

8 Barra de treliça na EG

Aifantis et al [7] desenvolveu o elemento de treliça da elasticidade gradiente e resolveu o problema estático e de vibração longitudinal considerando um estado de deformações unidimensional, $u_2 = u_3 = 0$, aplicado na equação tensão–deformação (2-32). Posteriormente Tsepoura et al [1] resolveu o problema dinâmico utilizando equações através de uma variante da elasticidade gradiente que considera duas constantes constitutivas não-clássicas: g^2 , a constante da energia de deformação volumétrica e ℓ a constante de energia de deformação superficial, cujas equações foram utilizadas inicialmente por Vardoulakis e Sulem [11] quem utilizaram como referência os trabalhos de Casal [32]. No estudo feito no presente trabalho de tese foi encontrado que a constante ℓ pode gerar soluções irregulares em configurações geométricas específicas dos elementos estruturais. Por exemplo, uma treliça carregada simetricamente, com condições de contorno simétricas não dão como resultado um sistema de forças internas nem de reações simétricas. Quando a constante $\ell = 0$ então a elasticidade utilizada por Tsepoura é idêntica à elasticidade de Mindlin e simplificada por Aifantis, a qual é utilizada na totalidade do presente trabalho. Ainda assim é considerada nesta seção a participação de ℓ para efeitos ilustrativos.

8.1. Equação tensão–deformação

Este problema é resolvido considerando um estado de deformações, $u_2 = u_3 = 0$ ou $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} = u_{x,x}$ ou simplesmente $\varepsilon = u'$. Todas as demais componentes do tensor de deformações são consideradas nulas, isto é, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0$, Aifantis [7].

Aplicando estas considerações na equação tensão–deformação (2-32) obtém-se de acordo a Aifantis [7]:

$$\sigma = \tau_{11} - \mu_{111,1} = (\lambda + 2\mu)(\varepsilon - g^2 u'') = E(u' - g^2 u''') \quad (8-1)$$

8.2. Aplicação geral da formulação num elemento de treliça.

Como se apresentou no capítulo anterior a equação diferencial básica de uma barra de treliça sem forças de massa é dada por

$$u_{,xx}^* - g^2 u_{,xxxx}^* = 0 \quad (8-2)$$

cuja solução geral é

$$u^* = C_1 + C_2 x + C_3 e^{x/g} + C_4 e^{-x/g} \quad (8-3)$$

Por outro lado, se pode construir a solução fundamental da solução anterior como

$$u^* = -\frac{1}{2EA} \left(|x - \xi| + e^{-|x - \xi|/g} \right) P^* + \frac{n_R}{2EA} \operatorname{sgn}(x - \xi) \left(1 - e^{-|x - \xi|/g} \right) R^* \quad (8-4)$$

A qual se apresenta em termos da força clássica pontual P^* e a força dupla pontual R^* . O termo $e^{x/g}$ da solução (8-3) no está em (8-4), a medida que $\lim_{g \rightarrow \infty} e^{x/g} = \infty$ para $x > 0$ deve ficar garantida a continuidade da elasticidade clássica. Outra lógica que conduz á conclusão que $C_3 = 0$ em (8-3) é que o deslocamento clássico dado por $u^* = C_1 + C_2 x$ deve atingir-se quando $x \rightarrow \infty$. O gradiente do deslocamento é dado por

$$q^* = -\frac{n_q}{2EA} \operatorname{sgn}(x - \xi) \left(1 - e^{-|x - \xi|/g} \right) P^* + \frac{n_q n_R}{2EA} e^{-|x - \xi|/g} R^* \quad (8-5)$$

A

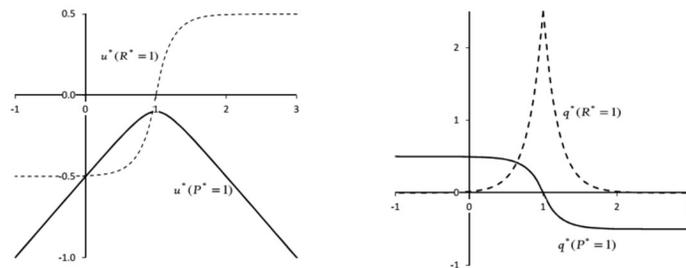


Figura 18 mostra as forças P^* e R^* para a aplicação da força em $\xi = 1$, para $E = 1$, $A = 1$, $g = 0.2$.

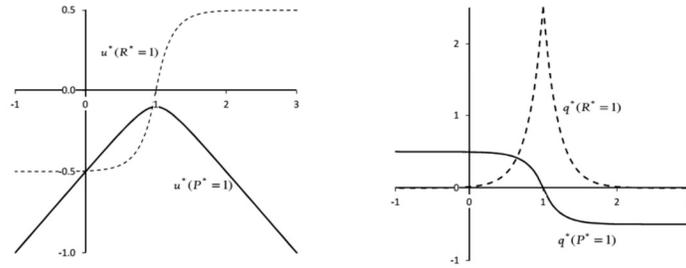


Figura 18. Gráfico de u^* e q^* das equações (8-4) e (8-5)

A equação (8-4) combina os termos da solução geral de (8-3), para $C_3 = 0$ de tal jeito que cumpre-se a partir das equações (8-4) e (8-5) o princípio de reciprocidade $u^*(R^*) = q^*(P^*)$, visto que u^*P^* e q^*R^* tem o significado de trabalho mecânico. Além se pode obter de (8-4) e (8-5)

$$u^*(x = \xi^+) = -\frac{g}{2EA} P^* \quad (8-6)$$

$$q^*(x = \xi^+, n_q = n_R = 1) = \frac{1}{2EA} R^*$$

Os deslocamentos em (8-4) e o gradiente de deslocamento de (8-5) pode ser expresso em termos de forças nodais clássicas e não-clássicas P^* e R^* aplicadas nas extremidades da treliça do seguinte jeito

$$\begin{Bmatrix} u^* \\ q^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{2EA} \begin{bmatrix} x-x_1 + e^{(x-x_1)/g} g & 1-e^{(x-x_1)/g} & x_2-x + e^{(x-x_2)/g} g & 1-e^{(x-x_2)/g} \\ (1-e^{(x-x_1)/g})n_q & e^{(x-x_1)/g} n_q / g & (-1+e^{(x-x_2)/g})n_q & -e^{(x-x_2)/g} n_q / g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^* \\ R_1^* \\ P_2^* \\ R_2^* \end{Bmatrix} \quad (8-7)$$

A solução geral pode expressar-se como

$$\begin{Bmatrix} u^* \\ q^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^* & u_1^R & u_2^* & u_2^R \\ u_{1,x}^* n_x & u_{1,x}^R n_x & u_{2,x}^* n_x & u_{2,x}^R n_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^* \\ R_1^* \\ P_2^* \\ R_2^* \end{Bmatrix} \quad (8-8)$$

A matriz de deslocamento \mathbf{U}^* pode ser construída da equação anterior para realizar transformações nodais:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ q_1 \\ u_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g & 0 & L+e^{-L/g}g & 1-e^{-L/g} \\ 0 & -1/g & 1-e^{-L/g} & e^{-L/g}/g \\ L+e^{-L/g}g & 1-e^{-L/g} & g & 0 \\ 1-e^{-L/g} & e^{-L/g}/g & 0 & -1/g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^* \\ R_1^* \\ P_2^* \\ R_2^* \end{Bmatrix} \quad (8-9)$$

ou simplesmente

$$\mathbf{d} = \mathbf{U}^* \mathbf{p}^*$$

La tensão de Cauchy, a tensão dupla e a tensão total são expressas respectivamente como

$$\begin{aligned} \tau^* &= -\frac{1}{2A} \operatorname{sgn}(x-\xi) \left(1 - e^{-|x-\xi|/g}\right) P^* + \frac{1}{2gA} e^{-|x-\xi|/g} n_R R^* \\ \mu^* &= -\frac{g}{2A} e^{-|x-\xi|/g} P^* - \frac{1}{2A} \operatorname{sgn}(x-\xi) e^{-|x-\xi|/g} n_R R^* \\ \sigma^* &= -\frac{1}{2A} \operatorname{sgn}(x-\xi) P^* \end{aligned} \quad (8-10)$$

A figura seguinte mostra os gráficos das forças três forças anterior correspondente a forças clássicas e duplas P^* e R^* unitárias e $\xi = 1$, $E = 1$, $A = 1$, $g = 0.2$.

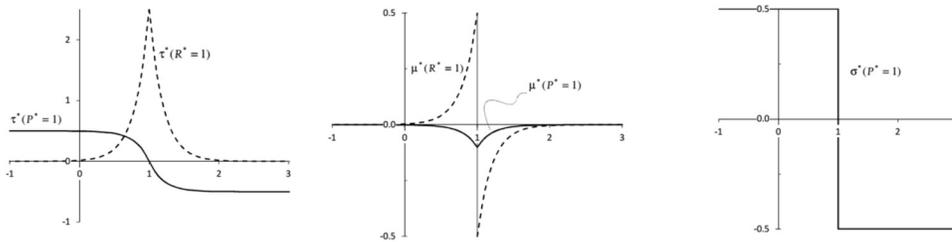


Figura 19. Gráfico de τ^* , μ^* e σ^* da equação (8-10)

A tensão de Cauchy, as tensões duplas e as tensões totais podem também ficar expressas em termos das forças nodais clássicas e não-clássicas P^* e R^* respectivamente aplicadas nas extremidades do elemento da treliça:

$$\begin{Bmatrix} \tau^* \\ \mu^* \\ \sigma^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{2EA} \begin{bmatrix} e^{(x_1-x)/g} g - 1 & -e^{(x_1-x)/g} & 1 - e^{(x-x_2)/g} & e^{(x-x_2)/g} \\ -e^{(x_1-x)/g} g & e^{(x_1-x)/g} & -e^{(x-x_2)/g} g & e^{(x-x_2)/g} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^* \\ R_1^* \\ P_2^* \\ R_2^* \end{Bmatrix} \quad (8-11)$$

ou também

$$\begin{Bmatrix} \tau^* \\ \mu^* \\ \sigma^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1^* & \tau_1^R & \tau_2^* & \tau_2^R \\ \mu_1^* & \mu_1^R & \mu_2^* & \mu_2^R \\ \sigma_1^* & \sigma_1^R & \sigma_2^* & \sigma_2^R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^* \\ R_1^* \\ P_2^* \\ R_2^* \end{Bmatrix} \quad (8-12)$$

As forças no extremo da barra podem obter-se através das expressões $P_i = \sigma_{jim}^* n_j P_m^*$ e $R_i = \mu_{jim}^* n_j R_m^*$ que matricialmente para os dois extremos ficam como

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ R_1 \\ P_2 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{1l}^* n_l & \sigma_{1l}^R n_l & \sigma_{2l}^* n_l & \sigma_{2l}^R n_l \\ \mu_{1l}^* n_l n_l & \mu_{1l}^R n_l n_l & \mu_{2l}^* n_l n_l & \mu_{2l}^R n_l n_l \\ \sigma_{1r}^* n_r & \sigma_{1r}^R n_r & \sigma_{2r}^* n_r & \sigma_{2r}^R n_r \\ \mu_{1r}^* n_r & \mu_{1r}^R n_r & \mu_{2r}^* n_r & \mu_{2r}^R n_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^* \\ R_1^* \\ P_2^* \\ R_2^* \end{Bmatrix} \quad (8-13)$$

A matriz H é dada pela expressão

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^A + \mathbf{H}^B & \mathbf{H}^C \\ \mathbf{H}^{AR} + \mathbf{H}^{BR} & \mathbf{H}^{CR} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* n_j u_{im} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* t_{nk} u'_{im} |J|^{-2} d\Gamma & \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^* n_j n_k u_{iq} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} \sigma_{jin}^R n_j u_{im} d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^R t_{nk} u'_{im} |J|^{-2} d\Gamma & \int_{\Gamma} \mu_{kjin}^R n_j n_k u_{iq} d\Gamma \end{bmatrix} \quad (8-14)$$

resulta na versão treliça do seguinte jeito

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_{1l}^* n_l & \mu_{1l}^* n_l \\ \sigma_{1l}^R n_l & \mu_{1l}^R n_l \\ \sigma_{2l}^* n_l & \mu_{1l}^* n_l \\ \sigma_{2l}^R n_l & \mu_{2l}^* n_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{1r}^* n_r & \mu_{1r}^* n_r \\ \sigma_{1r}^R n_r & \mu_{2r}^* n_r \\ \sigma_{2r}^* n_r & \mu_{1r}^* n_r \\ \sigma_{2r}^R n_r & \mu_{2r}^* n_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (8-15)$$

que da como resultado final

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -g & -1 & -e^{-L/g} g \\ 0 & 1 & 0 & e^{-L/g} \\ -1 & -e^{-L/g} g & 1 & -g \\ 0 & e^{-L/g} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-16)$$

8.3. Equilíbrio estático de uma barra de treliça EG

Se for aplicada a equação de equilíbrio (2-34) considerando forças de massa de segunda ordem nulas e só uma força de massa longitudinal clássica $f_1 = q(x)/A$ sendo as demais também nulas então se obtém,

$$\sigma_{,x} + q(x)/A(x) = 0 \text{ ou} \quad (8-17)$$

$$AE(u'' - g^2 u^{iv}) + q = 0 \quad (8-18)$$

cujas soluções homogêneas são

$$u^* = c_1 e^{(-x/g)} + c_2 e^{(x/g)} + c_3 x + c_4 \text{ ou} \quad (8-19)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{(-x/g)} & e^{(x/g)} & x & 1 \end{bmatrix} \cdot [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4]^T$$

8.4. Condições de Contorno

As condições de contorno são dadas pelas clássicas:

$$P(x=0) = P_1^0 \text{ e/ou} \quad (8-20)$$

$$P(x=L) = P_2^0$$

sendo

$$P(x) = AE(u' - g^2 u''') \quad (8-21)$$

e/ou

$$u(x=0) = u_1^0 \quad (8-22)$$

$$u(x=L) = u_1^0$$

mais as condições de contorno não-clássicas

$$R(x=0) = R_1^0 \text{ e/ou} \quad (8-23)$$

$$R(x=L) = R_2^0$$

sendo

$$R(x) = AE(\ell u' - g^2 u'') \Rightarrow R(x) = -AEg^2 u'' \text{ para } \ell = 0 \quad (8-24)$$

e/ou

$$q(x=0) = q_1^0 \text{ e/ou} \quad (8-25)$$

$$q(x=L) = q_1^0$$

8.5. Matriz de rigidez de uma barra de treliça-EG

Dumont e Huamán [42]–[44] tem desenvolvido o problema da determinação da matriz de rigidez estática de uma barra de treliça através da uma ligeira modificação do método híbrido de elementos de contorno resolvidos por Adenilson [27] e Prazeres [12] nos parâmetros cinemáticos, acrescentando um grau de liberdade não-clássico em cada extremo da treliça. Na Figura 20 mostra-se com linhas descontínuas os graus de liberdades não-clássicos $q_1 = u_{,x}\eta_x$, com linhas contínuas os graus de liberdades clássicos u e os vetores normais em cada extremo da barra que representam o contorno da estrutura.

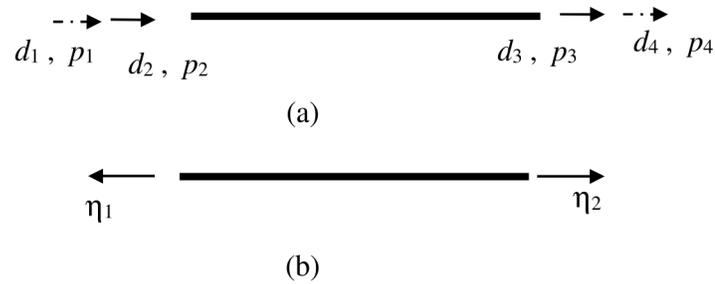


Figura 20. (a) Sistema de coordenadas da matriz de rigidez: gdl. clássicos (setas linhas contínuas) e não-clássicos (setas linhas descontínuas); e (b) definição do domínio Ω , os contornos Γ_1, Γ_2 correspondentes aos cossenos diretores η_1 e η_2 do elemento.

A seguir a matriz \mathbf{u}^* é definida para o calculo dos termos que serão utilizados na formulação híbrida do problema:

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x^* \\ \mathbf{q}_x^* = \partial_x \mathbf{u}_x^* \eta_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(-x/g)} & e^{(x/g)} & x & 1 \\ -\frac{1}{g} e^{(-x/g)} & -\frac{1}{g} e^{(x/g)} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-26)$$

De (8-26) o deslocamento generalizado de uma barra pode então ser expresso como:

$$\mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} u \\ q_x = u_{,x} \eta_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* & u_3^* & u_4^* \\ u_1^{*'} & u_2^{*'} & u_3^{*'} & u_4^{*'} \end{bmatrix} \mathbf{p}^* = \mathbf{u}^* \mathbf{p}^* \quad (8-27)$$

onde $\mathbf{p}^* = [p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*]^T$; pode ser interpretado como um vetor base de um sistema interno auxiliar de coordenadas distinguido pelo símbolo (*). As forças internas podem ser expressas como

$$\begin{bmatrix} P \\ R \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} \partial/\partial x & -g^2 \partial^2/\partial x^2 \\ \ell \partial/\partial x & +g^2 \partial/\partial x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* & u_3^* & u_4^* \\ u_1^{*'} & u_2^{*'} & u_3^{*'} & u_4^{*'} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{p}^* = AE \cdot \mathbf{D}_u \cdot \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{p}^* \quad (8-28)$$

Então, o sistema de forças interna pode escrever-se como

$$\begin{bmatrix} P \\ R \end{bmatrix} = AE \mathbf{N}^* \mathbf{p}^* \quad (8-29)$$

onde $\mathbf{N}^* = \mathbf{D}_u \mathbf{u}^*$ e \mathbf{D}_u pode considerar-se como um operador diferencial matricial. Para o caso da elasticidade gradiente de Aifantis $\ell = 0$, agora fica indicada apenas para a apresentação de um exemplo ilustrativo na aplicação de problemas simples de tensão axial.

Para o cálculo da matriz \mathbf{H} apresenta-se a seguir a determinação dos termos requeridos:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1^* &= \mathbf{N}^* \Big|_{x=0} & \mathbf{N}_2^* &= \mathbf{N}^* \Big|_{x=L} \\ \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u} \Big|_{x=0} = \mathbf{u}^* \Big|_{x=0} \cdot \mathbf{p}^* = \mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{p}^* \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u} \Big|_{x=L} = \mathbf{u}^* \Big|_{x=L} \cdot \mathbf{p}^* = \mathbf{u}_2^* \cdot \mathbf{p}^* \end{aligned} \quad (8-30)$$

É possível caracterizar um sistema vetorial de deslocamentos de todos os graus de liberdade da barra mediante as seguintes matrizes de transformação de coordenadas e a consideração de cossenos diretores n_1 e n_2

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ u' \end{Bmatrix}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_1 \mathbf{d} ; \quad n_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ em } \Gamma_1 \\ \\ \begin{Bmatrix} u \\ u' \end{Bmatrix}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_2 \mathbf{d} ; \quad n_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ em } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} (8-31)$$

A conhecida matriz de transformação de deslocamentos \mathbf{H} é definida como

$$\mathbf{H} = \mathbf{N}_1^{*T} n_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^{*T} n_2 \mathbf{N}_2 = AE \cdot \begin{bmatrix} 0 & (1+\ell/g) & 0 & \ell \cdot e^{L/g} / g + e^{L/g} \\ 0 & (1-\ell/g) & 0 & -\ell e^{-L/g} / g + e^{-L/g} \\ -1 & -\ell & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-32)$$

A matriz $\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* \end{bmatrix}$ é utilizada no método híbrido simplificado de

contorno desenvolvido por Dumont e Chaves [45] a través da relação

$$\mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{d} - \mathbf{d}^p \quad (8-33)$$

Onde \mathbf{d} corresponde ao vetor de deslocamentos nodais incógnitas do problema, o vetor \mathbf{d}^p representa os deslocamentos nodais vinculados a uma solução particular. A matriz de rigidez é calculada como

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{U}^{*-1} = \frac{AE}{\beta L} \begin{bmatrix} S & g(C-1) & -S & g(C-1) \\ g(C-1) & gCL - g^2S & g(C-1) & g(gS-L) \\ -S & -g(C-1) & S & -g(C-1) \\ g(C-1) & g(gS-L) & -g(C-1) & gCL - g^2S \end{bmatrix} \quad (8-34)$$

sendo $\beta = S + 2g/L - 2gC/L$, $S = \sinh(L/g)$, $C = \cosh(L/g)$. O posto das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{H}^T é 1 e é dado pelos campos nulos \mathbf{W} que representa o deslocamento de corpo rígido horizontal da barra e \mathbf{V} que representa o sistema de forças inadmissíveis do elemento que fisicamente corresponde ao sistema de forças que não está em equilíbrio.

$$\mathbf{W} = \frac{\sqrt{2}}{2} \langle 1 \ 0 \ 1 \ 0 \rangle^T \quad (8-35)$$

$$\mathbf{V} = \langle 0 \ 0 \ 0 \ 1 \rangle^T \quad (8-36)$$

8.6. MEF com elementos de treliça EG

Na Figura 21 mostra-se um patch conformado por dois elementos finitos de treliça EG,

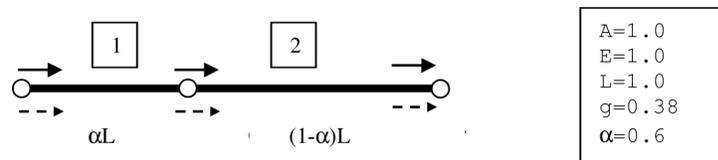


Figura 21. Sistema de 2 EF-EG tipo treliça, 6 gdl: 3 clássicos (setas linhas contínuas) 3 não-clássicos (setas linhas descontinuas).

cujas matrizes de incidência são mostradas à continuação fazendo ênfases nas sinais negativas dos termos não-clássicos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-37)$$

A matriz de rigidez global pode ser obtida através da expressão:

$$K_g = \sum_{i=1,n} A_i^T K_i A_i \quad (8-38)$$

A qual resulta

$$\begin{bmatrix} 10.0164459 & -2.5049338 & -10.0164459 & -2.5049338 & 0 & 0 \\ -2.5049338 & 1.0401853 & 2.5049338 & 0.4627749 & 0 & 0 \\ -10.0164459 & 2.5049338 & 40.0875372 & -3.0092845 & -30.0710912 & 5.5142182 \\ -2.5049338 & 0.4627749 & -3.0092845 & 2.5367625 & 5.5142182 & -0.7091101 \\ 0 & 0 & -30.0710912 & 5.5142182 & 30.0710912 & -5.5142182 \\ 0 & 0 & 5.5142182 & -0.7091101 & -5.5142182 & 1.4965772 \end{bmatrix}$$

cuja condensação estática é

$$K_c = K_{ee} - K_{ie} K_{ii}^{-1} K_{ei} \quad (8-39)$$

que reduzindo os gdlNC internos da matriz em questão resulta em

$$K_c = \begin{bmatrix} 2.9236097 & -0.9618049 & -2.9236097 & 0.9618049 \\ -0.9618049 & 0.7003696 & 0.9618049 & -0.2614352 \\ -2.9236097 & 0.9618049 & 2.9236097 & -0.9618049 \\ 0.9618049 & -0.2614352 & -0.9618049 & 0.7003696 \end{bmatrix}$$

Se esta matriz é comparada com a matriz analítica de comprimento $L=1$ resulta numa norma de erro satisfatória dado por

$$\text{erro}[K] = \sqrt{\frac{\sum_{i,j=1}^4 (k_{ij}^I - k_{ij}^A)^2}{\sum_{i,j=1}^4 (k_{ij}^A)^2}} = 0.20286e-18 \quad (8-40)$$

A mesma análise foi feita com 4 elementos:

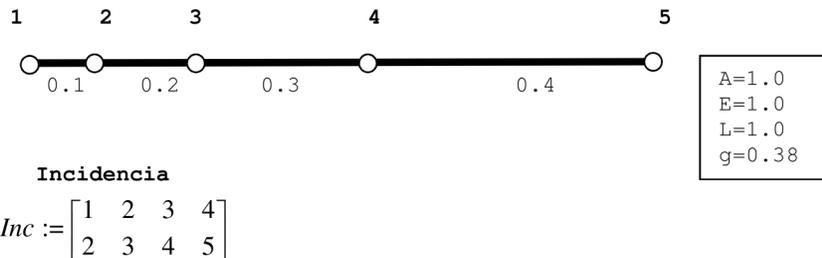


Figura 22. Sistema de 4 EF-EG tipo treliça como 10 gdl, 5 clássicos e 5 não-clássicos, 2 gdl em cada nó.

cuja matriz de rigidez global resulta

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 1744.8 & -86.7 & -1744.8 & -86.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -86.7 & 5.8 & 86.7 & 2.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1744.8 & 86.7 & 1967.4 & 65.0 & -222.6 & -21.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -86.7 & 2.9 & 65.0 & 8.7 & 21.8 & 1.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -222.6 & 21.8 & 290.8 & 12.0 & -68.2 & -9.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21.8 & 1.4 & 12.0 & 4.9 & 9.7 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -68.2 & 9.7 & 98.2 & 4.2 & -30.1 & 5.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9.7 & 1.0 & 4.2 & 3.5 & 5.5 & -0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30.1 & 5.5 & 30.1 & -5.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.5 & -0.7 & -5.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Depois de fazer a condensação estática dos graus de liberdades internos se obtém também o erro satisfatório resultante de compara-o com a matriz analítica de comprimento $L=1$:

$$\text{erro}[K] = \sqrt{\frac{\sum_{i,j=1}^4 (k_{ij}^I - k_{ij}^A)^2}{\sum_{i,j=1}^4 (k_{ij}^A)^2}} = 0.20286e-18$$

8.7. Problema exemplo de tensão axial na EG

Considere-se o problema mostrado na Figura 23(a) com duas forças gerando tensão numa barra de seção constante e considere-se o sistema de coordenadas mostrado na Figura 23(b) Mostra-se também os diagramas de forças típicas não-clássicas e clássicas.

O problema simples de uma barra sujeita a uma tensão axial deve assegurar por equilíbrio que $-p_1=p_3=P$ e que os deslocamentos nodais sejam também iguais, isto é $-d_1=d_3=D$, pela simetria da configuração geométrica do problema.

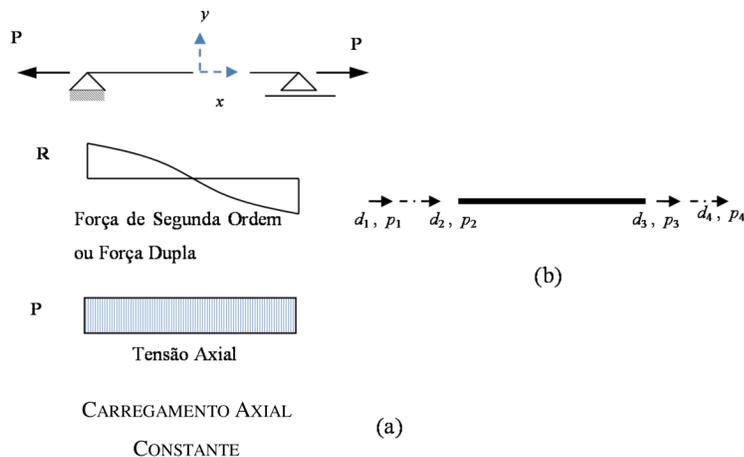


Figura 23. Problema de tração no elemento tipo treliça EG.

Para o sistema de coordenadas mostrado a solução ao problema mostrado em (8-19) reduz-se por simetria a

$$u = c_1 \left(e^{x/g} - e^{-x/g} \right) + c_2 x \quad (8-41)$$

Em geral, este problema de tensão axial na elasticidade gradiente diversifica-se em função das condições de contorno não-clássicas e as grandezas não-clássicas internas que elas geram, e possui uma particular influência no parâmetro constitutivo vinculado com a energia de deformação superficial ℓ .

As únicas alternativas aqui são considerar como condições de contorno não-clássicas os parâmetros associados com os deslocamentos de segunda ordem, que no presente caso coincidem com a deformação axial, ou a determinação das forças de segunda ordem \mathbf{R} no contorno. Na literatura (Ainfantis et al [7], Tsepoura et al [1]) é utilizada a primeira opção definindo deformações prescritas no extremo de uma barra engastada.

Aqui foi escolhida a condição de simetria das forças de segunda ordem extremas, ou seja, $p_2 = -p_4$ além da condição de contorno clássica $-p_1 = p_3 = P$.

A solução ao presente problema é

$$u(x) = \frac{P}{EA} \left[\frac{-g \sinh(x/g)}{\cosh(L/2g)} + x \right] \quad (8-42)$$

A solução é independente da constante da energia de deformação superficial ℓ considerada na teoria utilizada por Tsepoura et al [21]. Ou seja, as soluções de deslocamentos clássico de Tsepoura e Ainfantis aqui coincidem; a força não-clássica R é dada por

$$\begin{aligned} R(x) &= AE(\ell u' - g^2 u'') \\ &= -\ell \cosh(x/g) / \cosh(L/2g) - g \sinh(x/g) / \cosh(L/2g) + \ell \end{aligned} \quad (8-43)$$

cujos gráficos mostram na Figura 24 a sensibilidade aos dois parâmetros constitutivos não-clássicos, sendo ℓ a constante que gera configurações não simétricas em um problema simétrico. Devido às respostas obtidas pode-se afirmar a inconsistência de ℓ para resolver o presente problema.

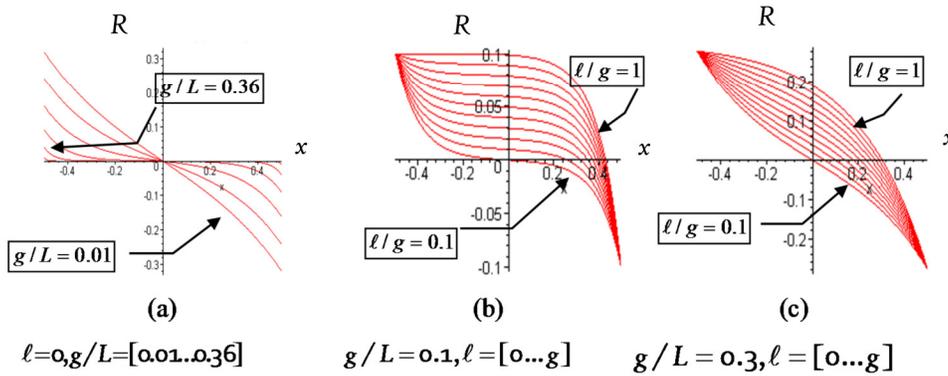


Figura 24. Sensibilidade da força de segunda ordem R às constantes g e ℓ

O resultado do deslocamento clássico e o deslocamento não-clássico, que no presente caso também corresponde à deformação longitudinal, mostram-se na Figura 25. independentes do parâmetro ℓ .

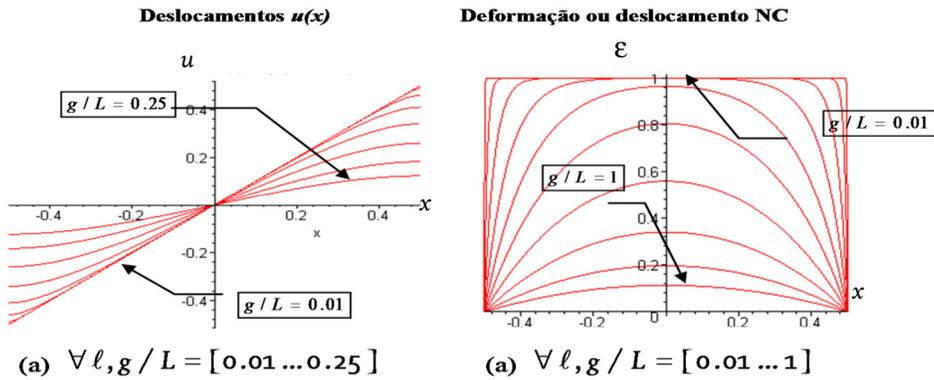


Figura 25. Sensibilidade dos deslocamentos $u(x)$ e as deformações á constante g

A elasticidade gradiente oferece a alternativa de definir neste tipo de problemas uma distribuição de deformações prescrita tal como e mostrado na Figura 26 através de um quociente entre a deformação central a extrema.

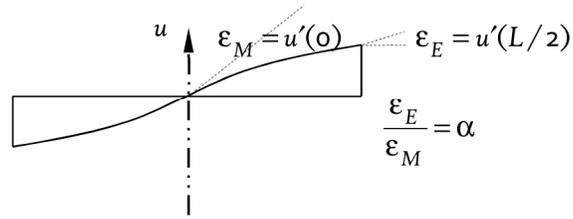


Figura 26. Condição de contorno baseada numa distribuição de tensões determinado por $\alpha = \varepsilon_E / \varepsilon_M$

A Figura 27 mostra os resultados gerados pela condição de contorno mostrada na Figura 26 para 3 valores diferentes de α gerando distribuições de deformações fisicamente mais significativas que o caso anterior onde as deformações extremas ficavam não convencionalmente iguais a zero.

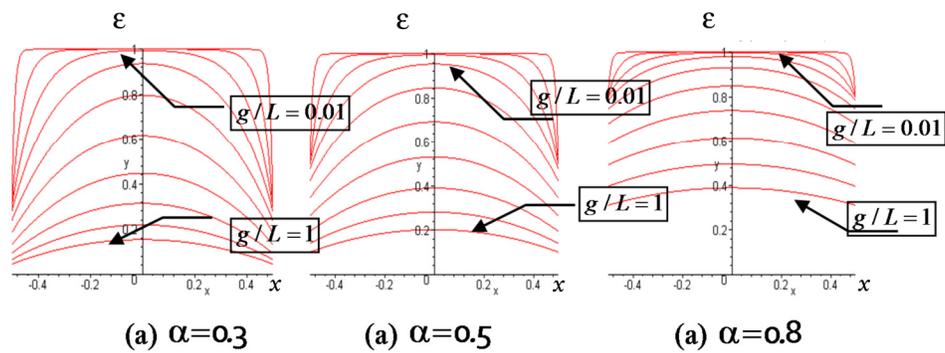


Figura 27. Resultados da deformação longitudinal numa barra de treliça sujeita a uma condição de contorno determinada pela relação $\alpha = \varepsilon_E / \varepsilon_M$