1. Introdução

Vamos considerar os números 1,414213562 e 1,470588235, ambos com 9 dígitos decimais em suas representações. Estes números foram obtidos por operações simples em uma máquina de calcular de bolso. O que podemos falar sobre a natureza de cada um deles? Na verdade, apesar de serem números bem semelhantes, se conhecemos nove, noventa ou nove milhões de dígitos decimais de um número não podemos afirmar se esse número é racional ou irracional. No entanto, há uma importante diferença entre os dois: o segundo número é muito próximo do número racional $\frac{25}{17}$, com um erro de, aproximadamente, 3×10^{-10}. A fração mais próxima do primeiro número, com denominador de dois dígitos, é $\frac{99}{70}$, que possui um erro de 7×10^{-5}, bem maior se comparado com o do segundo número.

Nosso estudo será o de identificar boas aproximações para um número real através de frações convenientes, ou seja, que além de estarem bem próximas do número considerado, não possuam numeradores e denominadores muito grandes.

Primeiramente, iremos constatar que aproximações de números reais feitas por frações cujos denominadores são potências de 10, muitas vezes não são as melhores aproximações racionais para esses números. Apresentaremos, então, o conceito de frações contínuas que sempre fornecem aproximações racionais surpreendentemente boas, estabelecendo, posteriormente, indicadores de qualidade para essas aproximações.Ou seja,veremos que nem todas aproximações feitas por frações contínuas são igualmente boas.

Voltando aos números iniciais, para aqueles leitores que ficaram curiosos, um deles trata-se do número irracional, $\sqrt{2}$ = 1,414213562... e o outro, o número racional $\frac{25}{17}$ que só puderam ser apresentados com 9 dígitos decimais pela limitação física da máquina calculadora em questão.

É certo que uma calculadora não pode provar que $\sqrt{2}$ é irracional, no entanto, usando uma simples calculadora iremos mostrar, ao término de nosso trabalho que, certamente, podemos distinguir números entre $\sqrt{2}$ e $\frac{25}{17}$.