

3 Soluções Fundamentais na EG

As soluções fundamentais são conjuntos de funções que satisfazem as equações de equilíbrio do problema independente das condições de contorno, nesta seção apresenta-se de forma detalhada uma extensão do conceito de soluções fundamentais desenvolvido por Dumont e Prazeres [12], [30] para o caso da teoria clássica onde a equação diferencial de equilíbrio resultava de quarta ordem. A teoria de elasticidade gradiente aplica o operador $(1-g^2\nabla^2)$ à equação de equilíbrio clássica original e portanto a equação diferencial fica de sexta ordem, dando lugar a que a família de soluções da elasticidade clássica vire um subconjunto da família de soluções geral da elasticidade gradiente. Equivalentemente ao esquema do MHEC da teoria clássica, os campos de tensões e deslocamentos (σ_{ji}^f, u_i^f) podem ser interpretados como uma superposição de uma solução particular e uma homogênea.

A equação diferencial de equilíbrio em termos das tensões totais correspondente a uma solução fundamental na EG é dada por:

$$\sigma_{jim,j}^* = \tau_{jim,j}^* - \mu_{kjim,kj}^* = 0 \quad (3-1)$$

onde τ_{jim}^* representa a tensão de Cauchy, que em termos da solução fundamental fica da forma

$$\tau_{jim}^* = \mu(u_{im,j}^* + u_{jm,i}^*) + \lambda u_{km,k}^* \delta_{ji} \quad (3-2)$$

onde δ_{ji} é o delta de Kronecker, μ_{kjim}^* é a tensão dupla que no marco da elasticidade gradiente proposta por Mindlin [2] e simplificada por Aifantis [6]–[8] corresponde a

$$\mu_{kjim}^* = g^2 \tau_{jim,k}^* \quad (3-3)$$

a qual permite expressar a tensão total da forma

$$\sigma_{jim}^* = \tau_{jim}^* - g^2 \tau_{jim,kk}^* = (1 - g^2 \nabla^2) \tau_{jim}^* \quad (3-4)$$

Se a equação (3-2) é inserida na equação da tensão total (3-4) então é possível a obtenção da equação diferencial de equilíbrio em termos do deslocamento que representa a solução fundamental resultante da equação diferencial

$$(1 - \nabla^2 g^2)(u_{im,kk}^* + \frac{1}{(1-2\nu)} u_{km,ki}^*) = 0 \quad (3-5)$$

que também se pode escrever da forma

$$(u_{im,kk}^* + \frac{1}{1-2\nu} u_{km,ki}^*) - g^2(u_{im,klkj}^* + \frac{1}{1-2\nu} u_{km,kijj}^*) = 0 \quad (3-6)$$

3.1. Soluções fundamentais não-singulares na EG.

É possível seguir com o procedimento análogo ao desenvolvido por Dumont e Prazeres [12], [30] e expressar a equação de equilíbrio apresentada em (3-6) como uma função do potencial de Marguerre,

$$\Phi_{im} = \Phi_o \delta_{im} \quad (3-7)$$

de tal forma que a solução fundamental pode se expressar em termos de (3-7) da

forma

$$u_{im}^* = \delta_{im} \Phi_o - \frac{1}{2(1-\nu)} \Phi_o,im \quad (3-8)$$

que inserida em (3-6) permite escrever a equação diferencial de equilíbrio em termos do potencial de Marguerre

$$(1 - g^2 \nabla^2)(\nabla^2(\nabla^2 \Phi_o)) = 0 \quad (3-9)$$

A equação anterior (de sexta ordem) pode ser representada como uma sequência de equações diferenciais da seguinte forma

$$(1 - g^2 \nabla^2) \Phi_1 = 0 \quad (3-10)$$

$$\nabla^2 \Phi_2 = \Phi_1 \quad (3-11)$$

$$\nabla^2 \Phi_o = \Phi_2 \quad (3-12)$$

A outra forma de resolver o problema é utilizar a solução da elasticidade clássica $\nabla^4 \Phi_1 = 0$ resolvida por Dumont e Prazeres [12], [30] e seguidamente

resolver

$$(1 - g^2 \nabla^2) \Phi_o = \Phi_1 \quad (3-13)$$

3.1.1. Problema 2D

As equações diferenciais (3-10)–(3-12) referidas aos três potenciais Φ_i se podem representar através de uma separação de variáveis em coordenadas polares da forma:

$$\Phi_i = f_i^h(r)h_i^h(\theta) + f_i^p(r)h_i^p(\theta) = f_i^h h_i^h + f_i^p h_i^p \quad (3-14)$$

onde o subscrito repetido i não indica somatória, o sobrescrito h corresponde à solução homogênea de cada equação e o sobrescrito p corresponde à solução particular. A solução particular de Φ_1 é zero e a sequência de equações (3-10)–(3-12) pode expandir-se utilizando (3-14), ficando a sequência de equações diferenciais

$$(1 - g^2 \nabla^2)(f_1 h_1) = 0 \quad (3-15)$$

$$\nabla^2(f_2 h_2) = f_1^h h_1^h \quad (3-16)$$

$$\nabla^2(f_0 h_0) = f_2^h h_2^h + f_2^p h_2^p \quad (3-17)$$

A equivalência entre as coordenadas cartesianas e polares é dada por $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$. Se estas identidades são utilizadas nas últimas três equações, (3-15)–(3-17), obtém-se na forma polar:

$$\left(f_{1,rr} h_1 + \frac{1}{r} f_{1,r} h_1 + \frac{1}{r^2} f_1 h_{1,\theta\theta}\right) g^2 - f_1 h_1 = 0 \quad (3-18)$$

$$f_{2,rr} h_2 + \frac{1}{r} f_{2,r} h_2 + \frac{1}{r^2} f_2 h_{2,\theta\theta} = f_1^h h_1^h \quad (3-19)$$

$$f_{0,rr} h_0 + \frac{1}{r} f_{0,r} h_0 + \frac{1}{r^2} f_0 h_{0,\theta\theta} = f_2^h h_2^h + f_2^p h_2^p \quad (3-20)$$

Sol. de Φ_1 :

Supõem-se que h_1^h possa ser uma função harmônica

$$h_1^h(\theta) = C_{1n} \cos(n\theta) + C_{2n} \sin(n\theta) \quad (3-21)$$

que implica que $h_{1,\theta\theta}^h(\theta) = -n^2 h_1^h$ e permite escrever (3-18) como

$$\left(f_{1,rr} + \frac{1}{r} f_{1,r} - \frac{n^2}{r^2} f_1\right) g^2 - f_1 = 0 \quad (3-22)$$

cuja solução não-singular é

$$f_1^h(r) = C_1 I_n\left(\frac{r}{g}\right) \quad (3-23)$$

onde $I_n\left(\frac{r}{g}\right)$ é a função de Bessel do primeiro tipo de ordem n . Se são incorporados C_1 em C_{1n} e C_{2n} na equação (3-21) obtém-se a primeira solução de Φ_1 :

$$\Phi_1(r, \theta) = I_n\left(\frac{r}{g}\right)(C_{1n} \cos(n\theta) + C_{2n} \sin(\theta)) \quad (3-24)$$

Sol. de Φ_2 :

Para a solução homogênea da equação (3-19) pode-se supor novamente que a solução homogênea de h_2 é também do tipo harmônico dado por:

$$h_2^h(\theta) = C_{1p} \cos(p\theta) + C_{2p} \sin(p\theta) \quad (3-25)$$

o que faria com a equação em questão (3-19) fique da seguinte forma

$$f_{2,rr} + \frac{1}{r} f_{2,r} - \frac{p^2}{r^2} f_2 = 0 \quad (3-26)$$

cujas soluções não-singulares são

$$f_2^h = C_2 r^p \quad (3-27)$$

Para a solução particular de (3-19) pode-se impor por simplicidade que $h_2^p = h_1^h$ e a solução particular que se está procurando é dada pela solução particular de

$$f_{2,rr} + \frac{1}{r} f_{2,r} - \frac{n^2}{r^2} f_2 = f_1 \quad (3-28)$$

a qual dá como resultado

$$f_2^p(r) = I_n\left(\frac{r}{g}\right) g^2 \quad (3-29)$$

Finalmente, uma vez incorporada a constante C_2 dentro de C_{1p} e C_{2p} é possível expressar a solução de Φ_2 como

$$\Phi_2(r, \theta) = r^p [C_{1p} \cos(p\theta) + C_{2p} \sin(p\theta)] + I_n\left(\frac{r}{g}\right) g^2 [C_{1n} \cos(n\theta) + C_{2n} \sin(n\theta)] \quad (3-30)$$

Sol. de Φ_0 :

Para a solução de Φ_0 em (3-20) pode-se seguir analogamente o procedimento da solução homogênea de h_0^h de considerar uma solução harmônica dada por

$$h_0^h(\theta) = C_{1q} \cos(q\theta) + C_{2q} \sin(q\theta) \quad (3-31)$$

de modo que a equação homogênea em (3-20) fica

$$f_{0,rr} + \frac{1}{r} f_{0,r} - \frac{q^2}{r^2} f_0 = 0 \quad (3-32)$$

cujas soluções são idênticas a (3-29)

$$f_0^h = C_0 I_q\left(\frac{r}{g}\right) \quad (3-33)$$

Para a obtenção da solução particular de Φ_0 pode-se supor que $h_0^p = h_2^p = h_1^h$

e a solução particular f_0^p resulta da solução particular de

$$f_{0,rr} + \frac{1}{r} f_{0,r} - \frac{n^2}{r^2} f_0 = \frac{f_2^h h_2^h + f_2^p h_2^p}{h_2^p} \quad (3-34)$$

a qual é

$$f_0^p = \frac{I_n(r/g)}{g^4} + \frac{r^{p+2} [C_{1p} \cos(p\theta) + C_{2p} \sin(p\theta)]}{[C_{1n} \cos(n\theta) + C_{2n} \sin(n\theta)]} \quad (3-35)$$

Isso permite escrever a solução final de Φ_0 como

$$\Phi_0 = r^q [C_{1q} \cos(q\theta) + C_{2q} \sin(q\theta)] + \left(I_n(r/g) g^4 [C_{1n} \cos(n\theta) + C_{2n} \sin(n\theta)] + r^{p+2} [C_{1p} \cos(p\theta) + C_{2p} \sin(p\theta)] \right) \quad (3-36)$$

Mas, a permutações possíveis de n e q mostram que se geram termos repetidos e que a seguinte solução é uma simplificação da equação anterior

$$\Phi_0 = r^n [C_{3n} \cos(n\theta) + C_{4n} \sin(n\theta)] + I_n(r/g) [C_{1n} \cos(n\theta) + C_{2n} \sin(n\theta)] \quad (3-37)$$

Isso representa a família de soluções fundamentais não-singulares em 2D.

3.1.2. Problema 3D

Analogamente ao problema 2D, a equação $(1 - g^2 \nabla^2)(\nabla^2(\nabla^2 \Phi_0)) = 0$ se pode escrever mediante uma separação de variáveis em coordenadas esféricas dado por

$$\Phi_i = f_i^h(r) h_i^h(\theta) j_i^h(\phi) + f_i^p(r) h_i^p(\theta) j_i^p(\phi) = f_i^h h_i^h j_i^h + f_i^p h_i^p j_i^p \quad (3-38)$$

As identidades que relacionam a transformação de coordenadas cartesianas às esféricas são dadas por

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z &= r \cos(\phi) \end{aligned} \quad (3-39)$$

E a sequência da resolução das equações (3-15)–(3-17) fica na sua forma esférica expandida como

$$f_{1,rr} h_1 j_1 + \frac{2}{r} f_{1,r} h_1 j_1 + (h_{1,\theta\theta} j_1 + h_{1,\theta} j_1 \cot(\theta) + h_{1,j_1\phi\phi} \sec^2(\theta)) \frac{1}{r^2} f_1 - g^2 f_1 h_1 j_1 = 0 \quad (3-40)$$

$$f_{2,rr} h_2 j_2 + \frac{2}{r} f_{2,r} h_2 j_2 + (h_{2,\theta\theta} j_2 + h_{2,\theta} j_2 \cot(\theta) + h_{2,j_2\phi\phi} \sec^2(\theta)) \frac{1}{r^2} f_2 h_{2,\theta\theta} = f_1^h h_1^h j_1^h \quad (3-41)$$

$$f_{0,rr} h_0 j_0 + \frac{2}{r} f_{0,r} h_0 j_0 + (h_{0,\theta\theta} j_0 + h_{0,\theta} j_0 \cot(\theta) + h_{0,j_0\phi\phi} \sec^2(\theta)) \frac{1}{r^2} f_0 = f_2^h h_2^h j_2^h + f_2^p h_2^p j_2^p \quad (3-42)$$

Sol. de Φ_1 :

A solução homogênea de (3-40) é obtida primeiro através de uma função harmônica

$$j_1^h = C_{1n} \cos(n\phi) + C_{2n} \sin(n\phi) \quad (3-43)$$

que dá lugar a que $j_{1,\phi\phi}^h = -n^2 j_1^h$ e pode simplificar a expressão em parêntesis de

(3-40) resultando em

$$h_{1,\theta\theta} j_1 + h_{1,\theta} j_1 \cot(\theta) - n^2 h_1 j_1 \sec^2(\theta) = k_1^2 j_1 h_1 \quad (3-44)$$

o que permite cancelar j_1^h e obter o que se conhece na literatura como o *harmônico esférico*

$$h_{1,\theta\theta} + h_{1,\theta} \cot(\theta) - n^2 h_1 \sec^2(\theta) = k_1 h_1 \quad (3-45)$$

onde $k_1 = -(n+p+(n+p)^2)$ e cuja solução não-singular é dada por

$$h_1^h(\theta) = C_{1p} L_{(n+p,n,\cos(\theta))}^P \quad (3-46)$$

onde $L_{(n+p,n,\cos(\theta))}^P$ corresponde às funções de Legendre do tipo P de grau $n+p$ e

ordem n . Obtidos h_1 e j_1 resulta fácil escrever (3-40) da forma

$$f_{1,rr} + \frac{2}{r} f_{1,r} + \frac{k_1}{r^2} f_1 - g^2 f_1 = 0 \quad (3-47)$$

cujas soluções não-singular é dada por

$$f_1^h = C_1 I_{n+p+1/2}(r/g) \quad (3-48)$$

e determinar assim Φ_1

$$\Phi_1 = I_{n+p+1/2}(r/g) L_{(n+p,n,\cos(\theta))}^P [C_{1n} \cos(n\phi) + C_{2n} \sin(n\phi)] \quad (3-49)$$

Sol. de Φ_2 :

Para a solução de (3-41) é seguido o procedimento análogo ao caso anterior de Φ_1 , resolvendo primeiro a solução homogênea de

$$f_{2,rr} h_2 j_2 + \frac{2}{r} f_{2,r} h_2 j_2 + (h_{2,\theta\theta} j_2 + h_{2,\theta} j_2 \cot(\theta) + h_2 j_{2,\phi\phi} \sec^2(\theta)) \frac{1}{r^2} f_2 h_{2,\theta\theta} = 0 \quad (3-50)$$

que pode simplificar-se considerando j_2^h como uma solução harmônica

$$j_2^h = C_{1q} \cos(q\phi) + C_{2q} \sin(q\phi) \quad (3-51)$$

e seguindo o procedimento anterior para $k_2 = -(q+s+(q+s)^2)$ obter a solução

homogênea h_2^h

$$h_2^h(\theta) = C_{1p} L_{(q+s,q,\cos(\theta))}^P \quad (3-52)$$

o que permite rescrever a equação diferencial de f_2 da forma

$$f_{2,rr} + \frac{2}{r} f_{2,r} + \frac{k}{r^2} f_2 = 0 \quad (3-53)$$

cujas soluções não-singulares são

$$f_2^h = C_2 r^{q+s} \quad (3-54)$$

A solução particular de Φ_2 pode ser obtida através da consideração de duas soluções harmônicas

$$j_2^p = j_1^h = C_{1n} \cos(n\phi) + C_{2n} \sin(n\phi) \quad (3-55)$$

$$h_2^p = h_1^h = C_{1p} L^p(n+p, n, \cos(\theta)) \quad (3-56)$$

e então é possível obter a solução particular f_2^p como a solução particular de

$$f_{2,rr} + \frac{2}{r} f_{2,r} + \frac{k}{r^2} f_2 = f_1^h \quad (3-57)$$

cujas soluções são:

$$f_2^p := r^{3/2} \frac{I_{1/2+n+p}(r/g)}{(p+n+3)(p+n-2)} \quad (3-58)$$

e obter finalmente Φ_2 como

$$\Phi_2 := r^{q+s} L^p(q+s, q, \cos(\theta)) [C_{1q} \cos(q\phi) + C_{2q} \sin(q\phi)] + r^{3/2} \frac{I_{1/2+n+p}(r/g)}{(p+n+3)(p+n-2)} [C_{1n} \cos(n\phi) + C_{2n} \sin(n\phi)] L^p(n+p, n, \cos(\theta)) \quad (3-59)$$

Sol. de Φ_0 :

A solução homogênea de (3-42) também é simplificada com o mesmo procedimento para a obtenção de j_0 , h_0 , f_0 :

$$j_0^h(\theta) = C_{1t} \cos(t\theta) + C_{2t} \sin(t\theta) \quad (3-60)$$

$$h_0^h(\theta) = C_{1p} L^p(t+w, t, \cos(\theta)) \quad (3-61)$$

$$f_0^h = C_0 r^{t+v} \quad (3-62)$$

A solução particular pode ser obtida fazendo-se $h_0^p = h_2^p$ e $j_0^p = j_2^p$

$$j_0^p = j_1^h = C_{1n} \cos(n\phi) + C_{2n} \sin(n\phi) \quad (3-63)$$

$$h_0^p = h_2^p = h_1^h = C_{1p} L^p(n+p, n, \cos(\theta)) \quad (3-64)$$

de tal forma que a solução particular de f_0 advinha da solução particular de

$$f_{0,rr} + \frac{2}{r} f_{0,r} + \frac{k}{r^2} f_0 = \frac{f_2^h h_2^h h_2^h}{h_2^p j_2^p} + f_2^p \quad (3-65)$$

Com o objeto de simplificar os resultados, pode-se considerar $h_2^h = h_2^p = h_1^h$ e $j_2^h = j_2^p = j_1^h$, o que permite rescrever (3-65) da forma

$$f_{0,rr} + \frac{2}{r}f_{0,r} + \frac{k_1}{r^2}f_0 = \frac{r^{n+p+2}}{4n+4p+6} - r^{n+p} \quad (3-66)$$

cujas soluções são

$$f_0^p = \frac{r^{1/2} I_{1/2+n+p}(r/g)}{(n+p+3)^2(n+p-2)^2} - \frac{r^{n+p+2}}{(n+p+3)(n+p-2)} \quad (3-67)$$

Isso permite finalmente obter a expressão definitiva de Φ_0

$$\begin{aligned} \Phi_0 = & I_{1/2+n+p}(r/g) L_{n+p,n,\cos(\theta)}^P [C_{1n} \cos(n\phi) + C_{2n} \sin(n\phi)] r^{1/2} \\ & - (\alpha r^{n+p+2} + r^{n+p}) L_{n+p,n,\cos(\theta)}^P [C_{3n} \cos(n\phi) + C_{4n} \sin(n\phi)] \\ & + r^{t+w} L_{t+w,t,\cos(\theta)}^P [C_{4n} \cos(n\phi) + C_{5n} \sin(n\phi)] \end{aligned} \quad (3-68)$$

$$\text{onde } \alpha = \frac{1}{(n+p+3)(n+p-2)}$$

Também pode-se partir da solução da elasticidade clássica $\nabla^4 \Phi_1 = 0$ e resolver $(1 - g^2 \nabla^2) \Phi_0 = \Phi_1$. A solução fica mais simples da forma

$$\begin{aligned} \Phi_0 = & I_{1/2+n+p}(r/g) L_{n+p,n,\cos(\theta)}^P [C_{1n} \cos(n\phi) + C_{2n} \sin(n\phi)] / \sqrt{r} \\ & - r^{n+p} L_{n+p,n,\cos(\theta)}^P [C_{3n} \cos(n\phi) + C_{4n} \sin(n\phi)] [(r^2 + 4(n+p) + 6)g^2 + 4(n+p)] \end{aligned} \quad (3-69)$$

As expressões (3-68) e (3-69) são simplificadas após expansão e análise do que acontece com as permutações de n , p , t e w , o que permite concluir que há soluções que estão repetidas se são considerados só os termos que envolvem a n e p permitindo assim obter a expressão final de Φ_0 :

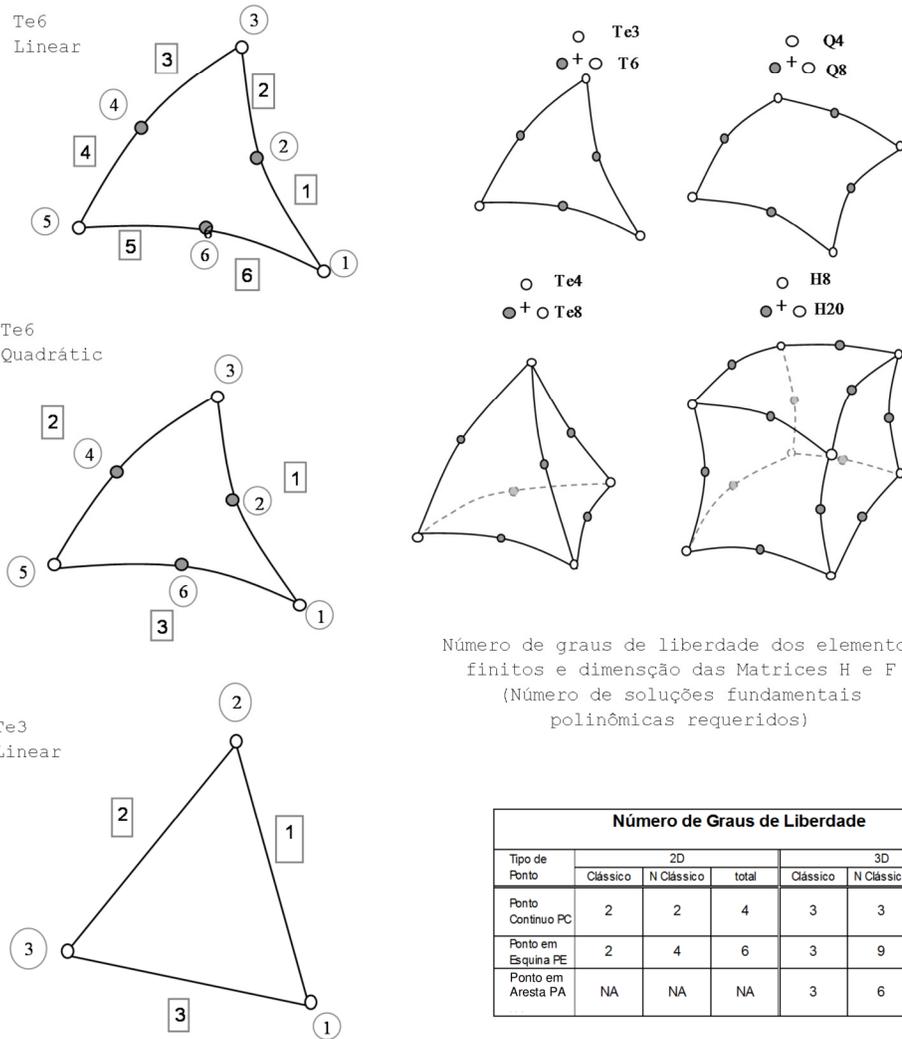
$$\begin{aligned} \Phi_0 = & I_{1/2+n+p}(r/g) L_{n+p,n,\cos(\theta)}^P [C_{1n} \cos(n\phi) + C_{2n} \sin(n\phi)] / \sqrt{r} \\ & - r^{n+p+2} L_{n+p,n,\cos(\theta)}^P [C_{3n} \cos(n\phi) + C_{4n} \sin(n\phi)] \end{aligned} \quad (3-70)$$

3.1.3. Posto das matrizes H e F no MHEF com soluções polinomiais

Na Figura 5 mostra-se o posto das matrizes **H** e **F** de acordo ao número de gdl e também do número de polinômios a utilizar de forma análoga ao desenvolvido por Dumont e Prazeres [12], [30]. Apresenta-se o tipo de elementos finitos que podem ser desenvolvidos no MEF no contexto da EG, os graus de liberdade clássicos e não-clássicos e similarmente as dimensões totais de **H** e **F**.

Os gdl são determinados de acordo com o tipo de superfície: numa superfície suave 2D existem dois gdl não-clássicos, em 3D três gdl não-clássicos; nos cantos 2D existem quatro gdl não-clássicos, e nos cantos 3D, nove gdl não-clássicos; nas arestas, só em 3D, existem seis gdl clássicos, ver Figura 5 e Figura 6, onde são repetidas as tabelas que permitem visualizar quantos gdl tem cada elemento e quantos gdl diferentes elementos.

Numeração de nós e elementos de contorno



Número de graus de liberdade dos elementos finitos e dimensão das Matrizes H e F (Número de soluções fundamentais polinômicas requeridos)

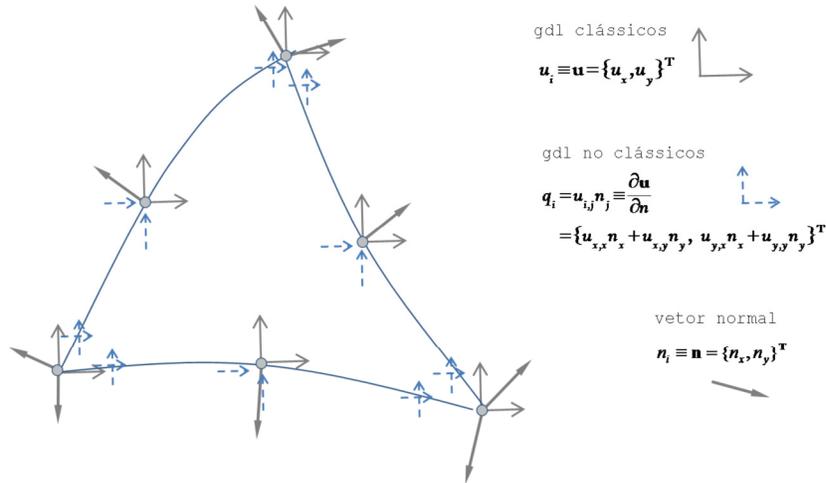
Tipo de Ponto	2D			3D		
	Clássico	N Clássico	total	Clássico	N Clássico	total
Ponto Contínuo PC	2	2	4	3	3	6
Ponto em Esquina PE	2	4	6	3	9	12
Ponto em Aresta PA	NA	NA	NA	3	6	9

Dimensão	2D				3D			
	5	6	7	10	3	5	6	8
n	5	6	7	10	3	5	6	8
dim (p ⁿ)	2(2n+1)				3(n+1) ²			
Elemento	CST	Q4	T6	Q8	Te4	H8	Te10	H20
ngdl TOTAL	18	24	30	40	48	96	102	204
Dimensão H	22 x 18	26 x 24	30 x 30	42 x 40	48 x 48	108 x 96	147 x 102	216 x 204
Posto H	15	21	27	37	42	90	96	198
Dimensão F	22 x 22	26 x 26	30 x 30	42 x 42	48 x 48	108 x 108	147 x 147	216 x 216
Posto F	19	23	27	39	42	102	141	237

Tipo de Elemento Finito	PC	PE	PA	ngdl TOTAL	
2D	CST	0	3	NA	18
	Q4	0	4	NA	24
	T6	3	3	NA	30
	Q8	4	4	NA	40
3D	Te4	0	4	0	48
	H8	0	8	0	96
	Te10	0	4	6	102
	H20	0	8	12	204

Figura 5. Posto das matrizes H e F segundo o tipo elemento finito (NA: não aplica)

Numeração dos graus de liberdade



Número de graus de liberdade dos elementos finitos e dimensão das Matrizes H e F (Número de soluções fundamentais polinômicas requeridos) requeridos, idem ao anterior)

Número de Graus de Liberdade						
Tipo de Ponto	2D			3D		
	Clássico	N Clássico	total	Clássico	N Clássico	total
Ponto Contínuo PC	2	2	4	3	3	6
Ponto em Esquina PE	2	4	6	3	9	12
Ponto em Arista PA	NA	NA	NA	3	6	9

Tipo de Elemento Finito	PC	PE	PA	ngdl TOTAL
2D	CST	0	3	NA
	Q4	0	4	NA
	T6	3	3	NA
	Q8	4	4	NA
3D	Te4	0	4	0
	H8	0	8	0
	Te10	0	4	6
	H20	0	8	12

Dimensão	2D				3D			
	5	6	7	10	3	5	6	8
dim (p*)	2(2n+1)				3(n+1) ²			
	22	26	30	42	48	108	147	243
Elemento	CST	Q4	T6	Q8	Te4	H8	Te10	H20
ngdl TOTAL	18	24	30	40	48	96	102	204
Dimensão H	22 x 18	26 x 24	30 x 30	42 x 40	48 x 48	108 x 96	147 x 102	216 x 204
Posto H	15	21	27	37	42	90	96	198
Dimensão F	22 x 22	26 x 26	30 x 30	42 x 42	48 x 48	108 x 108	147 x 147	216 x 216
Posto F	19	23	27	39	42	102	141	237

Figura 6. Posto das matrizes H e F segundo o tipo elemento finito

3.2. Soluções fundamentais quase-singulares na EG.

Na elasticidade gradiente, diferentemente da elasticidade clássica, a solução em questão das equações de equilíbrio não leva a singularidades fortes embora indeterminadas quando a função é avaliada no ponto fonte origem. Por isso chama-se a esta solução de quase singulares. Por outro lado, se são calculadas as tensões clássicas e não-clássicas elas ficam afetadas por fortes singularidades.

Analogamente ao caso do procedimento das soluções não-singulares pode-se partir do problema clássico e resolver uma equação adicional, tal como se mostra novamente em coordenadas polares:

$$\nabla^4 \Phi_1(r) = 0 \quad (3-71)$$

$$(1 - g^2 \nabla^2) \Phi_0(r) = \Phi_1(r) \quad (3-72)$$

3.2.1. Problema 2D

A solução (3-71) é dada em coordenadas polares por

$$\Phi_1(r) = C_1 r^2 / 4 + C_2 r^2 (\ln(r) - 1) / 4 + C_3 \ln(r) + C_4 \quad (3-73)$$

e então pode-se resolver (3-72)

$$\begin{aligned} \Phi_0(r) = & C_1 (r^2 / 4 + g^2) + C_2 [\ln(r)g^2 + r^2 (\ln(r) - 1) / 4] - C_3 \ln(r) + \\ & + C_4 + C_5 K_0(r/g) + C_6 I_0(r/g) \end{aligned} \quad (3-74)$$

onde I_0 e K_0 correspondem à função de *Bessel I* de ordem 0 e *Bessel K* de ordem 0 respectivamente. Como o objetivo consiste na obtenção dos deslocamentos que resultam da segunda derivação de Φ então é oportuno fazer $C_4 = 0$. Outro critério para a determinação dos coeficientes é que a solução fundamental deve anular-se no infinito, o que não acontece com o termo correspondente à função Bessel tipo I e requer que $C_6 = 0$. O termo que acompanha a C_1 corresponde à solução polinomial e deslocamento de corpo rígido, portanto é conveniente que também seja igual a zero dando como resultado:

$$\Phi_0(r) = C_2 \left[\ln(r)g^2 + \frac{1}{4}r^2 \ln(r) - \frac{1}{4}r^2 \right] + C_5 K_0(r/g) \quad (3-75)$$

O que permite escrever a solução fundamental como

$$u_{im}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\Theta \delta_{im} - \Lambda r_{,i} r_{,m} \right] \quad (3-76)$$

onde

$$\Theta = C_2(2\pi\mu) + \frac{g^2}{r^2} C_2(-8\pi\mu) + 2(\ln r)(3-4\nu)C_2(4\pi\mu) + \frac{1}{g^2} K_2\left(\frac{r}{g}\right) C_5(4\pi\mu) + \frac{1}{g^2} K_0\left(\frac{r}{g}\right) C_5(4\pi\mu)(3-4\nu) \quad (3-77)$$

$$\Lambda = C_2(4\pi\mu) + \frac{g^2}{r^2} C_2(-16\pi\mu) + K_2\left(\frac{r}{g}\right) C_5 \frac{1}{g^2}(8\pi\mu) \quad (3-78)$$

Se é avaliada a força resultante para um contorno circular tendo como ponto fonte a origem então deve satisfazer-se a equação:

$$\left(\int_0^{2\pi} \sigma_{ijm}^* \eta_j r d\theta \right) + \delta_{im} = 0 \quad (3-79)$$

cujo resultado poder ser escrito da forma

$$\begin{bmatrix} 2C_2\mu\pi & 0 \\ 0 & 2C_2\mu\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3-80)$$

e portanto $C_2 = -\frac{1}{2\mu\pi}$.

A determinação do coeficiente C_5 é obtida analisando a singularidade da solução fundamental representando-a através de uma serie

$$\mathbf{u}^*(r, \theta) = \frac{C_2 g^2 - C_5}{r^2(1-\nu)} \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} + O(r^0) \quad (3-81)$$

Procurando eliminar a forte singularidade que aparece na equação anterior pode-se fazer $C_5 = -g^2 C_2 = -g^2/(2\pi\mu)$ e finalmente a expressão da solução fundamental fica

$$u_{im}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\Theta \delta_{im} - \Lambda r_{,i} r_{,m} \right] \quad (3-82)$$

onde

$$\Theta = -2(3-4\nu)\ln r + \frac{4g^2}{r^2} - 2(3-4\nu)K_0\left(\frac{r}{g}\right) - 2K_2\left(\frac{r}{g}\right) - C_1 \quad (3-83)$$

$$\Lambda = -2 + \frac{8g^2}{r^2} - 4K_2\left(\frac{r}{g}\right)$$

em que C_1 corresponde ao deslocamento de corpo rígido.

3.2.2. Problema 3D

Analogamente ao caso 2D, a equação diferencial de deslocamentos que representa o equilíbrio do problema se pode descompor em duas equações e obter sequencialmente a solução de Φ_1 e Φ_0

$$\Phi_1 = \frac{1}{6}C_1 r^2 + \frac{1}{2}C_2 r - \frac{1}{r}C_3 + C_4 \quad (3-84)$$

$$\Phi_0 = C_1 \left(\frac{1}{6}r^2 + g^2 \right) + C_2 \left(\frac{1}{2}r + \frac{g^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r}C_3 + C_4 + C_5 \frac{1}{2r} e^{-r/g} + C_6 \frac{1}{2r} e^{r/g} \quad (3-85)$$

Com os mesmos critérios que no caso 2D, pode-se descartar e determinar os coeficientes; para que o deslocamentos seja nulo quando $\frac{g}{r} \rightarrow 0$ é conveniente que $C_6 = 0$; por outro lado, para reduzir a hipersingularidade $O(r^{-3})$ é conveniente que $C_3 = 0$. Usa-se $C_1 = 0$ para desconsiderar por enquanto os deslocamentos de corpo rígido. Com estas considerações a solução potencial é dada por:

$$\Phi_0 = C_2 \left(\frac{1}{2}r + \frac{g^2}{r^2} \right) + C_5 \frac{1}{2r} e^{-r/g} \quad (3-86)$$

Do mesmo modo que no caso 2D, pode-se integrar num contorno esférico a resultante de forças que equilibra a aplicação de uma força singular na origem, dando como resultado que $C_2 = \frac{1}{4\mu\pi}$; também pode-se desenvolver em série os deslocamentos e identificar a hipersingularidade $O(r^{-2})$, a qual pode-se anular fazendo $C_5 = \frac{g^2}{4\pi\mu}$. Então a expressão da solução fundamental 3D é dada por

$$u_{im}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\Theta \delta_{im} - \Lambda r_{,i} r_{,m} \right] \quad (3-87)$$

onde

$$\Theta = (3-4\nu) \frac{1}{r} + 2(1-2\nu) \left[-\frac{g^2}{r^3} + \left(\frac{g^2}{r^3} + \frac{g}{r^2} \right) e^{-r/g} \right] + 4(1-\nu) \left[\frac{g^2}{r^3} - \left(\frac{g^2}{r^3} + \frac{g}{r^2} + \frac{1}{r} \right) e^{-r/g} \right] + C_1$$

$$\Lambda = -\frac{1}{r} + \frac{6g^2}{r^3} - \left(\frac{6g^2}{r^3} + \frac{6g}{r^2} + \frac{2}{r} \right) e^{-r/g} \quad (3-88)$$

Em que C_1 é o coeficiente correspondente ao deslocamento de corpo rígido.

3.2.3. Valores finitos das soluções fundamentais para raio nulo

Como já se mencionou, diferentemente das soluções fundamentais singulares clássicas, no caso da elasticidade gradiente o limite delas existe quando o raio é nulo. Para o caso 2D é

$$\lim_{r \rightarrow 0} u_{im}^* = \frac{1 + 2(4\nu - 3)(\ln(2g) - \gamma)}{16\pi(1 - \nu)\mu} \delta_{im} \quad (3-89)$$

onde γ é a constante de Euler ($\gamma = 0.5772 \dots$). Para 3D o valor finito da solução fundamental na origem é

$$\lim_{r \rightarrow 0} u_{im}^* = \frac{6\nu - 5}{24\pi(1 - \nu)\mu g} \delta_{im} \quad (3-90)$$

3.2.4. Nota sobre as tensões totais

De forma não trivial as tensões totais da elasticidade gradiente resultam em 2D e 3D iguais à elasticidade clássica, fato não mencionado pela pesquisa realizada na bibliografia. Isso faz que a matriz \mathbf{H} clássica seja uma submatriz da matriz \mathbf{H} generalizada como se mostra nas seções seguintes.

3.3. Análise da solução fundamental singular geral da EG

Procurou-se fazer uma análise detalhada da integração singular de todas as parcelas descontínuas possíveis da matriz \mathbf{H} da EG, com todos os coeficientes diferentes de zero de forma a se acrescentar algum valor à versão da solução fundamental encontrada na bibliografia existente, Polyzos et al [13] e [14].

A integração descontínua, feita numa circunferência para a análise 2D e numa esfera para 3D, se dá através das tensões provenientes de uma solução fundamental geral u_{im}^* , ainda por definir e de grau de singularidade qualquer, identificado pelo sobrescrito (*), e da solução fundamental não-clássica obtida pelo gradiente direcional do deslocamento em relação ao ponto fonte, ou seja, $u_{im}^R = -u_{im,j}^* n_j^X$, onde o sobrescrito X do vetor normal \mathbf{n}^X refere-se ao ponto fonte e não ao ponto campo, motivo pelo qual o sinal negativo na equação tal como mostrou-se na seção anterior.

Com o objetivo de se visualizar toda possibilidade de encontrar uma solução fundamental que encaixe ao nosso requerimento se mostrará uma solução geral não-singular com três dos cinco coeficientes da solução geral do problema gradiente: $\{C_2, C_3, C_5\}$ provenientes da solução da equação diferencial de

equilíbrio em termos do potencial de Marguerre $(1-g^2\nabla^2)\nabla^4\Phi=0$, tanto para a análise 2D como 3D. Obtido Φ , a solução fundamental é determinada por

$$u_{,im}^* = \delta_{im} \Phi_{,kk} - \frac{1}{2(1-\nu)} \Phi_{,im} \quad (3-91)$$

3.3.1. Análise 2D

A solução fundamental em termos do potencial de Marguerre é dada por

$$\begin{aligned} \Phi_o(r) = & C_1(r^2/4 + g^2) + C_2[\ln(r)g^2 + r^2(\ln(r)-1)/4] - C_3 \ln(r) \\ & + C_4 + C_5 K_o(r/g) + C_6 I_o(r/g) \end{aligned} \quad (3-92)$$

Com o objetivo de visualizar as novas singularidades apresenta-se o desenvolvimento em série dos parâmetros de interesse em função dos coeficientes por definir $\{C_2, C_3, C_5\}$ (os outros coeficientes não são relevantes) e dos parâmetros algébricos conhecidos $D_{im}^{\alpha,j}$ que são funções das constantes constitutivas $\{\mu, \nu, g\}$, a seguir

$$\begin{aligned} u_{im}^* &= D_{im}^{u*,1}(C_3 - C_5 + g^2 C_2)(1/r^2) + D_{im}^{u*,2}(-C_5 + g^2 C_2)\ln(r) + D_{im}^{u*,3}C_5 + D_{im}^{u*,4}C_5 \ln(r)r^2 + O(r^4) \\ u_{im}^R &= D_{im}^{uR,1}(C_3 - C_5 + g^2 C_2)(1/r^3) + D_{im}^{uR,2}(-C_5 + g^2 C_2)(1/r) + D_{im}^{uR,3}C_5 \ln(r)r + D_{im}^{uR,4}C_5 r + O(r^3) \\ \tau_{jim}^* &= D_{jim}^{\tau*,1}(C_3 - C_5 + g^2 C_2)(1/r^3) + D_{jim}^{\tau*,2}(-C_5 + g^2 C_2)(1/r) + D_{jim}^{\tau*,3}C_5 \ln(r)r + D_{jim}^{\tau*,4}C_5(r) + O(r^3) \\ \tau_{jim}^R &= D_{jim}^{\tauR,1}(C_3 - C_5 + g^2 C_2)(1/r^4) + D_{jim}^{\tauR,2}(-C_5 + g^2 C_2)(1/r^2) + D_{jim}^{\tauR,3}C_5 \ln(r) + D_{jim}^{\tauR,4}C_5 + O(r^2) \\ \mu_{kjim}^* &= D_{kjim}^{\mu*,1}(C_3 - C_5 + g^2 C_2)(1/r^4) + D_{kjim}^{\mu*,2}(-C_5 + g^2 C_2)(1/r^2) + D_{kjim}^{\mu*,3}C_5 \ln(r) + D_{kjim}^{\mu*,4}C_5 + O(r^2) \\ \mu_{kjim}^R &= D_{kjim}^{\muR,1}(C_3 - C_5 + g^2 C_2)(1/r^5) + D_{kjim}^{\muR,2}(-C_5 + g^2 C_2)(1/r^3) + D_{kjim}^{\muR,3}C_5(1/r) + D_{kjim}^{\muR,4}C_5(r) + O(r^3) \\ \sigma_{jim}^* &= D_{jim}^{\sigma*,1}C_3(1/r^3) + D_{jim}^{\sigma*,2}C_2(1/r) \\ \sigma_{jim}^R &= D_{jim}^{\sigmaR,1}C_3(1/r^4) + D_{jim}^{\sigmaR,2}C_2(1/r^2) \end{aligned} \quad (3-93)$$

As integrações das forças no contorno de uma circunferência são:

$$\int \sigma_{jim}^* n_j d\Gamma = 2\mu\pi C_2 \delta_{im} \quad (3-94)$$

$$\int \sigma_{jim}^R n_j d\Gamma = -C_2 \frac{2\mu\pi}{r} \delta_{im} \quad (3-95)$$

$$\int \mu_{kjim}^* n_j n_k d\Gamma = \left\{ (C_5 - g^2 C_2) \frac{2\mu\pi}{r} - C_5 \frac{\mu\pi}{g^2} \ln(r)r + C_5 (2 \ln(2g) - 2\gamma - 1) \frac{\mu\pi}{2g^2} r + O(r^3) \right\} \delta_{im} \quad (3-96)$$

$$\int \mu_{kjim}^R n_j n_k d\Gamma = \left\{ -(C_5 - g^2 C_2) \frac{4\mu\pi}{r^2} - C_5 \frac{\mu\pi}{g^2} + O(r^2) \right\} \delta_{im} \quad (3-97)$$

3.3.2. Análise 3D

A solução fundamental 3D em termos de potencial é

$$\Phi_0 = C_1 (r^2/6 + g^2 + C_2 (\frac{1}{2}r + \frac{g^2}{r^2})) - \frac{1}{r} C_3 + C_4 + C_5 \frac{1}{2r} e^{-r/g} \quad (3-98)$$

O desenvolvimento em série dos parâmetros de interesse em função dos coeficientes por definir $\{C_2, C_3, C_5\}$ e dos parâmetros algébricos conhecidos $D_{im}^{\alpha,j}$

, funções das constantes constitutivas $\{\mu, \nu, g\}$, se apresentam a seguir

$$\begin{aligned} u_{im}^* &= D_{im}^{u*,1} (-C_3 + C_5 + g^2 C_2) (1/r^3) + D_{im}^{u*,2} (C_5 + g^2 C_2) (1/r) + D_{im}^{u*,3} C_5 + D_{im}^{u*,4} C_5 r + O(r^2) \\ u_{im}^R &= D_{im}^{uR,1} (-C_3 + C_5 + g^2 C_2) (1/r^4) + D_{im}^{uR,2} (C_5 + g^2 C_2) (1/r^2) + D_{im}^{uR,3} C_5 + D_{im}^{uR,4} C_5 r + O(r^2) \\ \tau_{jim}^* &= D_{jim}^{\tau*,1} (-C_3 + C_5 + g^2 C_2) (1/r^4) + D_{jim}^{\tau*,2} (C_5 + g^2 C_2) (1/r^2) + D_{jim}^{\tau*,3} C_5 + D_{jim}^{\tau*,4} C_5 r + O(r^2) \\ \tau_{jim}^R &= D_{jim}^{\tauR,1} (-C_3 + C_5 + g^2 C_2) (1/r^5) + D_{jim}^{\tauR,2} (C_5 + g^2 C_2) (1/r^3) + D_{jim}^{\tauR,3} C_5 + O(r^1) \\ \mu_{kijm}^* &= D_{kijm}^{\mu*,1} (-C_3 + C_5 + g^2 C_2) (1/r^5) + D_{kijm}^{\mu*,2} (C_5 + g^2 C_2) (1/r^3) + D_{kijm}^{\mu*,3} C_5 (1/r) + D_{kijm}^{\mu*,4} C_5 + O(r^1) \\ \mu_{kijm}^R &= D_{kijm}^{\muR,1} (-C_2 + C_5 + g^2 C_2) (1/r^6) + D_{kijm}^{\muR,2} (C_5 + g^2 C_2) (1/r^4) + D_{kijm}^{\muR,3} C_5 (1/r^2) + O(r^0) \\ \sigma_{jim}^* &= D_{jim}^{\sigma*,1} C_3 (1/r^4) + D_{jim}^{\sigma*,2} C_2 (1/r^2) \\ \sigma_{jim}^R &= D_{jim}^{\sigmaR,1} C_3 (1/r^5) + D_{jim}^{\sigmaR,2} C_2 (1/r^3) \end{aligned} \quad (3-99)$$

As integrações das forças no contorno de uma esfera são:

$$\int \sigma_{jim}^* n_j d\Gamma = -4C_2 \mu \pi \delta_{im} \quad (3-100)$$

$$\int \sigma_{jim}^R n_j d\Gamma = C_2 \frac{8\mu\pi}{r} \delta_{im} \quad (3-101)$$

$$\int \mu_{kijm}^* n_j n_k d\Gamma = \left\{ (C_5 + g^2 C_2) \frac{8\mu\pi}{r} - C_5 \frac{4\mu\pi}{3g^3} r^2 + C_5 \frac{\mu\pi}{g^4} r^3 + O(r^4) \right\} \delta_{im} \quad (3-102)$$

$$\int \mu_{kijm}^R n_j n_k d\Gamma = \left\{ -(C_5 + g^2 C_2) \frac{24\mu\pi}{r^2} + C_5 \frac{4\mu\pi}{g^4} r^2 - C_5 \frac{4\mu\pi}{g^5} r^3 + O(r^4) \right\} \delta_{im} \quad (3-103)$$

3.3.3. Observações da solução fundamental geral

Como já se tinha adiantado na seção da solução fundamental da EG existente na bibliografia, a solução fundamental considerando todos os coeficientes iniciais aumenta a singularidade de todos as tensões, em σ_{jim}^R aumenta a $1/r^3$. A incorporação de novos coeficientes na solução fundamental incrementa a singularidade dos tensores relevantes na montagem das matrizes generalizadas de \mathbf{H} e \mathbf{U}^* e não acrescenta valor à versão desenvolvida por Polyzos et al [13].