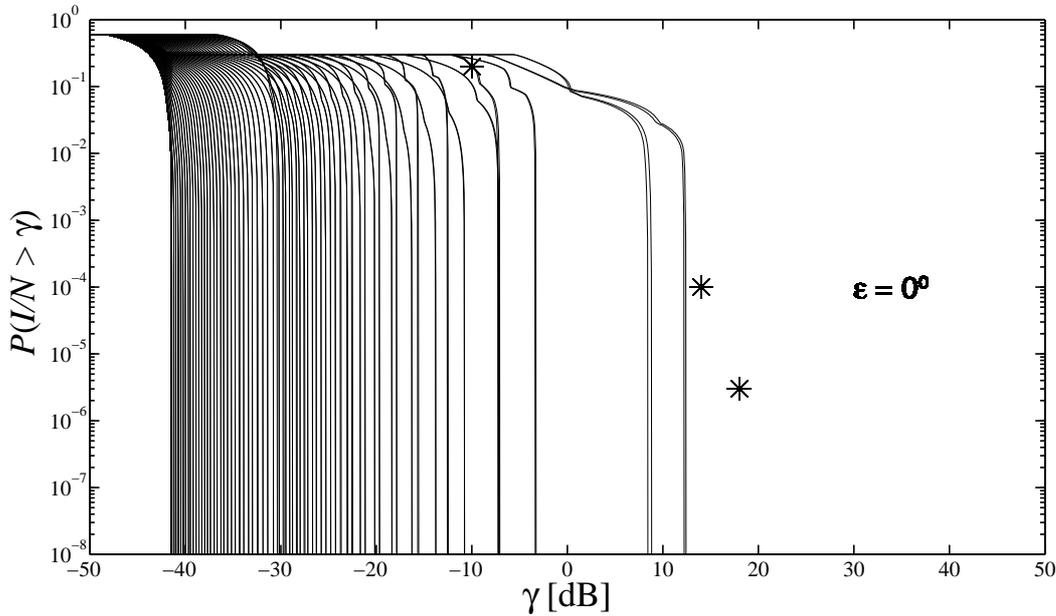


Figura 3.1: CDFs da interferência agregada de três sistemas HEO do tipo A sobre um receptor FS localizado em (20°S, 30°W), para apontamentos da antena receptora do FS correspondentes a azimutes que variam de 0° a 360° e ângulo de elevação de 0°.

A título de comparação, a Figura 3.2 apresenta as CDFs da razão I/N no caso de um receptor FS localizado na latitude $\theta = 20^\circ\text{S}$, longitude $\phi = 30^\circ\text{W}$, ganho de sua antena receptora igual a 48 dBi, azimutes que variam de 0° a 360° e com ângulo de elevação modelado por uma variável aleatória de Tikhonov¹ com parâmetro $\sigma^2 = 0.1$. A densidade de ruído térmico na entrada do receptor FS foi considerada igual a -140 dB(W/MHz). Comparando-se as figuras 3.1 e 3.2, é possível observar claramente o efeito da modelagem aleatória do ângulo de elevação da antena receptora do FS. Nota-se, por exemplo, na Figura 3.2, o critério de interferência de longo prazo (Long Term) é satisfeito para todos os azimutes (o que não acontece na Figura 3.1). Com relação aos critérios de curto prazo (que eram satisfeitos para todos os azimutes no caso de $\varepsilon = 0$), observa-se, na Figura 3.2, três azimutes para os quais o critério (First Short Term) não é atendido e um azimuth que não satisfaz o critério de curto prazo (Second Short Term).

¹Detalhes da distribuição de probabilidade de Tikhonov são apresentadas no Capítulo 4

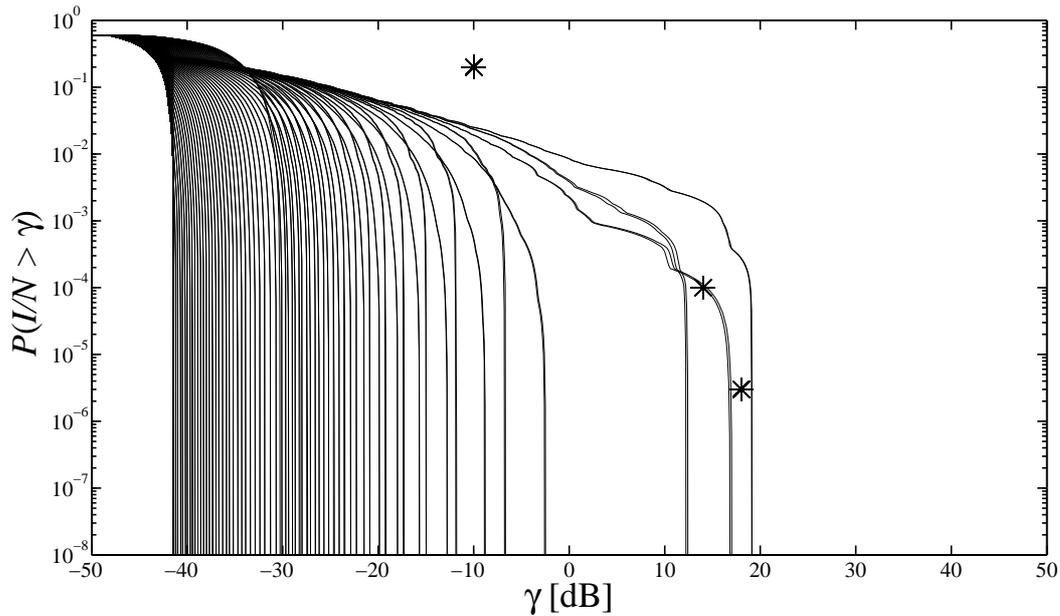


Figura 3.2: CDFs da interferência agregada de três sistemas HEO do tipo A sobre um receptor FS localizado em (20°S, 30°W), para apontamentos da antena receptora do FS correspondentes a azimutes que variam de 0° a 360° e ângulo elevação modelada por uma variável aleatória de Tikhonov com parâmetro $\sigma^2 = 0.1$.

Conforme indicado em [1, 2], uma avaliação dos efeitos da interferência dos sistemas HEO nos receptores do FS, feita com base o critério de proteção em (2-5), pode ser obtida considerando-se os níveis de razão interferência ruído que são excedidos com probabilidades $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.0001$ e $p_3 = 0.000003$. Assim, sejam y_1 , y_2 e y_3 os valores de I/N que são excedidos com probabilidades p_1 , p_2 e p_3 , ou seja,

$$P(I/N > y_i) = p_i; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3-25)$$

O critério de proteção da Recomendação ITU-R F.1495 estabelece que os níveis y_1 , y_2 e y_3 tem que ser menores ou iguais a $L_1 = -10$ dB, $L_2 = 14$ dB e $L_3 = 18$ dB, respectivamente. A Figura 3.3 ilustra as curvas CDF da Figura 3.1, correspondentes a antenas receptoras do FS com dois diferentes azimutes (14° e 16°). Note que apenas uma destas curvas satisfaz à restrição de Longo Prazo da Recomendação ITU-R F.1495 (indicada por um asterisco na Figura 3.3). Observe que no caso de azimuth igual a 14°, $y_1 = -14.20$ dB (inferior ao valor de $L_1 = -10$ dB recomendado) e que no caso de azimuth igual a 16°, $y_1 = -5.02$ dB (superior ao valor de $L_1 = -10$ dB recomendado).

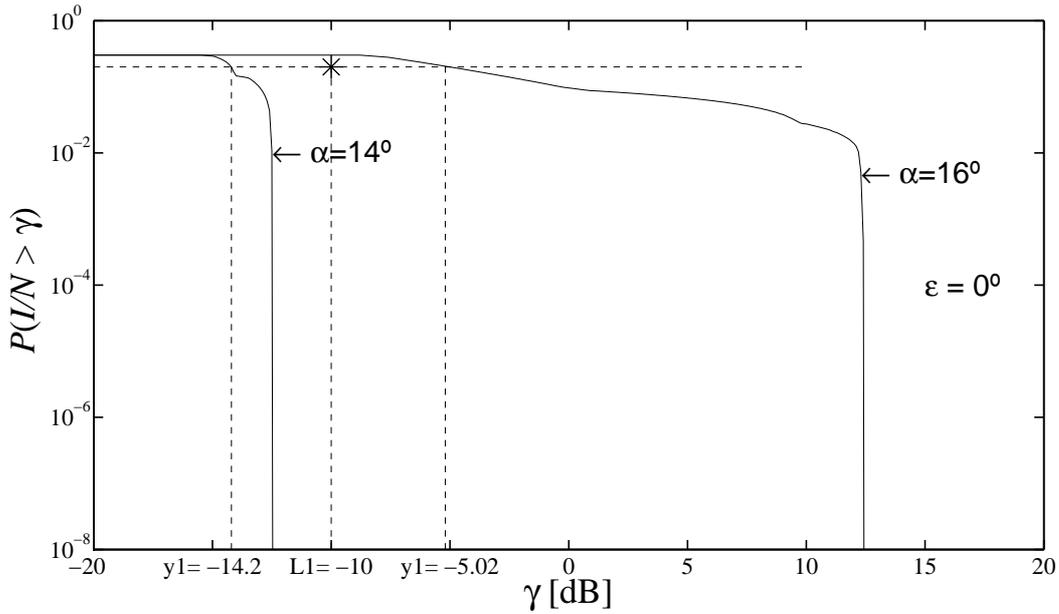


Figura 3.3: Ilustração do nível y_1 da razão I/N que é excedido com probabilidade 0.2

Tanto no caso em que $\varepsilon = 0$, quanto no caso em que ε é uma variável aleatória, receptores FS localizados numa dada latitude θ experimentam diferentes níveis de interferência dependendo da longitude ϕ de sua localização e do azimute α de sua antena receptora. Assim os valores $\{y_i, i = 1, 2, 3\}$ que são excedidos, respectivamente, com probabilidades $\{p_i, i = 1, 2, 3\}$ dependem dos valores ϕ e α . Seja $g_i(\phi, \alpha)$ a função que mapeia os valores de ϕ e α no valor do nível y_i . Tem-se, neste caso,

$$y_i = g_i(\phi, \alpha); \quad i = 1, 2, 3 \quad (3-26)$$

Considere que os valores de ϕ e α de um receptor localizado na latitude θ são escolhidos aleatoriamente, ou seja, que os parâmetros ϕ e α são modelados por variáveis aleatórias. Neste caso, os níveis $\{y_i, i = 1, 2, 3\}$ serão também variáveis aleatórias, com funções densidade de probabilidade que podem ser obtidas através da relação

$$p_{y_i}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{y_i|\phi=\Phi, \alpha=A}(Y) p_{\phi, \alpha}(\Phi, A) d\Phi dA; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3-27)$$

Note que, dados os valores de ϕ e α , ($\phi = \Phi$, $\alpha = A$), a variável aleatória y_i assume o valor $g_i(\Phi, A)$ com probabilidade 1. Assim, a função densidade de probabilidade condicional que aparece em (3-27) é dada por

$$p_{y_i|\phi=\Phi, \alpha=A}(Y) = \delta(Y - g_i(\Phi, A)) \quad (3-28)$$

onde $\delta(\cdot)$ é a função impulso (Delta de Dirac). Levando-se (3-28) em (3-27), chega-se a

$$p_{y_i}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(Y - g_i(\Phi, A)) p_{\phi, \alpha}(\Phi, A) d\Phi dA \quad (3-29)$$

Considerando-se que ϕ e α são variáveis aleatórias estatisticamente independentes e uniformemente distribuídas em $[0, 2\pi]$, tem-se finalmente

$$p_{y_i}(Y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(Y - g_i(\Phi, A)) d\Phi dA \quad (3-30)$$

O critério de proteção da Recomendação ITU-R F.1495 indica que os níveis y_1 , y_2 e y_3 tem que ser, respectivamente, menores ou iguais a $L_1 = -10$ dB, $L_2 = 14$ dB e $L_3 = 18$ dB. Quando estas condições não são satisfeitas, diz-se que os níveis y_1 , y_2 e y_3 refletem um excesso de interferência em relação aos níveis L_1 , L_2 e L_3 , respectivamente. Assim, define-se como “*interferência em excesso*” a quantidade Δ_i dada por

$$\Delta_i = \begin{cases} y_i - L_i & ; y_i > L_i; \quad i = 1, 2, 3 \\ 0 & ; y_i \leq L_i \end{cases} \quad (3-31)$$

Considerando-se, o relacionamento em (3-31), é possível escrever as funções densidade de probabilidade das *interferências em excesso* $\{\Delta_i, i = 1, 2, 3\}$ em função das funções densidade de probabilidade das variáveis aleatórias $\{y_i, i = 1, 2, 3\}$, obtendo-se

$$p_{\Delta_i}(D) = K_i \delta(D) + p_{y_i}(D + L_i) u(D) \quad (3-32)$$

onde $p_{y_i}(\cdot)$ é a densidade de probabilidade de y_i dada por (3-29), $u(D)$ representa a função degrau unitário, $\delta(\cdot)$ é a função Delta de Dirac e

$$K_i = P(y < L_i) = \int_{-\infty}^{L_i} p_{y_i}(Y) dY \quad (3-33)$$

Finalmente, a distribuição cumulativa de probabilidade Δ_i é obtida integrando-se (3-32), resultando

$$CDF_{\Delta_i}(D) = P(\Delta_i > D) = 1 - \left[K_i u(D) + \int_0^D p_{y_i}(\beta + L_i) d\beta \right] \quad (3-34)$$

onde K_i e $p_{y_i}(Y)$ são determinados em (3-33) e (3-29) respectivamente.