PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

João Antonio Zanni Portella

Estabilidade de Produtos Tensoriais sob Perturbações Multiplicativas

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Carlos Kubrusly

Rio de Janeiro

Fevereiro de 2014

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

João Antonio Zanni Portella

Estabilidade de Produtos Tensoriais sob Perturbações Multiplicativas

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Carlos Kubrusly
Orientador
Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Prof. Alexandre Street Aguiar
Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Prof. Cristiano Augusto Coelho Fernandes
Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Prof. Jair Koiller
Fundação Getúlio Vargas – RJ

Prof. Paulo Cesar Marques Vieira
LNCC

Prof. Marco Aurélio Cavalcanti Pacheco
Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico

Rio de Janeiro, 11 de fevereiro de 2014

João Antonio Zanni Portella

Graduou–se em Ciências Econômicas na Fundação Getúlio Vargas do Rio de Janeiro. Trabalhou nas Empresas de Pesquisa Energética (EPE) e no Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA) como estagiário do setor financeiro e assistente de pesquisa, respectivamente. Após sua graduação resolveu prosseguir seus estudos no Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio sob orientação do Professor Carlos Kubrusly, onde terminou seu mestrado em Fevereiro de 2011. Desde de Março de 2011, cursa o programa de doutorado no Departamento de Engenharia Elétrica e manteve sua pesquisa em Teoria de Operadores sob orientação do Professor Carlos Kubrusly.

Ficha Catalográfica

Portella, João Antonio Zanni

Estabilidade de Produtos Tensoriais sob Perturbações Multiplicativas / João Antonio Zanni Portella; orientador: Carlos Kubrusly. – Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Engenharia Elétrica, 2014.

v., 95 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Elétrica – Teses. 2. Estabilidade Multiplicativa. 3. Teoria de Operadores. 4. Produto Tensorial. 5. Contrações Fortemente Estáveis. 6. Estabilidade Uniforme. I. Kubrusly, Carlos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. III. Título.

CDD: 621.3

Agradecimentos

Ao meu orientador Carlos Kubrusly, por quem tenho profunda admiração tanto pela pessoa e quanto pelo profissional, gostaria de agradecer o apoio, paciência, incentivo e pelos inúmeros ensinamentos ao longo desses anos.

Aos membros da banca Alexandre Street, Cristiano Fernandes, Jair Koiller, Marco Aurélio Pacheco e Paulo César Vieira por terem aceitado o convite de participarem da banca da minha Tese de Doutorado.

Ao professor Marco Aurélio Pacheco por toda a ajuda, incentivo e credibilidade dada ao meu trabalho.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

A minha amada esposa Tamara Louro Pereira Zanni Portella quem sempre me apoiou e incentivou o meu sonho de tornar-me um pesquisador. Agradeço pela paciência ao longo destes inúmeros fins de semana em prol da minha pesquisa.

Aos meus pais João Carlos Portella e Eleonora Zanni, e irmão Rodrigo Portella pelo apoio e carinho indiscutíveis sem os quais não teria concluído esta jornada.

Aos meus avós Euzébio João Zanni, Olga Migailides Zanni, Magnólia Portella e Carlos Portella por tudo.

Aos colegas que fizeram parte desta jornada. Em particular a Adriano Koshiyama, André Luis Caldas, André Monteiro, Augusto Vianna, Axel Simonsen, Bernardo Monteiro, Bernardo Ricca, Bruno Lund, Bruno Sultanum Texeira, Dilza Szwarcman, Evelyn Pereira Nunes, Iury Steiner, Felipe Iachan, João Eduardo Pádua, Marcelo Letichevsky, Marinho Bertanha, Pedro Mourão, Pedro Olea, Rafael Azevedo, Rafael Rocha Ribas, Raphael Zarur, Rodrigo Miyamoto e Wilton Tavares.

Em especial, ao meu grande amigo Pedro Milet quem sempre me acompanhou ao longe de todos esses anos de Mestrado e Doutorado e tive o prazer de poder discutir diversos problemas de Matemática.

Aos professores da EPGE e do Departamento de Matemática Aplicada da FGV-Rio sem os quais não estaria aqui, em especial Maria Izabel Camacho, Moacyr Silva, Carlos Eugênio Costa, Caio Ibsen e Rubens Cysne.

Aos familiares Bruno Lucchini, Constantino Migailides (e família), Elizabeth Louro (e família), Ivone (e família), Sérgio Mota (e família), Silvinha, Olimpia Migailides e Walbruna Turolla.

Ao Departamento de Engenharia Elétrica pela a ajuda de todos os dias.

Resumo

Portella, João Antonio Zanni; Kubrusly, Carlos (Orientador). **Estabilidade de Produtos Tensoriais sob Perturbações Multiplicativas**. Rio de Janeiro, 2014. 95p. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Um operador definido em um espaço de Hilbert é uniformemente estável se ele converge na topologia da norma para o operador nulo. O Problema de Estabilidade Multiplicativa investiga quais são as classes de operadores que estabilizam uniformemente o operador original por uma perturbação multiplicativa. Neste trabalho colocamos este problema no contexto de produto tensorial e investigamos quais as classes que estabilizam multiplicativamente Contrações Fortemente Estáveis sob uma perturbação compacta. Em particular, apresentamos uma solução para o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações Fortemente Estáveis.

Palavras-chave

Estabilidade Multiplicativa; Teoria de Operadores; Produto Tensorial; Contrações Fortemente Estáveis; Estabilidade Uniforme.

Abstract

Portella, João Antonio Zanni; Kubrusly, Carlos (Advisor). **Tensor Product Stabilization under Multiplicative Perturbations**. Rio de Janeiro, 2014. 95p. PhD Thesis – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

An operator on a Hilbert space is uniformly stable if it converges to the null operator on the norm topology. The Multiplicative Stabilization Problem investigates which operators classes uniformly stabilize the original operator under multiplicative perturbation. This work consider the previous problem under the tensor product framework and investigates which operators classes multiplicative stabilize Strongly Stable Contractions under compact perturbations. We have established a solution to the Multiplicative Stabilization Problem for Strongly Stable Contractions.

Keywords

Multiplicative Stabilization; Operator Theory; Tensor Product; Strongly Stable Contractions; Uniform Stability.

Sumário

We must know - we will know!

David Hilbert, *Society of German Scientists and Physicians.*

1
Introdução

Um operador é uma transformação linear limitada (i.e., contínua) de um espaço de Hilbert nele mesmo. O Problema de Estabilidade Multiplicativa investiga a seguinte questão: seja T um operador definido em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, queremos estabelecer os operadores S, também definidos em $\mathcal{H}$, tais que $\|(ST)^n\| \to 0$ quando $n \to \infty$ (i.e., ST é uniformemente estável). Em outras palavras, *quais as classes de operadores que estabilizam uniformemente um operador arbitrário por uma perturbação multiplicativa?*

Durante décadas, o Problema de Estabilidade Multiplicativa foi investigado para espaços de dimensão finita (ver, e.g., [1] e as referências ali citadas). Atualmente, este problema tem ganho bastante destaque para espaços de dimensão infinita (ver, e.g., [5], [16], [26] e [34]). Kubrusly e Vieira [26] conseguiram estabelecer as condições necessárias e suficientes para estabilidade multiplicativa de contrações próprias (i.e., $\|Tx\| < \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$). Em particular, eles mostram que toda contração própria se torna uniformemente estável quando perturbada multiplicativamente por uma contração compacta. Portanto, o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações se restringe apenas a classe das contrações não-próprias.

A noção de estabilidade uniforme de um operador em um espaço de Hilbert pode ser definida tanto em termos da norma do operador ($\|T^n\| \to 0$) quanto do espectro do mesmo (i.e., um operador é uniformemente estável se e somente se ele tem raio espectral menor do que 1). Como o espectro e a norma de um produto tensorial é o produto dos espectros e das normas, respectivamente, dos operadores que compõe o produto tensorial original (ver, e.g., [2] e [30]), segue que o uso desta ferramenta é um possível caminho para a estabilização multiplicativa de classes de contrações não tratadas por Kubrusly e Vieira [26], ou seja, a classe das contrações não-próprias.

O presente trabalho tem como objetivo investigar o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações Fortemente Estáveis no contexto de produto tensorial. Em particular, investigamos as classes que estabilizam multiplicativamente contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis. O principal resultado original deste trabalho resolve o problema em questão para aquela classe das contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis.

A tese está dividida em seis capítulos: (1) Introdução; (2) Conceitos Básicos; (3) O Problema da Estabilidade Multiplicativa; (4) Estabilidade Multiplicativa e Produto Tensorial; (5) Contrações Fortemente Estáveis em Produto Tensorial; e (6) Conclusão.

No Capítulo 2 faremos um breve levantamento dos conceitos e noções tidos como essênciais para leitura do texto.

Em seguida, no Capítulo 3, definimos formalmente o Problema de Estabilidade Multiplicativa e fazemos uma resenha dos principais resultados para contrações. Ao final da resenha, destacamos que o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações se restringe apenas a contrações não-próprias normalóides, dentre as quais contrações fortemente estáveis são uma classe importante. Nas seções subsequentes, Seção 3.2 e Seção 3.3, investigamos o Problema de Estabilidade Multiplicativa para uma classe particular, denotada por $\mathcal{F}$, a classe de todas as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis. Em particular, usamos as decomposições de Nagy-Foias-Langer e von Neumann-Wold para decompor as contrações em $\mathcal{F}$. Além disso, estabelecemos o seguinte resultado: *todo shift unilateral reverso é estabilizado multiplicativamente por um operador normal compacto injetivo*. Aliás, mais que isso é obtido no Teorema 3.24.

O Capítulo 4 coloca o Problema de Estabilidade Multiplicativa no contexto de produto tensorial. Na Seção 4.1 justificamos que o produto tensorial é uma ferramenta importante para nossa investigação e estabelecemos alguns resultados para estabilização multiplicativa em produto tensorial. Além disso, enfatizamos que perturbações compactas terão um papel importante no Capítulo 5. Na última seção deste capítulo, Seção 4.2, estabelecemos o primeiro resultado principal desta tese, ou seja, determinamos que se um produto tensorial $(A \otimes B)$ não-nulo é compacto, então os operadores A e B são ambos compactos, Teorema 4.19.

No Capítulo 5 usamos os resultados dos capítulos anteriores (em particular, do Capítulo 4) para estabilizar multiplicativamente contrações fortemente estáveis no contexto de produto tensorial. Na Seção 5.1 definimos uma classe particular, a classe $\mathcal{C}$, que é o produto tensorial de um shift unilateral reverso por uma contração arbitrária. Mostramos que a classe $\mathcal{C}$ é importante e estabelecemos suas propriedades. Na Seção 5.2, provamos que todo produto tensorial em $\mathcal{C}$ é unitariamente equivalente a uma contração fortemente estável e estabilizamos multiplicativamente todo operador em $\mathcal{C}$ através de perturbações compactas (i.e., segundo resultado principal desta tese) - Teorema 5.12. Portanto, apresentamos uma solução para o Problema da Estabilidade Multiplicativa em Produto Tensorial para classes unitariamente equivalentes a contrações fortemente estáveis. Ao final do Capítulo 5, estabelecemos uma conjectura que, se positiva, traz resultados relevantes para o caso geral de contrações fortemente estáveis.

Por fim, no Capítulo 6, fazemos um levantamento dos principais resultados apresentados neste trabalho.

Resumindo: os principais resultados originais desta tese são os Teorema 4.19 e Teorema 5.12.

2
Conceitos Básicos

Conforme frisado na Introdução desta tese, neste capítulo vamos revisar os conceitos tidos como básicos para a compreensão do texto. Dividimos o conteúdo em três partes: Fundamentos; Espectro; e Produto Tensorial. Na primeira seção, Conceitos Básicos, voltamos nossa atenção para notações e noções gerais sobre Teoria de Operadores. Na Seção 2.2 definimos o espectro de um operador e suas propriedades. Por fim, na Seção 2.3 apresentamos a noção de Produto Tensorial e enunciamos alguns resultados que iremos utilizar ao longo do material. Cabe ressaltar que o material a seguir não tem nenhum objetivo didático, pois fuguria do escopo desta tese. Apesar de não exibirmos nenhuma demonstração no restante deste capítulo, todas as provas estão devidamente referenciadas.

2.1
Fundamentos

Nesta seção vamos estabelecer grande parte das notações que serão usadas no restante desta tese. Além disso, iremos definir alguns conceitos básicos em Teoria de Operadores como, por exemplo, operador, operador invertível, subespaço invariante, dentre outros. Um maior detalhamento das noções a seguir apresentadas pode ser encontrado em [7], [8] e [23].

Um espaço de Hilbert é um espaço produto interno completo. Tipicamente iremos trabalhar com espaços de Hilbert complexos separáveis de dimensão infinita. As notações $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ representarão espaços de Hilbert durante todo o texto. Um produto interno é uma transformação sesqui-linear denotada por $\langle ; \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, onde $\mathbb{C}$ é a notação usual para o corpo dos complexos. A norma gerada pelo produto interno $\langle ; \rangle$ será denotada por $\|.\|$. Outras duas notações amplemente usadas são: $\mathbb{N}$ o conjunto dos naturais; e $\mathbb{R}$ o corpo dos reais.

A Desigualdade de Schwartz é um resultado bem conhecido e merece ser ressaltado.

Proposição 2.1 [Ver, e.g., [23] p.311] *Se x, y pertencem a $\mathcal{H}$, então*

$$|\langle x; y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

DEMONSTRAÇÃO: Ver, e.g., [23] p.311. □

Um operador é uma transformação linear limitada (i.e., contínua) $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ de um espaço normado nele mesmo, isto é,

$$\|Tx\| \leq \beta \, \|x\|$$

para todo $x \in \mathcal{X}$, onde $\beta > 0$ é um escalar. Neste texto estaremos interessados em operadores definidos em espaços de Hilbert.

O conjunto de todos os operadores definidos em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é denotado por $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$. Logo, $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é o mesmo que afirmar que T é um operador definido no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Sem perda de generalidade, no restante da Seção 2.1, T denotará um operador definido no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

A norma do operador T (i.e., $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$) é dada por:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Note que usamos a mesma notação para a norma induzida pelo produto interno e para a norma de um operador.

O núcleo e a imagem de T são definidos pelos conjuntos:

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathcal{H} : Tx = 0\} \text{ e}$$

$$\mathcal{R}(T) = T(\mathcal{H}) = \{y \in \mathcal{K} : y = Tx \, \text{para algum} \, x \in \mathcal{H}\}.$$

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Dizemos que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ é um subespaço de $\mathcal{H}$, se $\mathcal{M}$ é um subespaço linear fechado em $\mathcal{H}$. O fecho de um subconjunto $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}$ será denotado por $\mathcal{N}^-$. Dois subconjuntos de $\mathcal{H}$ são ortogonais se o produto interno entre quaisquer pares de elementos neles definidos é nulo. Se $\mathcal{M}$ é um subespaço de $\mathcal{H}$, então podemos decompor o espaço original como $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$, onde $\mathcal{M}^\perp$ é o subespaço ortogonal a $\mathcal{M}$ (ver, e.g., [18] p.1).

Considere $\mathcal{M}$ um subespaço de $\mathcal{H}$. Se $T(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$, então $\mathcal{M}$ é um subespaço invariante para T (ou T-invariante). Dizemos que $\mathcal{M}$ reduz T (ou $\mathcal{M}$ é um subespaço redutor - isto é "reducing subspace"), se $\mathcal{M}$ e

$\mathcal{M}^\perp$ são T-invariantes. Neste caso podemos reescrever T como a seguinte matriz em blocos:

$$\begin{pmatrix} T|_{\mathcal{M}} & 0 \\ 0 & T|_{\mathcal{M}^\perp} \end{pmatrix},$$

onde $T|_{\mathcal{M}}$ é a restrição de T em $\mathcal{M}$ e $T|_{\mathcal{M}^\perp}$ é a restrição de T em $\mathcal{M}^\perp$. A parte de um operador é a restrição dele a um subespaço invariante. Por exemplo, $T|_{\mathcal{M}}$ é uma parte de T. Agora, considere $\{\mathcal{H}_k\}$ uma coleção contável de espaços de Hilbert $\mathcal{H}_k$. Suponha que $\{T_k \in \mathcal{B}[\mathcal{H}_k]\}$ é um conjunto de operadores limitado (i.e., $\sup_k \|T_k\| < \infty$). Podemos definir

$$T = \bigoplus_k T_k,$$

tal que $T|_{\mathcal{H}_k} \equiv T_k$. A somabilidade direta (i.e., "direct summand") de um operador T é a restrição dele em um subespaço redutor. Por exemplo, T_k é uma somabilidade direta de T. Um operador é redutível (i.e., "reducible") se ele tem um subespaço redutor não-trivial. Caso contrário, T é dito não-redutível (i.e, "irreducible").

Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$ é compacto, se ele mapeia subconjuntos limitados em $\mathcal{H}$ em subconjuntos relativamente compactos em $\mathcal{K}$ (i.e., o fecho de $\{Tx \in \mathcal{K} : \|x\| \leq 1\}$ é compacto em $\mathcal{K}$).

Proposição 2.2 [Ver, e.g., [23] p.255] *O conjunto $\mathcal{B}_\infty[\mathcal{H}]$ de todos os operadores compactos definidos no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um ideal bilateral.*

DEMONSTRAÇÃO: Ver, e.g., [23] p.255. □

O Teorema do Mapeamento Aberto (i.e., "toda transformação linear limitada entre espaços de Banach mapeiam conjuntos abertos em conjuntos abertos") permite estabelecermos as condições necessárias e suficientes para um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ possuir uma inversa contínua.

Proposição 2.3 [Ver, e.g., [18] p.3] *Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. As afirmações são equivalentes:*

(i). *T é invertível (i.e., existe $T^{-1} \in \mathcal{B}[\mathcal{R}(T), \mathcal{H}]$).*

(ii). *$\mathcal{N}(T) = \{0\}$ e $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(T)^-$.*

(iii). *Existe uma constante real $0 < \alpha$, tal que $\alpha \|x\| \leq \|Tx\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$.*

Demonstração: Ver, e.g., [18] p.3. □

As nomenclaturas operador invertível e operador com inversa limitada têm o mesmo significado. O conjunto de todos os operadores invertíveis será denotado por $\mathcal{G}[\mathcal{H}]$.

O adjunto de um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é o único mapa $T^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, tal que

$$\langle Tx; y\rangle = \langle x; T^*y\rangle \ \forall x, y \in \mathcal{H}$$

Um operador T é auto-adjunto se $T^* = T$.

Além de importante por si só, a classe de operadores unitários terá um papel fundamental no Capítulo 5 desta tese. Lembre que um isomorfismo é uma bijeção que preserva as propriedades lineares entre conjuntos. Por outro lado, uma isometria é um operador que preserva produto interno (i.e., $\langle Tx; Tx\rangle = \langle x; x\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$). Um operador unitário é uma isometria sobrejetiva.

Proposição 2.4 [Ver, e.g., [23] p.389] *Seja $U \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ unitário. As afirmações abaixo são equivalentes:*

(i). $U^*U = UU^* = I$.

(ii). *U é uma isometria e $U^*U = UU^*$.*

(iii). $\|U^*x\| = \|Ux\| = \|x\|$ *para todo* $x \in \mathcal{H}$.

(iv). *U é invertível e $\|U^n\| = \|U^{-n}\| = 1$ para todo inteiro $n \geq 1$.*

Demonstração: Ver, e.g., [23] p.389. □

Dois espaços de Hilbert são topológicamente isomorfos se e somente se existe uma transformação unitária entre eles. Analogamente, os operadores $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $L \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são unitariamente equivalentes se existe uma transformação unitária $W \in \mathcal{G}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$, tal que $WT = LW$. Pode-se mostrar que a relação de equivalência unitária é uma relação de equivalência (ver, e.g., [18] p.23).

Um operador T é não negativo (notação: $T \geq 0$) se $0 \leq \langle Tx; x\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Um operador T é positivo (notação: $T \geq 0$), se $0 < \langle Tx; x\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Um operador T é estritamente positivo (notação: $T \succ 0$) se existe uma constante positiva α, tal que $\alpha \|x\|^2 \leq \langle Tx; x\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. O conjunto de todos os operadores não-negativos e de todos os operadores estritamente positivos serão denotados por $\mathcal{B}^+[\mathcal{H}]$ e $\mathcal{G}^+[\mathcal{H}]$, respectivamente.

2.2
Espectro

O resolvente de um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, denotado $\rho(T)$, é o conjunto de todos os escalares $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que $(\lambda I - T)$ é invertível (i.e., $(\lambda I - T)$ tem inversa contínua). Equivalentemente,

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(\lambda I - T) = \{0\} \text{ e } \mathcal{R}(\lambda I - T) = \mathcal{X}\}.$$

O complemento de $\rho(T)$ chama-se espectro, ou seja,

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(\lambda I - T) \neq \{0\} \text{ ou } \mathcal{R}(\lambda I - T) \neq \mathcal{X}\}.$$

O espectro de T, $\sigma(T)$, é o conjunto de todos os $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que $(\lambda I - T)$ não tem uma inversa contínua. Pode-se mostrar que o espectro de um operador é sempre compacto e não-vazio (ver, e.g., [23] p.449-450). O espectro de um operador possui diversas partições (embora, aqui só vamos tratar de uma delas). A partição clássica de $\sigma(T)$ compreende três partes, os espectros pontual, contínuo e residual, respectivamente, $\sigma_P(T)$, $\sigma_C(T)$ e $\sigma_R(T)$.

O espectro pontual $\sigma_P(T)$ é o conjunto de todos os autovalores de T,

$$\sigma_P(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(\lambda I - T) \neq \{0\}\},$$

isto é, $\sigma_P(T)$ é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $(\lambda I - T)$ não é injetiva.

Definimos o espectro contínuo como o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que $(\lambda I - T)$ é densamente definido, mas não tem inversa limitada (ver, e.g., [23] p.228), isto é,

$$\sigma_C(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(\lambda I - T) = \{0\}, \mathcal{R}(\lambda I - T)^- = \mathcal{X} \text{ e } \mathcal{R}(\lambda I - T) = \mathcal{X}\}.$$

Por fim, se $(\lambda I - T)$ tem uma inversa em sua imagem que não é densamente definida, então λ pertence ao espectro residual,

$$\sigma_R(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(\lambda I - T) \neq \{0\} \text{ e } \mathcal{R}(\lambda I - T)^- \neq \mathcal{X}\}.$$

A coleção $\{\sigma_P(T), \sigma_R(T), \sigma_C(T)\}$ de subconjuntos de $\sigma(T)$ é uma partição do espectro, logo o espectro de T pode ser reescrito como

$$\sigma(T) = \sigma_P(T) \cup \sigma_R(T) \cup \sigma_C(T).$$

O supremo dos valores absolutos dos elementos do espectro de um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é chamado de raio espectral, denotado por $r(T)$, isto é,

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \,.$$

Teorema 2.5 (Fórmula de Gelfand-Beurling) *Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, então:*

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \lim_{n} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \,.$$

Demonstração: Ver, e.g., [23] p.462. $\square$

A Alternativa de Fredholm permite caracterizarmos por completo o espectro de operadores compactos.

Teorema 2.6 (Alternativa de Fredholm) *Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é compacto, então*

$$\sigma_P(T)\backslash\{0\} = \sigma(T)\backslash\{0\}.$$

Demonstração: Ver, e.g., [23] p.480. $\square$

O range numérico (i.e., "numerical range") de um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é o conjunto

$$W(T) = \{\langle Tx; x\rangle \in \mathbb{C} : \|x\| = 1\}.$$

Pode-se mostrar que $W(T)$ é convexo, contém os espectros pontual e residual, e seu fecho contém o espectro (ver, e.g., [11]). O raio numérico é definido por

$$w(T) = \sup_{\lambda \in W(T)} = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx; x\rangle| \,.$$

Proposição 2.7 [Ver, e.g., [23] p.466] *Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, então*

$$r(T) \leq w(T) \leq \|T\| \leq 2w(T).$$

Demonstração: Ver, e.g., [23] p.466. $\square$

Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é normal se ele comuta com seu adjunto, isto é,

$$T^*T = TT^*.$$

Se T comuta com T^*T, ou seja,

$$(T^*T - TT^*)T = 0$$

dizemos que T é quasinormal. Um operador é subnormal se ele é a parte de um operador normal. Se $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$, então T é hiponormal. Por fim, T é normalóide se $r(T) = \|T\|$. A proposição a seguir relaciona as classes de operadores anteriormente definidas.

Proposição 2.8 [Ver, e.g., [23] p.450] *A relação de inclusão própria a seguir é verdadeira:*

$$\textit{Normal} \subset \textit{Quasinormal} \subset \textit{Subnormal} \subset \textit{Hiponormal} \subset \textit{Normalóide}.$$

Demonstração: Ver, e.g., [23] p.450. □

Por fim, iremos destacar mais duas classes: nilpotentes; e quasinilpotentes. Um operador é nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $T^n = 0$. Se $r(T) = 0$, então T é quasinilpotente. Note que o único normalóide quasinilpotente é operador nulo. A última seção deste capítulo estabelece o conceito de produto tensorial.

2.3 Produto Tensorial

Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ dois espaços de Hilbert complexos de dimensão infinita. A noção de produto tensorial tomará como base a definição apresentada por Kubrusly em [20], isto é, o espaço produto tensorial é definido em termos do produto tensorial singular de vetores como o funcional bilinear conjugado no espaço produto Cartesiano de $\mathcal{H}$ por $\mathcal{K}$. Para uma definição mais abstrata ver, por exemplo, [3] e [33]. Considere $x \in \mathcal{H}$ e $y \in \mathcal{K}$ quaisquer. O produto tensorial singular de x e y é o mapa

$$x \otimes y : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathbb{C}$$

dado por $(x \otimes y)(u, v) = \langle x; u\rangle_{\mathcal{H}} \langle y; v\rangle_{\mathcal{K}}$ para todo $(u, v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}$, onde $\langle ; \rangle_{\mathcal{H}}$ e $\langle ; \rangle_{\mathcal{K}}$ são os produtos internos em $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$, respectivamente.

Considere o espaço linear $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ de todas as combinações lineares de $x \otimes y$ em $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$, isto é,

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} = \{\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i : (x_i, y_i) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K},\ n \in \mathbb{N}\}$$

(ver, e.g., [20]). Defina o funcional linear $\langle ; \rangle : (\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \times (\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \to \mathbb{C}$ dado por

$$\left\langle \sum_{i=1}^{N} x_i \otimes y_i ; \sum_{j=1}^{M} w_j \otimes z_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \langle x_i \otimes w_j \rangle \langle y_i \otimes z_j \rangle$$

para todo $\sum_{i=1}^{N} x_i \otimes y_i$ e ; $\sum_{j=1}^{M} w_j \otimes z_j$ em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Pode-se mostrar que $\langle ; \rangle$ é um produto interno (ver, e.g., [20]). Logo, o par ordenado $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}, \langle ; \rangle)$ é um espaço produto interno. O completamento do espaço produto interno $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ é o espaço produto tensorial de $\mathcal{H}$ por $\mathcal{K}$, também denotado por $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

O produto tensorial em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ de dois operadores $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $S \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é um operador $T \otimes S \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ definido por

$$(T \otimes S) \sum_{i} x_i \otimes y_i = \sum_{i} T x_i \otimes S y_i$$

para todo $\sum_i x_i \otimes y_i \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

Concluimos este capítulo com dois resultados importantes sobre produto tensorial. Mais propriedades sobre o espectro de um produto tensorial podem ser encontradas nas seguintes referências: [9]; e [30]. Em particular, [9] mostra que o raio numérico de um produto tensorial não é o produto dos raios numéricos.

Proposição 2.9 [Ver, e.g., [20]] *Sejam $T = (A \otimes B)$ e $S = (C \otimes D)$ dois produtos tensoriais em $\mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$, segue que:*

(i). $ST = (C \otimes D)(A \otimes B) = (CA \otimes DB)$.

(ii). $\|T\| = \|A \otimes B\| = \|A\| \, \|B\|$.

(iii). $T = (A \otimes B) \Leftrightarrow T^* = (A^* \otimes B^*)$.

DEMONSTRAÇÃO: Ver, e.g., [20]. □

Teorema 2.10 [Ver, e.g., [21]] *Se $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é um produto tensorial, então $\sigma(T) = \sigma(A)\sigma(B)$. Além disso, $r(T) = r(A)r(B)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Ver, e.g., [21]. □

3
O Problema da Estabilidade Multiplicativa

Neste capítulo iremos definir formalmente o Problema da Estabilidade Multiplicativa e estabelecer a classe de operadores que vamos investigar no restante desta tese. Para isso, vamos começar definindo a noção de estabilidade. Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador definido em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ arbitrário. A sequência de potências $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é estável se ela converge para o operador nulo $0 \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ em alguma topologia quando $n \to \infty$. Em particular, iremos trabalhar com três noções de estabilidade: estabilidade uniforme; estabilidade forte; e estabilidade fraca.

Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uniformemente estável (notação: $T^n \xrightarrow{u} 0$) quando a sequência de potências $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero na norma topológica, isto é,

$$\|T^n\| \to 0.$$

Por outro lado, T é fortemente estável (notação: $T^n \xrightarrow{s} 0$) se e somente se

$$\|T^n x\| \to 0$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Em outras palavras, estabilidade forte é equivalente a dizer que $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponto a ponto para o operador nulo quando $n \to \infty$. Por fim, T é fracamente estável (notação: $T^n \xrightarrow{w} 0$) quando

$$\langle T^n x; y\rangle \to 0$$

para todo x, y em $\mathcal{H}$. A próxima proposição relaciona os três tipos de estabilidades aqui definidos.

Proposição 3.1 [Ver, e.g., [19] p.25] *Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. As afirmações abaixo são verdadeiras:*

(i). *Se $T^n \xrightarrow{u} 0$, então $T^n \xrightarrow{s} 0$*

(ii). *Se $T^n \xrightarrow{s} 0$, então $T^n \xrightarrow{w} 0$*

Demonstração: [Ver, e.g., [19] p.25] Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ arbitrário. Suponha que $T^n \xrightarrow{u} 0$ (i.e., T é uniformemente estável). Tome $x \in \mathcal{H}$ qualquer, segue que

$$\|T^n x\| \leq \|T^n\| \, \|x\| \to 0.$$

Logo $0 \leq \|T^n x\| \leq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ quando $n \to \infty$. Em outras palavras, T é fortemente estável. Agora, suponha que $T^n \xrightarrow{s} 0$ (i.e., T é fortemente estável). Tome x, y arbitrários em $\mathcal{H}$. Daí, $|\langle T^n x; y\rangle| \leq \|T^n x\| \, \|y\|$ pela Desigualdade de Schwarz (ver, e.g., Proposição 2.1). Como T é fortemente estável, segue que

$$0 \leq |\langle T^n x; y\rangle| \leq 0 \, \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Portanto, T é fracamente estável. □

Ainda sobre os tipos de estabilidades, podemos mostrar que se o espectro contínuo não intercepta o círculo unitário, então as três noções de estabilidade aqui apresentadas coincidem.

Proposição 3.2 [Ver, e.g., [18] p.115] *Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador arbitrário. Considere $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ o círculo no plano complexo, segue que T é uniformemente estável se e somente se $\sigma_C(T) \cap \Gamma = \emptyset$.*

Demonstração: Ver, e.g., [18] p.115 □

A noção de estatibilidade uniforme vem dos sistemas dinâmicos em tempo discreto. De fato, considere um sistema linear limitado invariante ao tempo modelado pela seguinte equação diferencial autônoma:

$$x_{n+1} = Tx_n, \text{ com } x_0 = x, \text{ para todo inteiro não-negativo } n \geq 0.$$

Este sistema linear é uniformemente estável se a sequência de estados $\{x_n\}_{n\geq 0}$ com valores no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ converge para zero uniformemente para todas as condições iniciais $x \in \mathcal{H}$.

Ao contrário dos outros dois conceitos de estabilidade, existem diversas condições necessárias e suficientes que permitem caracterizar estabilidade uniforme (ver, e.g., [17] e [32]). O próximo resultado determina estabilidade uniforme de um operador em termos do seu espectro.

Proposição 3.3 [Ver, e.g., [32]] *Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uniformemente estável se e somente se $r(T) < 1$.*

DEMONSTRAÇÃO: Ver, e.g., [32]. □

Um operador $S \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ perturba aditivamente o operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ qualquer quando somamos S à T, ou seja, $S + T$ é o resultado da perturbação aditiva de S em T. Perturbações aditivas são um ramo importante e bastante estudado em Teoria de Operadores (ver, e.g., [14]). Por outro lado, estamos interessamos em outro tipo de perturbação, ou seja, a perturbação multiplicativa. Um operador $S \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ perturba multiplicamente o operador original $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ quando fazemos o produto à esquerda de S por T, isto é, ST denota a perturbação multiplicativa do operador original T.

Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ qualquer. O Problema de Estabilidade Multiplicativa propõe investigar as classes de operadores $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, tal que $r(ST) < 1$ para todo $S \in \mathcal{C}$. Em outras palavras, queremos encontrar os operadores $S \in \mathcal{C}$ que estabilizam multiplicativamente o operador original $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ através de uma perturbação.

Estabelecido o nosso problema, vamos dividir o Capítulo 3 em três seções: (3.1) Uma Resenha para Contrações; (3.2) O Problema para Contrações Não-Próprias; e (3.3) O Problema para uma Classe Particular. Na primeira seção, enunciamos alguns dos resultados mais importantes sobre o tema e encerramos com o Teorema 3.12 para estabilidade multiplicativa de contrações próprias. Partindo do resultado anterior (i.e., do Teorema 3.12) mostramos que o problema original se restringe apenas a classe das contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis. Além disso, estabilizamos multiplicativamente o shift unilateral reverso por operadores normais compactos injetivos (Teorema 3.24). Encerramos este capítulo mostrando que as decomposições de Nagy-Foias-Langer e von Neumann-Wold podem nos ajudar a caracterizar a classe que estamos interessados (ou seja, a classe das contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis), apesar de não conseguirmos estabilizá-la multiplicativamente.

3.1
Uma Resenha para Contrações

A seguir faremos um levantamento dos principais resultados sobre o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações. Esse material é importante para justificar a classe de contrações cuja estabilidade multiplicativa vamos investigar posteriormente (i.e., a classe de todas as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis).

Antes de prosseguirmos, cabe apresentarmos algumas definições afim de tornar o texto mais claro. Uma contração é um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, tal que $\|T\| \leq 1$ (i.e., $\|Tx\| \leq \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$). Se $\|Tx\| < \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$, então T é uma contração própria. Uma contração estrita é um operador T, tal que $\|T\| < 1$. Pode-se mostrar que:

$$\text{Contrações Estritas} \subset \text{Contrações Próprias} \subset \text{Contração}$$

(ver, e.g., [19] p.109), onde $\subset$ é uma relação de inclusão própria. Uma contração não-estrita T é uma contração, tal que $\|T\| = 1$. Uma contração T é não-própria quando $\|Tx\| = \|x\|$ para algum $x \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. Agora, considere $Q \in \mathcal{B}^{+}[\mathcal{H}]$ contração, segue que

(i). Não-negativa: se $0 \leq \langle Qx; x\rangle \leq \langle x; x\rangle$ (notação: $0 \leq Q \leq I$).

(ii). Positiva: se $0 < \langle Qx; x\rangle \leq \langle x; x\rangle$ (notação: $0 < Q \leq I$).

(iii). Estritamente Positiva: $\alpha \|x\|^2 \leq \langle Tx; x\rangle$ $\forall x \in \mathcal{H}$ para algum $\alpha > 0$ (notação: $I > Q \succ 0$).

A priori podemos estabilizar multiplicativamente qualquer contração $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. De fato, se $S \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração estrita, então

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|STx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|S\|\,\|Tx\|}{\|x\|} = \|S\| \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq 1.$$

Logo, $ST \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração estrita. Como $r(ST) \leq \|ST\|$ pela Proposição 2.7, então

$$r(ST) \leq \|ST\| < 1.$$

Portanto, ST é uniformemente estável. Apesar disso, supor que $S \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração estrita é demasiadamente restritivo. O Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações tem como objetivo investigar classes de operadores que estabilizam multiplicativamente a contração original sem que a perturbação seja "grande" (por exemplo, a perturbação S não pode ser uma contração estrita ou o operador nulo).

Bhaya e Kaszkurewicz [1] investigam o problema em questão (i.e., o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações) para contrações definidas em espaços de dimensão finita. Baseado em [1], Cain escreve três artigos ([4], [5] e [6]), onde ele determina condições necessárias e suficientes (principalmente suficientes) para estabilização multiplicativa de contrações em espaços de dimensão infinita. Dentre seus resultados, podemos destacar o teorema a seguir.

Teorema 3.4 [Ver, e.g., [4]] *Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. As afirmações abaixo são verdadeiras:*

(i). *Se $\|T\| = \|Tu\|$ para algum vetor unitário $u \in \mathcal{H}$, então ST é uniformemente estável para toda contração auto-adjunta se e somente se $\|T\| < 1$.*

(ii). *Se $w(T) = |\langle Tu; u\rangle|$ para algum vetor unitário $u \in \mathcal{H}$, então ST é uniformemente estável para toda contração não-negativa se e somente se $w(T) < 1$.*

(iii). *ST é uniformemente estável para toda contração estritamente positiva se e somente se $w(T) \leq 1$ e T é uniformemente estável.*

Demonstração: Ver, e.g., [4]. □

Kubrusly e Vieira [26] generalizam os resultados de Cain para classes de contrações mais gerais. A partir de propriedades relacionadas a norma e ao espectro de classes de contrações, os autores estabelecem diversos resultados para o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações.

Uma classe de contrações $\mathcal{S}$ em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ satisfaz a propriedade sup da norma (i.e., "norm sup property") se

$$\sup_{S \in \mathcal{S}} r(ST) = \|T\|$$

para todo operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$.

Teorema 3.5 [Ver, e.g., [26]] *A seguintes classes de contrações satisfazem a propriedade sup da norma .*

(i). *A classe de todas as contrações estritas.*

(ii). *A classe de todas as contrações uniformemente estáveis.*

(iii). *A classe de todas as simetrias (i.e., $S^* = S = S^{-1}$).*

(iv). *A classe de todas as contrações com rank-finito.*

(v). *A classe de todas as contrações compactas.*

DEMONSTRAÇÃO: Ver, e.g., [26]. □

O Teorema 3.5 nos mostra diversos exemplos de classes que satisfazem a propriedade sup da norma.

Agora, suponha que a classe de contrações $\mathcal{C}$ em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ satisfaz esta propriedade (ou seja, $\mathcal{C}$ tem a propriedade sup da norma). Note que toda classe $\mathcal{C}'$ em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ que contém $\mathcal{C}$ também tem a propriedade sup da norma. Com efeito, seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração arbitrária. Considere $S \in \mathcal{C}$, segue que

$$\|T\| = \sup_{S\in\mathcal{C}} r(ST) \leq \sup_{S\in\mathcal{C}'} r(ST) \leq \|T\| \,.$$

Logo, $\sup_{S\in\mathcal{C}'} r(ST) = \|T\|$.

Corolário 3.6 [Ver, e.g., [26]] *As classes seguintes classes de contrações em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ tem a propriedade sup da norma: todos os operadores unitários; todas as contrações estritas auto-adjuntas; todas as contrações auto-adjuntas; e todas as contrações normalóides.*

DEMONSTRAÇÃO: Basta reproduzir o comentário anterior e aplicar o Teorema 3.5. □

A maioria das classes de contrações investigadas por Cain ([4], [5] e [6]) satisfazem a propriedade sup da norma, então o resultado a seguir deve ser encarado como uma generalização de grande parte dos resultados ali estabelecidos.

Corolário 3.7 [Ver, e.g., [26]] *Sejam T e S dois operadores em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$. Se T é uma contração estrita, segue que as afirmações abaixo são verdadeiras:*

(i). *ST é uniformemente estável para todo S em qualquer classe de contrações que contém todas as contrações estritas.*

(ii). *ST é uniformemente estável para todo S em qualquer classe de contrações que contém todas as contrações com rank-finito.*

(iii). *ST é uniformemente estável para todo S em qualquer classe de contrações que contém todas as simetrias.*

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que T é uma contração. Em particular, (ii) e (iii) implicam que T é uma contração própria.

DEMONSTRAÇÃO: Ver, e.g., [26]. $\square$

Uma das afirmações do Corolário 3.7 mostra que se ST é uniformemente estável para todo S em qualquer classe de contrações que contém todas as contrações com rank-finito, então T é uma contração própria. O Exemplo 3.8 mostra que a recíproca desta afirmação não é verdadeira. Apesar desta seção conter prioritariamente resultados já estabelecidos, o exemplo a seguir não foi retirado de nenhum dos artigos aqui citados.

Exemplo 3.8 Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2]$ um produto tensorial, onde $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Note que T é uma contração própria. De fato, considere $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ elementos arbitrários em $\mathbb{R}^2$. Como $\|T(x \otimes y)\|^2 = \|(A \otimes B)(x \otimes y)\|^2$, então $\|T(x \otimes y)\|^2 = \|Ax\|^2 \|By\|^2$ pela Proposição 2.9. Daí,

$$\|Ax\|^2 = \tfrac{1}{4} \|x_1\|^2 + \tfrac{4}{9} \|x_2\|^2 \text{ e } \|By\|^2 = \tfrac{9}{4} \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2$$

Logo,

$$\|T(x \otimes y)\|^2 = (\frac{1}{4} \|x_1\|^2 + \frac{4}{9} \|x_2\|^2)(\frac{9}{4} \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2) =$$

$$= \frac{9}{16} \|x_1\|^2 \|y_1\|^2 + \frac{1}{4} \|x_1\|^2 \|y_2\|^2 + \|x_2\|^2 \|y_1\|^2 + \frac{4}{9} \|x_2\|^2 \|y_2\|^2 .$$

Por outro lado, $\|(x \otimes y)\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$ novamente pela Proposição 2.9, donde $\|x \otimes y\|^2 = (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2)$. Logo,

$$\|(x \otimes y)\|^2 = \|x_1\|^2 \|y_1\|^2 + \|x_1\|^2 \|y_2\|^2 + \|x_2\|^2 \|y_1\|^2 + \|x_2\|^2 \|y_2\|^2 .$$

Portanto, $\|T(x \otimes y)\|^2 < \|x \otimes y\|^2$ para todo $(x \otimes y) \in (\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2)$. Em outras palavras, T é uma contração própria. Agora, considere outro produto tensorial $S = (C_1 \otimes C_2)$ em $\mathcal{B}[\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2]$, onde $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Note que $S = (C_1 \otimes C_2)$ é uma contração com rank-finito, pois o produto tensorial de contrações com rank-finito é uma contração com rank-finito (ver, e.g., [25]). Como todo operador com rank-finito é compacto (ver, e.g., [23] p.255), segue que $S = (C_1 \otimes C_2)$ é uma contração compacta, donde $C_1A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ e $C_2B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como C_1A e C_2B são operadores auto-adjuntos, segue que $r(C_1A) = \|C_1A\| = \frac{2}{3}$ e $r(C_2B) = \|C_2B\| = \frac{3}{2}$. Daí, pelo Teorema 2.10

$$r(ST) = r(C_1A)r(C_2B) = \frac{2}{3}\frac{3}{2} = 1.$$

Portanto, ST não é uniformemente estável. Em outras palavras, se T é uma contração própria, então existe uma contração compacta S, tal que $r(ST) = 1$.$\diamond$

No início desta seção, vimos que toda contração pode ser estabilizada uniformemente por uma contração estrita. Através da propriedade sup da norma podemos provar a recíproca desta afirmação. De fato, se $ST \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uniformemente estável para todo $S \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ contração estrita, segue que

$$r(ST) < 1 \Rightarrow \|T\| = \sup_S r(ST) \leq 1,$$

onde na igualdade usamos o Teorema 3.5. Logo T é uma contração. Isso deixa evidente a importância da propriedade sup da norma para o problema de estabilidade.

Proposição 3.9 [Ver, e.g., [26]] *Sejam S, T operadores em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$. As afirmações abaixo são equivalentes:*

(i). *ST é uniformemente estável para toda contração estrita S.*

(ii). *T é contração.*

Demonstração: A prova da ida é imediato, e a demonstração da volta foi feita no parágrafo anterior. □

Kubrusly e Vieira [26] ainda definem outras três propriedades que merecem destaque: propriedade max da norma (i.e., "max norm property"); propriedade sup do raio numérico (i.e., "numerical radius sup property"); e a propriedade sup do raio espectral (i.e., "spectral radius sup property"). Vamos denotar esse conjunto de propriedades como Propriedades do Sup. Em outras palavras, se uma classe de contrações tem a Propriedade do Sup quer dizer que ela satisfaz algumas das propriedades a seguir: propriedade sup da norma; ou propriedade max da norma; ou propriedade sup do raio numérico; ou propriedade sup do raio espectral.

Assim, como fizemos para a propriedade sup da norma, iremos mostrar exemplos de algumas classes que satisfazem as outras propriedades e enunciar alguns teoremas que estabelecem a importância das Propriedades do Sup restantes na solução o Problema de Estabilidade Multiplicativa de Contrações.

Uma classe de contrações $\mathcal{C}$ em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ tem a propriedade max da norma se

$$\max_{S\in\mathcal{C}} r(ST) = \|T\|$$

para todo operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. Pode-se mostrar que as classes de todas as contrações não-estritas, de todas as isometrias parcias (i.e., $T|_{\mathcal{N}(T)^{\perp}}$ é uma isometria) e de todas as contrações são exemplos de classes de contrações em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ que satisfazem esta propriedade (ver, e.g., [26]).

Proposição 3.10 [Ver, e.g., [26]] *Sejam S, $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. As afirmações a seguir são equivalentes:*

(i). *ST é uniformemente estável para toda contração S.*

(ii). *ST é uniformemente estável para toda contração não-estrita S.*

(iii). *ST é uniformemente estável para toda isometria parcial S.*

(iv). *T é uma contração estrita.*

DEMONSTRAÇÃO: Ver, e.g., [26]. □

Uma classe de contrações $\mathcal{C}$ em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ satisfaz a propriedade sup do raio numérico, se

$$\sup_{S\in\mathcal{C}} r(ST) = w(T)$$

para todo $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$.

A propriedade sup do raio numérico generaliza os dois últimos resultados do Teorema 3.4 estabelecido por Cain. De fato, pode-se verficar que as classes de todas as projeções ortogonais (i.e., $P = P^2 = P^*$), de todas as contrações não-negativas, de todas as contrações positivas, e de todas as contrações estritamente positivas têm a propriedade sup do raio numérico (ver, e.g., [26]). Graças a esta propriedade verificam-se outras condições de suficiência além daquelas determinadas no Teorema 3.4 (iii).

Proposição 3.11 [Ver, e.g., [26]] *Sejam T e S dois operadores em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$, segue que se $w(T) < 1$, então as afirmações são verdadeiras:*

(i). *ST é uniformemente estável para toda projeção ortogonal S.*

(ii). *ST é uniformemente estável para toda contração não-negativa S.*

(iii). *ST é uniformemente estável para toda contração positiva S.*

(iv). *ST é uniformemente estável para toda contração estritamente positiva S.*

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

(v). *$w(T) \leq 1$ e T é uniformemente estável.*

DEMONSTRAÇÃO: Ver, e.g., [26] □

Por fim, uma classe de contrações $\mathcal{C}$ em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ tem a propriedade sup do raio espectral, se

$$\sup_{S \in \mathcal{C}} r(ST) = r(T)$$

para todo $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. Pouco se sabe sobre as classes de contrações que satisfazem esta propriedade. Um exemplo é a classe de todos os operadores escalares. De fato,

$$\sup_{S=\alpha I, |\alpha| \leq 1} r(ST) = r(T).$$

Mais adiante iremos colocar o Problema de Estabilidade Multiplicativa no contexto de produto tensorial. Neste caso, a propriedade sup do raio espectral desempenharia um papel fundamental se soubéssemos mais informações sobre ela.

Encerramos esta seção com um resultado central. O próximo teorema estabelece condições necessárias e suficientes para estabilidade multiplicativa de uma contração própria.

Teorema 3.12 [Ver, Corolário 7 de [26]] *Sejam $S, T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. As afirmações abaixo são equivalentes:*

(i). *ST é uniformemente estável para toda contração compacta S.*

(ii). *ST é fracamente estável para toda contração compacta S.*

(iii). *Os autovalores de ST pertencem ao disco unitário aberto para toda contração compacta S.*

(iv). *T é uma contração própria.*

(v). *ST é uma contração própria para toda contração compacta S.*

(vi). *ST é uma contração estrita para toda contração compacta S.*

DEMONSTRAÇÃO: Ver, Corolário 7 de [26]. □

O Teorema 3.12 mostra que o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações está resolvido para a classe das contrações próprias. O que podemos estabelecer para contrações não-próprias? Será que podemos afirmar que perturbações compactas estabilizam multiplicativamente esta classe (ou seja, a classe da contrações não-próprias)? Na próxima seção, investigamos estas perguntas. Em particular, mostramos que o resultado anterior de Kubrusly e Vieira estabiliza multiplicativamente um subconjunto "grande" das contrações fortemente estáveis.

3.2 O Problema para Contrações Não-Próprias

Na seção anterior vimos que toda contração própria é estabilizada multiplicativamente por uma contração compacta (Teorema 3.12). Portanto, o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações se restringe a classe das contrações não-próprias. Logo, é natural tentarmos caracterizar o conjunto das contrações não-próprias para ter alguma intuição sobre o tipo de perturbação que resolve a questão que estamos interessados. Por definição contrações não-próprias são o oposto das contrações próprias. Daí, um possível ponto de partida para a nossa investigação é estabelecer quais as classes de contrações que contém a classe das contrações próprias. Além disso, determinar sob quais condições ambas classes colapsam. Assim, restringimos nossa investigação apenas as classes as quais o Teorema 3.12 não se aplica. É exatamente este caminho que vamos seguir nos próximos parágrafos.

Antes de começarmos cabe uma ressalva. Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração arbitrária. Se $r(T) < 1$, então T já é uniformemente estável pela Proposição 3.3. Neste caso, basta perturbar T multiplicativamente pela identidade $I \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. Portanto, queremos estabilizar multiplicatimente contrações T com raio espectral $r(T) = 1$. Em particular, a classe das contrações quasinilpotentes (i.e., $r(T) = 0$) foge ao nosso interesse. Por exemplo, pode-se verificar que

$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma contração não-própria. Apesar disso, $T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

para todo inteiro não-negativo $n > 1$. Logo, $r(T) = 0$, ou seja, T é quasi-nilpotente. Logo, o Teorema 3.12 restringe o problema original a classe das contrações não-próprias normalóides.

Lembre que a parte de um operador é a restrição dele em um subespaço invariante. Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é complemente não-unitário se não existe $\mathcal{M}$ parte de T, tal que $T|_{\mathcal{M}}$ é um operador unitário (i.e., $T|_{\mathcal{M}}$ é uma isometria sobrejetiva). Pode-se verificar imediatamente da definição que toda contração própria é um operador complemente não-unitário.

Teorema 3.13 (Decomposição de Foguel) *Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração qualquer, segue que*

$$T = Z \oplus U,$$

onde Z é uma contração fracamente estável e U é um operador unitário.

DEMONSTRAÇÃO: Ver, e.g., [18] p.103. □

O Teorema 3.13 permite mostrar que toda contração própria é um operador fracamente estável.

Proposição 3.14 [Ver, e.g., [19] p.111] *Toda contração própria é fracamente estável.*

DEMONSTRAÇÃO: [Ver, e.g., [19] p.111] Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração própria. Se existe $\mathcal{M}$ parte de T, tal que $T|_{\mathcal{M}}$ é unitário, então $\|Ty\| = \|y\|$ para todo $y \in \mathcal{M}$. Por outro lado, pela definição de T temos que $\|Tx\| < \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$, contradição. Portanto, T é um operador completamente não-unitário. O Teorema 3.13 (i.e., a Decomposição de Foguel) estabelece que toda contração T em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ pode ser reescrita como

$$T = Z \oplus U,$$

onde U é um operador unitário e Z é uma contração fracamente estável. Como T é complemente não-unitário, segue que $T = Z$. Equivalentemente, T é fracamente estável. □

Como contrações quasinilpotentes não fazem parte da nossa investigação, a Proposição 3.14 sugere voltarmos nossa atenção para as contrações normalóides fracamente estáveis. A classe de todas as contrações fortemente estáveis é um subconjunto importante das contrações fracamente estáveis.

Além disso, não existe uma relação direta entre estabilidade forte e contração própria, isto é, contração própria não implica em contração fortemente estável e vice-versa. O próximo exemplo foi retirado de [18] p.36, ele justifica o argumento anterior e define formalmente um shift unilateral e seu adjunto.

Exemplo 3.15 [Ver, e.g., [18] p.36] Considere o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_k$, onde $\{\mathcal{H}_k\}$ uma coleção contável de espaços de Hilbert. Um elemento $x \in \mathcal{H}$ é definido da seguinte maneira: $x \in \bigoplus_k x_k \in \mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_k$, tal que $x_k \in \mathcal{H}_k$ para cada $k \geq 0$. Um operador S_+ em $\mathcal{H}$ é um shift unilateral se existe uma sequência de subespaços ortogonais (dois a dois) $\{\mathcal{H}_k\}_{k\geq 0}$, tal que $S|_{\mathcal{H}_k} : \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_{k+1}$ é um operador unitário para cada $k \geq 0$. Em outras palavras,

$$S_+x = 0 \oplus \bigoplus_{k\geq 1} U_k x_{k-1} \, \forall x \in \mathcal{H},$$

para uma sequência de operadores unitários $\{U_{k+1} : \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_{k+1}; k \geq 0\}$, onde $0 \in \mathcal{H}_0$ é a origem e $S_+|_{\mathcal{H}_k} = U_{k+1}$ para cada $k \geq 0$. Analogamente, podemos definir o adjunto do shift unilateral, o shift unilateral reverso, da seguinte maneira:

$$S_+^* x = \bigoplus_{k\geq 0} U_{k+1}^* x_{k+1} \, \forall x \in \mathcal{H}.$$

Pode-se mostrar que o shift unilateral reverso S_+^* é uma contração não-própria fortemente estável (ver, e.g., [19] p.42). $\diamond$

A classe das contrações fortemente estáveis é extensa. Por exemplo, através da Alternativa de Fredholm (Teorema 2.6) podemos mostrar que sob compacidade as noções de estabilidade colapsam. Com efeito, se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração compacta fortemente estável, então pela Alternativa de Fredholm (Teorema 2.6)

$$\sigma_P(T)\backslash\{0\} = \sigma(T)\backslash\{0\} \subseteq \mathbb{D}^-,$$

onde $\mathbb{D}^- = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ é o disco unitário fechado no plano complexo. Por outro lado, se T é fortemente estável, então 1 não é autovalor de T (basta aplicar a definição de estabilidade forte). Como $r(T) = \max_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$ pela Fórmula de Gelfand-Beurling (Teorema 2.5), então $r(T) < 1$. Logo, pela Proposição 3.1 os conceitos de estabilidade colapsam. Em outras palavras, todo operador compacto uniformemente ou fracamente estável é um exemplo de operador fortemente estável.

O que podemos afirmar sobre as contrações normalóides fortemente estáveis? Na Proposição 2.8, vimos que

$$\text{Normal} \subset \text{Quasinormal} \subset \text{Subnormal} \subset \text{Hiponormal} \subset \text{Normalóide}.$$

Portanto, antes de investigarmos a classe das contrações normalóides, vamos restringir nossa atenção na subclasses ali contidas (i.e., normais, quasinormais, subnormais e hiponormais).

Proposição 3.16 [Ver, e.g., [19] p.111] *Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração normal fortemente estável, então T é uma contração própria.*

DEMONSTRAÇÃO: Ver, e.g., [19] p.111. □

A Proposição 3.16 mostra que toda contração $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ normal fortemente estável é uma contração própria. Daí, o Teorema 3.12 para estabilidade multiplicativa de contrações próprias se aplica a classe de todas as contrações normais fortemente estáveis. Em outras palavras, devemos restringir nossa investigação apenas a contrações normalóides não-normais fortemente estáveis. Será que podemos extender a Proposição 3.16 para outras subclasses dos normalóides?

Agora, vamos definir uma classe de operadores que responde a pergunta anterior. Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é paranormal se

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\,\|x\|$$

para todo $x \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. A desigualdade abaixo é a propriedade fundamental dos operadores paranormais.

Proposição 3.17 [Ver, e.g., [19] p.99] *Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um operador paranormal, então*

$$\frac{\|Tx\|^n}{\|x\|^n} \leq \frac{\|T^n x\|}{\|x\|}$$

para todo vetor não-nulo $x \in \mathcal{H}$ e todo inteiro positivo $n \geq 1$.

DEMONSTRAÇÃO: Ver, e.g., [19] p.99. □

Note que a desigualdade acima garante que todo operador paranormal é normalóide. De fato,

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|^n}{\|x\|^n} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|T^n x\|}{\|x\|} \Rightarrow \|T\|^n \leq \|T^n\| \Rightarrow \|T\| \leq \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Daí, $\|T\| \leq \lim_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = r(T)$, onde na última igualdade usamos a Fórmula de Gelfand-Beurling (Teorema 2.5). Logo, $\|T\| \leq r(T) \leq \|T\|$. Portanto T é normalóide.

Exemplo 3.18 Seja S_+^* um shift unilateral reverso em $l_+^2(\mathbb{C})$. Tome $x = (0,1,0,0,\ldots,0) \in l_+^2(\mathbb{C})$, então $S_+^* x = (1,0,0,0,\ldots)$. Logo, $\frac{\|S_+^*\|^n}{\|x\|^n} = 1$ para todo $n \geq 1$. Por outro lado, $(S_+^*)^n = 0$ para todo inteiro $n \geq 2$, donde $\frac{\|(S_+^*)^n\|}{\|x\|} = 0$. Portanto, a Proposição 3.17 não é satisfeita. Em outras palavras, S_+^* não é paranormal. $\diamond$

Apesar de todo operador paranormal ser normalóide, o Exemplo 3.18 mostra que a recíproca não é verdadeira (i.e., Normalóide $\not\subset$ Paranormal). Mais do que isso pode-se mostrar que

$$\text{Hiponormal} \subset \text{Paranormal} \subset \text{Normalóide}$$

(ver, e.g., [19] p.95). A Proposição 3.16 estabeleceu que toda contração normal fortemente estável é uma contração própria. Em seguida, nos perguntamos se esta implicação valeria para outras subclasses das contrações normalóides. Agora, vamos provar que essa relação também se mantém para os quasinormais, os subnormais e os hiponormais.

Proposição 3.19 [Ver, e.g., [19] p.110] *Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração paranormal. Se T é fortemente estável, então T é uma contração própria.*

Demonstração: [Ver, e.g., [19] p.110] Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um operador paranormal, então

$$\frac{\|Tx\|^n}{\|x\|^n} \leq \frac{\|T^n x\|}{\|x\|}$$

para todo vetor não-nulo $x \in \mathcal{H}$ e todo inteiro positivo n pela Proposição 3.17. Por outro lado, se T é fortemente estável, então $\frac{\|T^n x\|}{\|x\|} \to 0$ para todo x não-nulo em $\mathcal{H}$. Logo, $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} < 1$. Equivalentemente, T é uma contração própria. $\square$

Mais uma vez, o Teorema 3.12 pode ser aplicado para estabilizar multiplicativamente contrações paranormais fortemente estáveis. Finalmente, será que as hipóteses normalóide e estabilidade forte implicam em contração própria? Essa afirmação não é verdadeira para o caso geral. O contra-exemplo é o shift unilateral reverso S_+^*. De fato, no Exemplo 3.15 mostramos que um shift unilateral reverso S_+^* em $l_+^2(\mathcal{H})$ é fortemente estável. Por outro lado, no Exemplo 3.18 vimos que S_+^* é uma contração normalóide não-própria. Portanto, o

Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações Fortemente Estáveis continua em aberto para contrações não-próprias normalóides. Resumindo: *queremos investigar as classes que estabilizam multiplicativamente contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis.*

Com base nos argumentos discutidos nesta seção é natural nos perguntarmos:

1. Quem são as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis?

2. Contrações compactas estabilizam multiplicativamente diversas subclasses de contrações fortemente estáveis. Será que perturbações compactas resolvem o Problema de Estabilidade Multiplicativa para o caso geral de contrações fortemente estáveis?

Encerramos este capítulo investigando as questões apresentadas acima.

3.3
O Problema para uma Classe Particular

Nesta seção, vamos investigar o Problema de Estabilidade Multiplicativa para uma Classe Particular $\mathcal{F}$. Denotaremos por $\mathcal{F}$ a classe de todas as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis.

Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração arbitrária. O Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações investiga quais as condições necessárias e suficientes para uma perturbação multiplicativa estabilizar uniformemente a contração original. Kubrusly e Vieira [26] responderam essa questão para a classe de todas as contrações próprias através de perturbações compactas (Teorema 3.12). A partir deste resultado, o problema em questão ficou restrito a estabilidade de contrações não-próprias. Por outro lado, operadores quasinilpotentes são uniformente estáveis por definição. Logo, o Problema de Estabilidade para Contrações se resume a *estabilidade multiplicativa de contrações não-próprias normalóides.*

Na seção anterior, mostramos que toda contração própria é fracamente estável (Proposição 3.14). Em particular, a classe de todas as contrações fortemente estáveis é uma subclasse importante das contrações fracamente estáveis. Logo, decidimos investigar o Problema de Estabilidade Multiplicativa para contrações normalóides fortemente estáveis. Em seguida, definimos a classe das contrações paranormais e estabelecemos que Hiponormais $\subset$ Paranormais $\subset$ Normalóides, onde $\subset$ é uma relação de inclusão própria. Provamos que toda contração paranormal fortemente estável é própria (Proposição 3.19). Logo, o Teorema 3.12 para estabilidade multiplicativa de contrações próprias pode ser aplicado. Portanto, o Problema de Estabilidade Multiplicativa está resolvido para todas as subclasses dos normalóides fortemente estáveis apresentadas no Capítulo 2 (i.e., normal, quasinormal, subnormal e hiponormal). Em outras palavras, podemos restringir a nossa investigação as classes de contrações que estabilizam multiplicativamente contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis, ou seja, contrações que pertencem a classe $\mathcal{F}$.

Com base nestes resultados destacamos duas perguntas: "perturbações compactas resolvem o Problema de Estabilidade Multiplicativa para o caso geral de contrações fortemente estáveis?"; e "quem são as contrações em $\mathcal{F}$ (i.e., as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis)?". Agora, vamos procurar investigar essas duas questões. Com relação a primeira questão, vamos provar todo shift unilateral e seu adjunto podem ser estabilizados multiplicativamente por operadores compactos normais injetivos. Na verdade, mostramos mais do que isso, estabelecemos que tal produto de operadores é quasinilpotente. Por outro lado, mais adiante, destacaremos que não conhecemos muitos exemplos de contrações normalóides não-próprias fortemente estáveis. Em particular, nossos exemplos de contrações em $\mathcal{F}$ são operadores que podem ser escritos como soma direta de um shift unilateral reverso por uma contração. Mostramos que as decomposições de Nagy-Foias-Langer e von Neumann-Wold corroboram essa intuição. Note que agora as duas perguntas feitas ao início deste parágrafo estão relacionadas. Daí, se toda contração não-própria normalóide fortemente estável for a soma direta de um shift unilateral reverso com uma contração própria, então o Problema de Estabilidade para Contrações Fortemente Estáveis está resolvido. Estes serão os tópicos a seguir discutidos.

O exemplo clássico de contração não-própria fortemente estável normalóide é um shift unilateral reverso. Em particular, toda diagonal compacta estabiliza multiplicativamente um shift unilateral reverso em $l^2_+(\mathbb{C})$.

Exemplo 3.20 [Ver, Exemplo 6.F de [23]] Seja S_+ um shift unilateral em $l^2_+(\mathbb{C})$. Considere $D = \text{diag}(\{\alpha_k\}_{k\geq 0}) \in \mathcal{B}[l^2_+(\mathbb{C})]$ um operador diagonal, tal que

$$\alpha_k \neq 0 \text{ para todo } k \geq 0 \text{ e } \alpha_k \to 0 \text{ quando } k \to \infty.$$

Pode-se verificar que D é um operador compacto (ver, e.g., [23] p.256). Além disso, sabe-se que

$$\sigma(S_+D) = \sigma_R(S_+D) = \{0\} \text{ e } \sigma(D^*S_+^*) = \sigma_P(D^*S_+^*) = \{0\}$$

(ver, e.g., [23] p.473). Como D é normal segue que D^* é normal, pois $(D^*)^* = D$. Por outro lado, D é compacto se e somente se D^* é compacto (ver, e.g., [23] p.427). Portanto, S_+^* é estabilizado multiplicativamente por todo operador normal compacto definido da mesma maneira que D. $\diamond$

Ainda com o objetivo de caracterizar as contrações em $\mathcal{F}$ (i.e., as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis), o próximo exemplo (Exemplo 3.21) estabelece que $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ contração não-estrita própria normalóide fortemente estáveis não implica que T é normal.

Exemplo 3.21 Seja $T = (\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0} \otimes S_+) \in \mathcal{B}[l_+^2(\mathbb{C}) \otimes l_+^2(\mathbb{C})]$ um produto tensorial, onde $\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}$ é um operador diagonal em $l_+^2(\mathbb{C})$ e S_+ um shift unilateral em $l_+^2(\mathbb{C})$. Queremos provar que T é uma contração não-estrita própria fortemente estável normalóide, tal que T não é normal. Note que $\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}$ é uma contração própria (ver, e.g., [19] p.110) e S_+ é uma isometria (ver, e.g., [18] p.88). Como o produto tensorial de uma contração própria por uma contração é uma contração própria (ver, e.g., [25]), segue que $T = (\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0} \otimes S_+)$ é uma contração própria. Por outro lado, como todos os coeficientes de $\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}$ são menores que 1, então $\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}$ é fortemente estável (ver, e.g., [19] p.110). Kubrusly e Vieira [27] mostram que o produto tensorial de uma contração fortemente estável por uma contração é uma contração fortemente estável. Logo, $T = (\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0} \otimes S_+)$ é uma contração própria fortemente estável. Agora, vamos mostrar que T é uma contração não-estrita normalóide. De fato, como S_+ é uma isometria, então $\|S_+\| = 1 = r(S_+)$ (ver, e.g., [18] p.42). Por outro lado, sabe-se que $\left\|\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}\right\| = 1$ (ver, e.g., [19] p.110), tal que $r(\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}) = 1$, pois todo operador diagonal é auto-adjunto. Como $\|T\| = \left\|\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}\right\| \|S_+\|$ pela Proposição 2.9, então

$$\|T\| = \left\|\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}\right\| \|S_+\| = 1.$$

Além disso, $r(T) = r(\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0})r(S_+)$ pelo Teorema 2.10, donde $r(T) = 1$. Portanto,

$$\|T\| = 1 = r(T),$$

ou seja, T é uma contração não-estrita própria normalóide fortemente estável. Para concluirmos nosso exemplo falta apenas provar que o produto tensorial $T = (\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0} \otimes S_+)$ não é normal. A Proposição 2.9 (iii) garante que

$$T^* = (\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0} \otimes S_+)^* = (\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})^*_{k\geq 0} \otimes S_+^*) = (\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0} \otimes S_+^*),$$

onde na última igualdade usamos o fato do operador diagonal ser auto-adjunto. Daí,

$$T^*T = (\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0} \otimes S_+^*)(\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0} \otimes S_+).$$

Lembre que dados dois produtos tensoriais quaisquer $(A \otimes B)$ e $(C \otimes D)$ em $\mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ tem-se que $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$ pelo ítem (i) da Proposição 2.9, então

$$T^*T = ([\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}]^2 \otimes S_+^*S_+) = ([\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}]^2 \otimes I).$$

Analogamente, podemos mostrar que

$$TT^* = (\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0} \otimes S_+)(\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0} \otimes S_+^*) = ([\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}]^2 \otimes S_+S_+^*).$$

Logo,

$$T^*T = ([\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}]^2 \otimes I) \neq ([\text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}]^2 \otimes S_+S_+^*) = TT^*,$$

isto é, T não é um operador normal. Conclusão: T é uma contração não-estrita própria normalóide fortemente estável e T não é um operador normal. $\diamond$

O Teorema Espectral é um dos pilares da Análise Funcional. A versão do Teorema Espectral para Operadores Normais Compactos basicamente diz que todo operador normal compacto pode ser reescrito como uma soma direta de operadores escalares (i.e., múltiplos da identidade), cujos pesos são dados pelos autovalores.

Lembre que $P \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma projeção ortogonal se P é idempotente e $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$. Duas projeções P_1 e P_2 definidas em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ são ortogonais entre si (ou mutuamente ortogonais) se $\mathcal{R}(P_1) \perp \mathcal{R}(P_2)$. Seja Γ um conjunto arbitrário de índices. Se $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ uma família de projeções duas a duas ortogonais em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$, então dizemos que $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma família de projeções ortogonais. Se $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma família de projeções ortogonais e

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} P_\gamma x = x \, \forall x \in \mathcal{H},$$

então $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ é uma resolução da identidade em $\mathcal{H}$.

A seguir, vamos enunciar o Teorema Espectral para operadores Normais Compactos.

Teorema 3.22 [Ver, e.g., [24] p.58] *Se um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ ($\mathcal{H}$ espaço de Hilbert complexo não-nulo) é normal e compacto, então existe uma única resolução contável da identidade $\{E_k\}$ em $\mathcal{H}$ e um conjunto limitado de escalares $\{\lambda_k\}$, tal que*

$$T = \sum_k \lambda_k E_k,$$

onde $\{\lambda_k\} = \sigma_P(T)$ é o conjunto (não-vazio) de todos os autovalores distintos de T, e cada E_k é uma projeção ortogonal sobre o autoespaço $\mathcal{N}(\lambda I_k - T)$. Se a soma ponderada contável de projeções acima for infinita, então ela converge uniformemente em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$.

Demonstração: Ver, e.g., [24] p.58. □

O Teorema Espectral estabelece que todo operador normal compacto é unitariamente equivalente a um operador diagonal. A próxima proposição mostra que um operador normal compacto é injetivo se e somente se ele tem todos os autovalores diferentes de zero. Além disso, o resultado a seguir estabelece que um operador normal compacto com todos os autovalores iguais a zero é o operador nulo.

Proposição 3.23 *Seja $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador normal compacto, segue que D é injetivo se e somente se D não tem autovalores nulos. Além disso, se $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ tem todos os autovalores nulos, então D é o operador nulo.*

Demonstração: Seja $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador normal compacto arbitrário. Se D não tem autovalores nulos, então $0 \notin \sigma_P(D)$. Daí, pela definição de espectro pontual, segue que $\mathcal{N}(D) = \{0\}$. Como um operador é injetivo se e somente se o seu núcleo é $\{0\}$ (ver, e.g., [23] p.56), temos que $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é injetivo. Reciprocamente, suponha que $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é injetivo. Daí, $\mathcal{N}(D) = \{0\}$ (ver, e.g., [23] p.56). Como $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é normal compacto, então $D = \operatorname{diag}(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é um operador diagonal pelo Teorema Espectral, onde $\alpha_k \in \mathbb{C}$ são os autovalores de D. Se $\mathcal{N}(D) = \{0\}$, segue que $\alpha_k \neq 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Portanto, D não tem autovalores nulos. Agora, suponha que todos os autovalores de D normal compacto são nulos. Daí, pelo Teorema Espectral (i.e.,Teorema 3.22), segue que

$$D = \bigoplus_{\lambda\in\sigma_P(D)} 0I_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in\sigma_P(D)} 0 = 0,$$

onde I_λ é a identidade no autoespaço $\mathcal{N}(\lambda I - D)$ para cada $\lambda \in \sigma_P(D)$. Portanto, D é o operador nulo. □

Note que $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ operador normal compacto injetivo não implica que $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é invertível. De fato, considere o operador diagonal $D = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pode-se verificar que D é um operador normal compacto (ver, e.g., [23] p.256). Além disso, como cada elemento da diagonal é diferente de zero, segue que D não tem autovalores nulos. Por outro lado, D não é invertível (i.e., D não tem inversa contínua). Com efeito, a inversa de D é dada por $D^{-1} = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que não é limitada. Logo, D não tem inversa contínua pela Proposição 2.3 (iii).

Agora iremos usar o Teorema Espectral para estabilizar multiplicativamente um shift unilateral reverso por um operador normal compacto injetivo (i.e., sem autovalor nulo) ou nulo (i.e., todos os autovalores iguais a zero). Considere $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert arbitrário. Lembre que nesta tese $\mathcal{H}$ denota um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita. Daí, dado um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ podemos decompô-lo da seguinte maneira (ver, e.g., [18] p.2):

$$\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_k,$$

isto é, $\mathcal{H}$ é a soma direta de uma coleção contável de espaços de Hilbert $\{\mathcal{H}_k\}$, tal que os elementos $\{x_k\}$ em $\mathcal{H}$ são todas as "nets" (i.e., sequências definidas nos inteiros ao invés dos naturais) com cada $x_k \in \mathcal{H}_k$ e $\sum_k \|x_k\|^2 < \infty$. Os elementos em $\mathcal{H}$ serão denotados por $\bigoplus_k x_k$. O produto interno em $\mathcal{H}$ é construído a partir dos produtos internos de cada $\mathcal{H}_k$, onde $\langle x; y\rangle = \sum_k \langle x_k; y_k\rangle$ para todo $x = \bigoplus_k x_k$ e $y = \bigoplus_k y_k$ em $\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_k$. Em particular, para um espaço de Hilbert arbitrário temos que

$$l^2_+(\mathcal{H}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}.$$

Se $D \in \mathcal{B}[l^2_+(\mathcal{H})]$ é um operador normal compacto injetivo e $S_+^* \in \mathcal{B}[l^2_+(\mathcal{H})]$ um shift unilateral reverso, então $r(DS_+^*) = 0$. O teorema a seguir é uma consequência do Exemplo 3.20

Teorema 3.24 *Seja $S_+^* \in l^2_+(\mathcal{H})$ um shift unilateral reverso. Se $D \in l^2_+(\mathcal{H})$ é um operador normal compacto injetivo ou nulo, então $r(DS_+^*) = 0$ (i.e., ST é quasinilpotente).*

Demonstração: Seja S_+^* um shift unilateral reverso em $l^2_+(\mathcal{H})$ arbitrário. Considere D um operador normal compacto em $l^2_+(\mathcal{H})$. Como D é um operador normal compacto, segue que

$$D = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_P(D)} \lambda I_\lambda$$

pelo Teorema Espectral (Teorema 3.22), onde I_λ é o operador identidade definido no autoespaço $\mathcal{N}(\lambda I - D)$ para cada $\lambda \in \sigma_P(D)$. Se D é o operador nulo temos trivialmente que $r(DS_+^*) = r(0S_+^*) = 0$. Agora, suponha que D é injetivo, isto é, todos os autovalores λ de D são diferentes de zero pela Proposição 3.23. Neste caso, pelo Exemplo 6.F de [23], temos que $\sigma_P(DS_+^*) = \{0\}$. Como o conjunto de todos os operadores compactos é um ideal bilateral pela Proposição 2.2 e D é um operador compacto, segue que DS_+^* é um operador compacto. Daí, pela Alternativa de Fredholm (Teorema 2.6)

$$\sigma_P(DS_+^*)\backslash\{0\} = \sigma(DS_+^*)\backslash\{0\} \Rightarrow \sigma(DS_+^*) \subseteq \{0\}.$$

Como o espectro de um operador nunca é vazio (ver, e.g., [23] p.452) temos que $\sigma(DS_+^*) = \{0\}$. Portanto, $r(DS_+^*) = 0$ quando D é um operador normal compacto injetivo ou nulo. $\square$

O corolário abaixo é um caso particular do Teorema 3.24.

Corolário 3.25 *Seja $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um shift unilateral reverso arbitrário. Se $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um operador normal compacto injetivo ou nulo, então $r(DS_+^*) = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: Dado $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, então existe $\mathcal{K}$ outro espaço de Hilbert, tal que $\mathcal{H} = l_+^2(\mathcal{K})$, pois todos espaços de Hilbert separáveis de dimensão infinita são unitariamente equivalentes (ver, e.g., [23] p.363). Como $\mathcal{H} = l_+^2(\mathcal{K})$, então basta aplicar o Teorema 3.24 para mostrar que $r(DS_+^*) = 0$ para todo $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ normal compacto injetivo ou nulo. $\square$

A hipótese central do Teorema 3.24 (i.e., todos os autovalores do operador normal compacto D em $l_+^2(\mathcal{H})$ são diferentes de zero) é essencial. De fato, pelo Teorema Espectral podemos reescrever D como uma diagonal cujos pesos $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ são dados pelos seus autovalores. Daí, pelo Exemplo 6.F de [23], segue que quando perturbamos multiplicativamente um shift unilateral reverso $S_+^* \in \mathcal{B}[l_+^2(\mathcal{H})]$ por $D \in \mathcal{B}[l_+^2(\mathcal{H})]$ normal compacto obtemos um shift unilateral ponderado reverso $T_+^* = DS_+^*$ em $l_+^2(\mathcal{H})$, dado por

$$T_+^* x = DS_+^* x = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_{k+1}$$

para todo $x = \bigoplus_{k=0}^{\infty} x_k \in l_+^2(\mathcal{H})$. O Exemplo 6.F de [23] estabelece que $\lambda x_{k-1} = \alpha_{k-1} x_k$ para $k \geq 1$, onde λ é um autovalor arbitrário de T_+^*. Suponha que $\alpha_{k-1} = 0$ para algum $k \geq 1$. Para tornar o argumento mais simples, assuma sem perda de generalidade que $\alpha_0 = 0$. Daí, $\lambda x_0 = \alpha_0 x_1 = 0$ implica que $\lambda = 0$ ou $x_0 = 0$. Além disso, se $\alpha_0 = 0$ segue que x_1 pode assumir qualquer valor. Agora, considere $x = \bigoplus_{k=0}^{\infty} x_k \in l_+^2(\mathcal{H})$, onde $x_1 = 1$ e $x_k = 0$ para todo $k \neq 1$. Se $\lambda = 1$, então $\lambda x_{k-1} = \alpha_{k-1} x_k = 0$ para todo $k \neq 1$, pois $x_k = 0$. Em particular, para $\lambda = 1$ a igualdade vale $T_+^* x = x$, onde $x \in l_+^2(\mathcal{H})$ é o vetor não-nulo definido anteriormente. Logo, $1 \in \sigma_P(T_+^*)$. Em outras palavras, se a hipótese do Teorema 3.24 não valer o operador normal compacto D não estabiliza multiplicativamente S_+^*.

O Teorema 3.24 estabelece que perturbações compactas solucionam o Problema de Estabilidade Multiplicativa para um caso muito particular em $\mathcal{F}$. Por outro lado, quais são outros possíveis exemplos de contrações em $\mathcal{F}$? As decomposições de Nagy-Foias-Langer e von Neumann-Wold, apresentadas adiante, podem nos ajudar a responder esta pergunta.

Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração. Como T^*T é auto-adjunto pode-se verificar que o limite forte da sequência $\{(T^*)^n T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ existe em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ (ver, e.g., [18]). A notação A_T representará o limite forte de $(T^*)^n T^n$ daqui em diante. Analogamente, o limite forte de $T^n (T^*)^n$ será denotado por A_{T_*}.

Proposição 3.26 [Ver, e.g., [18] p.50] *Seja T uma contração, segue que as afirmações abaixo são verdadeiras:*

(i). $(T^*)^n T^n \xrightarrow{s} A_T$.

(ii). $0 \leq A_T \leq I$ *(i.e., A é uma contração não-negativa).*

(iii). *Se T é fortemente estável se e somente se $A_T = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: Ver, e.g., [18] p.50. □

Kérchy [15] chama A_T de "limite assintótico" de T e A_{T_*} o "limite assintótico" do adjunto T^* de T. Agora, podemos enunciar os teoremas de Nagy-Foias-Langer e von Neumann-Wold para decomposição de contrações.

Teorema 3.27 (Decomposição de Nagy-Foias-Langer) *Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração arbitrária, segue que $\mathcal{U} = \mathcal{N}(I - A_T) \cap \mathcal{N}(I - A_{T_*})$ é um subespaço redutor para T. Além disso, a decomposição*

$$T = C \oplus U$$

em $\mathcal{H} = \mathcal{U}^\perp \oplus \mathcal{U}$ é tal que $C \equiv T|_{\mathcal{U}^\perp}$ é uma contração completamente não unitária e $U \equiv T|_{\mathcal{U}}$ é unitário.

Demonstração: Ver, e.g., [31] p.8 ou [18] p.76. □

O teorema anterior, Teorema 3.27, é a Decomposição de Nagy-Foias-Langer. Ele decompõe qualquer contração $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ em sua maior parte unitária e uma parte complemente não-unitária.

Agora, suponha que $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma isometria. A Decomposição de von Neumann-Wold, teorema abaixo, estabelece que toda isometria em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é a soma direta de um shift unilateral com um operador unitário.

Teorema 3.28 (Decomposição de von Neumann-Wold) *Se T é uma isometria no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então $\mathcal{N}(I - A_{T_*})$ é um subespaço redutor para T. Além disso,*

$$T = S_+ \oplus U$$

em $\mathcal{H} = \mathcal{N}(I - A_{T_*})^\perp \oplus \mathcal{N}(I - A_{T_*})$ é tal que $S_+ \equiv T|_{\mathcal{N}(I - A_{T_*})^\perp}$ é um shift unilateral e $U \equiv T|_{\mathcal{N}(I - A_{T_*})}$ é unitário.

Demonstração: Ver, e.g., [31] p.3 ou [18] p.81. □

A Decomposição de von Neumann-Wold (Teorema 3.28) junto com o Teorema Espectral (Teorema 3.22) nos permite mostrar que toda isometria completamente não-unitária é estabilizada multiplicativamente por uma contração normal compacta injetiva ou nula.

Corolário 3.29 *Seja $S_+ \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um shift unilateral. Se $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um operador normal compacto injetivo ou nulo, então $r(DS_+) < 1$.*

Demonstração: Trivial do Teorema 3.24. □

Corolário 3.30 *Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma isometria completamente não-unitária, então $r(DT) < 1$ para todo $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ contração normal compacta injetiva ou nula.*

Demonstração: Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma isometria completamente não-unitária. Como $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma isometria, então $T = S_+ \oplus U$ pelo Teorema 3.28, onde S_+ é um shift unilateral e U é unitário. Por outro lado, como $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é completemente não-unitário, segue que $U = 0$. Logo, $T = S_+$. Portanto, $r(DT) < 1$ pelo Corolário 3.29. $\square$

Note que a recíproca do Corolário 3.30 não é verdadeira. De fato, considere $T = \text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}$. No Exemplo 3.21 vimos que T é uma contração própria, donde T é complemente não-unitária (caso contrário, $\|Tx\| = \|x\|$ para algum $x \in \mathcal{H}$ não-nulo, contradição). Por outro lado, se T é uma contração própria, então T não é uma isometria. Portanto, T é uma não isometria completamente não-unitária, tal que $r(DT) < 1$ pelo Teorema 3.12 para todo D normal compacto injetivo ou D operador nulo.

Na verdade podemos generalizar o Corolário 3.30 para isometrias parciais completamente não-unitárias.

Lema 3.31 [Ver, e.g., [23] p.515] *Sejam $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $S \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$, segue que $\sigma(T \oplus S) = \sigma(T) \cup \sigma(S)$.*

Demonstração: [Ver, e.g., [23] p.515] É suficiente mostrar que $\rho(T \oplus S) = \rho(T) \cap \rho(S)$. De fato,

$$\sigma(T \oplus S) = \mathbb{C}\backslash\rho(T \oplus S) = \sigma(T) \cap \sigma(S).$$

Pode-se verificar que $\rho(T) \cap \rho(S) \subseteq \rho(T \oplus S)$. Agora, considere $\lambda \in \rho(T \oplus S))$ qualquer, segue que $\mathcal{N}(\lambda(I \oplus I) - (T \oplus S)) = \{0, 0\}$ e $\mathcal{R}(\lambda(I \oplus I) - (T \oplus S)) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$. Se $\mathcal{N}(\lambda(I \oplus I) - (T \oplus S)) = \{0, 0\}$, então $\lambda(I \oplus I) - (T \oplus S)(x, y) = \{0, 0\}$, onde

$$\lambda(I \oplus I) - (T \oplus S)(x, y) = ((\lambda I - T)x, (\lambda I - S)y) = (0, 0).$$

Potanto, $(\lambda I - T)x = 0$ e $(\lambda I - S)y = 0$. Logo, $\lambda \in \mathcal{N}(\lambda I - T)$ e $\lambda \in \mathcal{N}(\lambda I - S)$. Por outro lado, se $\mathcal{R}(\lambda(I \oplus I) - (T \oplus S)) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ segue que

$$\mathcal{R}(\lambda(I \oplus I) - (T \oplus S))(x, y) = \mathcal{R}((\lambda I - T)x, (\lambda I - S)y).$$

Dados $rx \in \mathcal{H}$ e $ry \in \mathcal{K}$, segue que $(rx, ry) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$. Daí, existe (x, y), tal que

$$\mathcal{R}((\lambda I - T)x, (\lambda I - S)y) = (rx, ry).$$

Portanto, $\mathcal{R}(\lambda I - T)x = rx$ e $\mathcal{R}(\lambda I - S)y = ry$. Portanto, $\lambda \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$ e $\lambda \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$. Resumindo, $\rho(T \oplus S) \subseteq \rho(T) \cap \rho(S)$. $\square$

A seguir estabelecemos uma variação do Teorema 3.24, onde trocamos o shift unilateral reverso S_+^* por uma isometria parcial completamente não-unitária.

Teorema 3.32 *Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma isometria parcial completamente não-unitária. Se $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração normal compacta injetiva ou nula, então $r(DT) = 0$.*

Demonstração: Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma isometria parcial completamente não-unitária. Considere $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração normal compacta. Se $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é o operador nulo, segue que $r(DT) = 0$. Agora, suponha que $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração compacta injetiva. Como $\mathcal{N}(T)$ é um subespaço de $\mathcal{H}$ (ver, e.g., [19] p.2), segue que

$$T = T|_{\mathcal{N}(T)} \oplus T|_{\mathcal{N}(T)^\perp},$$

pelo Teorema da Projeção (ver, e.g., [23] p.339), onde $B \equiv T|_{\mathcal{N}(T)^\perp}$ é uma isometria pela definição de isometria parcial. Por outro lado, $\mathcal{N}(T)^\perp$ é um subespaço de $\mathcal{H}$ (ver, e.g., [23] p.326) e todo subespaço de um espaço de Hilbert é um espaço de Hilbert (ver, e.g., [23] p.330). Logo, $\mathcal{N}(T)^\perp$ é um espaço de Hilbert. Daí, $B = S_+ \oplus U$ pelo Teorema 3.28, onde $S_+ \equiv B|_{\mathcal{U}^\perp}$ é um shift unilateral, $U \equiv B|_{\mathcal{U}}$ é unitário e $\mathcal{U}$ é um subespaço redutor. Logo, T pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$T = T|_{\mathcal{N}(T)} \oplus S_+ \oplus U.$$

Como T é completemente não-unitário, segue que

$$T = T|_{\mathcal{N}(T)} \oplus S_+.$$

Note que pelo Teorema 3.28 temos que $\mathcal{U}$ é um subespaço redutor para B (que nesse caso, $B = S_+^*$), e, assim $\mathcal{U}$ é um subespaço redutor para T. Daí, $DT = DT|_{\mathcal{N}(T)} \oplus DS_+$, donde

$$\sigma(DT) = \sigma(DT|_{\mathcal{N}(T)}) \cup \sigma(DS_+)$$

pelo Lema 3.31. Como $T|_{\mathcal{N}(T)} = 0$, segue que $DT|_{\mathcal{N}(T)}$ é o operador nulo. Por outro lado, como $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração normal compacta, então a restrição de D em um subespaço é um operador normal compacto (ver, e.g., [23] p.258 e p.505). Logo, $D|_{\mathcal{R}(S_+)} = D|_{\mathcal{U}^\perp}$ é um operador normal compacto, pois acabamos que ver que $\mathcal{U}$ é um subespaço redutor. Além disso, como D é injetivo, segue que $r(DS_+) = 0$ pelo Corolário 3.29. Portanto, $r(DT) = 0$ para toda D contração normal compacta injetiva ou nula em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$. □

A Decomposição de Nagy-Foias-Langer (Teorema 3.27) decompõe qualquer contração em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ em uma parte unitária e uma parte completamente não-unitária. O que podemos afirmar sobre a parte completamente não-unitária? A Decomposição de von Neumann-Wold (Teorema 3.28) afirma que se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma isometria (ou seja, $A_T = I$), então que $T = S_+ \oplus U$, onde S_+ é uma shift unilateral e U é unitário. Supor que $A_T = I$ é um tanto quanto restritivo. Kubrusly, Vieira e Pinto [28] relaxam essa hipótese e obtém uma nova decomposição para A_T projeção (i.e., $A_T = A_T^2$).

Teorema 3.33 [Ver [28]] *Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ contração. Se $A_T = A_T^2$, então*

(i). $T = G \oplus S_+ \oplus U,$

onde G é uma contração $C_{0,\cdot}$, S_+ é um shift unilateral e U unitário. Além disso, se $A_T = A_T^2$ e $A_{T_*} = A_{T_*}^2$, então

(ii). $T = B \oplus S_- \oplus S_+ \oplus U,$

onde B é uma contração $C_{0,0}$ e S_- um shift unilateral reverso. Por fim, se $A_T = A_{T_*}$, então

(iii). $T = B \oplus U.$

Demonstração: Ver, e.g., [28]. □

No início desta seção formulamos a seguinte pergunta: *quem são as contrações em $\mathcal{F}$ (onde, $\mathcal{F}$ é a classe das contrações não-próprias normalóides fortementes estáveis)?* Como toda contração fortemente estável é complemente não-unitária pela Decomposição de Nagy-Foias-Langer (Teorema 3.27), segue que uma contração em $\mathcal{F}$ é a soma direta de shifts unilaterais com shifts unilaterais reversos e contrações fortemente estáveis pelo Teorema 3.33.

A outra questão que propomos investigar é a seguinte: "perturbações compactas resolvem o Problema de Estabilidade Multiplicativa para o caso geral de Contrações Fortemente Estáveis?" Destacamos ao longo desta seção que o Teorema 3.12 (i.e., toda contração própria é estabilizada multiplicativamente por uma contração compacta) junto com a Proposição 3.19 (i.e., toda contração fortemente estável paranormal é uma contração própria) mostra que o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações Fortemente Estáveis se restringe a classe $\mathcal{F}$ (i.e., a classe das contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis). Ora, acabamos de estabelecer no parágrafo anterior que contrações em $\mathcal{F}$ são tipicamente a soma diretas envolvendo shifts. Por outro lado, estabilizamos multiplicativamente shifts unilaterais e shifts unilaterais reversos por perturbações compactas (Teorema 3.24 e Corolário 3.29, respectivamente). Logo, se conseguirmos refinar um pouco mais o Teorema 3.33 podemos solucionar o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações Fortemente Estáveis. Encerramos este capítulo, explorando este caminho (ou seja, refinar um pouco mais o Teorema 3.33 para contrações em $\mathcal{F}$).

Mais uma vez, a Decomposição de Nagy-Foias-Langer (Teorema 3.27) decompõe uma contração arbitrária em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ em um operador unitário e uma contração completamente não-unitária. Informalmente, o Teorema 3.27 “pega” a maior parte onde a contração é unitária e “separa” do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ onde está definida. Lembre que no Teorema 3.12 estabilizamos multiplicativamente contrações próprias. Por outro lado, o Teorema 3.24 e o Corolário 3.29 estabelecem que shifts unilaterais e seus adjuntos podem ser estabilizados multiplicativamente por perturbações compactas. Como toda contração em $\mathcal{F}$ é a soma direta de shifts e contrações fortemente estáveis, será que podemos replicar a ideia da Decomposição de Nagy-Foias-Langer para a classe $\mathcal{F}$? Em outras palavras, é possível “separar” toda contração em $\mathcal{F}$ como uma soma direta de um shift unilateral reverso por uma contração própria? Este caminho parece promissor.

O próximo resultado, Teorema 3.34, mostra que se $T = (S_+^* \oplus C)$ para todo $T \in \mathcal{F}$, onde C é uma contração própria e S_+^* é um shift unilateral reverso, então o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações Fortemente Estáveis está resolvido. Cabe uma ressalva sobre a decomposição que estamos sugerindo. Alguém pode perguntar a razão de um dos termos da decomposição ser um shift unilateral reverso ao invés de um shift unilateral. Afinal, o Corolário 3.29 prova que um shift unilateral também pode ser estabilizado multiplicativamente por uma perturbação compacta, na verdade a mesma perturbação. Mais adiante, Capítulo 4, vamos enunciar o famoso Teorema de Rota. Em particular, o Teorema de Rota nos permite afirmar que *toda contração fortemente estável é a parte de um shift unilateral reverso*(ver, e.g., [18] p.94). Por isso, optamos por uma decomposição cujo um dos termos é um shift unilateral reverso.

Os ingredientes principais para a demonstração do próximo teorema são os Teoremas 3.24 e 3.12.

Teorema 3.34 *Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração não-própria normalóide fortemente estável, tal que $T = (S_+^* \oplus C)$, onde S_+^* é um shift unilateral reverso e C é uma contração própria. Se $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração normal compacta injetiva ou nula, então $r(DT) < 1$.*

Demonstração: Seja $T = (S_+^* \oplus C) \in \mathcal{B}[\mathcal{H}] = \mathcal{B}[\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}]$, onde $S_+^* = T|_{\mathcal{M}}$ é um shift unilateral reverso e $C = T|_{\mathcal{N}}$ é uma contração própria, tal que $\mathcal{N}$ e $\mathcal{M}$ são subespaços reduzidos para T. Considere $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração normal compacta. Se $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é o operador nulo, então $r(DT) = 0$. Agora, suponha que D é uma contração normal compacta injetiva. Daí, $DT = (DS_+^* \oplus DC)$, tal que $\sigma(DS_+) \subseteq \mathbb{D}$ pelo Teorema 3.24 e $\sigma(DC) \subseteq \mathbb{D}$ pelo Teorema 3.12, onde $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ é o disco unitário aberto em $\mathbb{C}$. Como $\sigma(DT) = \sigma(DS_+) \cup \sigma(DC)$ pelo Lema 3.31, segue que $\sigma(DT) \subseteq \mathbb{D}$. Portanto, $r(DT) < 1$ para toda contração normal compacta injetiva $D \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. $\square$

Existe uma razão para forçarmos $T \in \mathcal{F}$ ser decomposto como a soma direta de um shift unilateral reverso com uma contração própria. Note que $T = (A \oplus B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}]$ é uniformemente estável, apenas se $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ forem uniformemente estáveis. Com efeito,

$$\sigma(T) = \sigma(A \oplus B) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$$

pelo Lema 3.31. Como $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são contrações, segue que $r(A) = 1$ ou $r(B) = 1$ (ou seja, A ou B não é uniformemente estável) implica que $r(T) = 1$. Por isso, gostaríamos que todo operador em $\mathcal{F}$ (i.e., a classe de todas as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis) fosse da forma $T = S_+^* \oplus C$, onde S_+^* é um shift unilateral reverso e C uma contração própria. Entretanto, o exemplo a seguir (Exemplo 3.36), pode não ser intuitivo. Ele mostra que nem toda contração em $\mathcal{F}$ pode ser reescrita como a soma direta de um shift unilateral reverso com uma contração própria.

Lema 3.35 *Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $S \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são fortemente estáveis, então $T \oplus S \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}]$ é fortemente estável.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $S \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ dois operadores fortemente estáveis. Tome $(x \oplus y) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ qualquer. Pela Desigualdade de Minkowski segue que

$$\|(T \oplus S)^n(x \oplus y)\| \leq \|T^n x\| + \|S^n y\|$$

(ver, e.g., [23] p.166). Como T e S são fortemente estáveis, segue que $\|T^n x\| \to 0$ e $\|S^n y\| \to 0$ quando $n \to 0$. Daí,

$$0 \leq \|(T \oplus S)^n(x \oplus y)\| \leq 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Em outras palavras, $\|(T \oplus S)^n\| = 0$ quando $n \to \infty$ para todo $(x \oplus y) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$. Portanto, $T \oplus S \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}]$ é fortemente estável. □

Exemplo 3.36 Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, onde $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, tal que $T(\mathcal{H}_1) \subseteq \mathcal{H}_1$ e $T(\mathcal{H}_2) \subseteq \mathcal{H}_2$. Seja $T|_{\mathcal{H}_1} \equiv S_+^*$ um shift unilateral reverso. Agora, considere $T|_{\mathcal{H}_2} \equiv A$ um operador em $\mathcal{H}_2 = (\mathcal{H}_{2,1} \oplus \mathcal{H}_{2,2})$ definido por

$$A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix},$$

onde $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}[\mathcal{H}_{2,1}]$ e $N \in \mathcal{B}[\mathcal{H}_{2,2}]$ uma contração normal com $\sigma(N) \subseteq \mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$, tal que $\mathbb{D}_{\frac{1}{2}} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \frac{1}{2}\}$. Note que M é um operador quasinilpotente, pois M^n é o operador nulo para todo $n \geq 2$. Por outro lado, $\sigma(N) \subseteq \mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$ por hipótese. Como $\sigma(A) = \sigma(M) \cup \sigma(N)$ pelo Lema 3.31, então $\sigma(A) \subseteq \mathbb{D}_{\frac{1}{2}}$. Além disso, pode-se verificar que A é uma contração não-própria.

De fato, considere $(y_{2,1} \oplus 0) \in \mathcal{H}_2 = (\mathcal{H}_{2,1} \oplus \mathcal{H}_{2,2})$, onde $y_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_{2,1}$ e $0 \in \mathcal{H}_{2,2}$ é o vetor nulo. Daí,

$$\|A(y_{2,1} \oplus 0)\| = \|y_{2,1}\| = 1.$$

Logo, A é uma contração não-própria. Por outro lado, S_+^* é uma contração não-própria fortemente estável, tal que $\sigma(S_+^*) = \mathbb{D}^-$ é o disco unitário fechado em $\mathbb{C}$ (ver, Exemplo 3.15 e Exemplo 3.18). Mais uma vez, pelo Lema 3.31 temos que $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \sigma(S_+^*) = \mathbb{D}^-$. Como a soma direta de dois operadores fortemente estáveis é um operador fortemente estável pelo Lema 3.35, segue que $T = (S_+^* \oplus A)$ é fortemente estável. Portanto, T é uma contração não-própria normalóide fortemente estável que não é decomposta como uma soma direta de um shift unilateral reverso com uma contração própria. $\diamond$

Apesar da decomposição $T = (S_+^* \oplus C)$, para todo $T \in \mathcal{F}$, não ser verdade em geral, onde S_+^* é um shift unilateral reverso e C uma contração própria, utilizando o produto tensorial (o que será feito no próximo capítulo) podemos dispensar esse requerimento. De fato, na Seção 2.3 estabelecemos que

$$\sigma(T \otimes S) = \sigma(T)\sigma(S) \text{ e } r(T \otimes S) = r(T)r(S)$$

(Teorema 2.10). No Capítulo 4 vamos provar que $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ produto tensorial pode ser uniformemente estável sem que $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ sejam uniformemente estáveis. Em outras palavras, com o produto tensorial não precisamos que $T \in \mathcal{F}$ seja escrito como a soma direta de um shift unilateral reverso com uma contração própria. Motivados pelo argumento anterior, colocamos o Problema de Estabilidade Multiplicativa no contexto de produto tensorial no Capítulo 4. Em seguida, no Capítulo 5, investigamos a estabilidade multiplicativa de contrações não-próprias fortemente estáveis em produto tensorial.

4
Estabilidade Multiplicativa e Produto Tensorial

No Capítulo 3 definimos formalmente o problema estamos investigando neste trabalho, isto é,

$$\textit{dado } T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}], \textit{ para quais } S \in \mathcal{B}[\mathcal{H}] \textit{ temos que } r(ST) < 1?$$

Dentre os trabalhos citados, destacamos o artigo de Kubrusly e Vieira [26]. Nele, os autores definem as chamadas Propriedades do Sup (i.e., propriedade sup da norma, propriedade max da norma, propriedade sup do raio numérico e propriedade sup do raio espectral) e baseados nestas eles generalizam os resultados de Cain ([4], [5] e [6]) para classes de contrações mais gerais. Em particular, eles mostram que toda contração própria pode ser estabilizada multiplicativamente por uma contração compacta (Teorema 3.12). Portanto, o Problema de Estabilidade Multiplicativa se restringe a classe das contrações não-próprias normalóides.

Dentre a classe de todas as contrações não-próprias propomos investigar a subclasse das contrações não-próprias fortemente estáveis. Provamos no Capítulo 3 que todas as contrações hiponormais (e consequentemente todas as contrações normais, quasinormais e subnormais) fortemente estáveis são próprias pela Proposição 3.19. Em outras palavras, devemos apenas determinar quais classes de contrações estabilizam multiplicativamente a classe de todas as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis, denotada por $\mathcal{F}$.

O shift unilateral reverso é um exemplo clássico de contração em $\mathcal{F}$ (Exemplo 3.18). O Teorema 3.24 estabelece que operadores normais compactos injetivos estabilizam multiplicativamente o shift unilaterel reverso. Por outro lado, o Teorema 3.33 mostra que toda contração em $\mathcal{F}$ é uma soma direta de um shifts unilaterais, shifts unilaterais reversos e contrações fortemente estáveis. Daí, nos perguntamos se cada contração da classe $\mathcal{F}$ pode ser decomposta como a soma direta de um shift unilateral reverso com uma contração própria. Caso a resposta fosse a afirmativa, então o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações Fortemente Estáveis estaria resolvido pelo Teorema 3.34. Entretanto, o Exemplo 3.36 mostra que existem contrações em $\mathcal{F}$ que não são a soma direta de um shift unilateral reverso com uma contração própria.

Terminamos o Capítulo 3 destacando que $T = (A \oplus B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}]$ é uniformemente estável, apenas se $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ também forem uniformemente estáveis. Por outro lado, outro artigo de Kubrusly e Vieira [27] nos permite provar que um produto tensorial $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ pode ser uniformemente estável sem que $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ também sejam. Logo, o produto tensorial é uma ferramenta poderosa na nossa investagação.

Neste capítulo definimos o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações no contexto de produto tensorial. Na primeira seção mostramos quais das Propriedades do Sup são preservadas sob produto tensorial. Em seguida, estabelecemos condições necessárias e suficientes para estabilidade multiplicativa de um produto tensorial através dos resultados de Kubrusly e Vieira em [26] e [27].

Como perturbações compactas têm se mostrado eficazes para a nossa questão. Na última seção deste capítulo, investigamos condições necessárias e suficientes para o produto tensorial preservar compacidade e generalizamos um de Kubrusly e Levan [25], segundo resultado principal desta tese.

4.1 Propriedades do Sup

No Capítulo 3, estabelecemos que nesta tese vamos investigar o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações Fortemente Estáveis. Em particular, mostramos que o problema em questão se restringe a uma classe particular, ou seja, a classe de todas as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis, que denotamos por classe $\mathcal{F}$. Além disso, provamos que toda contração em $\mathcal{F}$ é a soma direta de shifts (unilateral e unilateral reverso) com uma contração fortemente estável. Ora, mas se trabalharmos com decomposições por soma direta $L = (L_1 \oplus L_2)$, então L é uniformemente estáveis apenas se L_1 e L_2 são uniformemente estáveis. Em outras palavras teríamos que estabilizar multiplicativamente dois operadores. Encerramos o Capítulo 3 com a seguinte afirmação: *um produto tensorial $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ pode ser uniformemente estável, sem que ambos os operadores $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ sejam simultâneamente uniformemente estáveis.* Nesta seção vamos provar que de fato o produto tensorial é uma ferramenta importante para a nossa investigação. O próximo exemplo ilustra o argumento discutido neste parágrafo, ou seja, existe um produto tensorial $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ uniformemente estável, tal que $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uniformemente estável e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ não é.

Exemplo 4.1 Seja $T = (\frac{1}{4}I \otimes 2I) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$. Como $r(\alpha I) = |\alpha|$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ (ver, e.g., [23] p.469), segue que $r(\frac{1}{4}I) = \frac{1}{4}r(I) = \frac{1}{4}$, pois $r(I) = 1$ (ver, e.g., [23] p.469). Logo, $\frac{1}{4}I$ é uniformemente estável. Analogamente, podemos mostrar que $r(2I) = 2r(I) = 2$, isto é, $2I$ não é uniformemente estável. Como $r(\frac{1}{4}I \otimes 2I) = r(\frac{1}{4}I)r(2I)$ pelo Teorema 2.10, segue que

$$r(T) = r(\frac{1}{4}I \otimes 2I) = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}.$$

Portanto, T é um produto tensorial uniformemente estável, tal que $\frac{1}{4}I$ é uniformente estável e $2I$ não é uniformemente estável. $\diamond$

Um operador $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é limitado em potências (i.e., T é "power bounded") se $\sup_n \|T^n\| < \infty$. Em particular, pode-se verificar que todo operador limitado em potências tem raio espectral menor ou igual a 1 (ver, e.g., [18] p.6). Considere o produto tensorial $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$, onde $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$. Agora, vamos provar que se A é uniformemente estável e B é limitado em potências, então T é uniformemente estável.

Teorema 4.2 [Ver, e.g., [27]] *Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial. Se $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é limitado em potências e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uniformemente estável (ou vice-versa), então T é uniformemente estável.*

Demonstração: Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial, onde $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$. Se $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é limitado em potências, então $r(A) \leq 1$ (ver, e.g., [18] p.6). Por outro lado, se $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uniformemente estável, então $r(B) < 1$ pela Proposição 3.3. Como $r(T) = r(A \otimes B) = r(A)r(B)$ pelo Teorema 2.10, segue que

$$r(T) = r(A)r(B) \leq r(A) < 1.$$

Portanto, $T = (A \otimes B)$ é uniformemente estável pela Proposição 3.3. $\square$

Corolário 4.3 *Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial qualquer. Considere $S = (C_1 \otimes C_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um perturbação multiplicativa. Se $C_1A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uniformemente estável e $C_2B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é limitado em potências (ou vice-versa), então ST é uniformemente estável.*

Demonstração: De fato, note que

$$ST = (C_1 \otimes C_2)(A \otimes B) = (C_1A \otimes C_2B)$$

pela Proposição 2.9. Daí, $r(ST) = r(C_1A \otimes C_2B)$, donde

$$r(C_1A \otimes C_2B) = r(C_1A)r(C_2B)$$

pelo Teorema 2.10. Logo, $r(ST) = r(C_1A)r(C_2B)$. Sem perda de generalidade, suponha que $C_1A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uniformemente estável e $C_2B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é limitado em potências, o outro caso (i.e., C_1A limitado em potências e C_2B uniformemente estável) é análogo. Como $C_1A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uniformemente estável, então $r(C_1A) < 1$ pela Proposição 3.3. Por outro lado, se $C_2B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é limitado em potências, então $r(C_2B) \leq 1$ (ver, e.g., [18] p.6). Como $r(ST) = r(C_1A)r(C_2B)$, então

$$r(ST) = r(C_1A)r(C_2B) < r(C_2B) \leq 1,$$

isto é, $r(ST) < 1$. Em outras palavras, $ST \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é uniformemente estável pela Proposição 3.3. □

O Corolário 4.3 estabelece que para estabilizarmos multiplicativamente um produto tensorial $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ basta estabilizar uniformente um dos termos perturbados (desde que o outro termo seja limitado em potências). Em outras palavras, o corolário anterior confirma a nossa intuição prévia de que o produto tensorial é uma ferramenta importante na investigação do Problema de Estabilidade Multiplicativa.

Analogamente ao problema original (i.e., Problema de Estabilidade Multiplicativa), o Problema de Estabilidade Multiplicativa em Produto Tensorial pode ser definido da seguinte maneira:

Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial. Quais são os produtos tensoriais $S = (C_1 \otimes C_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$, tais que $r(ST) < 1$?

Os próximos dois resultados (Exemplo 4.4 e Proposição 4.5, respectivamente) tem como finalidade deixar evidente quão "poderoso" é o produto tensorial em nossa análise. O exemplo abaixo, Exemplo 4.4, exibe uma contração própria que é estabilizada multiplicativamente por uma contração não-compacta não-nula, sendo, assim, diferente dos casos tratados pelo Teorema 3.12. A Proposição 4.5 determina condições suficientes para uma possível solução do Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações em Produto Tensorial.

Exemplo 4.4 Seja $T = (I \otimes \operatorname{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes l_+^2(\mathbb{C})]$ um produto tensorial. Vimos no Exemplo 3.21 que o operador diagonal $\operatorname{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}$ em $l_+^2(\mathbb{C})$ é uma contração própria. Como o produto tensorial de uma contração própria por uma contração é uma contração própria (ver, e.g., [25]), segue que $T = (I \otimes \operatorname{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0})$ é uma contração própria. Agora, considere a perturbação multiplicativa

$$S = (I \otimes \operatorname{diag}(\frac{1}{k+1})_{k\geq 0}) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes l_+^2(\mathbb{C})].$$

Pode-se verificar que S não é um operador compacto (ver, e.g., [25]). Pela Proposição 2.9 temos que as igualdades abaixo valem:

$$ST = (I \otimes \operatorname{diag}(\frac{1}{k+1})_{k\geq 0})(I \otimes \operatorname{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}) = (I \otimes \operatorname{diag}(\frac{1}{n})_{n\geq 2}).$$

Note que $\operatorname{diag}(\frac{1}{n})_{n\geq 2}$ é um operador auto-adjunto, então $r(\operatorname{diag}(\frac{1}{n})_{n\geq 2}) = \|\operatorname{diag}(\frac{1}{n})_{n\geq 2}\|$, donde $\|\operatorname{diag}(\frac{1}{n})_{n\geq 2}\| = \frac{1}{2}$ (ver, e.g., [19] p.24). Como $r(I) = 1$ (ver, Exemplo 3.21), segue que

$$r(ST) = r(I \otimes \operatorname{diag}(\frac{1}{n})_{n\geq 2}) = r(I)r(\operatorname{diag}(\frac{1}{n})_{n\geq 2}) = \frac{1}{2},$$

onde na segunda igualdade usamos o Teorema 2.10. Logo, T é uma contração própria estabilizada multiplicativamente por uma contração não-compacta. $\diamond$

Proposição 4.5 *Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ uma contração própria, tal que $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração própria. Considere $S = (C_1 \otimes C_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ uma perturbação multiplicativa. Se $C_1 \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração, $C_2B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é limitado em potências e $\sigma_C(C_1A) \cap \Gamma = \emptyset$, então ST é uniformemente estável, onde $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ é o círculo unitário.*

Demonstração: Se $C_1 \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração, então $C_1A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração própria, pois $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração própria por hipótese e o produto de uma contração por uma contração própria é uma contração própria (esta última implicação é imediata da definição de contração própria). Como toda contração própria é fracamente estável pela Proposição 3.14, segue que $C_1A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é fracamente estável. Além disso, se $\sigma_C(C_1A) \cap \Gamma = \emptyset$, então C_1A é uniformemente estável pela Proposição 3.2. Equivalentemente, $r(C_1A) < 1$ pela Proposição 3.3. Por outro lado, se $C_2B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é limitado em potências, então $r(C_2B) \leq 1$ (ver, e.g., [18] p.6). Daí,

$$r(ST) = r(C_1A \otimes C_2B) = r(C_1A)r(C_2B) \leq r(C_1A) < 1,$$

onde usamos as Proposição 2.9 e Teorema 2.10 nas primeira e segunda igualdades, respectivamente. Portanto, $ST \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é uniformemente estável. $\square$

Durante a resenha do Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações, Seção 3.1, as Propriedades do Sup (i.e., propriedade sup da norma, propriedade max da norma, propriedade sup do raio numérico, propriedade sup do raio espectral) definidas por Kubrusly e Vieira [26] tiveram um papel fundamental na estabilização multiplicativa de determinadas classes de contrações. Como estamos reescrevendo o problema original para produto tensorial é natural verificarmos quais destas propriedades (ou seja, quais das Propriedades do Sup) são preservadas sob produto tensorial. Daqui em diante $\mathcal{S}$ irá representar o seguinte conjunto em $\mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$,

$$\mathcal{S} \equiv \{S = (C_1 \otimes C_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}] : C_1 \in \mathcal{S}_1 \,\mathrm{e}\, C_2 \in \mathcal{S}_2\},$$

onde $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ são duas classes de contrações em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $\mathcal{B}[\mathcal{K}]$, respectivamente.

Lema 4.6 *Se $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$, segue que*

$$\sup_{\mathcal{S}} r(ST) = \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1 A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2 B),$$

onde $S = (C_1 \otimes C_2) \in \mathcal{S}$.

Demonstração: Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ qualquer. Considere $S = (C_1 \otimes C_2) \in \mathcal{S}$ arbitrário. Note que

$$r(ST) = r((C_1 \otimes C_2)(A \otimes B)) = r(C_1 A \otimes C_2 B)$$

pela Proposição 2.9. Como $r(C_1 A \otimes C_2 B) = r(C_1 A) r(C_2 B)$ pelo Teorema 2.10, segue que $r(ST) = r(C_1 A) r(C_2 B)$. Daí,

$$\sup_{\mathcal{S}_1} r(ST) \leq \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1 A) r(C_2 B) \Rightarrow \sup_{\mathcal{S}_2} (\sup_{\mathcal{S}_1} r(ST)) \leq \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1 A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2 B),$$

donde $\sup_{\mathcal{S}_2}(\sup_{\mathcal{S}_1} r(ST)) = \sup_{C_1 \in \mathcal{S}_1, C_2 \in \mathcal{S}_2} r(ST)$ (ver, e.g., [23] p.169). Logo,

$$\sup_{\mathcal{S}} r(ST) = \sup_{C_1 \in \mathcal{S}_1, C_2 \in \mathcal{S}_2} r(ST) \leq \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1 A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2 B).$$

Agora, vamos mostrar que $\sup_{\mathcal{S}} r(ST) \geq \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1 A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2 B)$. Se $\alpha \equiv \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1 A)$, então existe $C_1' \in \mathcal{S}_1$ e $\epsilon_1 > 0$, tal que $\alpha(1 - \epsilon_1) \leq r(C_1' A)$

pela definição de supremo. Analogamente, seja $\beta \equiv \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B)$, então existe $C_2' \in \mathcal{S}_2$ e $\epsilon_2 > 0$, tal que $\beta(1-\epsilon_2) \leq r(C_2'B)$ pela definição de supremo. Daí,

$$\alpha\beta(1-\epsilon)^2 \leq r(C_1'A)r(C_2'B),$$

onde $\epsilon = \max\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Como $r(C_1'A)r(C_2'B) = r(S'T)$ pelo Teorema 2.10, segue que $\alpha\beta(1-\epsilon)^2 \leq r(S'T)$, onde $S' = (C_1' \otimes C_2') \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$. Note que $S' = (C_1' \otimes C_2')$ é um elemento de $\mathcal{S}$, então

$$\alpha\beta(1-\epsilon)^2 \leq r(C_1'A)r(C_2'B) = r(S'T) \leq \sup_{\mathcal{S}} r(ST).$$

Daí,

$$\alpha\beta(1-\epsilon)^2 \leq \sup_{\mathcal{S}} r(ST) \Rightarrow \alpha\beta \leq \sup_{\mathcal{S}} r(ST) \,\text{quando}\, \epsilon \to 0.$$

Equivalentemente, $\sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) \leq \sup_{\mathcal{S}} r(ST)$. Portanto, $\sup_{\mathcal{S}} r(ST)$ é maior ou igual e menor ou igual $\sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B)$. Em outras palavras, $\sup_{\mathcal{S}} r(ST) = \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B)$. □

Seja $\mathcal{S}$ a classe definida antes do Lema 4.6.

Proposição 4.7 *As classes de contrações $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ satisfazem a propriedade sup da norma (i.e., $\sup_{C_1 \in \mathcal{S}_1} r(C_1A) = \|A\|$ e $\sup_{C_2 \in \mathcal{S}_2} r(C_2B) = \|B\|$) se e somente se $\mathcal{S}$ também satisfaz (i.e., $\sup_{S \in \mathcal{S}} r(ST) = \|T\|$).*

Demonstração: Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial arbitrário. Considere $S = (C_1 \otimes C_2) \in \mathcal{S}$ qualquer, onde $C_1 \in \mathcal{S}_1$ e $C_2 \in \mathcal{S}_2$. Suponha que as classes $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ satisfazem a propriedade sup da norma. Pela Proposição 2.9 temos que $ST = (C_1 \otimes C_2)(A \otimes B) = (C_1A \otimes C_2B)$, donde

$$r(ST) = r(C_1A \otimes C_2B) = r(C_1A)r(C_2B),$$

pelo Teorema 2.10. Daí, pelo Lema 4.6 temos que

$$\sup_{\mathcal{S}} r(ST) = \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B).$$

Como $\sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) = \|A\|$ e $\sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) = \|B\|$, segue que

$$\sup_{\mathcal{S}} r(ST) = \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) = \|A\| \, \|B\| \,.$$

Por outro lado, sabemos da Proposição 2.9 que $\|T\| = \|A \otimes B\| = \|A\| \, \|B\|$. Logo,

$$\sup_{\mathcal{S}} r(ST) = \|A\| \, \|B\| = \|A \otimes B\| = \|T\| \, .$$

Portanto, $\mathcal{S}$ satisfaz a propriedade sup da norma. Reciprocamente, suponha que $\mathcal{S}$ satisfaz a propriedade sup da norma. Suponha por contradição que $\mathcal{S}_1$ ou $\mathcal{S}_2$ não tem a propriedade sup da norma, porém $\mathcal{S}$ satisfaz tal propriedade. Se $\mathcal{S}_2$ não satisfaz a propriedade sup da norma e $\mathcal{S}_1$ satisfaz a propriedade sup da norma, segue que

$$\sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1 A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2 B) \neq \|A\| \, \|B\| \, .$$

Pela Proposição 2.9 temos que $\|A\| \, \|B\| = \|A \otimes B\| = \|T\|$. Como $\mathcal{S}$ satisfaz a propriedade sup da norma por hipótese, então

$$\sup_{\mathcal{S}} r(ST) = \|A\| \, \|B\| \, .$$

Por outro lado, o Lema 4.6 garante que $\sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1 A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2 B) = \sup_{S \in \mathcal{S}} r(ST)$. Daí,

$$\|A\| \, \|B\| = \sup_{S \in \mathcal{S}} r(ST) = \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1 A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2 B) \neq \|A\| \, \|B\| \, ,$$

contradição. Para provar o caso contrário (i.e., $\mathcal{S}_1$ não satisfaz a propriedade sup da norma e $\mathcal{S}_2$ satisfaz a propriedade sup da norma) basta proceder da mesma maneira. Agora, vamos supor que ambas as classes $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ não satisfazem a propriedade sup da norma. Daí, $\sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1 A) \neq \|A\|$ e $\sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2 B) \neq \|B\|$. Como $r(C_1 A) \leq \|C_1\| \, \|A\|$ pela Proposição 2.7, segue que $r(C_1 A) \leq \|A\|$, pois $C_1 \in \mathcal{S}_1$ é uma contração. Além disso, como por hipótese $\sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1 A) \neq \|A\|$, então existe $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que

$$\sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1 A) = |\lambda| < \|A\| \, .$$

Analogamente, como $\sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2 B) \neq \|B\|$, então existe $\gamma \in \mathbb{C}$, tal que

$$\sup_{\mathcal{S}_2} r(DB) = |\gamma| < \|B\| \, .$$

Daí,

$$|\lambda\gamma| = \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1 A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2 B) < \|A\| \, \|B\| \, .$$

Por outro lado, pelo Lema 4.6 temos que $\sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) = \sup_{S\in\mathcal{S}} r(ST)$, donde

$$|\lambda\gamma| = \sup_{\mathcal{S}} r(ST) < \|A\| \, \|B\| \, ,$$

contradição, pois $\mathcal{S}$ satisfaz a propriedade sup da norma. Em outras palavras, se $\mathcal{S}$ satisfaz a propriedade sup da norma, então $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ têm a propriedade sup da norma. Conclusão: as classes de contrações $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ satisfazem a propriedade sup da norma se e somente se $\mathcal{S}$ também satisfaz. □

Corolário 4.8 *As classes de contrações $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ satisfazem a propriedade max da norma (i.e., $\max_{C_1\in\mathcal{S}_1} r(C_1A) = \|A\|$ e $\max_{C_2\in\mathcal{S}_2} r(C_2B) = \|B\|$) se e somente se $\mathcal{S}$ também satisfaz (i.e., $\max_{S\in\mathcal{S}} r(ST) = \|T\|$).*

Demonstração: Análogo a demonstração da Proposição 4.7. □

Corolário 4.9 *Se $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ satisfazem a propriedade sup da norma e a propriedade max da norma, respectivamente, então $\mathcal{S}$ satisfaz a propriedade sup da norma.*

Demonstração: Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial arbitrário. Considere $S = (C_1 \otimes C_2) \in \mathcal{S}$, tal que $C_1 \in \mathcal{S}_1$ e $C_2 \in \mathcal{S}_2$. Note que $ST = (C_1A \otimes C_2B)$ pela Proposição 2.9, donde $r(ST) = r(C_1A)r(C_2B)$ pelo Teorema 2.10. Como $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ satisfazem as propriedades sup e max da norma , respectivamente, segue que

$$\|A\| \, \|B\| = \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \max_{\mathcal{S}_2} r(C_2B).$$

Pela Proposição 2.9 sabemos que $\|T\| = \|A \otimes B\| = \|A\| \, \|B\|$. Daí,

$$\|T\| = \|A\| \, \|B\| = \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \max_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) \leq \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B).$$

Ora, o Lema 4.6 estabelece que $\sup_{\mathcal{S}} r(ST) = \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B)$, então

$$\|T\| = \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \max_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) \leq \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) = \sup_{\mathcal{S}} r(ST) \leq \|T\| \, ,$$

onde na última desigualdade usamos que S é uma contração e a Proposição 2.7. Logo, $\sup_{S\in(\mathcal{S})} r(ST) = \|T\|$. Em outras palavras, $\mathcal{S}$ tem a propriedade sup da norma. $\square$

Como o produto tensorial preserva as propriedades sup e max da norma (Proposição 4.7 e Corolário 4.8, respectivamente), inúmeros exemplos podem ser criados. De fato, basta tomar o produto tensorial das classes investigadas por Kubrusly e Vieira em [26] que satisfazem tais propriedades. Por outro lado, a propriedade sup do raio numérico (i.e., $\sup_{S\in\mathcal{S}} r(ST) = w(T)$) não é preservada sob produto tensorial.

Exemplo 4.10 Sejam $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$ dois operadores rank-finito definidos no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$. Note que $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é normalóide para todo $n \geq 2$. Pela Fórmula de Gelfand-Beurling, Teorema 2.5, temos que

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to}(\frac{1}{2^n})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, $w(A^n) \leq w(A)^n$ para todo $n \geq 1$ (ver, e.g., [18] p.6). Como $r(A^n) = r(A^n)$ para todo $n \geq 1$ (ver, e.g., [18] p.6), segue que $r(A)^n \leq w(A^n)$, donde $\frac{1}{2^n} \leq w(A^n)$ para todo $n \geq 1$. Em particular, acabamos de mostrar que A^m é normalóide para todo $m \geq 2$. Daí, $w(A^m) = r(A^m) = r(A)^m = \frac{1}{2^m}$. Logo,

$$\frac{1}{2^n} \leq w(A)^n \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq w(A) \leq \frac{1}{2}.$$

Portanto, $w(A) = r(A) = \frac{1}{2}$. Como $A = B$, segue que $w(B) = r(B) = \frac{1}{2}$, donde

$$w(A)w(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Agora, considere o produto tensorial $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3]$. Sejam $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ as classes de todas as projeções ortogonais definidas no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$. Pode-se mostrar que $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ satisfazem a propriedade do sup do raio numérico (ver, e.g., [26]). Seja $S = (P_1 \otimes P_2) \in \mathcal{S}$ um produto tensorial de duas projeções ortogonais em $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, respectivamente. Aplicando o Lema 4.6 temos que

$$\sup_{\mathcal{S}} r(ST) = \sup_{P_1\in\mathcal{S}_1} r(P_1A) \sup_{P_2\in\mathcal{S}_2} r(P_2B).$$

Como $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ satisfazem a propriedade sup do raio numérico, segue que

$$\sup_{\mathcal{S}} r(ST) = \sup_{P_1 \in \mathcal{S}_1} r(P_1 A) \sup_{P_2 \in \mathcal{S}_2} r(P_2 B) = w(A)w(B) = \frac{1}{4}.$$

Por outro lado, em dimensão finita o produto tensorial é unitariamente equivalente ao produto de Kronecker (ver,e.g., [20]). Daí,

$$T = (A \otimes B) \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considere o vetor unitário $x = (0,0,0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ em $\mathbb{R}^9$. De fato, $\|x\|^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1$. Como x é unitário, segue que o produto interno $\langle Tx; x\rangle$ é um elemento do range numérico $W(T)$, donde $\langle Tx; x\rangle = \frac{1}{2} \in W(T)$. Logo, $w(T) \geq \frac{1}{2}$. Como $w(A)w(B) = \frac{1}{4}$, segue que

$$w(T) = w(A \otimes B) \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} = w(A)w(B).$$

Portanto, $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ satisfazem a propriedade sup do raio numérico e $\mathcal{S}$ não satisfaz. $\diamond$

Apesar do produto tensorial não preservar a propriedade do sup do raio numérico para o caso geral, sob a hipótese de que o produto tensorial é normalóide $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ esta afirmação vale.

Proposição 4.11 *Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um operador normalóide. As classes $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ satisfazem a propriedade sup do raio numérico em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $\mathcal{B}[\mathcal{K}]$, respectivamente, se e somente se $\mathcal{S}$ satisfaz; isto é*

$$\sup_{C_1 \in \mathcal{S}_1} r(C_1 A) = w(A) \; e \; \sup_{C_2 \in \mathcal{S}_2} r(C_2 B) = w(B) \Leftrightarrow \sup_{S \in \mathcal{S}} r(ST) = w(T),$$

onde $\mathcal{S} \equiv \{S = (C_1 \otimes C_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}] : C_1 \in \mathcal{S}_1 \; e \, C_2 \in \mathcal{S}_2\}$. *Em outras palavras, a propriedade sup do raio numérico é preservada sob o produto tensorial, sempre que* T *é normalóide.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial normalóide. Considere $S = (C_1 \otimes C_2) \in \mathcal{S}$, onde $C_1 \in \mathcal{S}_1$ e $C_2 \in \mathcal{S}_2$. Suponha que $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ satisfazem a propriedade do sup do raio numérico. Daí, $\sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) = w(A)$ e $\sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) = w(B)$. Como $\sup_{\mathcal{S}} r(ST) = \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B)$ pelo Lema 4.6, segue que

$$w(A)w(B) = \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) = \sup_{\mathcal{S}} r(ST).$$

Por outro lado, como $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é normalóide, segue que $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são normalóides (ver, e.g, [22]). Daí, $w(A) = r(A) = \|A\|$ e $w(B) = r(B) = \|B\|$. Como $\|T\| = \|A \otimes B\| = \|A\| \, \|B\|$ pela Proposição 2.9 e T é normalóide, segue que

$$w(T) = \|T\| = \|A\| \, \|B\| = w(A)w(B) = \sup_{\mathcal{S}} r(ST),$$

onde na última igualdade usamos o Lema 4.6. Portanto, se $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ satisfazem a propriedade sup do raio numérico, então $\mathcal{S}$ também satisfaz. Reciprocamente, suponha que $\mathcal{S}$ satisfaz a propriedade do sup do raio numérico. Agora, vamos mostrar que $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ tem a propriedade do sup do raio numérico. Suponha por contradição que $\mathcal{S}$ satisfaz a propriedade do sup do raio numérico e $\mathcal{S}_1$ ou $\mathcal{S}_2$ não satisfazem, isto é, $\sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \neq w(A)$ ou $\sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) \neq w(B)$. Se $\sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \neq w(A)$ e $\sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) = w(B)$, segue pelo Lema 4.6 que

$$\sup_{\mathcal{S}} r(ST) = \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) \neq w(A)w(B).$$

Como $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é normalóide, então $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são normalóides (ver, e.g., [25]). Daí, $w(A) = \|A\|$ e $w(B) = \|B\|$ pela definição de normalóide, donde

$$w(A)w(B) = \|A\| \, \|B\| = \|A \otimes B\| = \|T\|$$

pela Proposição 2.9. Logo,

$$\sup_{\mathcal{S}} r(ST) = \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) \neq w(A)w(B) = \|T\| = w(T).$$

Por outro lado, como $\mathcal{S}$ satisfaz a propriedade sup do raio numérico, segue que $\sup_{\mathcal{S}} r(ST) = w(T)$. Daí,

$$w(T) = \sup_{\mathcal{S}} r(ST) = \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) \neq w(T),$$

contradição. O caso que $\sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) = w(A)$ e $\sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) \neq w(B)$ é análogo ao caso anterior, basta repetir os mesmos passos. Por fim, suponha que $\sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \neq w(A)$ e $\sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) \neq w(B)$. Como $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é normalóide, então $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são normalóides (ver,e.g., [25]), donde $\sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) \leq \|A\| = w(A)$, pois $C \in \mathcal{S}_1$ é contração e pela Proposição 2.7 (i.e., $r(C_1A) \leq \|C_1\| \, \|A\|$). Daí, $\sup_{C_1 \in \mathcal{S}_1} r(C_1A) \neq w(A)$, implica que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que

$$\sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A) = |\lambda| < w(A).$$

Analogamente, se $\sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) \neq w(B)$, então existe $\gamma \in \mathbb{C}$, tal que

$$\sup_{\mathcal{S}_2} r(C_2B) = |\gamma| < w(B).$$

Pelo Lema 4.6 temos que

$$|\lambda\gamma| = \sup_{S \in \mathcal{S}} r(ST) < w(A)w(B) = r(T) = w(T),$$

contradição. Portanto, $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ satisfazem a propriedade sup do raio numérico, sempre que $\mathcal{S}$ também satisfaz para $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$. $\square$

Seguindo os mesmos passos da demonstração da Proposição 4.11, proposição anterior, podemos verificar que o produto tensorial preserva a propriedade sup do raio espectral (i.e., $\sup_{S \in \mathcal{S}} r(ST) = r(T)$) quando T é normalóide.

Proposição 4.12 *Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ normalóide. As classes de contrações $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $\mathcal{B}[\mathcal{K}]$, respectivamente, satisfazem a propriedade sup do raio espectral se e somente se $\mathcal{S}$ também satisfaz a propriedade sup do raio espectral; isto é*

$$\sup_{C_1 \in \mathcal{S}_1} r(C_1A) = r(A) \; e \; \sup_{C_2 \in \mathcal{S}_2} r(C_2B) = r(B) \Leftrightarrow \sup_{S \in \mathcal{S}} r(ST) = r(T),$$

Demonstração: Como T é normalóide, segue que $w(T) = r(T)$. Logo, basta aplicar os mesmos passos da demonstração feita na Proposição 4.11. □

Desde o início deste trabalho destacamos o Teorema 3.12 que estabiliza multiplicativamente toda contração própria por uma contração compacta. Por outro lado, o Corolário 4.3 mostra que sob determinadas condições basta estabilizarmos multiplicativamente um dos termos do produto tensorial para resolver o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações em Produto Tensorial. No Exemplo 4.4 aplicamos o Corolário 4.3 para mostrar que a contração própria $T = (I \otimes \operatorname{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0})$ é estabilizada multiplicativamente pela contração não-própria não-compacta $S = (I \otimes \operatorname{diag}(\frac{1}{k+1})_{k\geq 0})$.

Seja $L = (L_1 \otimes L_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial arbitrário. Note que o Exemplo 4.4 sugere que podemos aplicar os resultados de estabilidade multiplicativa de Kubrusly e Vieira [26] para um dos termos do produto tensorial, digamos $L_1 \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$, e perturbar multiplicativamente o outro termo do produto tensorial $L_2 \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ por uma classe de contrações que satisfaz alguma das Propriedades do Sup. Assim, o Corolário 4.3 garante a estabilização multiplicativa do produto tensorial original L por tal perturbação. No restante dessa seção investigamos as possíveis classes de contrações $\mathcal{S} \equiv \{S = (C_1 \otimes C_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}] : C_1 \in \mathcal{S}_1 \text{e} C_2 \in \mathcal{S}_2\}$ que satisfazem as condições discutidas neste parágrafo.

Proposição 4.13 *Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial, tal que $w(A) \leq 1$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração própria. Se $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ satisfaz a propriedade sup do raio numérico e $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é a classe de todas as contrações compactas, então $r(ST) < 1$ para todo $S = (C_1 \otimes C_2) \in \mathcal{S}$.*

Demonstração: Com efeito, seja $S = (C_1 \otimes C_2) \in \mathcal{S}$ qualquer, onde $C_1 \in \mathcal{S}_1$ e $C_2 \in \mathcal{S}_2$. Pela Proposição 2.9 temos que $ST \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ pode ser reescrito como:

$$ST = (C_1 \otimes C_2)(A \otimes B) = (C_1 A \otimes C_2 B),$$

donde $r(ST) = r(C_1 A) r(C_2 B)$ pelo Teorema 2.10. Daí,

$$r(ST) = r(C_1 A) r(C_2 B) \leq \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1 A) r(C_2 B).$$

Se $\mathcal{S}_1$ satisfaz a propriedade do sup do raio numérico, segue $r(C_1 A) \leq \sup_{C_1 \in \mathcal{S}_1} r(C_1 A) = w(A)$. Além disso, como $w(A) \leq 1$, então

$$r(ST) \leq \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1 A) r(DB) = w(A) r(C_2 B) \leq r(C_2 B).$$

Por outro lado, se $\mathcal{S}_2$ é a classe de todas as contrações compactas em $\mathcal{B}[\mathcal{K}]$, segue que $r(C_2B) < 1$ pelo Teorema 3.12, pois $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é contração própria. Daí,

$$r(ST) \leq w(A)r(C_2B) \leq r(C_2B) < 1.$$

Portanto, ST é uniformemente estável pela Proposição 3.3. □

Mais uma vez, vamos citar o trabalho de Kubrusly e Vieira [26]. Ali encontramos diversas classes que satisfazem a propriedade sup do raio numérico. Por exemplo, a classe de todas as projeções ortogonais, de todas as contrações não-negativas, de todas as contrações positivas, e do todas as contrações estritamente positivas têm a propriedade sup do raio numérico. Agora, considere o cenário da proposição anterior (Proposição 4.13). Como o produto tensorial de uma contração por uma contração própria é uma contração própria (ver, e.g., [25]), segue que $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ contração implica que $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é uma contração própria, pois $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é por hipótese uma contração própria. Neste caso, a Proposição 4.13 é um caso particular do Teorema 3.12. Logo, tal resultado só tem sentido se existe $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ não-contração, tal que $w(A) \leq 1$.

Exemplo 4.14 Seja $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ um operador em $\mathbb{C}^2$. Note que M não é uma contração. De fato, basta tomar o vetor $x = (0,1) \in \mathbb{C}^2$. Daí, $\|M\|^2 = |0|^2 + |2|^2 = 4$. Logo, $\|M\| > 1$, isto é, M não é uma contração. Agora, vamos mostrar que A tem raio numérico $w(M) \leq 1$. Considere $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ operador em $\mathbb{C}^2$. Como $M = 2 \times B$, pode-se verificar que $W(M) = 2W(B)$(ver, e.g., [11]), onde $W(.)$ é a nossa notação para o range numérico. Daí, é suficiente encontrarmos o raio numérico de B para mostrar que $w(M) \leq 1$. Seja $y = (y_1, y_2)$ um vetor unitário arbitrário em $\mathbb{C}^2$, segue que $\|y\|^2 = |y_1|^2 + |y_2|^2 = 1$. Daí,

$$By = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle By; y \rangle = y_1 \bar{y_2},$$

onde $\bar{y_2}$ é o conjugado de y_2. Como $(|y_1| - |y_2|)^2 \geq 0$, segue que $|y_1|^2 - 2\,|y_1|\,|y_2| +$

$|y_2|^2 \geq 0$. Logo, $\frac{1}{2}(|y_1|^2 + |y_2|^2) \geq |y_1|\,|y_2|$. Daí,

$$|\langle By; y\rangle| \leq |y_1|\,|y_1| \leq \frac{1}{2}(|y_1|^2 + |y_2|^2) \leq \frac{1}{2}.$$

Como y é um vetor unitário arbitrário, então $W(B) \subseteq \mathbb{D}_{\frac{1}{2}} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \frac{1}{2}\}$. Como $W(M) = 2 \times W(B)$, segue que $W(M) \subseteq \mathbb{D}^{-}$, onde $\mathbb{D}^{-}$ é o disco unitário fechado em $\mathbb{C}$. Logo, $w(M) \leq 1$. Além disso, pode-se mostrar que $\|M\| \leq 2w(M)$ (ver, e.g., [18] p.6). Como $\|M\| = 2$, então $w(M) \geq 1$. Portanto, $1 \leq w(M) \leq 1$. Equivalentemente, $w(M) = 1$. Conclusão: M é uma não-contração em $\mathbb{C}^2$ com $w(M) = 1$. $\diamond$

O Exemplo 4.14 mostra uma não-contração M quasinilpotente com $w(M) \leq 1$. O raio numérico e o range numérico de operadores quasinilpotentes são bastante investigados, pois eles permitem mostrar diversas propriedades não-intuitivas (ver, e.g., [10] e [12]). Por outro lado, todo operador quasinilpotente é uniformente estável por definição. Como estamos apenas interessados em contrações com raio espectral igual a 1, o exemplo anterior não nos ajuda muito. Portanto, precisamos de $M \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ não-contração e não-quasinilpotente com $w(M) \leq 1$, caso contrário a Proposição 4.13 não tem sentido.

Halmos [13] define a classe dos operadores espectralóides. Um operador $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é espectralóide se $r(A) = w(A)$, ou seja, o raio espectral do operador é igual ao seu raio numérico. Pode-se verificar que todo operador normalóide é espectralóide, porém a recíproca não é verdadeira (ver, e.g., [23] p.467), isto é,

$$\text{Normalóide} \subset \text{Espectralóide}.$$

A classe dos espectralóides responde a pergunta: "se todo operador com raio númerico menor ou igual a 1 é uma contração ou um quasinilpotente?"

Exemplo 4.15 Seja $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ um operador em $\mathbb{C}^2$. Vimos no Exemplo 4.14 que $\|M\| = 2$, $r(M) = 0$ e $w(M) = 1$. Considere, $N \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ um operador normal compacto cujo espectro é o disco unitário fechado $\mathbb{D}^{-} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ em $\mathbb{C}$. Como N é normal, segue que $r(N) = w(N) = \|N\| = 1$. Agora, defina o operador $A \in \mathcal{B}[\mathbb{C}^2 \oplus \mathcal{K}]$ da seguinte maneira:

$$A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}.$$

Como $\sigma(A) = \sigma(M \oplus N) = \sigma(M) \cup \sigma(N)$ pelo Lema 3.31, então $\sigma(A) = \mathbb{D}^-$. Por outro lado, $W(A) = \text{conv}(W(M) \cup W(N))$ (ver, e.g., [11] p.4), onde conv(.) denota a envoltória convexa. Daí, $W(A) = \text{conv}(W(M) \cup W(N)) = \mathbb{D}^-$, donde $r(A) = 1 = w(A)$. Como $\|A\| = \sup\{\|M\|, \|N\|\}$ (ver, e.g., [18] p.17), segue que $\|A\| = \|M\| = 2$. Portanto, A é espectralóide não-contração e não-quasinilpotente com $w(A) \leq 1$. $\diamond$

Com o Exemplo 4.15 em mãos, a Proposição 4.13 passa a merecer destaque. De fato, a Proposição 4.13 não só estabiliza multiplicativamente todas as contrações próprias por contrações compactas (pois, toda contração própria tem raio numérico menor ou igual a 1), como também outras classes de operadores que não são necessariamente contrações. Considere o produto tensorial $T = (A \otimes B)$, onde A é o operador definido no Exemplo 4.15, exemplo acima, e $B = \frac{1}{2}I$. Pode-se verificar que T não é uma contração própria. Logo, o Teorema 3.12 para estabilidade multiplicatica de contrações próprias por perturbações compactas não se aplica a T. Por outro lado, $w(A) \leq 1$ e $B = \frac{1}{2}I$ é uma contração própria. Portanto, a Proposição 4.13 é valida para este caso. Resumindo, podemos interpretar a Proposição 4.13 como uma possível extensão do Teorema 3.12.

Corolário 4.16 *Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial, tal que $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é espectralóide com $w(A) \leq 1$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração própria. Se $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ satisfaz a propriedade sup do raio numérico e $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é a classe de todas as contrações compactas, então $r(ST) < 1$ para todo $S \in \mathcal{S}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Caso particular da Proposição 4.13. $\square$

O Corolário 4.16 é apenas uma variação da Proposição 4.13 em que a propriedade de espectralóides é colocada em evidência. Se $\mathcal{S}_1$ satisfaz a propriedade sup do raio espectral podemos estabelecer um resultado semelhante a Proposição 4.13. Portanto, o Corolário 4.17, corolário a seguir, também é apenas uma variação da Proposição 4.13.

Corolário 4.17 *Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial, onde $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é limitado em potências e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração própria. Se $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ satisfaz a propriedade sup do raio espectral e $\mathcal{S}_2$ é a classe de todas as contrações compactas, então $r(ST) < 1$ para todo $S \in \mathcal{S}$.*

Demonstração: Com efeito, considere $S = (C_1 \otimes C_2) \in \mathcal{S}$ arbitrário, onde $C_1 \in \mathcal{S}_1$ e $C_2 \in \mathcal{S}_2$. Daí,

$$ST = (C_1 \otimes C_2)(A \otimes B) = (C_1 A \otimes C_2 B)$$

pela Proposição 2.9, donde $r(ST) = r(C_1A)r(C_2B)$ pelo Teorema 2.10. Se $\mathcal{S}_1$ satisfaz a propriedade do sup do raio espectral, então

$$r(ST) = r(C_1A)r(C_2B) \leq \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A)r(C_2B) = r(A)r(C_2B).$$

Como $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é limitado em potências, segue que $r(A) \leq 1$ (ver, e.g., [18] p.6). Daí,

$$r(ST) \leq \sup_{\mathcal{S}_1} r(C_1A)r(C_2B) = r(A)r(C_2B) \leq r(C_2B).$$

Por outro lado, se $\mathcal{S}_2$ é a classe de todas as contrações compactas em $\mathcal{B}[\mathcal{K}]$, segue que $r(C_2B) < 1$ pelo Teorema 3.12, pois $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração própria. Logo,

$$r(ST) \leq r(A)r(C_2B) \leq r(C_2B) < 1.$$

Portanto, ST é uniformemente estável pela Proposição 3.3. $\square$

Conforme frisamos no Capítulo 3, ao contrário das outras Propriedades do Sup, não sabemos muitos exemplos de contrações que satisfazem a propriedade do sup do raio espectral. Portanto, não podemos afirmar quão restritiva são as hipóteses feitas na Corolário 4.17.

No Capítulo 5 vamos voltar ao Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações Fortemente Estáveis, só que no contexto de produto tensorial. Assim como no final do Capítulo 3, ali tentaremos resolver o problema em questão através perturbações compactas. Por essa razão, encerramos este capítulo, Capítulo 4, investigando a relação entre produto tensorial e compacidade.

4.2
Produto Tensorial e Compacidade

Na seção anterior, Seção 4.1, justificamos que o produto tensorial pode ajudar em nossa investigação no Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações. Por outro lado, no Capítulo 3 mostramos que o problema em questão se restringe apenas a classe de contrações $\mathcal{F}$, ou seja, a classe de todas as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis. Ali procuramos caracterizar a classe $\mathcal{F}$ para ter uma intuição de quais perturbações multiplicativas deveriam ser aplicadas. Em particular, estabilizamos multiplicativamente o shift unilateral reverso (Teorema 3.24) e a soma direta do shift unilateral reverso com uma contração própria através de operadores normais compactos injetivos (i.e., Teorema 3.34). No Capítulo 5, vamos retomar essa investigação só que no contexto de produto tensorial. Em outras palavras, vamos investigar o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações Fortemente Estáveis em Produto Tensorial. Perturbações compactas terão um papel importante nas classes estudadas neste próximo capítulo. Portanto, encerramos o Capítulo 4 estabelecendo condições necessárias e suficientes sob as quais o produto tensorial preserva a propriedade de compacidade. Neste contexto, primeiramente iremos apresentar um teorema de Kubrusly e Levan [25] para produto tensorial e compacidade (i.e., Teorema 4.18). Em seguida, mostramos uma generalização deste resultado, isto é, *um produto tensorial não-nulo* $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ *é compacto implica que* $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ *e* $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ *são compactos.*

A seguir enunciamos um teorema de Kubrusly e Levan [25] para compacidade no contexto de produto tensorial.

Teorema 4.18 [Ver, e.g., [25]] *Se* $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ *e* $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ *são operadores compactos, então o produto tensorial* $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ *é compacto. Reciprocamente, se* $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ *é compacto não-nulo e* $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ *(ou* $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$*) não tem autovalor nulo, então* B *(ou* A*) é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO: Ver, e.g., [25]. $\square$

Considere o cenário do Teorema 4.18 (i.e., o teorema acima). Note que supomos que $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ não tem autovalor nulo. O resultado que estabelecemos a seguir, Teorema 4.19, mostra que não precisamos dessa hipótese. Em outras palavras, a diferença básica entre o nosso resultado e o Teorema 4.18 é que não precisamos fazer quaisquer hipóteses sobre o espectro dos operadores que compõe o produto tensorial. Apesar do teorema a seguir ser uma pequena variação do Teorema 4.18, ela é importante para o Problema de Estabilidade Multiplicativa. De fato, quanto menos hipóteses sobre as perturbações $S = (C_1 \otimes C_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ mais geral é a solução para o nosso problema. Além disso, quando supomos alguma propriedade $S = (C_1 \otimes C_2)$ não necessariamente esta essa propriedade é transferida para os termos que compõe o produto tensorial (i.e., $C_1 \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $C_2 \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$). Por exemplo, em geral não é verdade que $w(S) = w(C_1)w(C_2)$ (ver, e.g., [9]). Portanto, o teorema abaixo, Teorema 4.19, ainda que seja uma variação aparentemente pequena tem sua importância justificada quando no contexto do Problema de Estabilidade Multiplicativa em Produto Tensorial. O próximo teorema é o segundo resultado principal desta tese.

Teorema 4.19 *Se $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é um produto tensorial não-nulo compacto, então $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são compactos.*

Demonstração: Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial não-nulo compacto. Como $T = (A \otimes B)$ é não-nulo, então $A \neq 0$ em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \neq 0$ em $\mathcal{B}[\mathcal{K}]$ (ver, e.g., [20]). Suponha por contradição que $A \neq 0$ não é compacto ou $B \neq 0$ não é compacto, mas $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é um operador compacto não-nulo. Se $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ não são operadores compactos, então $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ não é um produto tensorial compacto pela contra-positiva do Teorema 4.18, contradição. Agora, suponha que $B \neq 0$ não é compacto em $\mathcal{B}[\mathcal{K}]$. Lembre que um operador K em um espaço de Hilbert é compacto se e somente se K mapeia uma sequência limitada em uma sequência que tem uma subsequência convergente (ver, e.g., [23] p.253). Daí, como $B \neq 0$ não é compacto, segue que existe uma sequência limitada em $\mathcal{K}$, digamos $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\{By_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}}$ não converge para toda subsequência $\{y_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}}$ de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como $A \neq 0$ em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$, segue que existe x não-nulo em $\mathcal{H}$, tal que $Ax \neq 0$. Agora, considere a sequência $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, dada por $z_n = (x \otimes y_n) \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pela definição de produto tensorial, segue que

$$\|z_n\| = \|x \otimes y_n\| = \|x\|\,\|y_n\| \Rightarrow \sup_n \|z_n\| = \|x\| \sup_n \|y_n\| < \infty$$

(ver, e.g., [20]), pois $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Logo, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Como $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é um operador compacto e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, então existe $z_0 = (Ax \otimes By_0)$ em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ e uma subsequência $\{z_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}}$ de $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, tal que

$$\|Tz_{n_k} - z_0\| \to 0 \text{ quando } n_k \to \infty,$$

ou seja, Tz_{n_k} converge para z_0 quando $n_k \to \infty$. Por outro lado,

$$Tz_{n_k} - z_0 = (A \otimes B)(x \otimes y_{n_k}) - z_0 = (Ax \otimes Bz_{n_k}) - (Ax \otimes By_0),$$

donde $(Ax \otimes Bz_{n_k}) - (Ax \otimes By_0) = (Ax \otimes (By_{n_k} - By_0))$ pelo ítem (b.2) da Proposição2 [20]. Daí,

$$\|Tz_{n_k} - z_0\| = \|Ax \otimes B(y_{n_k} - y_0)\| = \|Ax\| \, \|B(y_{n_k} - y_0)\|,$$

onde na última igualdade usamos a Proposição 2.9. Como $\|Ax\|$ é uma constante não-nula, segue que $\|Tz_{n_k} - z_0\| \to 0$ quando $n_k \to \infty$ implica que $\|B(y_{n_k} - y_0)\| \to 0$ quando $n_k \to \infty$. Daí, existe $\{y_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}}$ subsequência de $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $\{By_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}}$ converge, contradição. O caso em que $A \neq 0$ em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ não é compacto é análogo, basta seguir os mesmos passos. Portanto, se $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é um operador não-nulo compacto, então $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são operadores compactos. □

Os Teoremas 4.18 e 4.19 mostram uma maneira simples de verificar quando um produto tensorial é ou não compacto. De fato, basta verificar que um dos operadores que compõe o produto tensorial não é compacto. Portanto, podemos determinar de maneira quase que imediata que os seguintes produtos tensoriais não são compactos: $A \otimes I$; $\operatorname{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k \geq 0} \otimes \operatorname{diag}(\frac{1}{k+1})_{k \geq 0}$; $S_+ \otimes J$ para J compacto; dentre outros.

Na Seção 4.1 definimos a $\mathcal{S}$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{S} \equiv \{S = (C_1 \otimes C_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}] : C_1 \in \mathcal{S}_1 \,\mathrm{e}\, C_2 \in \mathcal{S}_2\},$$

onde $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ são duas classes de contrações em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $\mathcal{B}[\mathcal{K}]$, respectivamente. Lembre que o Teorema 3.12 estabelece que toda contração própria é estabilizada multiplicativamente por uma contração compacta. O próximo resultado é uma aplicação dos resultados anteriores, ele garante que o Teorema 3.12 se mantém no contexto de produto tensorial.

Corolário 4.20 *Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ uma contração própria. Se $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ são as classes de todas as contrações compactas em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $\mathcal{B}[\mathcal{K}]$, respectivamente, então $r(ST) < 1$ para todo $S \in \mathcal{S}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Se $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ são as classes de todos operadores compactos em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $\mathcal{B}[\mathcal{K}]$, respectivamente, então todo produto tensorial $S \in \mathcal{S}$ é compacto pelo Teorema 4.18. Por outro lado, se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é uma contração própria, então $r(ST) < 1$ para todo $S \in \mathcal{S}$ pelo Teorema 3.12. □

No início deste capítulo, Capítulo 4, estabelecemos no Exemplo 4.4 que a contração própria

$$T = (I \otimes \operatorname{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k\geq 0}) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$$

é estabilizada multiplicativamente por $S = (I \otimes \operatorname{diag}(\frac{1}{k+1})_{k\geq 0}) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$. Com o Teorema 4.19 em "mãos" é fácil verificar que S é uma contração não-compacta. Agora, reafirmamos o que havíamos estabelecido naquela ocasião, ou seja, o produto tensorial nos permite estabilizar multiplicativamente contrações próprias por contrações não-compactas. Além disso, o Exemplo 4.4 mostra que a recíproca do Corolário 4.20 não é válida.

Neste capítulo justificamos o uso do produto tensorial na investigação do Problema de Estabilidade Multiplicativa. Além disso, generalizamos a recíproca do Teorema 4.18 (i.e., Teorema 4.19). No próximo capítulo, Capítulo 5, vamos usar os resultados até agora estabelecidos para estabilizar multiplicativamente contrações fortemente estáveis no contexto de produto tensorial.

5 Contrações Fortemente Estáveis em Produto Tensorial

No início da Seção 3.3 estabelecemos a seguinte pergunta: *"quais são as classes de contrações que estabilizam multiplicativamente contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis?"* Agora, vamos investigar a questão acima no contexto de produto tensorial. Antes de continuarmos, vamos fazer um breve resumo do que vimos até o momento nesta tese.

No início do Capítulo 3 fizemos um levantamento do Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações. O Teorema 3.12 mostrou que podemos restringir a questão original para a classe de todas as contrações não-próprias normalóides. Em particular, o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações permanece em aberto para contrações fortemente estáveis. Na Seção 3.2 provamos que todas as contrações fortemente estáveis hiponormais (e consequentemente normais, quasinormais, subnormais) são próprias pela Proposição 3.19. Logo, o Teorema 3.12 resolve o problema em questão para todos estes casos.

Em seguida, na Seção 3.3, definimos a classe de contrações $\mathcal{F}$ como a classe de todas as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis. Note que o Teorema 3.12 não se aplica a classe $\mathcal{F}$. O exemplo mais comum de contração em $\mathcal{F}$ é um shift unilateral reverso. O Teorema 3.24 estabiliza multiplicativamente um shift unilateral reverso por operadores normais compactos injetivos ou nulos. Por outro lado, as decomposições de Nagy-Foias-Langer (Teorema 3.27) e von Neumann-Wold (Teorema 3.28) mostram que podemos reescrever toda contração em $\mathcal{F}$ como a soma direta de shifts (unilateral e unilateral reverso) com uma contração fortemente estável. Ao final da Seção 3.3 destacamos que o espectro da soma direta é a união dos espectros (Lema 3.31). Portanto, é necessário estabilizarmos multiplicativamente cada termo da soma direta para estabilizar multiplicativamente o operador original. Encerramos o Capítulo 3 afirmando que no contexto de produto tensorial a condição anterior não é necessária.

No Capítulo 4 definimos o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações em Produto Tensorial. Ali, mostramos resultados que justificam o uso do produto tensorial no problema original (por exemplo, Corolário 4.3 e a Proposição 4.13). Na Seção 4.2, baseados em um teorema de Kubruslye Levan [25] para produto tensorial e compacidade (Teorema 4.18), estabelecemos que se $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é um produto tensorial não-nulo compacto, então $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ também são compactos, Teorema 4.19.

Agora, vamos aplicar os resultados desenvolvidos no Capítulo 4 para investigar quais classes de produtos tensoriais estabilizam as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis. O presente capítulo, Capítulo 5, está divido em duas seções: "A Classe $\mathcal{C}$"; e "Estabilidade Multiplicativa em $\mathcal{C}$ sob Perturbações Compactas". Na Seção 5.1 definimos $\mathcal{C}$ como a classe de todos os produtos tensoriais $T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$, onde $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral reverso e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração arbitrária. Em seguida, caracterizamos $\mathcal{C}$ e investigamos sua relação com $\mathcal{F}$ (i.e., a classe de todas as contrações não-próprias normaloídes fortemente estáveis). Na Seção 5.2 estabilizamos multiplicativamente a classe $\mathcal{C}$ por perturbações compactas, principal resultado original desta tese.

5.1
A Classe $\mathcal{C}$

Conforme frisado nos parágrafos que precedem esta seção, vamos investigar o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações Fortemente Estáveis no contexto de produto tensorial. Em particular, queremos estabilizar multiplicativamente contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis, pois já temos a resposta para os outros casos pelo Teorema 3.12. Para isso, vamos definir uma classe $\mathcal{C}$ em $\mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ e relacioná-la com as contrações fortemente estáveis em $\mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$. Seja $\mathcal{C}$ a classe dos produtos tensoriais definida por:

$$\mathcal{C} = \{T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}] : S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}] \text{ é um shift unilateral reverso e } B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}] \text{ é uma contração arbitrária}\}.$$

Dois operadores $L_1 \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $L_2 \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são similares se existe um operador $W \in \mathcal{G}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$, tal que $WL_1 = L_2W$. Pode-se verificar que similaridade é uma relação de equivalência (ver, e.g., [18] p.23). O Teorema de Rota estabelece que todo operador corretamente multiplicatido por um escalar é similar a parte de um shift unilateral reverso (i.e., todo operador é similar a restrição de um shift unilateral reverso em um subespaço invariante).

Teorema 5.1 [Ver, e.g., [18] p.89] *Seja $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. Se $r(T) < 1$, então $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é similar a parte de um shift unilateral reverso em $l^2_+(\mathcal{H})$.*

DEMONSTRAÇÃO: Ver, e.g., [18] p.89. □

Corolário 5.2 [Ver, e.g., [18] p.94] *Toda contração fortemente estável é a parte de um shift unilateral reverso.*

DEMONSTRAÇÃO: Ver, e.g., [18] p.94. □

Lembre que $\mathcal{F}$ denota a classe de todas as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis. Na Seção 3.3, usamos as decomposições de Nagy-Foias-Langer (Teorema 3.27) e von Neumann-Wold (Teorema 3.28) para reescrever todo operador em $L \in \mathcal{F}$ como a soma direta de um shift unilateral reverso com uma contração fortemente estável. O Corolário 5.2 justifica nossa insistência por decomposições deste tipo. Portanto, este resultado deve ser considerado uma primeira justificativa para trabalharmos com a classe $\mathcal{C}$ definida anteriormente. A próxima proposição relaciona a classe de todas as contrações fortemente estáveis em $\mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ com $\mathcal{C}$.

Proposição 5.3 *Seja $\mathcal{C} = \{T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}] : S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral reverso e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração$\}$. Se $T \in \mathcal{C}$, então T é fortemente estável.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um operador em $\mathcal{C}$ arbitrário, onde $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral reverso e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração arbitrária. Pode-se mostrar que o produto tensorial de um operador fortemente estável por um operador limitado em potências (i.e., "power bounded") é um operador fortemente estável (ver, e.g., [27]). Como $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um fortemente estável pelo Exemplo 3.15 e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração, logo $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é limitado em potências, segue que $T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{C}$ é fortemente estável. □

A Proposição 5.3 (proposição acima) e o Corolário 5.2 (corolário do Teorema de Rota) garantem uma relação entre $\mathcal{C}$ e a classe de todas as contrações fortemente estáveis.

Porém, queremos mais, ou seja, *quais são as propriedades compartilhadas entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{F}$ (i.e., a classe de todas as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis) em $\mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$?* Isto será visto na Proposição 5.4 abaixo.

Proposição 5.4 *Seja $\mathcal{F}$ a classe de todas as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis em $\mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$. Considere $T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{C}$ aribtrário. Se $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração não-própria normalóide, então $T \in \mathcal{F}$.*

Demonstração: Seja $T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{C}$, onde $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral reverso e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ uma contração. Note que o produto tensorial de duas contrações não-próprias é uma contração não-própria. De fato, considere $L_1 \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $L_2 \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ duas contrações não-próprias. Como L_1 é não-própria, então existe $x \neq 0$ em $\mathcal{H}$, tal que $\|L_1 x\| = \|x\|$. Analogamente, como L_2 é não-própria, segue que $\|L_2 y\| = \|y\|$ para algum $y \neq 0$ em $\mathcal{K}$. Logo,

$$\|(L_1 \otimes L_2)(x \otimes y)\| = \|L_1 x\| \, \|L_2 y\| = \|x\| \, \|y\|$$

pela Proposição 2.9. Em outras palavras, $(L_1 \otimes L_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é uma contração não-própria. Daí, se $B \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração não-própria, então $T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{C}$, pois pelo Exemplo 3.15 sabemos que $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração não-própria. Por outro lado, vimos na demonstração da Proposição 5.3 que o produto tensorial de uma contração fortemente estável por uma contração é uma contração fortemente estável. Daí, $T = (S_+^* \otimes B)$ é uma contração fortemente estável, pois $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração fortemente estável pelo Exemplo 3.15. Por fim, note que o produto tensorial de contrações normalóide é normalóide (ver, e.g., [22]). Daí, se $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é normalóide, então $T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{C}$ é normalóide, pois $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é normalóide pelo Exemplo 3.18. Portanto, T é uma contração não-própria normalóide fortemente estável, isto é, $T \in \mathcal{F}$. □

Os resultados anteriores (i.e., Corolário 5.2, Proposição 5.3 e Proposição 5.4) justificam a importância da classe $\mathcal{C}$ para o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações Fortemente Estáveis em Produto Tensorial. Apesar disso, algúem pode se perguntar: "será que todo operador em $\mathcal{C}$ é um shift unilateral reverso?"; ou "o que podemos afirmar sobre o espectro de produtos tensoriais em $\mathcal{C}$?". Os próximos resultados (i.e., Exemplo 5.5, Proposição 5.6 e Corolário 5.7) respondem as questões anteriores. O exemplo abaixo, Exemplo 5.5, mostra que a primeira pergunta tem resposta negativa, ou seja, existe $T \in \mathcal{C}$, tal que T não é um shift unilateral reverso.

Exemplo 5.5 Seja $T = (S_+^* \otimes S_+) \in \mathcal{B}[l_+^2(\mathbb{C}) \otimes l_+^2(\mathbb{C})]$, onde S_+^* é um shift unilateral reverso e S_+ é um shift unilateral ambos definidos em $l_+^2(\mathbb{C})$. Note que $T \in \mathcal{C}$. Uma das maneiras de mostrar que um operador é um shift unilateral reverso é provar que o operador em questão é uma coisometria fortemente estável (ver, e.g., [18] p.88). Equivalentemente, precisamos mostrar que $T^* = (S_+ \otimes S_+^*)$ não é uma isometria fortemente estável em $\mathcal{B}[l_+^2(\mathbb{C}) \otimes l_+^2(\mathbb{C})]$. De fato, considere $(x \otimes y) = (e_0 \otimes e_0)$, onde $e_0 = (1, 0, 0, \ldots) \in l_+^2(\mathbb{C})$. Como S_+ é uma isometria (ver, e.g., [18] p.37), segue que $\|S_+e_0\| = \|e_0\| = 1$. Pela Proposição 2.9 podemos afirmar que

$$\|T^*(x \otimes y)\| = \|S_+e_0\| \left\|S_+^*e_0\right\| = \left\|S_+^*e_0\right\| = 0 \neq 1 = \|(x \otimes y)\|.$$

Logo, $T^* = (S_+ \otimes S_+^*)$ não é uma isometria fortemente estável, isto é, $T = (S_+^* \otimes S_+)$ não é um shift unilateral reverso. $\diamond$

O resultado a seguir, Proposição 5.6, é o Exemplo 6.H(Parte 1) de [23], ele caracteriza complemente o espectro dos produtos tensoriais em $\mathcal{C}$.

Proposição 5.6 [Ver, e.g., [23] p.474] *Seja $T = (S_+ \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial, onde $S_+ \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração. As seguintes afirmações sobre o $\sigma(T)$ são verdadeiras:*

(i). $r(T) = r(B)$.

(ii). *Se* $\lambda \in \rho(T)$, *então* $r(B) < |\lambda|$.

(iii). $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathcal{C} : |\lambda| \leq r(B)\}$

(iv). $0 \in \sigma_P(T)$ *se e somente se* $0 \in \sigma_P(T)$.

(v). $\sigma_P(T) = \emptyset$ *ou* $\sigma_P(T) = \{0\}$.

(vi). $\sigma_R(T^*) = \emptyset$.

(vii). $\sigma_C = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(B)\} \backslash \sigma_P(T^*)$.

(viii). $\bigcap_{k\geq 0} \mathcal{R}((B^*)^k) = \{0\}$, *então* $\sigma_P(T^*) = \{0\}$.

Demonstração: [Ver, e.g., [23] p.474] Seja $B \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um operador definido em um espaço de Hilbert complexo $\mathcal{H} \neq \{0\}$. Considere o operador $T \in \mathcal{B}[l_+^2(\mathcal{H})]$ definido por

$$Tx = 0 \oplus \textstyle\bigoplus_{k\geq 1} Bx_{k-1} \text{ e } T^*x = \textstyle\bigoplus_{k\geq 0} B^*x_{k+1}$$

para todo $x = \bigoplus_{k\geq 0} x_k \in l_+^2(\mathcal{H}) = \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{H}$, onde 0 é a origem em $\mathcal{H}$. Note que $T^n x = \bigoplus_{k=0}^{n-1} 0 \oplus \bigoplus_{k\geq n} B^n x_{k-n}$ para todo $n \geq 1$. De fato, se $n = 1$, então

$Tx = 0 \oplus \bigoplus_{k\geq 1} T_{x_{k-1}}$. Suponha que a afirmação seja verdadeira para $n = m$ qualquer, isto é,

$$T^m x = \bigoplus_{k=0}^{m-1} 0 \oplus \bigoplus_{k\geq m} B^m x_{k-m}.$$

Considere $y \equiv T^m x$. Daí,

$$T^{m+1}x = Ty = 0 \oplus \bigoplus_{k\geq 1} T_{y_{k-1}} = 0 \oplus \bigoplus_{k=1}^{m} By_{k-1} \oplus \bigoplus_{k\geq m+1} Fy_{k-1} =$$

$$= 0 \oplus \bigoplus_{k=1}^{m} B0 \oplus \bigoplus_{k\geq m+1} F(F^m x_{k-(m+1)}) = \bigoplus_{k=0}^{m} 0 \oplus \bigoplus_{k\geq m+1} B^m x_{k-m}.$$

Portanto, $T^n x = \bigoplus_{k=0}^{n-1} 0 \oplus \bigoplus_{k\geq n} B^n x_{k-n}$ para todo $n \geq 1$. Daí, $\|T^n x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|B^n x_k\|^2$, donde

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|B^n x_k\|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|B^n\|^2 \|x_k\|^2 = \|B^n\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|^2 = \|B^n\|^2 \|x\|^2 = (\|B^n\| \|x\|)^2.$$

Daí, $\|T^n x\| \leq \|B^n\| \|x\|$ para todo $x \in l_+^2(\mathcal{H})$. Logo, $\frac{\|T^n x\|}{\|x\|} \leq \|B^n\|$ para todo $x \neq 0$ em $l_+^2(\mathcal{H})$, donde

$$\|T^n\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T^n x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\neq 0} \|B^n\| = \|B^n\|.$$

Portanto, $\|T^n\| \leq \|B^n\|$ para todo $n \geq 1$. Por outro lado, tome $y_0 \neq 0 \in \mathcal{H}$. Defina $y = (y_0, y_1, y_2, \ldots)$, onde $y_k = 0$ para todo $k \geq 1$. Considere o vetor $y = \bigoplus_{k\geq 0} y_k \in l_+^2(\mathcal{H})$, isto é,

$$y = (y_0, 0, 0, 0, \ldots).$$

Daí, $\|y\|^2 = \sum_{k\geq 0} \|y_k\|^2 = \|y_0\|^2$, donde $\|y\| = \|y_0\| \neq 0$. Por outro lado,

$$\|B^n\| = \sup_{\|y_0\|=1} \|B^n y_0\| = \sup_{\|y\|=1} \|T^n y\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T^n x\| = \|T^n\|$$

para cada $n \geq 1$. Portanto, $\|T^n\| \leq \|B^n\|$ e $\|B^n\| \leq \|T^n\|$ para todo $n \geq 1$. Em outras palavras, $\|T^n\| = \|B^n\|$ para todo $n \geq 1$. Pela Fórmula de Gelfand-Beurling (Teorema 2.5), segue que

$$r(T) = \lim_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|B^n\|^{\frac{1}{n}} = r(B).$$

Portanto, $r(T) = r(B)$. Além disso,

$$T^*y = \bigoplus_{k\geq 0} B^* y_{k+1} = \bigoplus_{k\geq 0} 0 = 0.$$

Como $y \neq 0$, então $T^*y = 0 \times y = 0$. Logo, $0 \in \sigma_P(T^*)$. Assim, $\{0\} \subseteq \sigma_P(T^*)$, donde $\{0\} \subseteq \sigma(T)$. Agora, tome $\lambda \neq\in \rho(T)$, segue que $\mathcal{R}(\lambda I - T) = l^2_+(\mathcal{H})$. Se $y = y_0 \oplus \bigoplus_{k\geq 1} 0$, então $y \in l^2_+(\mathcal{H})$ para todo $y_0 \in \mathcal{H}$. Logo, $y \in \mathcal{R}(\lambda I - T)$, pois $l^2_+ = \mathcal{R}(\lambda I - T)$. Em outras palavras $y = (\lambda I - T)x$ para algum $x = \bigoplus_{k\geq 0} x_k \in l^2_+(\mathcal{H})$. Daí,

$$y_0 \oplus \bigoplus_{k\geq 1} 0 = \lambda x - Tx = \lambda \oplus_{k\geq 0} x_k - (0 \oplus \bigoplus_{k\geq 1} Bx_{k-1}) = \lambda x_0 \oplus \bigoplus_{k\geq 1} (\lambda x_k - Bx_{k-1}).$$

Se $\lambda \neq 0$, então $x_k = \lambda^{-1} B x_{k-1}$. Note que $x_{k-1} = \lambda^{-1} B x_{k-2}$, então

$$x_k = \lambda^{-1} B(\lambda^{-1} B x_{k-2}) = \lambda^{-2} B^2 x_{k-2}.$$

Repetindo o mesmo procedimento obtemos que $x_k = \lambda^{-1}(\lambda^{-1}B)^k y_0$. Logo, $y_0 = \lambda x_0$ e $\lambda x_k = Bx_{k-1}$ para cada $k \geq 1$. Como $y = (\lambda I - T)x$, segue que $x_0 = \lambda^{-1} y_0$ e $x_k = \lambda^{-1} y_0$ e $x_k = \lambda^{-1}(\lambda^{-1}B)^k y_0$. Logo,

$$\|x\|^2 = \sum_{k\geq 0} \|x_k\|^2 = \sum_{k\geq 0} \left\| \lambda^{-1}(\lambda^{-1}B)^k y_0 \right\|^2 = |\lambda|^{-2} \sum_{k\geq 0} \left\| (\lambda^{-1}B)^k y_0 \right\|^2.$$

Como $x \in l^2_+(\mathcal{H})$ para todo $y \in \mathcal{H}$, então $\|x\|^2 = |\lambda|^{-2} \sum_{k\geq 0} \left\| (\lambda^{-1}T)^k y_0 \right\|^2$. Como $x \in l^2_+(\mathcal{H})$ para todo $y \in \mathcal{H}$, então $\|x\|^2 = \sum_{k\geq 0} \left\| (\lambda^{-1}B)^k y_0 \right\|^2$. Logo, $r(\lambda^{-1}B) < 1$ (ver, e.g., [23] p.463). Além disso, $r(\lambda^{-1}B) = |\lambda|^{-1} r(B)$ (ver, e.g., [23] p.459), tal que

$$r(\lambda^{-1}B) < 1 \Rightarrow r(B) < |\lambda|.$$

Conclusão: Se $\lambda \in \rho(T)$, então $r(B) < |\lambda|$. Equivalentemente, se $|\lambda| \leq r(B)$, então $\lambda \in \sigma(T)$, isto é,

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(F)\} \subseteq \sigma(T)$$

Por outro lado, sabemos que $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(B)\}$. Logo, $r(F) = r(T)$. O produto de dois conjuntos numéricos é o conjunto de todos os produtos ponto a ponto de cada um dos fatores em cada conjunto. Agora, considere $\bar{\mathbb{D}}$ o disco fechado centrado na origem. Como $\sigma(T)^* = \sigma(T^*)$ (ver, e.g., [23] p.476), segue que

$$\sigma(T^*) = \sigma(T)^* = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(B)\}^* =$$

$$= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(B)\} = \sigma(T) = \bar{\mathbb{D}}\sigma(B).$$

Agora, relembre que $\lambda \in \sigma_P(T)$ se e somente se $Tx = \lambda x$ para algum $x = \bigoplus_{k\geq 0} x_k \in l^2_+[\mathcal{H}]$ não-nulo. Se $0 \in \sigma_P(T)$, então $Bx_k = \lambda x_{k+1} = 0$ para todo $k \geq 0$ para algum $x = \bigoplus_{k\geq 0} x_k \in l^2_+[\mathcal{H}]$ não-nulo. Daí, $Bx_k = \lambda x_{k+1} = 0$ para todo $k \geq 0$. Logo, $Bx = 0$ e, assim, $0 \in \sigma_P(B)$. Reciprocamente, se $0 \in \sigma_P(B)$, então existe $x_0 \neq 0$ em $\mathcal{H}$, tal que $Bx_0 = 0$. Considere $x = \bigoplus_{k\geq 0}(k+1)^{-1}x_0$, tal que x é um vetor não-nulo em $l^2_+(\mathcal{H})$. Daí,

$$Tx = 0 \oplus \bigoplus_{k\geq 0}(k+1)^{-1}Bx_0 = 0.$$

Portanto, $0 \in \sigma_P(T)$. Equivalentemente, $0 \in \sigma_P(T) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_P(T)$. Agora, suponha que $\lambda \neq 0 \in \sigma_P(T)$, então $Tx = \lambda x$, donde

$$0 \oplus \bigoplus_{k\geq 1} Bx_{k-1} = \lambda x_0 \oplus \bigoplus_{k\geq 1} \lambda x_k.$$

Logo, $\lambda x_0 = 0$ e $Bx_k = \lambda x_{k+1}$. Como $\lambda \neq 0$, então $x_0 = 0$, donde $x_{k+1} = \lambda^{-1}Bx_k = \lambda^{-1}(\lambda^{-1}B)^k x_0 = 0$. Portanto, se $\lambda \neq 0 \in \sigma_P(T)$, então $x = 0$, contradição. Em outras palavras, se $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \notin \sigma_P(T)$. Resumindo: se $0 \in \sigma_P(T)$, então $\sigma_P(T) = \{0\}$ ou $\sigma_P(T) = \emptyset$, caso contrário. Lembre que

$$\sigma_R(T) = \sigma_P(T^*)^* \backslash \sigma_P(T)$$

(ver, e.g., [23] p.456). Daí, $\sigma_R(T^*) = \sigma_P(T)^* \backslash \sigma_P(T^*)$, pois $(T^*)^* = T$. Logo, $\sigma_P(T)^* \subseteq \{0\} \subseteq \sigma_P(T^*)$. Note que se $\sigma_P(T)^* \subseteq \{0\} \subseteq \sigma_P(T^*)$, então $\sigma_P(T)^* \subseteq \sigma_P(T^*)$. Como $\sigma_R(T^*) = \sigma_P(T)^* \backslash \sigma_P(T^*)$, então $\sigma_R(T^*) = \emptyset$. Por outro lado, o espectro de T^* pode ser escrita como a seguinte união disjunta: $\sigma(T^*) = \sigma_P(T^*) \cup \sigma_C(T^*) \cup \sigma_R(T^*)$. Logo, $\sigma_C(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(B)\} \backslash \sigma_P(T^*)$. Note que $\sigma_P(T^*) \neq \{0\}$, então existe $0 \neq \lambda \in \sigma_P(T^*)$, isto é, $T^*x = \lambda x$ para algum $x = \bigoplus_{k\geq 0} x_k \in l^2_+(\mathcal{H})$. Logo, existe $x_j \neq 0 \in \mathcal{H}$, tal que $B^*x_{k+1} = \lambda x_k$ para todo $k \geq j$. Por indução podemos mostrar que $(F^*)^k x_{j+k} = \lambda^k x_j$ para todo $k \geq 0$. De fato, para $k = 1$ temos que $B^*x_{j+1} = \lambda x_j$. Suponha que para $k = m$ seja válida a seguinte afirmação: $(B^*)^m x_{j+m} = \lambda^m x_j$. Daí, para $k = m + 1$ temos que

$$(B^*)^{m+1} x_{j+m+1} = (B^*)^m((B^*)^m x_{j+(m+1)}) =$$

$$(B^*)^m(\lambda x_{j+m}) = \lambda(B^*)^m(x_{j+m}) = \lambda(\lambda^m x_j) = \lambda^{m+1}x_j.$$

Logo, $(F^*)^k x_{j+k} = \lambda^k x_j$ para todo $k \geq 0$. Como $\lambda \neq 0$, então $(B^*)^m x_{j+k} = \lambda^k x_{j+k}$ implica que $x_j = \lambda^{-k}(B^*)^m x_{j+k}$. Logo, $x \in \mathcal{R}((B^*)^k)$ para cada $k \geq 0$. Portanto, $x_j \in \bigcap_k \mathcal{R}((B^*)^k)$, ou seja, $\bigcap_k \mathcal{R}((B^*)^k) \neq \{0\}$. Conclusão: $\bigcap_k \mathcal{R}((B^*)^k) = \{0\}$ implica que $\sigma_P(T^*) = \{0\}$. Daí, se $\bigcap_k \mathcal{R}((B^{*k})) = \{0\}$, então $\sigma_P(T^*) = \{0\}$. Logo, $\sigma_C(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(F)\} \backslash \sigma_P(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(B)\} \backslash \{0\}$. □

Corolário 5.7 *Seja $T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial, onde $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral reverso e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração. As seguintes afirmações sobre o $\sigma(T)$ são verdadeiras:*

(i). $r(T) = r(B)$.

(ii). *Se $\lambda \in \rho(T)$, então $r(B) < |\lambda|$.*

(iii). $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathcal{C} : |\lambda| \leq r(B)\}$

(iv). *$0 \in \sigma_P(T^*)$ se e somente se $0 \in \sigma_P(T^*)$.*

(v). *$\sigma_P(T^*) = \emptyset$ ou $\sigma_P(T^*) = \{0\}$.*

(vi). $\sigma_R(T) = \emptyset$.

(vii). $\sigma_C(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(B)\} \backslash \sigma_P(T)$.

(viii). *$\bigcap_{k \geq 0} \mathcal{R}(B^k) = \{0\}$, então $\sigma_P(T) = \{0\}$.*

Demonstração: Imediato da Proposição 5.6, basta trocar T por T^*. □

Nesta seção definimos a classe $\mathcal{C} = \{T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}] : S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral reverso e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração$\}$. Em seguida, justificamos sua importância para o Problema de Estabilidade Multiplicativa em Produto Tensorial. Daí, estabelecemos algumas de suas propriedades, inclusive sobre o seu espectro, e mostramos que existe uma relação entre $\mathcal{F}$ (i.e., a classe de todas as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis) e $\mathcal{C}$. Na Seção 5.2 vamos usar estabilizar multiplicativamente $\mathcal{C}$ por perturbações compactas. Em particular, estabelecemos o terceiro resultado principal desta tese.

5.2
Estabilidade Multiplicativa em $\mathcal{C}$ sob Perturbações Compactas

Agora, vamos estabilizar multiplicativamente contrações fortemente estáveis através de perturbações multiplicativas. Em um primeiro momento, iremos provar que todo produto tensorial $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ em $\mathcal{C}$ (lembre que $\mathcal{C} = \{T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}] : S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral reverso e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração$\}$) é uma contração fortemente estável. Em seguida, mostraremos que todo produto tensorial em $\mathcal{C}$ é estabilizado multiplicativamente por um operador normal compacto injetivo.

Dois operadores $L_1 \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $L_2 \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são unitariamente equivalentes (notação: $L_1 \approx L_2$) se existe uma transformação unitária $W \in \mathcal{G}[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$, tal que $WL_1 = L_2W$. Pode-se verificar que a relação de equivalência unitária preserva o espectro, as partes do espectro (i.e., os espectros pontual, residual e contínuo) e a norma (ver, e.g., [18] p.23).

No final da Seção 3.3 decompomos contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis na soma direta de shifts (unilateral e unilateral reverso) com uma contração fortemente estável. Por outro lado, Kubrusly e Vieira [27] estabeleceram uma decomposição para produtos tensoriais. Seja $L \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ uma contração qualquer, Nagy e Foias classificaram as contrações em 4 tipos (ver, e.g., [31] e [29]):

(i). C_{00}: L e L^* são fortemente estáveis.

(ii). C_{01}: L é fortemente estável e L^* não é fortemente estável.

(iii). C_{10}: L é não é fortemente estável e L^* é fortemente estável.

(iv). C_{11}: L e L^* não são fortemente estáveis.

Lembre que $(T^n)^*T^n \xrightarrow{s} A_T$ e que $\approx$ é nossa notação para equivalência unitária.

Teorema 5.8 [Ver, Teorema 4 de [27]] *Sejam T e S duas contrações em $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $\mathcal{B}[\mathcal{K}]$, respectivamente. Considere o produto tensorial $T \otimes S \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$. Se $A_{T\otimes S} = A_{T\otimes S}^2$, então*

$$T \otimes S \approx C \oplus G \oplus V \oplus U,$$

onde C é uma contração $C_{0\cdot}$, G é uma contração C_{00}, V é um shift unilateral e U é um operador unitário.

Demonstração: Ver, e.g., [27]. $\square$

O Teorema 5.8 nos permite mostrar que todo operador em $\mathcal{C}$ é unitariamente equivalente a uma contração $\mathcal{C}_{0\cdot}$.

Lema 5.9 [Ver, Corolário 1 de [27]] *Sejam $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $S \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ contrações arbitrárias. Considere o produto tensorial $T \otimes S \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$, segue que $A_{T\otimes S} = A_T \otimes A_S$.*

DEMONSTRAÇÃO: [Ver, Corolário 1 de [27]] Sejam $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $S \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ contrações arbitrárias. Por definição temos que

$$((T \otimes S)^n)^*(T \otimes S)^n \xrightarrow{s} A_{T\otimes S}.$$

Note que

$$((T \otimes S)^n)^*(T \otimes S)^n = (T^* \otimes S^*)^n(T \otimes S)^n =$$

$$((T^*)^n \otimes (S^*)^n)(T^n \otimes S^n) = (T^n)^*T^n \otimes (S^n)^*S^n.$$

Logo, $A_{T\otimes S}$ é o limite forte de $(T^n)^*T^n \otimes (S^n)^*S^n$. Por outro lado, como $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $S \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são contrações, segue que A_T e A_S são os limites fortes de $(T^n)^*T^n$ e $(S^n)^*S^n$, respectivamente. Como o produto tensorial preserva convergência forte (ver, e.g., [27]), então $A_T \otimes A_S$ é o limite forte de $(T^n)^*T^n \otimes (S^n)^*S^n$. Portanto, $A_{T\otimes S} = A_T \otimes A_S$. □

Lema 5.10 *Se $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ ou $S \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ não é fortemente estável, então $T \oplus S \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}]$ não é fortemente estável.*

DEMONSTRAÇÃO: Sem perda de generalidade suponha que T não é fortemente estável, então existe $x \in \mathcal{H}$, tal que $\|T^n x\| \not\to 0$ para $n \to \infty$. Tome $(x \oplus 0) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$, segue que $\|(T \oplus S)^n(x \oplus 0)\| = \|T^n x\| \not\to 0$. □

O lema a seguir, Lema 5.11, é um resultado auxiliar que será utilizado no terceiro resultado principal desta tese.

Lema 5.11 *Seja $T = (S_+^* \otimes B)$ um produto tensorial em $\mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$, onde $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral reverso e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é um operador limitado em potências. Afirmo que:*

(a) *T é uma contração $C_{0\cdot}$.*

(b) *Se $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração, então T é unitariamente equivalente a soma direta $C \oplus G$, onde C é uma contração $C_{0\cdot}$ e G é uma contração C_{00}.*

Demonstração: Seja $T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ arbitrário, onde $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral reverso e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma operador limitado em potências contração qualquer. Pela Proposição 8.8 de [18] temos que T é fortemente estável. Logo a afirmação (a) está demonstrada. Agora, suponha que $B \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é uma contração. Vamos provar que T é unitariamente equivalente a soma direta $C \oplus G$, onde C é uma contração $C_{0.}$ e G é uma contração C_{00}. De fato, como T é o produto tensorial de duas contrações (i.e., S_+^* e B), então T é uma contração (ver, e.g., [25]). Daí,

$$T \approx C \oplus G \oplus V \oplus U$$

pelo Teorema 5.8, onde C é uma contração $C_{0.}$, G é uma contração C_{00}, V é um shift unilateral e U é um operador unitário. Acabamos de verificar que T é fortemente estável, daí $C \oplus G \oplus V \oplus U$ é fortemente estável, pois a relação de equivalência unitária preserva estabilidade forte (ver, e.g., [18] p.29). Como toda contração fortemente estável é uma contração completamente não-unitária pelo Teorema 3.33, segue que $C \oplus G \oplus V \oplus U = C \oplus G$. Portanto, T é unitariamente equivalente a $C \oplus G$, onde C é uma contração $C_{0.}$ e G é uma contração C_{00}. Em outras palavras a parte (b) está demonstrada. $\square$

O teorema a seguir, Teorema 5.12, é o segundo resultado principal desta tese. Ele usa os Teoremas 3.24 e 4.19 para estabilizar multiplicativamente todo produto tensorial $T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ através de perturbações normais compactas, onde $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral reverso e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é um operador arbitrário. Além disso, ele estabiliza multiplicativamente os operadores unitariamente equivalentes a soma direta de todos os produtos tensoriais unitariamente equivalente a soma direta de contrações $C_{0.}$ com C_{00}.

Teorema 5.12 *Seja $T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial, onde $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral reverso e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é um operador arbitrário. Considere $S = (D_1 \otimes D_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial normal compacto. Afirmo que:*

(a) *Se $S = (D_1 \otimes D_2)$ é injetivo ou nulo, então $ST \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é uniformemente estável.*

(b) *Além disso, se $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração e $S = (D_1 \otimes D_2)$ é injetivo ou nulo, então S estabiliza multiplicativamente produto tensorais*

$T = (S_+^* \otimes B)$ os quais são unitariamente equivalentes a soma direta de contrações $C_{0.}$ com C_{00}.

Demonstração: Seja $T = (S_+^* \otimes B)$ um produto tensorial em $\mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$, onde $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral reverso e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é um operador qualquer. Considere $S = (D_1 \otimes D_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial normal compacto. Se S é operador nulo, então $r(ST) = r(0T) = 0$. Caso contrário, suponha que $S = (D_1 \otimes D_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é injetivo. Se $S = (D_1 \otimes D_2)$ é injetivo, segue que S não tem autovalores nulos pela Proposição 3.23. Como $\sigma_P(S) = \sigma_P(D_1)\sigma_P(D_2)$ (ver, e.g., [25]), então $0 \notin \sigma_P(D_1)$ e $0 \notin \sigma_P(D_2)$, pois S não tem autovalor nulo. Por outro lado, se $S \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é um produto tensorial não-nulo compacto, então $D_1 \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $D_2 \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são operadores compactos pelo Teorema 4.19. Além disso, se $S = (D_1 \otimes D_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é normal, então $D_1 \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $D_2 \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são operadores normais (ver, e.g., [20]). Resumindo, se $S = (D_1 \otimes D_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é um produto tensorial normal compacto injetivo, então $D_1 \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $D_2 \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são operadores normais compactos injetivos. Mais uma vez, aplicando a Proposição 2.9 temos que

$$ST = (D_1 \otimes D_2)(S_+^* \otimes B) = (D_1 S_+^* \otimes D_2 B),$$

donde $r(ST) = r(D_1 S_+^*) r(D_2 B)$ pelo Teorema 2.10. Por outro lado, o Teorema 3.24 estabelece que $r(D_1 S_+^*) = 0$. Portanto,

$$r(ST) = r(D_1 S_+^*) r(D_2 B) = 0 \times l = 0,$$

isto é, $r(ST) = 0$. Logo, ST é uniformemente estável pela Proposição 3.3. Portanto, a parte (a) está demonstrada. Agora, vamos provar a parte (b) do teorema, ou seja, iremos estabilizar multiplicativamente somas diretas de contrações $C_{0.}$ com contrações C_{00}. Suponha que $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração. Vamos continuar assumindo que $S = (D_1 \otimes D_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é um operador normal compacto injetivo ou nulo. A Proposição 5.11 mostra todo produto tensorial em $\mathcal{C}$ é unitariamente equivalentemente a uma soma direta de uma contração $C_{0.}$ com uma contração C_{00}. Como $T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{C}$, segue que

$$T \approx C \oplus G,$$

para algum C contração $C_{0.}$ e algum G contração C_{00}. Acabamos que verificar que todo produto tensorial $S = (D_1 \otimes D_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ normal compacto injetivo ou nulo estabiliza multiplicativamente $T \in \mathcal{C}$. Portanto, $S = (D_1 \otimes D_2)$ estabiliza multiplicativamente produtos tensoriais unitariamente equivalentes a $C \oplus G$, onde C é uma contração $C_{0.}$ e G é uma contração C_{00}. Equivalentemente a parte (b) do teorema está demonstrada. □

Seja $L \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. Se $r(L) < 1$, então para todo $\alpha \in (r(L), 1)$ existe um inteiro $n_\alpha \geq 1$, tal que $\|L^n\| \leq \alpha^n$ para todo $n \geq n_\alpha$ (ver, e.g., [18] p.11). Em particular, se L é quasinilpotente, então $\alpha \in (0, 1)$. Agora, considere o cenário do Teorema 5.12. Como $S_+^* D_1$ é quasinilpotente (i.e., $r(D_1 S_+^*) = 0$), segue que não importa "quão rápido" a norma da sequência de potências $\|(D_2 B)^n\|$ cresça, existe um $\alpha \in (0, 1)$, tal que $\alpha^n = \left\|(D_1 S_+^*)^n\right\|$ "descrece" mais rápido. Em outras palavras, $D_1 S_+^*$ quasinilpotente garante que a estabilidade multiplicativa de T para $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ arbitrário. Além disso, cabe frisar que a classe de todos os operadores $T = (S_+^* \otimes B)$ definidos no Teorema 5.12 não contém apenas contrações fortemente estáveis. De fato, se $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ for limitado em potências, segue que $T = (S_+^* \otimes B)$ é uma contração fracamente estável (ver, e.g., [27]). Logo, o Teorema 5.12 também estabiliza multiplicativamente contrações fracamente estáveis.

Pode-se verficar que equivalência unitária é preservada sob o adjunto, ou seja, $L_1 \approx L_2$ implica que $L_1^* \Rightarrow L_2^*$. Daí, o Teorema 5.12 também vale para o adjunto de $T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$, onde $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral reverso e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ arbitrário.

Corolário 5.13 *Seja $T = (S_+ \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial arbitrário, onde $S_+ \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é um operador arbitrário. Considere $S = (D_1 \otimes D_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial normal compacto. Afirmo que:*

(a) *Se $S = (D_1 \otimes D_2)$ é injetivo ou nulo, então $ST \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é uniformemente estável.*

(b) *Além disso, se $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração e $S = (D_1 \otimes D_2)$ é injetivo ou nulo, então S estabiliza multiplicativamente produto tensorais unitariamente equivalentes a soma direta de contrações $C_{.0}$ com C_{00}.*

DEMONSTRAÇÃO: Basta notar que o adjunto preserva equivalência unitária e seguir os mesmos passos da demonstração do Teorema 5.12. □

O próximo resultado é combina os resultados do Teorema 5.12 e do Corolário 5.13. Ele estabelece que todo produto tensorial $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é estabilizado multiplicativamente por um operador compacto injetivo, sempre que $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ (ou $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$) é um shift unilateral reverso ou um shift unilateral.

Corolário 5.14 *Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial arbitrário, onde $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$. Considere $S = (D_1 \otimes D_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um operador normal compacto injetivo ou nulo. Se $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ (ou $B \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$) é um shift unilateral ou um shift unilateral reverso, então ST é uniformemente estável.*

Demonstração: Seja $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um produto tensorial arbitrário, onde $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$. Considere $S = (D_1 \otimes D_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ um operador normal compacto injetivo ou nulo. Se S é o operador nulo, então $r(ST) = r(0T) = 0$ pela Proposição 3.3. Caso contrário, suponha que $S = (D_1 \otimes D_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é um operador normal compacto injetivo, então D_1 e D_2 são operadores normais compactos injetivos pela demonstração do Teorema 5.12. Suponha que $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral ou um shift unilateral reverso. Se A é um shift unilateral reverso, então ST é uniformemente estável pelo Teorema 5.12. Caso contrário, se A é um shift unilateral, então ST é uniformemente estável pelo Corolário 5.13. Agora, suponha que $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é um shift unilateral ou um shift unilateral reverso. Como D_2 é um operador normal compacto injetivo, basta aplicar o Teorema 5.12 quando B for um shift unilateral reverso e o Corolário 5.13 quando B for um shift unilateral. Portanto, ST é uniformemente estável, sempre que $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ (ou $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$) é um shift unilateral ou um shift unilateral reverso. □

Aqui terminamos as consequências diretas do Teorema 5.12. A seguir seguem conjecturas baseadas no Teorema 5.12.

Encerramos esta tese com mais dois resultados: um exemplo; e uma proposição. O exemplo a seguir, Exemplo 5.15, mostra que nem toda contração fortemente estável é unitariamente equivalente a um produto tensorial em $\mathcal{C}$. Em seguida, baseados no Teorema 5.12 elaboramos uma conjectura e mostramos que se verdadeira estabilizamos multiplicativamente todos os operadores unitariamente equivalentes a contrações fortemente estáveis.

Exemplo 5.15 Seja S_+^* um shift unilateral reverso em $l_+^2(\mathcal{H})$, tal que S_+^* é fortemente estável pelo Exemplo 3.15. Pode-se verificar que o espectro residual de S_+^* é o disco unitário aberto $\mathbb{D}$ em $\mathbb{C}$, isto é, $\sigma_R(S_+^*) = \mathbb{D}$ (ver, e.g, [18] p.42). Agora, considere um produto tensorial arbitrário $T = (S_+^* \otimes B)$ em $\mathcal{C}$, onde S_+^* é um shift unilateral reverso e B é uma contração qualquer.

Na Proposição 5.6 vimos que $\sigma_R(T) = \emptyset$. Como a relação de equivalência unitária preserva o espectro residual (ver, e.g., [18] p.23), segue que S_+^* não é unitariamente equivalente a T. Logo, existe um operador fortemente estável que não é unitariamente equivalente a um produto tensorial em $\mathcal{C}$.$\diamond$

Seja $\mathcal{C}' \equiv \{T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}] : S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ um shift unilateral reverso e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ um operador arbitrário$\}$ uma variação da classe $\mathcal{C}$ definida no início desta seção. Considere a seguinte conjectura:

Afirmação 5.16 *Se o produto tensorial $L = (L_1 \otimes L_2) \in \mathcal{F}$, então existe $T \in \mathcal{C}'$, tal que $L \approx T$ (i.e., L é unitariamente equivalente a T).*

Encerramos esta tese com a próxima proposição que garante a estabilidade multiplicativa de operadores unitariamente equivalentes a classe de todas as contrações fortemente estáveis, caso a Afirmação 5.16 seja verdadeira.

Proposição 5.17 *Seja $L = (L_1 \otimes L_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ uma contração normalóide fortemente estável. Considere $S = (D_1 \otimes D_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ uma contração normal compacta injetiva ou nula. Se a Afirmação 5.16 for verdadeira, segue que S estabiliza multiplicativamente todo operador unitariamente equivalente a L.*

Demonstração: Seja $L = (L_1 \otimes L_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ uma contração normalóide fortemente estável arbitrária. Considere $S = (D_1 \otimes D_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ uma contração normal compacta . Se $S = (D_1 \otimes D_2)$ é o operador nulo, então $r(LS) = 0$. Logo, SL é uniformemente estável pela Proposição 3.3. Agora, suponha que $S = (D_1 \otimes D_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é uma contração normal injetiva compacta. Como $L = (L_1 \otimes L_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é uma contração, segue que L pode ser uma contração própria ou L pode ser uma contração não própria. Se $L = (L_1 \otimes L_2)$ for uma contração própria, então SL é uniformemente estável pelo Teorema 3.12. Caso contrário, seja $L = (L_1 \otimes L_2)$ uma contração não-própria, isto é, L é uma contração não-própria normalóide fortemente estável. Se $S = (D_1 \otimes D_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é uma contração normal compacta injetiva, segue pela demonstração do Teorema 5.12 que $D_1 \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e $D_2 \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ são operadores normais compactos injetivos. Se a Afirmação 5.16 é verdadeira, segue que existe $T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{C}'$, tal que $L \approx T = (S_+^* \otimes B)$ para algum shift unilateral reverso $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ e alguma contração $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$. Aplicando o Teorema 5.12 temos que $r(ST) < 1$, ou seja, ST é uniformemente estável pela Proposição 3.3. Portanto, $S = (D_1 \otimes D_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ estabiliza uniformemente todo operador unitariamente equivalente a uma contração normalóide fortemente estável $L = (L_1 \otimes L_2) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$. $\square$

6
Conclusão

O Problema de Estabilidade Multiplicativa investiga quais as classes de operadores que estabilizam multiplicativamente o operador original, onde a noção de estabilidade é a de estabilidade uniforme. Em outras palavras, dado um operador T definido em um espaço de Hilbert arbitrário queremos estabelecer quais são os operadores S, tais que ST é uniformemente estável. Em particular, nesta tese investigamos o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações Fortemente Estáveis em Produto Tensorial.

No dois primeiros capítulos motivamos este trabalho e fazemos um breve resumo dos conceitos e noções que foram utilizadas ao longo deste material, respectivamente. Em seguida, no Capítulo 3, definimos formalmente o Problema de Estabilidade Multiplicativa e estabelecemos alguns resultados. Na Seção 3.1 fazemos um levantamento dos resultados mais importantes do problema original para contrações. Ali, destacamos o resultado de Kubrusly e Vieira, Teorema 3.12, que estabelece: *toda contração própria é estabilizada uniformemente por uma contração compacta.* O Teorema 3.12 restringe o problema em questão para a classe das contrações não-próprias normalóides. Em particular, ainda não temos uma resposta para a classe de todas as contrações fortemente estáveis, que é uma classe importante. Na seção seguinte, Seção 3.2, a Proposição 3.19 mostra que toda contração hiponormal (e consequentemente normal, quasinormal e subnormal) fortemente estável é uma contração própria. Logo, o Teorema 3.12 para estabilidade multiplicativa de contrações próprias se aplica. Na última seção do Capítulo 3, investigamos a classe de todas as contrações não-próprias normalóides fortemente estáveis, denotada por $\mathcal{F}$. A estabilidade multiplicativa de $\mathcal{F}$ responde o Problema de Estabilidade Multiplicativa para Contrações Fortemente Estáveis. No restante da Seção 3.3 procuramos caracterizar $\mathcal{F}$. O Exemplo 3.21 estabelece que T contração não-estrita própria normalóide fortemente estável não implica que T é normal. Além disso, estabilizamos multiplicativamente shifts unilaterais, shifts unilaterais reversos (exemplo mais comum de $\mathcal{F}$) e isometrias parciais complemente não-unitárias por operadores normais compactos injetivos ou nulos, Teorema 3.24, Corolário 3.29 e Teorema 3.32, respectivamente. Encerramos o Capítulo 3 aplicando as decomposições de Nagy-Foias-Langer e von Neumann-Wold para caracterizar $\mathcal{F}$. O Teorema 3.34 estabiliza multiplicativamente a soma direta de shifts unilaterais reversos com contrações próprias. O Exemplo 3.36 é não intuitivo, ele mostra que nem toda contração em $\mathcal{F}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.34 (i.e., poderia ser decomposta como a soma direta de um shift unilateral reverso com uma contração fortemente estável).

O Capítulo 4 coloca o Problema de Estabilidade Multiplicativa no contexto de produto tensorial. Na Seção 4.1 justificamos o uso do produto tensorial no problema original. Ao trabalharmos com soma direta, o espectro do operador é a união dos espectros. Por outro lado, o espectro do produto tensorial é o produto dos espectros, o que representa uma grande vantagem. O Corolário 4.3 prova que basta estabilizarmos multiplicativamente um dos termos que do produto tensorial para garantir estabilidade uniforme, supondo que o outro termo do produto tensorial é limitado em potências (i.e., "power bounded"). Em seguida, mostramos que o produto tensorial preserva as propriedades sup da norma (Proposição 4.7) e do max da norma (Corolário 4.8). Por outro lado, as propriedades sup do raio numérico e do raio espectral são preservadas apenas com a hipótese adicional que o produto tensorial é normalóide, ver, Exemplo 4.10, Proposição 4.11 e Proposição 4.12, respectivamente. Ao final da Seção 4.1 usamos as Propriedades do Sup para extender o Teorema 3.12, ou seja, a Proposição 4.13.

Na segunda seção do Capítulo 4 investigamos sob quais condições o produto tensorial preserva compacidade. Baseados em um teorema de Kubrusly para compacidade, Teorema 4.18, mostramos a seguinte afirmação (Teorema 4.19): *se* $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ *é um produto tensorial compacto não-nulo, então* $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ *e* $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ *são operadores compactos.*

No Capítulo 5 voltamos ao Problema de Estabilização Multiplicativa para Contrações Fortemente Estáveis só que no contexto de produto tensorial. Na primeira seção, definimos a classe $\mathcal{C} = \{T = (S_+^* \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}] : S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral reverso e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é uma contração$\}$. Determinamos diversas propriedades de $\mathcal{C}$, por exemplo, mostramos que a relação de $\mathcal{C}$ com $\mathcal{F}$ (Proposição 5.3 e Proposição 5.4, respectivamente) e usamos o Exemplo 6.H(Parte 1) de [23] para caracterizar o seu espectro. Justificada a relevância de $\mathcal{C}$ provamos o terceiro principal resultado original desta tese na Seção 5.2, isto é, o Teorema 5.12. O Teorema 5.12 mostra que todo produto tensorial $T = (S_+^* \otimes B)$ é estabilizado multiplicativamente por um operador normal compacto injetivo ou nulo, onde $S_+^* \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ é um shift unilateral reverso e $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ é um operador arbitrário. Além disso, ele também estabiliza multiplicativamente produto tensoriais unitariamente equivalente a contrações fortemente estáveis. O caso para $T = (S_+ \otimes B)$ é tratado no Corolário 5.13. Através dos Teoremas 5.12 e Corolário 5.13, o Corolário 5.14 mostra que todo produto tensorial $T = (A \otimes B) \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ é estabilizado multiplicativamente por um operador normal compacto injetivo ou nulo, quando $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ (ou $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$) é um shift unilateral ou um shift unilateral reverso. Encerramos esta tese estabelecendo uma conjectura, a Afirmação 5.16. Tal conjectura estabelece que todo produto tensorial em $\mathcal{F}$ é unitariamente equivalente a um produto tensorial $T = (S_+^* \otimes B)$ definido no Teorema 5.12. Se a Afirmação 5.16 for válida conseguimos estabilizar multiplicativamente todos operadores unitariamente equivalentes a contrações fortemente estáveis (Proposição 5.17).

Resumindo novamente, os principais resultados originais desta tese são Teorema 4.19 e Teorema 5.12.

Referências Bibliográficas

[1] A. Bhaya e E. Kaszkurewicz, *On discrete-time diagonal and D-stability*, Linear Algebra Appl., **187** (1993), 87–104.

[2] A. Brown e C. Pearcy, *Spectra of tensor products of operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **17** (1966), 162–166.

[3] A. Brown e C. Pearcy, *Introduction to Operator Theory I - Elements of Functional Analysis*, Springer, New York, 1977.

[4] B.E. Cain, *Operators which remain convergent when multiplied by certain Hermitian operators*, Linear Algebra Appl., **297** (1999), 57–61.

[5] B.E. Cain, *Convergent multiples of convergent operators*, Linear Algebra Appl., **299** (1999), 171–173.

[6] B. Cain, L.M. DeAlba, L. Hogben e C.R. Johnson, *Multiplicative perturbations of stable and convergent operators*, Linear Algebra Appl., **268** (1998), 151–169.

[7] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd ed., Springer, New York, 1990.

[8] J.B. Conway, *A Course in Operator Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 21, Amer. Math. Soc., Providence, 2000.

[9] T. Furuta e R. Nakamoto, *On tensor products of operators*, Proc. Jpn. Acad. **45** (1969), 680–685.

[10] H.-L. Gau e P.Y. Wu, *Numerical ranges of nilpotent operators*, Linear Algebra Appl. **429** (2008), 716–726.

[11] K.E. Gustafson e D.K.M. Rao, *Numerical Range*, Springer, New York, 1990.

[12] U. Haargerup e P. de la Harpe, *The numerical radius of a nilpotent operator on a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), 371–379.

[13] P. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, 2nd ed., Springer, New York, 1982.

[14] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, New York, 1991.

[15] L. Kérchy, *Isometric asymptotes of power bounded operators*, Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), 173–188.

[16] V.A. Khatskevich, M.I. Ostrovskii e V.S. Shulman, *Extremal problems for operators in Banach spaces arising in the study of linear operator pencils*, Integral Equations Operator Theory **51** (2005), 109–119.

[17] C.S. Kubrusly, *Mean square stability for discrete bounded linear systems in Hilbert space*, SIAM J. Control Optim. **23** (1985), 109–119.

[18] C.S. Kubrusly, *An Introduction to Models and Decompositions in Operator Theory*, Birkhaüser, Boston, 1997.

[19] C.S. Kubrusly, *Hilbert Space Operators - A Problem Solving Approach*, Birkaüser, Boston, 2003.

[20] C.S. Kubrusly, *A concise introduction to tensor product*, Far East J. Math. Sci. **22** (2006), 137–174.

[21] C.S. Kubrusly, *Tensor product of proper contractions, stable and posinormal operators*, Publicationes Mathematicae Debracen **71** (2007), 425–437.

[22] C.S. Kubrusly, *Regular subspaces of tensor products*, Adv. Math. Sci. Appl. **20** (2010), 235–247.

[23] C.S. Kubrusly, *The Elements of Operator Theory*, 2nd ed., Birkaüser, Boston, 2011.

[24] C.S. Kubrusly, *Spectral Theory of Operators on Hilbert Space*, Birkaüser, Boston, 2012.

[25] C.S. Kubrusly e N. Levan, *Preservation of tensor sum and tensor product*, Acta Math. Univ. Comenian. **80** (2011), 132–142.

[26] C.S. Kubrusly e P.C.M. Vieira, *Multiplicative pertubation by contractions and uniform stability*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen **26** (2007), 391–406.

[27] C.S. Kubrusly e P.C.M. Vieira, *Convergence and decomposition for tensor products of Hilbert space operators*, Oper. Matrices **2** (2008), 407–416.

[28] C.S. Kubrusly, P.C.M. Vicira c D.O. Pinto, *A decomposition for a class of contractions*, Adv. Math. Sci. Appl. **31** (1996), 523–530.

[29] F. Riez e B.Sz.-Nagy, *Functional Analysis*, 2nd ed., Dover, New York, 1990.

[30] J. Stochel, *Seminormality of operators from their tensor product*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 135–140.

[31] B.Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici e L. Kérchy, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*, 2nd ed., Springer, New York, 2010.

[32] P.C.M. Vieira, H. Malebranche e C.S. Kubrusly, *On uniform stability*, Adv. Math. Sci. Appl. **8** (2001), 95–100.

[33] J. Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer, New York, 1980.

[34] J. Zabcyk, *Remarks on the control of discrete-time distributed parameter systems.*, SIAM. J. Control **12** (1974), 721–735.