9. Aplicações

9.1 Um truque

Suponha que alguém lhe dê dois números decimais entre 0,5 e 1, de 9 dígitos cada, por exemplo, 0,635149023 e 0,728101457. Suponha também que um desses números foi obtido por uma fração com denominador menor do que 1000, e que o outro, seus algarismos tenham sido escolhidos aleatoriamente.

Afirmamos que poderemos achar, rapidamente, qual deles é uma fração, além disso, qual será essa fração. Vejamos:

Se α é uma aproximação de 9 dígitos de uma fração $\frac{p}{q}$, com denominador menor que 1000, de 3 dígitos, então:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{10^9} = \frac{1}{1000.(1000)^2} < \frac{1}{1000q^2},$$

q com 3 dígitos.

Pela fórmula do indicador de qualidade das convergentes, apresentada na seção 7.3, um dos quocientes parciais a_{n+1} de α é maior do que 1000, e o correspondente q_n menor do que 1000. Quão grande pode ser n? Sendo $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, os números q_n crescem pelo menos tão rápido quanto os números de Fibonacci F_n. Quando F_{15}= 987, n deve ser, no máximo 15.

Usando o algoritmo apresentado na seção 4.4 podemos achar, relativamente rápido, algumas frações incompletas dos números considerados. Quais sejam:

0,635149023 = [0;1,1,1,2,1,6,13,1024,1,...]

0,728101457 = [0;1,2,1,2,9,1,1,1,1,3,1,15,1,59,7,1,39,...]

Obviamente, o primeiro número, e não o segundo, tem uma boa aproximação racional que é [0;1,1,1,2,1,6,13]. Usando as relações da proposição 6.1.1, podemos achar as convergentes correspondentes. Vejamos a tabela 3, a seguir:

$\boldsymbol{p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}}$	$\boldsymbol{q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}}$	**Convergente**
$\mathrm{p}_0 = \mathrm{a}_0 = 0$	$q_0 = 1$	0
$p_1 = a_0 a_1 + 1$	$q_1 = a_1 = 1$	1
$p_2 = 1.p_1 + p_0 = 1$	$q_2 = 1.q_1 + q_0 = 2$	1/2
$p_3 = 1.p_2 + p_1 = 2$	$q_3 = 1.q_2 + q_1$	2/3
$p_4 = 2.p_3 + p_2 = 5$	$q_4 = 2q_3 + q_2 = 8$	5/8
$p_5 = 1.p_4 + p_3 = 7$	$q_5 = 1.q_4 + q_3 = 11$	7/11
$p_6 = 6.p_5 + p_4 = 47$	$q_6 = 6.q_5 + q_4 = 74$	47/74
$p_7 = 13.p_6 + p_5 = 618$	$q_7 = 13q_6 + q_5 = 973$	618/973

Tabela 3 –Aplicação 1

Obtemos assim, o resultado final $\frac{618}{973}$ = 0,635149023.

9.2 Frações contínuas e eletricidade

Queremos determinar o valor da resistência equivalente de uma associação mista de resistores idênticos, cada um com resistência R, conforme ilustrado na figura 11.

OBS : As reticências horizontais indicam que o número de sub-malhas quadradas (malhas menores envolvendo quatro resistores, um em cada lado do quadrado) é muito grande, podendo ser considerado como infinito.

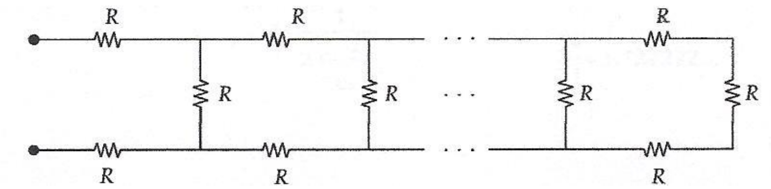


Figura 11 –Associação mista de resitores

Lembremos que a associação em série de duas resistências R_1 e R_2 possui uma resistência equivalente igual a $R_s = R_1 + R_2$ e também que a associação em paralelo de duas resistências R_1 e R_2 possui uma resistência equivalente igual à

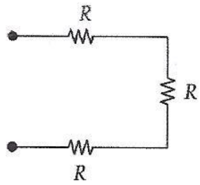
$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ou seja,

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

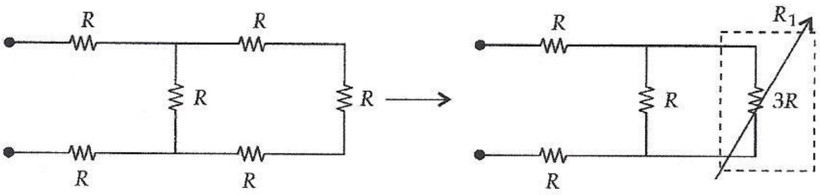
Apresentaremos o circuito da figura 11 gradativamente, chamando de R_n a resistência equivalente do circuito no n-ésimo passo. Assim:

1º Passo:



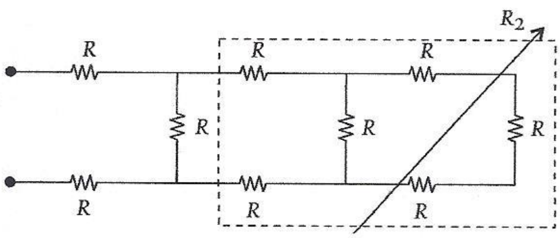
$$R_1 = R + R + R$$

2º Passo:



$$R_2 = R + R + \left(\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}} \right) = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}$$

3º Passo:

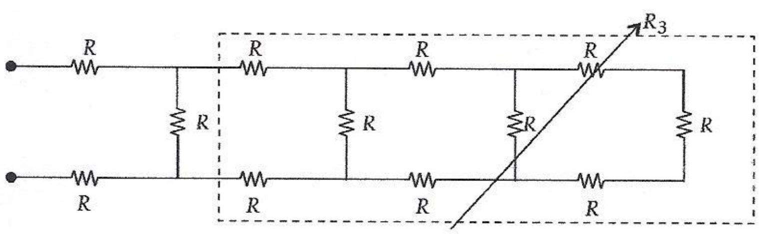


$$R_3 = R + R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}} = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}}$$

ou seja,

$$R_3 = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}}}}$$

4º passo:



$$R_4 = R + R + \left(\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_3}}\right) = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_3}}$$

ou seja,

$$R_4 = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{R_1}}}}}}$$

Observando o padrão recursivo dos passos anteriores, temos :

n-ésimo Passo:

$$R_n = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{n-1}}}$$

Chamemos de x o valor da resistência equivalente do circuito quando o valor de n tende ao infinito. Assim, teremos:

$$x = 2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2\mathrm{R} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\mathrm{R}} + \cfrac{1}{2\mathrm{R} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\mathrm{R} + \cdots}}}}}} =$$

$$2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{\underbrace{\boxed{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{2R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \ddots}}}}}_{= x}}},$$

E que pode ser escrito, usando o valor de x inicial novamente, da seguinte forma equivalente:

$$\mathrm{x} = 2\mathrm{R} + \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{x}}}$$

o que é equivalente à equação do segundo grau, x^2-2Rx-2R^2 = 0, com raízes x = R(1±$\sqrt{3}$). Como x é positivo, temos x = R(1 + $\sqrt{3}$).

Considerando que $\sqrt{3} = [1; 1,2,1,2,1,2, \ldots]$, podemos escrever o resultado em fração contínua, como x = R.[2;1,2,1,2,1,2,...] = [2;$\overline{1,2}$].R

OBS : O processo acima, na realidade, necessita de verificação mais rigorosa, pois não é garantido que o limite criado no lado direito da equação existe.Mas, como sabemos do teorema de Lagrange, abordado no capítulo 8 deste trabalho, a representação em frações contínuas dos números irracionais quadráticos,como $\sqrt{3}$, são realmente periódicas.

9.3 Um modelo para a Física

No século XVI o físico holandês Christiaan Huygens elaborou um modelo reduzido do sistema solar, utilizando-se da relação entre duas engrenagens que simulavam o movimento do planeta Saturno em torno do Sol. Era conhecido o tempo para Saturno orbitar o Sol, que era de aproximadamente, 29,43 anos.Assim, o problema traduziu-se em confeccionar duas engrenagens cuja razão entre o número de dentes fosse o tempo considerado. Ou seja, $\frac{x}{y} = 29{,}43$, onde x e y são o número de dentes das respectivas engrenagens.

Considerando $\alpha = 29{,}43$, vamos calcular as frações convergentes que serão as aproximações para α. Vejamos:

$$c_0 = a_0 = 29$$

$$c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = 29 + 0{,}43 = 29 + \frac{1}{2{,}32558} = 29 + \frac{1}{2} = \frac{59}{2} \approx 29{,}5$$

$$c_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = 29 + \frac{1}{2{,}32558} = 29 + \frac{1}{2 + 0{,}32558} = 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} =$$

$= \frac{206}{7} \approx 29{,}43$. Ou seja, Uma engrenagem de 206 dentes e a outra de 7 dentes.

Observe que $c_3 = \frac{2737}{93}$, sugere engrenagens impraticáveis,