

2

Conceitos Básicos

Neste Capítulo serão apresentados alguns conceitos básicos para o melhor aproveitamento dos Capítulos seguintes.

2.1

Condições de Amostragem

Iniciaremos com os principais conceitos relacionados a amostragem de pontos proposta nesta dissertação. Para isso, segue a definição de discos de Poisson e também o padrão de visualização do ruído azul esperado.

2.1.1

Discos de Poisson

O nome Poisson é devido ao método pelo qual são gerados estes pontos, ou seja, para cada ponto as suas coordenadas são selecionadas aleatoriamente e com distribuição uniforme tornando todos os pontos gerados completamente independentes entre si. Esta independência caracteriza o processo de geração de pontos como um processo estocástico de Poisson (McCool e Fiume, (16)).

Deste modo, uma distribuição por discos de Poisson é uma distribuição gerada neste processo de Poisson, onde quaisquer dois pontos tem, entre si, distância maior que uma distância mínima fixada. Além disso, desejamos poucas lacunas na distribuição dos pontos configurada pela cobertura do domínio de amostragem por discos que se sobrepõe. Esta condição de maximalidade na amostragem aliada ao critério de mínima distância entre os pontos sugere mais qualidade na visualização da distribuição dos pontos.

Definição 2.1 *Seja M um espaço métrico com uma métrica d . Dizemos que o conjunto de pontos $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subset M$ é amostrado por discos de Poisson com um raio r fixado se:*

1. $M \subset \cup B_r(s_i)$;
2. $(B_r(s_i) \cap (S - \{s_i\})) = \emptyset, \forall i$

onde $B_r(s_i) = \{s \in M \mid d(s, s_i) < r\}$ é uma bola topológica (disco) centrada no ponto s_i .

2.1.2

Características do Ruído Azul

A amostragem de pontos com características no padrão do ruído azul (Ulichney, (20)) é definida pela sua distribuição uniforme e não enviesada num domínio espacial, o que indica a ausência de alinhamentos perceptíveis, bem como, pelo seu espectro de potência com ausência de baixas frequências de ruído. Este padrão de amostragem é frequentemente usado por indicar boas propriedades espaciais e espectrais de uma distribuição de pontos.

No caso da amostragem por discos de Poisson é esperado que ela mantenha o padrão do ruído azul, como indicado por Lagae e Dutre (14) e neste caso é usada a análise espectral da amostragem que fornece estatísticas que indicam esta boa qualidade da distribuição.

2.2

Bases Espectrais da Malha

Nesta Seção descreveremos algumas ferramentas sobre as bases espectrais da malha que se relacionam muito bem com bases de Fourier usadas no método de análise da amostragem sobre superfícies proposto por Bowers *et al.* (2).

Supondo uma superfície definida como uma malha triangular M , onde o conjunto de n vértices e as suas respectivas conectividades constituem M , define-se uma função f que associa os seus valores nos vértices da malha, $f_i = f(v_i)$, para cada $1 \leq i \leq n$, sendo v_i um vértice da malha.

A segunda derivada de f pode ser aproximada pelo operador Laplaciano discreto L , que localmente calcula a média ponderada entre os valores de f_i e de cada f_j imediatamente vizinho a f_i . O Laplaciano de M é calculado assim:

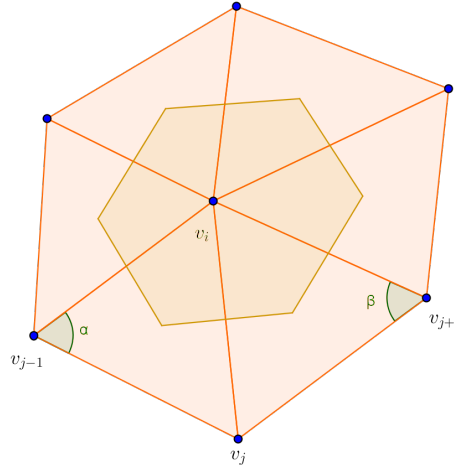
$$(Lf)_i = \frac{1}{a_i} \sum_{j \in N(i)} \psi_{ij}(f_i - f_j), \quad (2-1)$$

onde $N(i)$ o conjunto de vértices imediatamente vizinhos a v_i , a_i é a área da região delimitada pelos baricentros dos triângulos que compartilham o vértice v_i e tal que $\sum a_i = \text{Área}(M)$, como mostrado na Figura 2.1. O peso ψ_{ij} é definido como $\psi_{ij} = \frac{1}{2}(\cot\alpha_{ij} + \cot\beta_{ij})$, com os ângulos α_{ij} e β_{ij} opostos a aresta $\overline{v_i v_j}$, que aproxima o operador diferencial Laplaciano definido para superfícies suaves (7).

O operador localmente expresso pela Equação 2-1 pode ser escrito como o produto de uma matriz diagonal por uma matriz simétrica.

$$L = A^{-1}Q, \quad (2-2)$$

onde A^{-1} é a matriz diagonal que armazena o inverso das áreas a_i e Q é a


 Figura 2.1: Ângulos opostos a aresta $\overline{v_i v_j}$

matriz simétrica que armazena na diagonal principal $Q_{ii} = \sum_{j \in N(i)} \psi_{ij}$ e fora dela $Q_{ij} = -\psi_{ij}$. A simetria de Q é dada pelo fato que $\psi_{ij} = \psi_{ji}$ já que $\overline{v_i v_j} = \overline{v_j v_i}$.

Os autovetores desta matriz Laplaciana são caracterizados como autofunções do operador associado à matriz L . A matriz Laplaciana da malha $L = A^{-1}Q$ em geral é não simétrica, mas é semelhante a uma matriz simétrica $P = A^{-\frac{1}{2}}QA^{-\frac{1}{2}}$, pois,

$$\begin{aligned} L &= A^{-1}Q \\ &= A^{-\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}QA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{-\frac{1}{2}}PA^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

sendo $A^{\frac{1}{2}}$ uma matriz diagonal cujas entradas não nulas são definidas como $A_{ii}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a_i}$ e $A^{-\frac{1}{2}}$ é a sua matriz inversa.

Assim, L e P tem os mesmos autovalores reais, além disso, se x_i é um autovetor de P associado ao autovalor λ_i teremos que,

$$\begin{aligned} Px_i = \lambda_i x_i &\Leftrightarrow A^{-\frac{1}{2}}QA^{-\frac{1}{2}}x_i = \lambda_i x_i \\ &\Leftrightarrow A^{-\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}QA^{-\frac{1}{2}}x_i = \lambda_i A^{-\frac{1}{2}}x_i \\ &\Leftrightarrow A^{-1}QA^{-\frac{1}{2}}x_i = \lambda_i A^{-\frac{1}{2}}x_i \\ &\Leftrightarrow Lu_i = \lambda_i u_i \end{aligned}$$

(2-3)

Ou seja, $u_i = A^{-\frac{1}{2}}x_i$ é o autovetor de L associado ao autovalor λ_i . O conjunto dos autovetores de L forma uma base, que é a base de autofunções do Laplaciano L da malha.

Deste modo, cada autovetor u_i é definido como uma função base espectral da malha, $u_i = B_q$, e estão associados a autovalores que, em módulo, são definidos como as frequências destas funções bases. No Capítulo 4 apresentaremos a relação destas funções bases do Laplaciano da malha com as bases da transformada de Fourier discreta da amostragem de pontos cujas estatísticas radiais associadas servem para análise da amostragem.