

## 8. O teorema de Lagrange

### 8.1 O enunciado do teorema

Esse teorema refere-se às chamadas Irracionalidades Quadráticas, que são números irracionais, raízes de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros. Vejamos o enunciado do teorema:

“Seja  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . A fração contínua  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  de  $\alpha$  é periódica a partir de um certo ponto, se e somente se, existem  $A, B, C \in \mathbb{Z}$ ;  $A \neq 0$ , tal que  $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ . (Isso equivale a dizer que  $\alpha = r \pm \sqrt{s}$  com  $r, s \in \mathbb{Q}$ ,  $s > 0$ ,  $\sqrt{s} \notin \mathbb{Q}$ )”

### 8.2 A prova do teorema 8.1

Conhecemos a fórmula exata para  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}$$

Isolando  $\alpha_{n+1}$ , temos:

$$\alpha_{n+1} = \frac{p_{n-1} - \alpha q_{n-1}}{\alpha q_n - p_n}$$

$[a_0; a_1, a_2, \dots]$  é periódica a partir de um certo ponto se, e somente se, existirem inteiros positivos  $n_0$  e  $r$ , tais que  $a_{n+r} = a_n$ ,  $\forall n \geq n_0$ .

Sejam  $m = n_0$ ,  $k = n_0 + r > m$ .

Temos  $\alpha_{m+1} = [a_{m+1}; a_{m+2}, \dots] = [a_{m+r+1}; a_{m+r+2}, \dots] = \alpha_{m+r+1} = \alpha_{k+1}$

$$\frac{p_{m-1} - \alpha q_{m-1}}{\alpha q_m - p_m} = \alpha_{m+1} = \alpha_{k+1} = \frac{p_{k-1} - \alpha q_{k-1}}{\alpha q_k - p_k}$$

Multiplicando em cruz, teremos uma equação do 2º grau em  $\alpha$ :

$$(q_m q_{k-1} - q_{m-1} q_k) \alpha^2 + (q_{m-1} q_k - p_{k-1} q_m) \alpha + p_m q_{k-1} - p_{m-1} q_k = 0.$$

Devemos mostrar, evidentemente, que esta equação não é degenerada. Temos

$$q_m q_{k-1} - q_{m-1} q_k \neq 0, \text{ senão } \frac{q_{k-1}}{q_k} = \frac{q_{m-1}}{q_m}, \text{ absurdo, pois essas frações são}$$

irredutíveis como vimos na prova da proposição 6.1.2.

Falta provarmos a volta, ou seja, se  $\alpha$  for uma irracionalidade quadrática então a fração contínua é periódica a partir de um certo ponto.

Seja  $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ , onde  $\alpha \in \mathbb{R}$ , e considere a fórmula exata para  $\alpha$  que vem das frações contínuas,  $\alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}$ . Substituindo este valor na equação, teremos  $A\left(\frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}\right)^2 + B\left(\frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}\right) + C = 0$ , o que irá implicar, em uma equação do segundo grau com coeficientes em função de  $n$ , ou seja,

$$A_n \alpha_{n+1}^2 + B_n \alpha_{n+1} + C_n = 0, \text{ com}$$

$$A_n = Ap_n^2 + Bp_nq_n + Cq_n^2$$

$$B_n = 2Ap_n p_{n-1} + B(p_n q_{n-1} + p_{n-1} q_n) + 2Cq_n q_{n-1} \text{ e}$$

$$C_n = Ap_{n-1}^2 + Bp_{n-1}q_{n-1} + Cq_{n-1}^2 = A_{n-1}$$

Queremos provar que existem  $m$  e  $k$  inteiros positivos,  $m < k$ , com  $\alpha_{m+1} = \alpha_{k+1}$ , ou seja as frações contínuas devem ser iguais,  $[a_{m+1}; a_{m+2}, \dots] = [a_{k+1}; a_{k+2}, \dots]$ , o que implica que  $a_{m+r} = a_{k+r} \quad \forall r \geq 1$  ou seja,  $a_n = a_n + (k - m), \forall n \geq m + 1$ . Para isso é suficiente mostrar que existe  $M > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , onde  $A_n, B_n$  e  $C_n$  são limitados por  $M$ , ou seja,  $0 < |A_n| \leq M, |B_n| \leq M$  e  $|C_n| \leq M$ , pois assim, encontrando um número finito de coeficientes  $A_n, B_n$  e  $C_n$  e consequentemente um número finito de possibilidades para as equações com duas raízes, estaremos determinando um número finito para  $\alpha_{n+1}$  e como temos um número infinito de  $n$ 's, teremos que repetir o mesmo valor duas vezes. Isso mostra que a fração contínua é periódica a partir de um dado valor de  $n$ . Vejamos os cálculos a seguir.

Seja  $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$  tal que  $Ax^2 + Bx + C = A(x - \alpha)(x - \tilde{\alpha})$ . Substituindo  $x$  por  $\frac{p_n}{q_n}$ , teremos:  $\left| A\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 + B\frac{p_n}{q_n} + C \right| = \left| A\left(\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right)\left(\frac{p_n}{q_n} - \tilde{\alpha}\right) \right| = |A| \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \left| \tilde{\alpha} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{|A|}{q_n^2} \left| \tilde{\alpha} - \frac{p_n}{q_n} \right|$ . Mas, pela desigualdade triangular,  $\left| \tilde{\alpha} - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq |\tilde{\alpha} - \alpha| + \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < |\tilde{\alpha} - \alpha| + 1$ , pois note que  $\frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{q_n^2} \leq 1$ . Então,  $\left| A\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 + B\frac{p_n}{q_n} + C \right| \leq \frac{|A|}{q_n^2} (|\alpha - \tilde{\alpha}| + 1)$ . Multiplicando tudo por  $q_n^2$ , temos  $|A_n| = |Ap_n^2 + Bp_nq_n + Cq_n^2| \leq |A| (|\alpha - \tilde{\alpha}| + 1)$ .

Do mesmo modo,  $|C_n| = |A_{n-1}| \leq |A|(|\alpha - \tilde{\alpha}| + 1)$ . O discriminante dessa equação será:

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (B^2 - 4AC) \underbrace{(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n)^2}_1 = B^2 - 4AC$$

$$B_n^2 = 4A_nC_n + B^2 - 4AC \leq \overbrace{4A^2(|\tilde{\alpha} - \alpha| + 1)^2 + B^2 - 4AC}^{M^2}$$

$M = \sqrt{4A^2(|\tilde{\alpha} - \alpha| + 1)^2 + B^2 - 4AC}$ . Para esses valores de  $M$  os coeficientes  $A_n, B_n$  e  $C_n$  são limitados, menores que  $M$ .

Note que  $A_n \neq 0$ , pois  $A_n = q_n^2 A \left(\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right) \left(\frac{p_n}{q_n} - \tilde{\alpha}\right)$ . Como  $\alpha$  é irracional, e  $\tilde{\alpha} = \frac{-B}{A} - \alpha$ , também será irracional. Além disso,  $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ , portanto,  $A_n \neq 0$

### 8.3 Exemplos

a)  $\alpha = [1; 1, 1, 1, \dots]$

Note que  $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$ , ou seja,  $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$  e, portanto, pegando a raiz positiva, temos  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , que é o número de ouro, da razão áurea.

b)  $\beta = [2; 2, 2, 2, \dots]$

Note que  $\beta = 2 + \frac{1}{\beta}$ , ou seja,  $\beta^2 - 2\beta - 1 = 0$  e, portanto, pegando a raiz positiva, temos  $\beta = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \beta - 1 = [1; 2, 2, 2, \dots]$