



**Pablo Vinícius Ferreira Telles**

**Amostragem de Ruído Azul em Múltiplas  
Classes para Superfícies Poligonais**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador : Prof. Sinesio Pesco  
Co-Orientador: Prof. Esdras Medeiros

Rio de Janeiro  
agosto de 2014



**Pablo Vinícius Ferreira Telles**

**Amostragem de Ruído Azul em Múltiplas  
Classes para Superfícies Poligonais**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

**Prof. Sinesio Pesco**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Esdras Medeiros**

Co-Orientador

Departamento de Matemática – UFC

**Prof. Luiz Henrique de Figueiredo**

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA

**Prof. Luiz Fernando Martha**

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

**Prof. Lis Ingrid Roque Lopes Custódio**

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 26 de agosto de 2014

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Pablo Vinícius Ferreira Telles**

Graduado em Matemática pela Universidade Federal Fluminense – UFF.

Ficha Catalográfica

Telles, Pablo Vinícius Ferreira

Amostragem de Ruído Azul em Múltiplas Classes para Superfícies Poligonais / Pablo Vinícius Ferreira Telles; orientador: Sinesio Pesco; co-orientador: Esdras Medeiros. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2014.

v., 70 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Discos de Poisson. 3. Múltiplas Classes. 4. Ruído Azul. I. Pesco, Sinesio. II. Medeiros, Esdras. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

## Agradecimentos

Agradeço a Deus, o Castelo Forte, pela oportunidade de viver e estudar, por todo o cuidado e pela sua maravilhosa e irresistível Graça.

A minha mãe Denise e avó Dionizia, o meu porto seguro, por todo amor dedicado, por sempre me apoiarem e sempre me ensinarem os bons valores.

Ao meu orientador, professor Sinesio, pela sua paciência e tranquilidade ao transmitir os seus conhecimentos, pela sua confiança e pelas palavras de incentivo.

Ao meu co-orientador, professor Esdras, pela confiança e por toda a ajuda oferecida para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos e familiares pelo incentivo, por toda paciência e por me apoiarem nos momentos mais difíceis, bem como, por compreenderem a minha ausência em alguns momentos.

Aos meus amigos da PUC pela companhia, apoio e incentivo durante o mestrado, em especial, a Taís, Karen, Renata, João, Dania, Luisa e Emília.

A professora Ana Kaleff, da UFF, pelos incentivos e por ter contribuído com a minha formação.

Aos membros da banca examinadora, professor Luiz Henrique, professor Luiz Fernando e a professora Lis Ingrid, pelas sugestões e contribuições.

Aos professores do departamento de Matemática pelos ensinamentos.

Aos demais funcionários do departamento de Matemática por toda ajuda e paciência.

A CAPES e a VRAC/PUC-Rio pelos auxílios concedidos, indispensáveis para a realização deste trabalho.

## Resumo

Telles, Pablo Vinícius Ferreira; Pesco, Sinesio; Medeiros, Esdras. **Amostragem de Ruído Azul em Múltiplas Classes para Superfícies Poligonais**. Rio de Janeiro, 2014. 70p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A amostragem de pontos por discos de Poisson preserva a uniformidade espacial e as propriedades de ruído azul do seu espectro de Fourier. Esse padrão de amostragem é bem popular por ser visualmente agradável o que favorece algumas aplicações. Diversos estudos se dedicam à amostragem de um único conjunto de pontos distribuídos por discos de Poisson, caracterizando uma única classe de pontos sobre domínios planares ou sobre domínios de superfícies poligonais. Uma recente técnica de amostragem sobre domínios planares estende esse método para múltiplas classes de maneira que cada classe de pontos e a união das classes sejam distribuídas por discos de Poisson. Nossa principal contribuição estende este método de amostragem em múltiplas classes sobre domínios planares para superfícies poligonais preservando a boa qualidade em cada classe e na união das classes. A independência entre os pontos de classes distintas permite ainda atributos independentes por classe e com isso apresentamos uma aplicação da distribuição de distintos objetos sobre superfícies.

## Palavras-chave

Discos de Poisson; Múltiplas Classes; Ruído Azul;

## Abstract

Telles, Pablo Vinícius Ferreira; Pesco, Sinesio (Advisor); Medeiros, Esdras (Co-Advisor). **Multi-Class Blue Noise Sampling on Polygonal Surfaces**. Rio de Janeiro, 2014. 70p. MsC Thesis — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Poisson disk sampling preserves the spatial uniformity and blue noise properties of Fourier spectrum. This sampling pattern is very popular for its high visual quality that favors some applications. Several works are dedicated to a single set of Poisson disk sampling characterizing one class of points on the plane or on polygonal surfaces. A recent sampling process on the plane extends this method to multiple classes such that each class as well as their union keep Poisson disk proprieties. Our main contribution extends this method of multi-class Poisson disk sampling on the plane to arbitrary polygonal surfaces preserving the good quality in each class and in the union of the classes. The independence between points of different classes also allows independent attributes for each class and thus we present an application to distribute different objects on surfaces.

## Keywords

Poisson Disk; Multi-Class; Blue Noise;

## Sumário

1	Introdução	<b>11</b>
1.1	Motivação	11
1.2	Trabalhos Anteriores	12
1.3	Contribuições	13
1.4	Divisão da Dissertação	14
2	Conceitos Básicos	<b>15</b>
2.1	Condições de Amostragem	15
2.2	Bases Espectrais da Malha	16
3	Amostragem de Pontos em Superfícies Trianguladas	<b>19</b>
3.1	Descrição do Problema	19
3.2	Única Classe	20
3.3	Múltiplas Classes	27
4	Resultados e Aplicações	<b>37</b>
4.1	Métrica Euclidiana	38
4.2	Métrica Geodésica	49
4.3	Distribuição de Objetos	54
5	Análise dos Resultados	<b>57</b>
5.1	Média Radial e Anisotropia	58
5.2	Análise em Múltiplas Classes	59
6	Conclusão e Trabalhos Futuros	<b>66</b>
	Referências Bibliográficas	<b>68</b>

## Lista de figuras

1.1	Amostragem planar em uma única classe	11
1.2	Amostragem planar em múltiplas classes	12
1.3	Múltiplas classes sobre uma superfície poligonal	14
2.1	Ângulos opostos a aresta $\overline{v_i v_j}$	17
3.1	<i>Dart throwing</i> em uma região bidimensional	20
3.2	Amostragem dos pontos em uma única classe	22
3.3	Triângulo isósceles	24
3.4	Células válidas e inválidas	25
3.5	<i>Hash table</i> com as células válidas	27
3.6	Amostragem planar	28
3.7	Discos representando as distâncias mínimas	29
3.8	Verificação da distância mínima na vizinhança de uma célula	30
3.9	Discos de Poisson somente por classes (3.9(a) e 3.9(b))	34
3.10	Discos de Poisson somente na união das classes (3.10(c))	34
3.11	<i>r</i> _matriz	35
4.1	<i>Peixe</i>	39
4.2	<i>Bolas</i>	40
4.3	<i>Mão</i>	41
4.4	<i>Max Planck</i>	42
4.5	<i>Zoom Max Planck</i>	43
4.6	<i>Coelho</i>	44
4.7	<i>Zoom Coelho</i>	45
4.8	<i>Caneca</i>	46
4.9	<i>Zoom Caneca</i>	47
4.10	<i>Egea</i>	48
4.11	Aproximação da métrica geodésica	49
4.12	Esqueleto da <i>Mão</i>	50
4.13	Zoom esqueleto da <i>Mão</i>	51
4.14	Zoom <i>Dinossauro</i>	52
4.15	<i>Dinossauro</i>	53
4.16	<i>Sweater</i>	55
4.17	<i>Triceratops</i>	55
4.18	<i>Vestido</i>	56
5.1	Análise da amostragem com uma única classe	60
5.2	Amostragem com uma única classe	60
5.3	Análise da classe 0 para a amostragem com 2 classes	61
5.4	Amostragem com 2 classes	61
5.5	Análise da classe 0 para a amostragem com 3 classes	62
5.6	Amostragem com 3 classes	62
5.7	Análise da classe 0 para a amostragem com 4 classes	63
5.8	Amostragem com 4 classes	63

5.9	Análise da classe 0 para a amostragem com 5 classes	63
5.10	Amostragem com 5 classes	64
5.11	Análise da união das classes para a amostragem com 2 classes	64
5.12	Amostragem com 3 classes - união das classes	65

## Lista de tabelas

4.1	Matriz de raios no modelo do <i>Peixe</i>	38
4.2	Matriz de raios no modelo da <i>Mão</i>	41
4.3	Matriz de raios no modelo do <i>Max Planck</i>	42
4.4	Matriz de raios no modelo do <i>Coelho</i>	44
4.5	Matriz de raios no modelo da <i>Caneca</i>	45
4.6	Matriz de raios no modelo da <i>Egea</i>	48
4.7	Matriz de raios no modelo <i>Esqueleto da Mão</i>	50
4.8	Matriz de raios no modelo do <i>Dinossauro</i>	51