

2

Autovalores e Estabilidade de hipersuperfícies mínimas.

Um problema de notável importância é decidir quando uma hipersuperfície mínima está minimizando a área, i.e, quando é um mínimo total ou pelo menos um mínimo relativo do funcional da área sobre todas as hipersuperfícies definidas sobre o mesmo domínio e com a mesma fronteira. Este problema é o que se entende por análise da estabilidade de uma hipersuperfície mínima. Com exatidão, a análise da estabilidade pode ser feita em casos mais gerais por exemplo em hipersuperfícies de curvatura média constante não necessariamente nula. Para este tipo de casos pode consultar [18, 22, 28].

Neste capítulo começaremos o estudo da estabilidade de hipersuperfícies mínimas introduzindo a primeira e segunda variação do funcional da área a partir da qual é definida a noção de estabilidade. Em particular, mostramos como a segunda variação do funcional da área pode ser estudada como a forma quadrática de um operador peculiar, o operador de estabilidade. Assim, a estabilidade poderá ser analisada segundo dito operador. Para aprofundar neste contexto na última seção introduzimos a teoria espectral mais relevante associada ao operador de estabilidade. Este será o ponto de partida dos critérios a serem tratados no próximo capítulo.

2.1

Variação de uma hipersuperfície. Primeira e segunda variação do funcional da área.

2.1.1

Variação de uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$

Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ a imersão de S em $\mathbb{R}^{n+1}$ com métrica induzida dada por $g = f^*(g_{\mathbb{R}^{n+1}})$, tal que $g_{\mathbb{R}^{n+1}}$ é a métrica do espaço ambiente $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $\Omega \subseteq S$ conjunto aberto relativamente compacto. A variação de $f(S)$ com suporte compacto e fronteira fixada na hipersuperfície pode-se entender como uma família a um parâmetro de hipersuperfícies definida pela aplicação

$$\begin{aligned} F : S \times (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \epsilon > 0 \\ (x, t) &\mapsto F(x, t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

suave com as seguintes propriedades

- (i) $F(x, 0) = f(x)$.
- (ii) $F(x, t) = f(x), \quad \forall x \text{ fora de } \Omega, t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Observação 2.1.1. *Antes de prosseguir façamos algumas observações importantes sobre esta definição:*

- Se S for compacta podemos considerar o conjunto Ω como sendo ela mesma.
- O membro da família obtido para $t = 0$ corresponde à imersão original $(f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1})$, o que significa que nesse instante não se está a realizar variação alguma.

O descrito anteriormente pode ser visualizado no seguinte desenho.

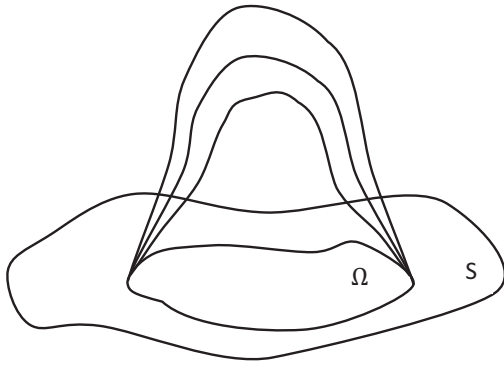


Figura 2.1: $\Omega \subset S$.

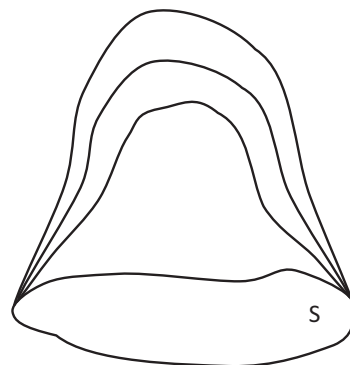


Figura 2.2: $\Omega = S$.

Assim, usando a expansão de Taylor definimos o campo variacional associado à variação como:

Definição 2.1.1 (Campo variacional). *Seja F a variação de uma hipersuperfície S imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por (2.1) então esta pode ser escrita como*

$$F(x, t) = F(x, 0) + t \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + t^2 R(x, t) \quad (2.2)$$

com $R(x, t) = O(1)$ quando $t \rightarrow 0$. O campo vetorial

$$Y(x) = \left. \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}) \quad (2.3)$$

é chamado campo vetorial da primeira variação da família a um parâmetro de hipersuperfícies $F(., t)$ ou simplesmente campo variacional.

Observação 2.1.2. *Note que o campo vetorial associado à variação pode ser decomposto em uma componente tangente e em uma componente normal. Portanto, poderemos falar de variação normal e variação tangente à hipersuperfície. Obtemos uma variação normal quando o campo vetorial definido acima seja normal à hipersuperfície em todo ponto da mesma.*

Mais precisamente:

Definição 2.1.2 (Variação normal). *Uma variação F da hipersuperfície S imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ é dita normal quando o campo vetorial variacional $Y(x) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0}$ é normal à hipersuperfície em todo ponto.*

Para maiores detalhes veja [10, 11].

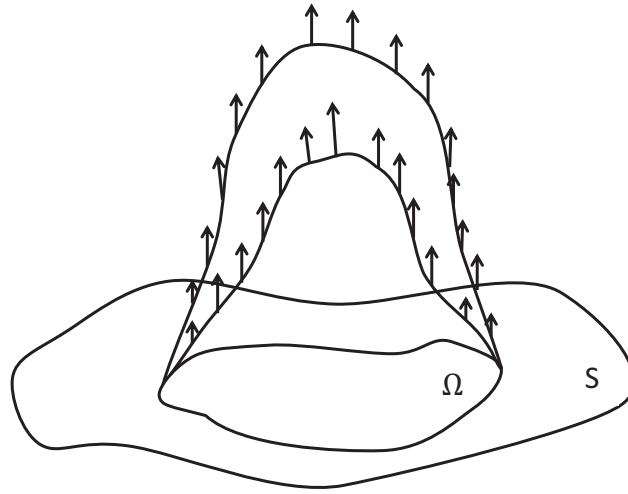


Figura 2.3: Variação Normal.

2.1.2

Primeira variação do funcional da área.

Vamos obter agora, de forma acurada, a primeira variação do funcional da área, mostrando que, resultarão relevantes somente as variações normais. Suponhamos que para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ fixado a aplicação

$$\begin{aligned} F_t : S &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \epsilon > 0 \\ x &\mapsto F_t(x) = F(x, t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

é uma imersão. Consideremos S munida da métrica induzida g_t por F_t , $g_t = F_t^*(g_{\mathbb{R}^{n+1}})$, tal que $g_0 = g$. Então, tomando a restrição de F_t a $\Omega \subseteq S$, a fórmula da área para a variação da hipersuperfície (que em dimensão $n > 2$ representa um volume), é:

$$A(t) = Vol(\Omega) = \int_{\Omega} \omega_t, \quad (2.5)$$

com ω_t a forma de volume associada a g_t . Sendo a área da hipersuperfície original $A(0) = \int_{\Omega} \omega_0$ com ω_0 a forma de volume em S associada a g .

Tomemos agora o referencial canônico ortonormal $\{X_1, \dots, X_n\}$ em S e o campo vetorial variacional $Y = \frac{dF(x, t)}{dt} \in T\mathbb{R}^{n+1}|_{F_t(S)}$. Com isto a métrica induzida em S é dada por

$$g_{ij}(t) = \langle X_i, X_j \rangle_{g_t}. \quad (2.6)$$

Então, a primeira variação do funcional da área se expressa como

$$A'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Vol(\Omega), \quad (2.7)$$

logo, $A'(0) = \int_{\Omega} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega_t$.

Denotando $g(t) = \det(g_{ij}(t))$, num ponto $x \in \Omega \subset S$ podemos obter a forma explícita de ω_t como segue:

$$\begin{aligned} \omega_t(x)(X_1(x), \dots, X_n(x)) &= \sqrt{\det \langle dF_t(x)X_i, dF_t(x)X_j \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}} \\ &= \sqrt{\det \langle X_i, X_j \rangle_{g_t}} \\ &= \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \\ &= \sqrt{g(t)}. \end{aligned}$$

Dado que $\det g_{ij}(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} g_{ij} G_{ij}$ com G_{ij} o menor ij -ésimo da matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida a partir da matriz original omitindo a i -ésima fila e a j -ésima coluna temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d \det g_{ij}(t)}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \frac{dg_{ij}(0)}{dt} G_{ij}(0) + \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} g_{ij}(0) \frac{dG_{ij}(0)}{dt} \\ &= \frac{dg_{ii}(0)}{dt} + \frac{dG_{ii}(0)}{dt}, \end{aligned}$$

fazendo este procedimento $n-1$ vezes e notando que em cada passo se obtém um dos elementos ii -ésimos, ($i = 1, \dots, n$), resulta que

$$\left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} = \text{traço } g'(0) = \sum_i \frac{dg_{ii}(0)}{dt} \quad (2.8)$$

daí,

$$\begin{aligned}
 A'(0) &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \omega_t \\
 &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\sqrt{g(t)} \right) \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{dg(t)}{dt} \Big|_{t=0} \right) \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sum_i \frac{dg_{ii}(0)}{dt} \omega_0.
 \end{aligned}$$

E usando propriedades das conexões (veja apêndice)

$$\begin{aligned}
 A'(0) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sum_i \frac{dg_{ii}(0)}{dt} \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sum_i \frac{d\langle dF X_i, dF X_i \rangle}{dt} \Big|_{t=0} \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial}{\partial t} \langle X_i, X_i \rangle \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \sum_i \langle \bar{\nabla}_Y X_i, X_i \rangle \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \sum_i \langle \bar{\nabla}_{X_i} Y, X_i \rangle \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \left(\sum_i X_i (\langle Y, X_i \rangle) - \langle Y, \bar{\nabla}_{X_i} X_i \rangle \right) \omega_0.
 \end{aligned}$$

Decompondo $\bar{\nabla}$ em sua parte tangente ∇ e sua parte normal $\bar{\nabla}^\perp$ segundo a equação de Gauss (5.18) do apêndice e notando que $\langle Y, \nabla_{X_i} X_i \rangle = 0$ e

$$\sum_i A(X_i, X_i) = \langle -\bar{\nabla}_{X_i} N, X_i \rangle = \text{traço} A = n H$$

onde A é o operador de Weingarten e H a curvatura média de S :

$$\begin{aligned}
 A'(0) &= \int_{\Omega} \left(\sum_i X_i (\langle Y, X_i \rangle) - \langle Y, A(X_i, X_i) N \rangle \right) \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \left(\sum_i X_i (\langle Y, X_i \rangle) - \langle Y, n H N \rangle \right) \omega_0 \\
 &= \int_{\Omega} \sum_i X_i (\langle Y, X_i \rangle) \omega_0 - n \int_{\Omega} \langle Y, N \rangle H \omega_0.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Se consideramos somente variações normais $\langle Y, X_i \rangle = 0 \quad \forall i, i = 1, \dots, n$ pois $\langle Y, X_i \rangle$ mede as variações tangentes, assim, obtemos finalmente a fórmula da primeira variação da área para variações normais:

$$A'(0) = -n \int_{\Omega} \langle Y, N \rangle H \omega_0. \quad (2.10)$$

Observação 2.1.3. *A rigor deve-se notar que a fórmula (2.10) da primeira variação da área é a mesma para variações próprias. Sendo que as variações próprias correspondem a variações com fronteira fixada e campo variacional escolhido em qualquer direção. Isto se deve a que em qualquer caso,*

$$\sum_i X_i(\langle Y, X_i \rangle) = \operatorname{div}_{\Omega}(Y^T),$$

então, usando o Teorema de Stokes,

$$\int_{\Omega} \sum_i X_i(\langle Y, X_i \rangle) \omega_0 = \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\Omega}(Y^T) \omega_0 = \int_{\partial\Omega} \langle Y^T, \eta \rangle = 0.$$

Ou seja, o primeiro somando em (2.9) é sempre nulo.

Denotemos por ϕ a função $\langle Y, N \rangle$ de (2.10), ou seja, ϕ corresponde à componente normal do campo variacional. Note que ϕ de classe C^{∞} e com suporte compacto em S dado que $Y(x) = 0$ para $x \in S \setminus \Omega$. Daí, obtemos diretamente uma condição necessária e suficiente para a nulidade desta variação: o *Teorema Fundamental do Cálculo de Variações*. Por conseguinte podemos mostrar como os pontos estacionários do funcional da área, em particular seus mínimos, são hipersuperfícies de curvatura média zero. Esta é a razão pela qual é usado o termo de mínimo para nomear às hipersuperfícies de curvatura média zero. Em resumo, obtemos uma outra caracterização de hipersuperfícies mínimas.

Teorema 2.1.1 (Teorema Fundamental do Cálculo de Variações). *A primeira variação $A'(0)$ do funcional da área da hipersuperfície S em $\mathbb{R}^{n+1}$ se anula se e somente se a curvatura média H de S é identicamente nula.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Seja $A'(0) = 0$, suponhamos por absurdo que existe $p \in S$ tal que $H(p) \neq 0$.

Para fixar ideias suponhamos que $H(p) > 0$, em outro caso a prova se repete. Como H é uma função contínua existe V_1 vizinhança de p tal que para todo $x \in V_1$ temos $H(x) > 0$. Escolhamos uma função suave $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} H & \text{em } V_1 \\ 0 & \text{em } V_2^c \end{cases} \quad (2.11)$$

com V_2 tal que $V_1 \subsetneq V_2$. Ou seja, $\phi(x) \geq 0$ e $\phi(x) > 0$ em V_1 . A existência desta ϕ com campo variacional normal Y tal que $\phi = \langle Y, N \rangle$ é dada como um caso particular do lema 2.2 em [2].

Seja Y o campo variacional, decompondo Y em sua parte tangente e sua parte normal obtemos: $Y = Y^T + Y^\perp$, assim,

$$\langle Y, N \rangle = \langle Y^T + Y^\perp, N \rangle = \langle Y^T, N \rangle + \langle Y^\perp, N \rangle = \langle Y^\perp, N \rangle, \quad (2.12)$$

daí,

$$\phi = \langle Y, N \rangle = \langle Y^\perp, N \rangle = \begin{cases} H & \text{em } V_1 \\ 0 & \text{em } V_2^c. \end{cases} \quad (2.13)$$

Logo,

$$A'(0) = -n \int_{\Omega} \langle Y, N \rangle \omega_0 = -n \int_{\Omega} \phi H \omega_0 = -n \int_{V_1} H^2 \omega_0 < 0 \quad (2.14)$$

o que contradiz a hipótese. Portanto $H \equiv 0$.

($\Leftarrow$) É imediato que se $H \equiv 0$ então $A'(0) = 0$. $\square$

Corolário 2.1.1. *S é uma hipersuperfície mínima, se e somente se, para toda variação F_t temos*

$$A'(0) = 0. \quad (2.15)$$

Demonstração.

Sabemos que uma hipersuperfície S é mínima por definição se e somente se $H \equiv 0$. E pelo teorema fundamental do cálculo de variações podemos concluir que $H = 0$ se e somente se $A'(0) = 0$. $\square$

Doravante trataremos apenas variações normais ou próprias.

2.1.3

Segunda variação do funcional da área.

Como vimos, o conceito de primeira variação do funcional da área está estreitamente ligado com o conceito de hipersuperfícies mínimas. Agora veremos como o conceito de segunda variação está estreitamente ligado à estabilidade de hipersuperfícies mínimas.

Para fazer a dedução da fórmula da segunda variação vamos proceder usando a fórmula da primeira variação (2.10).

Seja a hipersuperfície S com variações F_t dadas pelas imersões (2.4). Assumamos que estas são variações normais de S , ou seja, para N a aplicação normal à hipersuperfície o campo vetorial variacional tem a forma $Y = \phi N$

com $\phi \in C^\infty$.

Escrevendo $\vec{H} = HN$ (equação (1.29)), temos que a primeira variação do funcional pode ser reescrito como:

$$A'(t) = -n \int_{\Omega} \langle Y, \vec{H} \rangle \omega_t.$$

Derivando de ambos lados para obter a segunda variação do funcional da área obtemos

$$A''(t) = - \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \langle Y, n \vec{H} \rangle \omega_t - \int_{\Omega} \langle Y, n \vec{H} \rangle \frac{d}{dt} \omega_t. \quad (2.16)$$

E avaliando em $t = 0$ observamos que o segundo somando à direita se anula por ser a hipersuperfície mínima. Assim, a segunda variação do funcional da área $A''(0)$ resulta,

$$A''(0) = - \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \langle Y, n \vec{H} \rangle \Big|_{t=0} \omega_0. \quad (2.17)$$

Para explicitar a forma de $A''(0)$ tomemos $x \in \Omega$ e o referencial ortonormal local $\{X_1, \dots, X_n\}$ definido numa vizinhança de x e comecemos por calcular $\frac{d}{dt} \langle Y, n \vec{H} \rangle$.

Escrevamos o vetor curvatura média nas coordenadas locais dadas pelo referencial.

$$\begin{aligned} n \vec{H} &= n H N \\ &= \sum_i \langle A X_i, X_i \rangle N \\ &= \sum_i a_{ii} N \\ &= \sum_{i,j} b_{ij} g^{ij} N \\ &= \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, N \rangle g^{ij} N \end{aligned}$$

i.e, $n \vec{H} = \left(\sum_{i,j} g^{ij} \bar{\nabla}_{X_i} X_j \right)^\perp$, com A o operador de Weingarten tal que a_{ii} corresponde ao elemento ii -ésimo da matriz associada ao operador no referencial $\{X_1, \dots, X_n\}$, b_{ij} os coeficientes da segunda forma fundamental e g^{ij} é tal que $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. Daí,

$$n \langle \vec{H}, Y \rangle = \sum_{i,j} g^{ij} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, Y \rangle \quad (2.18)$$

e por conseguinte

$$\frac{d}{dt} \langle Y, n \vec{H} \rangle \Big|_{t=0} = \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, Y \rangle \frac{d g^{ij}}{dt} \Big|_{t=0} + \sum_{i,j} g^{ij} \frac{d}{dt} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, Y \rangle \Big|_{t=0}. \quad (2.19)$$

Por outro lado usando a relação $\sum_j g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$ temos

$$\begin{aligned}
 \frac{dg^{ij}}{dt}\Big|_{t=0} &= -\frac{dg_{ij}(0)}{dt} \\
 &= -\frac{d\langle X_i, X_j \rangle}{dt}\Big|_{t=0} \\
 &= -\frac{d\langle dF X_i, dF X_j \rangle}{dt}\Big|_{t=0} \\
 &= -Y(\langle X_i, X_j \rangle) \\
 &= -\langle \bar{\nabla}_Y X_i, X_j \rangle - \langle X_i, \bar{\nabla}_Y X_j \rangle \\
 &= -\phi \langle \bar{\nabla}_N X_i, X_j \rangle - \phi \langle X_i, \bar{\nabla}_N X_j \rangle \\
 &= \phi (\langle -\bar{\nabla}_N X_i, X_j \rangle + \langle X_i, -\bar{\nabla}_N X_j \rangle) \\
 &= \phi (\langle -\bar{\nabla}_{X_i} N, X_j \rangle + \langle X_i, -\bar{\nabla}_{X_j} N \rangle) \\
 &= \phi (A(X_i, X_j) + A(X_j, X_i)) \\
 &= 2\phi (A(X_i, X_j))
 \end{aligned}$$

com $A(X_i, X_j)$ a segunda forma fundamental nos campos X_i, X_j .

Nomeando os somandos em (2.19) como $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, ou seja,

$$\mathcal{A} := \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, Y \rangle \frac{dg^{ij}}{dt}\Big|_{t=0} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} := \sum_{i,j} g^{ij} \frac{d}{dt} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, Y \rangle\Big|_{t=0}, \text{ temos:}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, Y \rangle \frac{dg^{ij}}{dt}\Big|_{t=0} \\
 &= \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, \phi N \rangle 2\phi A(X_i, X_j) \\
 &= 2\phi^2 \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, N \rangle A(X_i, X_j) \\
 &= 2\phi^2 \sum_{i,j} \langle X_j, -\bar{\nabla}_{X_i} N \rangle A(X_i, X_j) \\
 &= 2\phi^2 \sum_{i,j} A(X_i, X_j)^2 \\
 &= 2\phi^2 |A|^2
 \end{aligned}$$

com $|A|$ o módulo da segunda forma fundamental dado em (1.25). E,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B} &= \sum_{i,j} g^{ij} \frac{d}{dt} \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, Y \rangle\Big|_{t=0} \\
 &= \sum_{i,j} g^{ij} \{ \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_{X_i} X_j, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, \bar{\nabla}_Y Y \rangle \} \Big|_{t=0} \\
 &= \sum_j \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_{X_j} X_j, Y \rangle
 \end{aligned}$$

Usando o fato que $[Y, X_i] = 0$ e as equações de compatibilidade (5.22) do apêndice

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_{X_j} X_j, Y \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{X_j} \bar{\nabla}_Y X_j, Y \rangle \\
 &= X_j(\langle \bar{\nabla}_Y X_j, Y \rangle) - \langle \bar{\nabla}_Y X_j, \bar{\nabla}_{X_j} Y \rangle \\
 &= X_j(\langle \bar{\nabla}_Y X_j, Y \rangle) - \langle \bar{\nabla}_{X_j} Y, \bar{\nabla}_{X_j} Y \rangle \\
 &= X_j(\langle \bar{\nabla}_{X_j} Y, Y \rangle) - |\bar{\nabla}_{X_j} Y|^2.
 \end{aligned}$$

Calculando os termos desta última diferença obtemos:

$$|\bar{\nabla}_{X_j} Y|^2 = |\bar{\nabla}_{X_j}(\phi N)|^2 = |\phi \bar{\nabla}_{X_j} N + X_j(\phi) N|^2 = \phi^2 |\bar{\nabla}_{X_j} N|^2 + X_j^2(\phi)$$

$$\begin{aligned}
 X_j(\langle \bar{\nabla}_{X_j} Y, Y \rangle) &= X_j(\langle \bar{\nabla}_{X_j} \phi N, \phi N \rangle) \\
 &= X_j(\langle X_j(\phi) N + \phi \bar{\nabla}_{X_j} N, \phi N \rangle) \\
 &= X_j(X_j(\phi) \phi) \\
 &= X_j(X_j(\phi)) \phi + X_j^2(\phi)
 \end{aligned}$$

e somando por j cada um deles temos para o fator $|\bar{\nabla}_{X_j} Y|^2$

$$\begin{aligned}
 \sum_j |\bar{\nabla}_{X_j} Y|^2 &= \phi^2 \sum_j |\bar{\nabla}_{X_j} N|^2 + |\nabla \phi|^2 \\
 &= |\nabla \phi|^2 + \phi^2 \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{X_j} N, X_i \rangle^2 \\
 &= |\nabla \phi|^2 + \phi^2 \sum_{i,j} A^2(X_i, X_j) \\
 &= |\nabla \phi|^2 + \phi^2 |A|^2
 \end{aligned}$$

e para $X_j(\langle \bar{\nabla}_{X_j} Y, Y \rangle)$

$$\begin{aligned}
 \sum_j X_j(\langle \bar{\nabla}_{X_j} Y, Y \rangle) &= \sum_j X_j(X_j(\phi)) \phi + X_j(\phi)^2 \\
 &= \sum_j X_j(X_j(\phi)) \phi + |\nabla \phi|^2 \\
 &= \phi \left(\sum_j X_j(X_j \phi) - \bar{\nabla}_{X_j} X_j \phi \right) + |\nabla \phi|^2 \\
 &= \phi \Delta_S \phi + |\nabla \phi|^2.
 \end{aligned}$$

Com isto,

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= -|\nabla\phi|^2 - \phi^2 |A|^2 + \phi\Delta_S\phi + |\nabla\phi|^2 \\ &= \phi\Delta_S\phi - \phi^2 |A|^2.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle Y, n \vec{H} \rangle|_{t=0} &= \mathcal{A} + \mathcal{B} \\ &= 2\phi^2 |A|^2 + \phi\Delta_S\phi - \phi^2 |A|^2 \\ &= \phi^2 |A|^2 + \phi\Delta_S\phi.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Finalmente podemos expressar explicitamente a segunda variação do funcional da área $A''(0)$ como:

$$A''(0) = - \int_{\Omega} \phi(\Delta_S\phi + \phi |A|^2) \omega_0, \tag{2.21}$$

ou, equivalentemente, usando fórmulas de Green pois $\text{supp } \phi \subset \Omega$,

$$A''(0) = \int_{\Omega} (|\nabla\phi|^2 - \phi^2 |A|^2) \omega_0. \tag{2.22}$$

Observação 2.1.4. Note que se F_t são variações próprias obtemos de igual maneira a expressão (2.22) como segunda variação do funcional da área onde $\phi = \langle Y, N \rangle$ representa a componente normal do campo variacional. Por este motivo desde o início forem consideradas as variações como normais.

Observação 2.1.5. Para $n = 2$, em particular, a segunda variação da área segundo o campo variacional $Y = \phi N$ com ϕ que tem suporte compacto em Ω resulta

$$A''(0) = \int_{\Omega} (|\nabla_S\phi|^2 + 2K\phi^2) \sqrt{g} du dv = \int_{\Omega} (|\nabla_S\phi|^2 + 2K\phi^2) dA, \tag{2.23}$$

pois, para uma superfície mínima de $\mathbb{R}^3$ resulta que $-|A|^2 = 2K$ com K a curvatura Gaussiana.

Observação 2.1.6. É possível deduzir a partir dos cálculos realizados para obter a fórmula da segunda variação do funcional da área (2.21) a equação:

$$n \frac{\partial H}{\partial t} = \Delta\phi + |A|^2 \phi, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \tag{2.24}$$

que será usada no capítulo 3.

Observação 2.1.7. Dada uma variedade Riemanniana $(\widehat{M}, \widehat{g})$ com M uma subvariedade compacta imersa em $\widehat{M}$ ($f : M \hookrightarrow \widehat{M}$), métrica induzida pela métrica da variedade e na qual é definida a conexão riemanniana. Podemos

definir uma variação de M em $\widehat{M}$ pela aplicação

$$F : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \widehat{M}$$

tal que $F|_{t=0} = f(M)$ e $F_t : M \rightarrow \widehat{M}$ são imersões.

Logo, a primeira variação do funcional da área possui a mesma forma. Contudo a segunda variação é dada pela seguinte fórmula:

$$A''(0) = - \int_M \phi(\Delta_M \phi + \phi |A|^2 + \phi \widehat{Ric}_N) \quad (2.25)$$

com $\widehat{Ric}_N$ o tensor de curvatura de Ricci no vetor normal unitário a M (mais precisamente a $f(M)$), que representa uma medida de quão não euclideana é uma variedade. No caso de uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ este termo não aparece pois resulta nulo, para maiores detalhes pode consultar [13].

2.2

Estabilidade de uma Imersão Mínima.

Lembrando os conceitos de mínimo local e mínimo estrito de uma função sabemos que para um mínimo local do funcional da área, a segunda variação deve satisfazer a seguinte desigualdade:

$$A''(0) \geq 0. \quad (2.26)$$

Enquanto que para um mínimo estrito do funcional da área a desigualdade terá que ser estrita, i.e, $A''(0) > 0$, o que conduz à seguinte definição:

Definição 2.2.1 (Estabilidade de uma imersão mínima). *Seja S uma hipersuperfície mínima imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ pela imersão $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Seja $\Omega \subseteq S$ relativamente compacto em S . Dizemos que o domínio Ω da hipersuperfície é estável se para toda variação normal F_t de f que fixa $S \setminus \Omega$:*

$$A''(0) = A''(\Omega, \phi N) \geq 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}), \quad (2.27)$$

ou, equivalentemente, se

$$- \int_\Omega \phi(\Delta_S \phi + \phi |A|^2) \omega_0 \geq 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}). \quad (2.28)$$

E dizemos que é estritamente estável se em qualquer um dos casos é satisfeita a desigualdade estrita. Se a hipersuperfície for completa e para todo $\Omega \subseteq S$ relativamente compacto em S é satisfeita (2.27), ou equivalentemente (2.28), dizemos que a hipersuperfície é estável. Se somente é satisfeita a desigualdade estrita dizemos que a hipersuperfície é estritamente estável.

Uma hipersuperfície mínima pode não ser estável. De fato em [14], foi mostrado como as superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^3$ são planos. Porém, podemos estabelecer a estabilidade em subdomínios da mesma, segundo a definição acima. Inclusive é possível determinar os domínios maximais de estabilidade.

Definição 2.2.2 (Domínio maximal de estabilidade). *Um domínio D em $\Omega \subseteq S$ é um domínio maximal de estabilidade se satisfaz simultaneamente as seguintes propriedades:*

- (i) D é estável.
- (ii) $\forall D' \supset D; D' \neq D$, aberto, tem-se que D' não é estável.

Associada à segunda variação do funcional da área temos o operador de estabilidade a partir do qual esta pode ser vista como uma forma quadrática, a rigor, como a forma quadrática associada ao mesmo.

Definição 2.2.3 (Operador de estabilidade). *Seja S a hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja a segunda variação do funcional da área da hipersuperfície dada por (2.21). Definimos o operador de estabilidade ou operador de Jacobi da hipersuperfície S (as vezes referenciado também como operador de segunda variação de S) como*

$$L = -\Delta_S - |A|^2, \quad (2.29)$$

com forma quadrática associada dada por

$$J(\phi) = \int_{\Omega} \phi L \phi \omega_0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega). \quad (2.30)$$

Em particular, para $n = 2$ segundo a observação 2.1.5 o operador de Jacobi resulta $L = -\Delta_S + 2K$. Com forma quadrática associada

$$J(\phi) = \int_{\Omega} (-\phi \Delta_S \phi + 2K \phi^2) \omega_0, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Note que a forma quadrática do operador de estabilidade corresponde exatamente à segunda variação do funcional da área (2.21). Assim, a estabilidade de uma imersão mínima pode ser estudada segundo a não negatividade desta forma quadrática. Mais precisamente, enunciamos uma outra variante de definição de estabilidade para um domínio na hipersuperfície a partir da forma quadrática associada ao operador de Jacobi. Assim como uma outra noção de domínio maximal de estabilidade como segue.

Definição 2.2.4. *Seja S uma hipersuperfície mínima imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ pela imersão $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Seja $\Omega \subseteq S$ relativamente compacto em S . Dizemos que*

- (i) Ω é estável se $J(\phi) \geq 0$, $\forall \phi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$
- (ii) Ω é estritamente estável se $J(\phi) > 0$, $\forall \phi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$.

Definição 2.2.5. *Seja S uma hipersuperfície mínima imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ pela imersão $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Seja $\Omega \subseteq S$ relativamente compacto e estável em S . Se para todo $\Omega' \supsetneq \Omega$ existe $\phi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega', \mathbb{R}^{n+1})$ tal que $J(\phi) < 0$ dizemos que Ω é um domínio maximal de estabilidade.*

Ora, a forma quadrática de um operador qualquer é definida não negativa se e somente se os autovalores associados ao operador forem não negativos. E autovalores estritamente positivos correspondem a uma forma quadrática estritamente positiva. Por conseguinte teremos estabilidade de uma hipersuperfície mínima imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ se e somente se os autovalores associados ao operador de Jacobi para toda variação da hipersuperfície não forem negativos e estabilidade estrita se os mesmos forem estritamente positivos.

Por esta razão a ferramenta motora no estudo da estabilidade de uma imersão mínima estará baseada na examinação dos autovalores do operador de estabilidade. Mais precisamente, poderemos simplificar o estudo ao exame do primeiro autovalor como mostraremos na próxima seção.

Observação 2.2.1. *Em casos mais gerais é definido o operador de Schrödinger que tem a forma $L_V = -\Delta_S + V$ com V uma suave (de classe $\mathbf{C}^\infty$). Por exemplo, para variedades riemannianas como vimos na observação 2.1.7, $V = -|A|^2 - \widehat{Ric}_N$. Já no caso unidimensional o operador apresenta uma forma muito simples dado que ao ter somente uma variável o operador laplaciano se reduz ao operador de segunda derivada. Tal operador é conhecido como operador de Sturm Liouville. O fato de trabalhar no espaço unidimensional facilita consideravelmente os cálculos e o uso de muitas mais propriedades. Daí que, alguns problemas definidos em dimensões maiores são transformados em problemas unidimensionais de modo que possa ser utilizado o operador de Sturm Liouville na análise da estabilidade. No próximo capítulo abordaremos este último ponto aprofundando um pouco nas propriedades do operador.*

Em qualquer caso se obtém a seguinte propriedade:

Proposição 2.2.1. *O operador de Jacobi é autoadjunto.*

Demonstração.

Pelas propriedades de simetria do operador laplaciano e dado que $|A|^2$ é suave e não depende de ϕ podemos concluir que a matriz associada a dito operador numa base ortonormal é simétrica. Ou seja, o operador de Jacobi é autoadjunto. $\square$

2.3

Teoria espectral dos autovalores associados ao operador de Jacobi.

A teoria espectral é bem rica, neste material nos limitaremos a estudar as propriedades dos autovalores associados ao operador de Jacobi que serão de maior utilidade para o desenvolvimento dos critérios de estabilidade a serem tratados. Mostraremos também em alguns casos como estas são válidas em contextos mais gerais.

Usaremos conhecimentos sobre os espaços de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ e $\dot{W}^{1,2}(\Omega)$ ([7], capítulo 9).

2.3.1

Primeiro Autovalor associado ao operador de Jacobi.

Seja uma hipersuperfície S imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$, com $\Omega \subseteq S$ domínio regular relativamente compacto. Tomemos variações normais sobre S de modo que a forma quadrática associada ao operador de Jacobi L para $\phi \in \Omega$ tem a forma

$$J(\phi) = \int_{\Omega} (-\phi \Delta_S \phi + |A|^2 \phi^2) \omega_0 \quad \text{com } \phi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega).$$

Como $|A|^2$ é uma função $\mathbf{C}^\infty$ sobre o compacto $\bar{\Omega}$, $|A|^2$ atinge o máximo e o mínimo nesse conjunto. Então podemos definir

$$\lambda_1(L, \Omega) = \inf \left\{ \int_{\Omega} \phi L \phi \omega_0; \phi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega), \int_{\Omega} \phi^2 = 1 \right\} \quad (2.31)$$

ou de maneira equivalente

$$\begin{aligned} \lambda_1(L, \Omega) &= \inf_{\phi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega)} \left\{ \frac{\int_{\Omega} (|\nabla \phi|^2 - |A|^2 \phi^2) \omega_0}{\int_{\Omega} \phi^2 \omega_0} \right\} \\ &= \inf_{\phi \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)} \left\{ \frac{\int_{\Omega} (|\nabla \phi|^2 - |A|^2 \phi^2) \omega_0}{\int_{\Omega} \phi^2 \omega_0} \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Este valor $\lambda_1(L, \Omega)$ como mostraremos a seguir corresponde ao primeiro autovalor associado ao operador de estabilidade L sobre o domínio Ω da hipersuperfície S .

Lema 2.3.1. *Seja $L = -\Delta_S - |A|^2$ o operador de estabilidade definido em Ω . Seja $\lambda_1 = \lambda_1(L, \Omega)$, então, existe $\psi \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)$ tal que*

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla \psi|^2 - |A|^2 \psi^2) \omega_0}{\int_{\Omega} \psi^2 \omega_0}. \quad (2.33)$$

Além disso, ψ é suave e vale

$$L(\psi) = \lambda_1 \psi. \quad (2.34)$$

Ou seja, λ_1 é o menor autovalor do operador de estabilidade L .

Demonstração.

Afirmamos que o ínfimo é atingido em $\psi \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$.

Para mostrar isto tomemos uma sequência minimizante $\psi_j \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$, i.e, ψ_j é tal que

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\int_{\Omega} (|\nabla \psi_j|^2 - |A|^2 \psi_j^2) \omega_0}{\int_{\Omega} \psi_j^2 \omega_0} \right\} = \lambda_1.$$

Pela definição de ínfimo

$$\frac{\int_{\Omega} (|\nabla \psi_j|^2 - |A|^2 \psi_j^2) \omega_0}{\int_{\Omega} \psi_j^2 \omega_0} \leq \lambda_1 + \frac{1}{j}. \quad (2.35)$$

Se substituirmos ψ_j por $c\psi_j$ com c constante obtemos o mesmo resultado, logo, podemos assumir $\int_{\Omega} \psi_j^2 = 1$ e assim ψ_j é uma sequência limitada em $L^2(\Omega)$.

Como o espaço $\mathring{W}^{1,2}$ é reflexivo escolhendo uma subsequência se for necessário temos:

- (i) ψ_j converge no sentido fraco a $\psi \in W^{1,2}$ e como $\mathring{W}^{1,2}$ é o fecho de $\mathbf{C}_c^1$ em $W^{1,2}$, resulta que ψ_j converge no sentido fraco a $\psi \in \mathring{W}^{1,2}$.

Pelo teorema de Rellich-Kondrakov (veja apêndice) temos que a inclusão $W^{1,2} \hookrightarrow L^2$ é compacta, i.e, $W^{1,2}$ está incluído de modo compacto em L^2 logo,

- (ii) ψ_j converge no sentido forte em L^2 a $\tilde{\psi}$, em particular $\int_{\Omega} \tilde{\psi} = 1$.

Provemos agora que $\psi = \tilde{\psi}$

Como $W^{1,2} \hookrightarrow L^2$ é compacta também é contínua. Logo, toda forma linear e contínua em $L^2(\Omega)$ é também uma forma linear e contínua em $W^{1,2}(\Omega)$. E dado que convergência forte implica convergência fraca temos:

$$\psi_j \xrightarrow{L^2} \tilde{\psi} \Rightarrow \psi_j \xrightarrow{L^2} \tilde{\psi} \Rightarrow \psi_j \xrightarrow{W^{1,2}} \tilde{\psi}.$$

Então, pela unicidade do limite concluímos que $\psi = \tilde{\psi}$, em particular, $\int_{\Omega} \psi^2 = 1$.

Além disso, também pela convergência fraca tem-se que

$$\|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \liminf_j \|\nabla \psi_j\|_{L^2(\Omega)}^2$$

ou equivalentemente,

$$\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 \omega_0 \leq \liminf_j \int_{\Omega} |\nabla \psi_j|^2 \omega_0,$$

i.e, a energia é semicontínua inferiormente. Consequentemente usando a suavidade de $|A|^2$ e a definição de λ_1 temos,

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\Omega} (|\nabla \psi|^2 - |A|^2 \psi^2)}{\int_{\Omega} \psi^2} &\leq \frac{\liminf_j \left\{ \int_{\Omega} (|\nabla \psi_j|^2 - |A|^2 \psi_j^2) \right\}}{\int_{\Omega} \psi_j^2} \\ &= \lambda_1 \\ &\leq \frac{\int_{\Omega} (|\nabla \psi|^2 - |A|^2 \psi^2)}{\int_{\Omega} \psi^2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\int_{\Omega} (|\nabla \psi|^2 - |A|^2 \psi^2)}{\int_{\Omega} \psi^2} \leq \lambda_1 \leq \frac{\int_{\Omega} (|\nabla \psi|^2 - |A|^2 \psi^2)}{\int_{\Omega} \psi^2}. \quad (2.36)$$

Portanto

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla \psi|^2 - |A|^2 \psi^2)}{\int_{\Omega} \psi^2}, \quad (2.37)$$

em particular, o ínfimo é atingido em ψ .

Para a verificação da equação de Euler $L\psi = \lambda_1\psi$, usaremos uma técnica padrão do cálculo de variações.

Seja θ uma função diferenciável com suporte compacto em Ω e tal que

$$\int_{\Omega} \theta \psi = 0.$$

Claramente

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\int_{\Omega} (\psi + t\theta)^2 \right) = 0,$$

logo,

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\int_{\Omega} (|\nabla \psi + t\theta|^2 - |A|(\psi + t\theta)^2) \right) = 2 \int_{\Omega} (\langle \nabla \psi, \nabla \theta \rangle - |A|^2 \psi \theta),$$

ou seja,

$$2 \int_{\Omega} (\langle \nabla \psi, \nabla \theta \rangle - |A|^2 \psi \theta) = 0.$$

Sendo esta última expressão válida para todo $\theta \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)$ tal que $\int_{\Omega} \psi \theta = 0$.

Em particular, dado $\xi \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)$ escolhamos $\theta = \xi - \psi \int_{\Omega} \xi \psi$ e substituimos na expressão acima obtendo,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\langle \nabla \psi, \nabla \theta \rangle - |A|^2 \psi \theta) \\ &= \int_{\Omega} \left(\langle \nabla \psi, \nabla \xi - \nabla \psi \int_{\Omega} \xi \psi \rangle - |A|^2 \left(\psi \xi - \psi^2 \int_{\Omega} \xi \psi \right) \right) \\ &= \int_{\Omega} (\langle \nabla \psi, \nabla \xi \rangle) - \int_{\Omega} \left(\langle \nabla \psi, \nabla \psi \int_{\Omega} \xi \psi \rangle - |A|^2 \xi \psi + |A|^2 \psi^2 \int_{\Omega} \xi \psi \right) \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\langle \nabla \psi, \nabla \xi \rangle - |A|^2 \psi \xi) &= \int_{\Omega} \left(\langle \nabla \psi, \nabla \psi \int_{\Omega} \xi \psi \rangle - |A|^2 \psi^2 \int_{\Omega} \xi \psi \right) \\ &= \int_{\Omega} \xi \psi \int_{\Omega} \langle \nabla \psi, \nabla \psi \rangle - \int_{\Omega} |A|^2 \psi^2 \int_{\Omega} \xi \psi \\ &= \int_{\Omega} \xi \psi \left(\int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 - |A|^2 \psi^2 \right) \\ &= \lambda_1 \int_{\Omega} \xi \psi. \end{aligned}$$

Temos então

$$\int_{\Omega} (\langle \nabla \psi, \nabla \xi \rangle - |A|^2 \psi \xi) = \lambda_1 \int_{\Omega} \xi \psi \quad (2.38)$$

válida $\forall \xi \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)$. Logo, ψ é uma solução fraca de

$$L\psi = \lambda_1 \psi. \quad (2.39)$$

Escolhendo, em particular, $\xi = \psi$ em (2.38), e pela regularidade dos operadores elípticos, ψ é suave em Ω . Portanto ψ é solução forte de (2.39). Ou seja, o ínfimo é atingido e vale a equação de Euler.

Por último temos que λ_1 é o menor autovalor correspondente ao operador pois se existir qualquer autovalor menor do que este teríamos uma contradição com a definição de λ_1 dada por (2.32). $\square$

Observação 2.3.1. *A partir da demonstração realizada podemos deduzir que*

no caso de um operador de estabilidade do tipo $L = -\Delta + V$ com $V \in C^\infty$ (Operador de Schrödinger) definido num domínio Ω , existe $\psi \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla \psi|^2 + V\psi^2) \omega_0}{\int_{\Omega} \psi^2 \omega_0}. \quad (2.40)$$

Por exemplo, para uma imersão $S \hookrightarrow \widehat{M}$ com $\widehat{M}$ variedade Riemanniana de dimensão $n+1$ e $\Omega \subset S$ relativamente compacto temos

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla \psi|^2 - |A|^2 \psi^2 - \widehat{Ric}_N \psi^2) \omega_0}{\int_{\Omega} \psi^2 \omega_0}. \quad (2.41)$$

Observação 2.3.2. Se a fronteira do domínio Ω for suficientemente regular, i.e, $\partial\Omega \in C^2$ podemos concluir também que $\psi = 0$ em $\partial\Omega$.

Resumo:

A segunda variação do funcional da área $A''(0)$ para a hipersuperfície S pode ser considerada como uma forma quadrática no espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$. E restringindo $J(\phi) := A''(0)$ ao espaço de Sobolev $\dot{W}^{1,2}(\Omega)$ das funções $\phi \in W^{1,2}(\Omega)$ com valores de fronteira nulos, a solução do problema variacional que resulta de minimizar $J(\phi)$ para $\phi \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)$ impondo condição de normalização $\int_{\Omega} \phi^2 dA = 1$ satisfaz o problema

$$\begin{cases} L\phi = \lambda\phi & \text{em } \Omega \\ \phi = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.42)$$

com $\lambda = \lambda_1$ o primeiro autovalor dado por (2.31).

Observação 2.3.3. Como λ_1 é o primeiro e menor autovalor, a sinal da forma quadrática associada ao operador de Jacobi é determinada pela sinal de λ_1 . Com isto, podemos concluir sobre a estabilidade num domínio da hipersuperfície se o primeiro autovalor associado λ_1 for positivo e sobre a estabilidade estrita se este fosse estritamente positivo, ou seja, basta analisar a sinal do primeiro autovalor. Esta observação pode ser resumida na seguinte proposição:

Proposição 2.3.1. Seja S hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $\Omega \subseteq S$ relativamente compacto e L o operador de Jacobi definido em Ω . O domínio Ω é dito estritamente estável se satisfaz que $\lambda_1(L, \Omega) > 0$. Se $\lambda_1(L, \Omega) \geq 0$ então Ω é chamado de estável. Se S for completa, não necessariamente compacta, e se todo $\Omega \subseteq S$ relativamente compacto é estritamente estável dizemos que S

é estritamente estável. Se todo $\Omega \subseteq S$ relativamente compacto é estável S é chamado de estável.

Observação 2.3.4. A proposição acima continua sendo válida para S hipersuperfície dada pela imersão em uma variedade riemanniana $\widehat{M}$ com λ_1 como em (2.41).

Em qualquer caso para um domínio compacto Ω o operador de Jacobi associado possui um número finito de autovalores negativos (veja a proposição 2.3.2 mais adiante). O número de autovalores negativos é definido da seguinte forma:

Definição 2.3.1 (Índice de uma hipersuperfície mínima). *Seja L o operador de Jacobi definido sobre o domínio Ω da hipersuperfície mínima S . O número de autovalores negativos de L em Ω é dito índice de Ω e se denota por $Ind(\Omega)$. Para a hipersuperfície mínima S o índice corresponde ao supremo de todos os índices sobre todos os domínios compactos em S , i.e*

$$Ind(S) := \sup \{Ind(\Omega); \Omega \Subset S\}. \quad (2.43)$$

Observação 2.3.5. Note que se a hipersuperfície S não for compacta o índice de Morse da mesma poderia não ser finito. Para superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$, não necessariamente compactas o caráter do índice ser finito ou não pode ser estudado a partir da curvatura total da superfície o que é mostrado pelo seguinte teorema (veja [12]):

Teorema 2.3.1 (Teorema de Fischer-Colbrie). *Seja S superfície mínima orientável e completa em $\mathbb{R}^3$. Então*

$$Ind(S) < \infty \Leftrightarrow \left| \int_S K dS \right| < \infty. \quad (2.44)$$

Observação 2.3.6. Em uma variedade compacta M o número de autovalores negativos é também finito. Mais precisamente podem ser estabelecidas estimativas para o número de autovalores negativos associados ao operador de Schrödinger definido na mesma (veja [17]).

Observação 2.3.7. A definição de índice de uma hipersuperfície nos fornece de uma outra caracterização de estabilidade: dizemos que uma hipersuperfície é estável se possui índice zero. O inconveniente desta é que a mesma não permite discernir entre a estabilidade ou a estabilidade estrita.

2.3.2

Outras propriedades dos autovalores.

Como já mostramos podemos estabelecer antecipadamente sob hipóteses não muito restritivas a forma do primeiro autovalor. A seguir obtemos a forma explícita dos restantes autovalores.

Teorema 2.3.2. *Seja L o operador de Jacobi definido sobre a hipersuperfície S e λ_1 o seu primeiro autovalor definido por (2.32). Os restantes autovalores correspondentes ao operador L com autofunções associadas $u_k, k \geq 2$ podem ser escritos indutivamente como*

$$\lambda_k = \inf \left\{ \frac{\int (|\nabla \phi|^2 - |A|^2 \phi^2) \omega_0}{\int \phi^2 \omega_0}; \phi \in G_{k-1}^\perp, \phi \neq 0 \right\}; k \geq 2 \quad (2.45)$$

com $G_{k-1} = [u_1, \dots, u_{k-1}]$, i.e., o subespaço gerado pelas $k - 1$ primeiras autofunções, e $u_k \in G_{k-1}^\perp$.

Demonstração.

Seja λ_1 o primeiro autovalor associado ao operador de estabilidade L , dado por (2.32), com u_1 a autofunção onde λ_1 é realizado.

Definamos $G_1 = \mathbb{R}u_1$ o subespaço gerado por u_1 , então, $Lu_1 = \lambda_1 u_1$ e L deixa invariantes aos subespaços G_1 e $G_1^\perp$. Então, tomando o primeiro autovalor sobre o subespaço $G_1^\perp \subset W^{1,2}$, obtemos o nosso segundo autovalor λ_2 com autofunção associada u_2 . Definindo $G_2 = G_1 \oplus \mathbb{R}u_2$ temos $Lu_2 = \lambda_2 u_2$ com L deixando invariantes aos subespaços G_2 e $G_2^\perp$. Repetindo este processo $(k - 2)$ vezes obtemos todos os autovalores associados a nosso problema, os que podem ser escritos em forma crescente segundo

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_k \quad (2.46)$$

assim como suas autofunções associadas que constituem uma base de $W^{1,2}(\Omega)$. $\square$

Esta sequência de autovalores também satisfaz a seguinte propriedade:

Proposição 2.3.2. *Seja $\{\lambda_k\}, k \geq 1$ a sequência de autovalores associados ao operador de Jacobi obtidos em ordem crescente segundo o teorema 2.3.2 então $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ consiste em uma sequência infinita, i.e.,*

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_k \rightarrow +\infty. \quad (2.47)$$

Além disso, $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ é discreto.

Demonstração.

Seja $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ a sequência de autovalores associados ao operador de Jacobi

obtidos em ordem crescente segundo o teorema 2.3.2, então, $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ é limitada ou tende para o infinito.

Suponhamos que a sequência $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ é limitada, i.e,

$$\exists M > 0; \forall k \geq 1, |\lambda_k| \leq M. \quad (2.48)$$

Como $Lu_k = \lambda_k u_k$, $\forall k \geq 1$ temos diretamente da expressão (2.45) e de (2.48) que a sequência de autofunções $\{u_k\}_{k \geq 1}$ é limitada uniformemente com a norma de $W^{1,2}$. Ora $W^{1,2} \hookrightarrow L^2$, com inclusão compacta, então $\{u_k\}_{k \geq 1}$ é também limitada uniformemente com a norma de L^2 . Logo, tomando uma subsequência se for necessário pelo teorema de Arselá-Ascoli, $\{u_k\}_{k \geq 1}$, converge uniformemente com a norma de L^2 . Por conseguinte é de Cauchy nesta norma, i.e

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n, m \geq n_0, \|u_n - u_m\|_{L^2} < \epsilon. \quad (2.49)$$

Por outro lado, como $\{u_k\}_{k \geq 1}$ é uma sequência ortonormal temos

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_{L^2}^2 &= \langle u_n - u_m, u_n - u_m \rangle_{L^2} \\ &= \langle u_n, u_n \rangle_{L^2} - 2\langle u_n, u_m \rangle_{L^2} + \langle u_m, u_m \rangle_{L^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

que contradiz (2.49). Portanto a sequência tende ao infinito.

Além disso como o conjunto dos autovalores consiste em uma sequência crescente infinita cada autovalor é isolado. Portanto, o conjunto de autovalores $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ é discreto. $\square$

A forma de obter a sequência de autovalores segundo o teorema prévio pode resultar um tanto complicada à hora de procurar os autovalores para $k \geq 3$. Isto se deve a que dita construção exige que em cada passo sejam conhecidos o autovalor e autofunção associada do passo precedente. Um modo de evitar esta problemática é dado pelo resultado a seguir, conhecido como teorema de min – max. Estas e outras alternativas tem sido rigorosamente estudadas no capítulo 3 de [3].

Teorema 2.3.3. *Seja $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ o espaço de Sobolev das funções com suporte compacto em Ω . Seja $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ a sequência de autovalores associados ao operador de Jacobi, escritos em ordem crescente. Denotemos por G_k o conjunto de todos os subespaços lineares H_k de $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ de dimensão k . Então o k -ésimo autovalor λ_k , $k \geq 1$ se caracteriza por*

$$\lambda_k(L, \Omega) = \inf_{H_k \subset G_k} \sup \left\{ \frac{\int (|\nabla \phi|^2 - |A|^2 \phi^2) \omega_0}{\int \phi^2 \omega_0}; \phi \in H_k \subset G_k, \phi \neq 0 \right\}. \quad (2.50)$$

Demonstração.

Seja $\{u_1, \dots, u_k\}$ uma base ortonormal de $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ associada aos autovalores $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k$ do operador. Seja $G_k = [u_1, \dots, u_k]$ o subespaço gerado pelas autofunções u_k .

Denotemos o quociente $\frac{\int (|\nabla \phi|^2 - |A|^2 \phi^2) \omega_0}{\int \phi^2 \omega_0}$ por $R_L(\phi)$, ou seja,

$$R_L(\phi) = \frac{\langle L\phi, \phi \rangle}{\langle \phi, \phi \rangle}, \quad (2.51)$$

e definamos

$$I_k := \inf_{H_k \subset G_k} \sup \{R_L(\phi); \phi \in H_k \subset G_k\}.$$

Seja $\tilde{u} \in \mathring{H}_k := \{\phi \in H_k \subset G_k; \phi \neq 0\}$ um elemento qualquer. Então,

$$\tilde{u} = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k, \quad \text{com } a_j = \langle \tilde{u}, u_j \rangle, \forall j = 1, \dots, k.$$

Usando (2.51) e a ortonormalidade de $\{u_1, \dots, u_n\}$ temos que

$$R_L(\tilde{u}) = \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j a_j^2}{\sum_{j=1}^k a_j^2}.$$

Logo, $R_L(\tilde{u}) \leq \lambda_k$, portanto tomando o supremo dos $\tilde{u} \in \mathring{H}_k$ temos

$$\sup_{\tilde{u} \in \mathring{H}_k} \{R_L(\tilde{u})\} \leq \lambda_k, \quad \forall k \geq 1.$$

Como o resultado é válido $\forall k \geq 1$, em particular, vale para o ínfimo sobre todos $\tilde{u} \in H_k \subset G_k, \tilde{u} \neq 0$, i.e,

$$\inf_{H_k \subset G_k} \sup_{\tilde{u} \in H_k} \{R_L(\tilde{u}), \tilde{u} \neq 0\} \leq \lambda_k,$$

ou seja,

$$I_k \leq \lambda_k.$$

Para mostrar a desigualdade contrária notemos que H_k é um subespaço k -dimensional de $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ com Ω de dimensão n , daí

$$\dim \mathring{H}_{k-1}^\perp = n + 1 - k.$$

Consequentemente, existe $\tilde{u} \in \mathring{H}_k \cap \mathring{H}_{k-1}^\perp$, i.e, existe $\tilde{u} \in \mathring{H}_k$ que é ortogonal a cada uma das autofunções $u_j, j = 1, \dots, k-1$. Portanto para $\tilde{u}$ o quociente $R_L(\tilde{u})$ é

$$R_L(\tilde{u}) = \frac{\sum_{j=k}^\infty \lambda_j a_j^2}{\sum_{j=k}^\infty a_j^2}$$

com $a_j = \langle \tilde{u}, u_j \rangle$ como na primeira parte da demonstração. Daí,

$$R_L(\tilde{u}) \geq \inf_{u \in \mathring{H}_{k-1}^\perp} \{R_L(u); u \neq 0\} =: \lambda_k,$$

ou seja, $R_L(\tilde{u}) \geq \lambda_k$ em qualquer subespaço, k -dimensional. Então,

$$\sup_{\tilde{u} \in \mathring{H}_k} \{R_L(\tilde{u}); \tilde{u} \neq 0\} \geq \lambda_k$$

também em qualquer subespaço k -dimensional. Como a desigualdade é válida em qualquer subespaço k -dimensional H_k , segue que $I_k \geq \lambda_k$.

Portanto $I_k = \lambda_k$ como desejado. $\square$

Observação 2.3.8. A notação R_L não foi escolhida ao acaso, para simplificar a escritura, deve-se à notação a partir da qual é definido o quociente de Rayleigh, que para o operador de Jacobi adquire esta forma particular. Mais precisamente,

Definição 2.3.2 (Quociente de Rayleigh). *Seja A um endomorfismo simétrico de um espaço E , definimos o quociente de Rayleigh associado a A para todo $x \in E$ como*

$$R_A := \frac{\langle A(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \text{ para } x \neq 0. \quad (2.52)$$

com $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representando o produto escalar definido no espaço E .

Note que o termo $\langle A(x), x \rangle$ representa uma forma quadrática. Assim, dado que o operador de Jacobi $L = -\Delta_S - |A|^2$ é simétrico, o quociente de Rayleigh para L na hipersuperfície S imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $\Omega \subseteq S$ relativamente compacto se define por

$$R_L(\phi) = \frac{\langle L\phi, \phi \rangle}{\langle \phi, \phi \rangle} = \frac{\int_\Omega (|\nabla \phi|^2 - |A|^2 \phi^2) \omega_0}{\int_\Omega \phi^2 \omega_0} \quad (2.53)$$

como tínhamos usado.

E no caso de uma superfície de $\mathbb{R}^3$ teríamos

$$R_L(\phi) = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla \phi|^2 - 2K\phi^2) \omega_0}{\int_{\Omega} \phi^2 \omega_0}.$$

Com isto a forma do primeiro autovalor (2.32) pode-se reescrever como

$$\lambda_1 = \inf_{\phi \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)} R_L(\phi). \quad (2.54)$$

Para um operador elíptico autoadjunto geral, i.e, um operador simétrico da forma

$$L = \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{ij} + c$$

de maneira semelhante a como foi provado no lema 2.3.1 (veja [16] capítulo 8.12) se prova que o primeiro autovalor num domínio Ω pode ser definido como

$$\lambda_1(L, \Omega) = \inf_{u \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)} R_L(u) \quad (2.55)$$

com $R_L(u)$ o quociente de Rayleigh associado a este operador mais geral. Precisamente a prova do lema 2.3.1 mostra este resultado para $R_L(u)$ definido como em (2.53).

Exemplo 2.3.1. Seja $\mathbb{S}_+^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2, x_3 \geq 0\}$. Procuraremos o primeiro autovalor do operador Laplaciano $\Delta_{\mathbb{S}_+^2}$ em $\mathbb{S}_+^2$.

Note que em este caso o operador elíptico se reduz ao laplaciano sobre $\mathbb{S}_+^2 \subset \mathbb{R}^3$ tomado com sinal negativa.

Sabemos que $\mathbb{S}^2$ tem curvatura média $H = -1$ (veja exemplo 1.1.9) e pela relação (1.48) temos

$$\Delta_{\mathbb{S}_+^2} = \frac{1}{\Lambda^2} \Delta_{\mathbb{C}} \quad (2.56)$$

pois é possível estabelecer uma parametrização conforme de um aberto de $\mathbb{R}^2$ na esfera com fator conforme dado por Λ (veja teorema 1.1.3). Logo, segundo a relação $\Delta X = 2H\Lambda^2 N$ do teorema 1.2.2 tem-se que $\Delta_{\mathbb{S}_+^2} X = -2N$. Assim, com respeito ao vetor unitário normal exterior num ponto $x = (x_1, x_2, x_3)$, $N = (x_1, x_2, x_3)$, a restrição h da função coordenada x_3 a $\mathbb{S}^2$ satisfaz:

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{S}_+^2} h + 2h = 0 & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ h = 0 & \text{em } \partial\mathbb{S}_+^2. \end{cases} \quad (2.57)$$

Então, pelo visto anteriormente para o caso de um operador elíptico qualquer

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}_+^2}, \mathbb{S}_+^2) &= \inf_{h \in C_0^\infty(\mathbb{S}_+^2)} R_{\Delta_{\mathbb{S}_+^2}}(h) \\
 &= \inf_{h \in C_0^\infty(\mathbb{S}_+^2)} \frac{\langle -\Delta_{\mathbb{S}_+^2} h, h \rangle}{\langle h, h \rangle} \\
 &= \inf_{h \in C_0^\infty(\mathbb{S}_+^2)} \frac{-\int_{\mathbb{S}_+^2} h \Delta_{\mathbb{S}_+^2} h dA}{\int_{\mathbb{S}_+^2} h^2 dA} \\
 &= \inf_{h \in C_0^\infty(\mathbb{S}_+^2)} \frac{-\int_{\mathbb{S}_+^2} h(-2h) dA}{\int_{\mathbb{S}_+^2} h^2 dA} = 2.
 \end{aligned}$$

Note que no caso do operador Laplaciano $R_\Delta > 0$ sempre, assim, associado a este operador o primeiro autovalor é sempre estritamente positivo.

Definindo o problema de Dirichlet associado ao operador de Jacobi obtemos a propriedade a seguir a qual desencadeia em mais duas outras propriedades fundamentais na teoria dos autovalores: a propriedade do primeiro autovalor ser simples e a propriedade de monotonicidade dos autovalores.

Lema 2.3.2. *Seja ϕ uma função suave no domínio Ω que satisfaz o problema de Dirichlet para o operador de Jacobi:*

$$\begin{cases} L\phi = \lambda_1 \phi & \text{em } \Omega \\ \phi = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.58)$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor associado a dito operador em Ω . Então ϕ não muda de sinal em Ω .

Demonstração.

Seja ϕ função suave que satisfaz (2.58). Para mostrar que ϕ não muda de sinal provemos que $|\phi| > 0$.

Sabemos que $|\phi|$ é sempre maior do que igual a zero. Suponhamos sem perda de generalidade, por ser ϕ autofunção associada a λ_1 , que $\phi \not\equiv 0$ em Ω .

Como $\phi = 0$ em $\partial\Omega$ então $|\phi|$ também é zero em $\partial\Omega$, e, claramente $|\phi|$ atinge o mínimo em

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 - |A|^2 \phi^2 \omega_0}{\int_{\Omega} \phi^2 \omega_0}.$$

Daí, $|\phi|$ é suave e $L|\phi| = \lambda_1 |\phi|$.

Suponhamos agora por absurdo que existe pelo menos um valor $x \in \Omega$ para

o qual $|\phi| = 0$. Usando a desigualdade de Harnack temos que para toda bola $B_{4r}(x) \subset \Omega$, com $r > 0$ (veja o apêndice)

$$\sup_{B_r(x)} |\phi| \leq c \inf_{B_r(x)} |\phi| = 0 \Rightarrow \sup_{B_r(x)} |\phi| = 0 \Rightarrow |\phi| \equiv 0 \quad \text{em } B_r(x).$$

Como r é qualquer tem-se que $|\phi| \equiv 0$ em Ω o que contradiz a hipótese de ϕ ser não nula. Portanto, $|\phi| > 0$ em Ω e como ϕ é contínua podemos concluir que não muda de sinal. Ou seja, $\phi > 0$ ou $\phi < 0$. $\square$

Observação 2.3.9. *Na demonstração anterior a forma explícita do operador somente foi usada no cálculo do seu primeiro autovalor. Sendo que pela observação 2.3.8 vimos que o primeiro autovalor pode ser obtido de maneira semelhante em caso de operadores elípticos simétricos em geral o resultado acima é válido em estes contextos. Em particular, é válido para o operador Laplaciano.*

Se observarmos a expressão (2.46) determinada pela construção indutiva dos autovalores obtida no teorema 2.3.2, sutilmente deixamos ao descoberto que o primeiro autovalor era simples. Neste momento, a partir do lema anterior, estamos em condição de provar, a rigor, este fato.

Corolário 2.3.1. *O primeiro autovalor associado ao operador de Jacobi é simples.*

Demonstração.

Suponhamos por absurdo que o primeiro autovalor λ_1 associado ao operador de Jacobi tem multiplicidade maior do que um. Então, associado a este temos autofunções ϕ_1, ϕ_2 ortogonais. Pelo resultado precedente podemos assumir que ditas autofunções são estritamente positivas, logo

$$\int_{\Omega} \phi_1 \phi_2 > 0.$$

O que contradiz o fato das autofunções serem ortogonais. Portanto, o primeiro autovalor é simples. $\square$

Como o primeiro autovalor é simples e autofunções associadas a autovalores diferentes são ortogonais resulta que a única autofunção que não muda de sinal é a primeira autofunção, o que enunciaremos como segue.

Corolário 2.3.2. *Seja λ autovalor do operador de estabilidade L e u autofunção associada, ou seja, λ e u são tais que*

$$Lu = \lambda u \quad \text{em } \Omega. \quad (2.59)$$

Se $\lambda \neq \lambda_1$ então u muda de sinal em Ω .

Corolário 2.3.3 (Propriedade de monotonicidade dos autovalores). *Seja L o operador de Jacobi definido na hipersuperfície S . Sejam Ω_0 e Ω_1 dois domínios limitados de S tais que $\Omega_0 \subsetneq \Omega_1$, então*

$$\lambda_1(L, \Omega_0) > \lambda_1(L, \Omega_1).$$

Demonstração.

Pela definição de λ_1 temos imediatamente que

$$\lambda_1(L, \Omega_0) \geq \lambda_1(L, \Omega_1).$$

Suponhamos então que $\lambda_1(L, \Omega_0) = \lambda_1(L, \Omega_1)$ e denotemos por ϕ_0 a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 de L em Ω_0 . Definamos

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \phi_0(x) & x \in \Omega_0 \\ 0 & x \notin \Omega_0. \end{cases}$$

Pelo lema 2.3.1 temos que $L\phi_1 = \lambda_1\phi_1$ em Ω_1 . Ou seja, ϕ_1 é a autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 de L em Ω_1 . Por outro lado por construção ϕ_1 é uma função suave em Ω_1 que se anula em $\partial\Omega_1$. Então, pelo lema 2.3.2 temos que ϕ_1 não muda de sinal em Ω_1 . Por conseguinte podemos supor que $\phi_1 > 0$ em Ω_1 , o que é absurdo pois $\phi_1 = 0$ em $\Omega_1 \setminus \Omega_0$. Portanto,

$$\lambda_1(L, \Omega_0) > \lambda_1(L, \Omega_1). \quad \square$$

Uma outra propriedade importante é a desigualdade de Faber-Krahn que estabelece a comparação para o primeiro autovalor em domínios bem particulares. Esta desigualdade constitui uma motivação aos problemas isoperimétricos veja [3] capítulo 4 parte B ou [8] capítulo 4 onde é amplamente estudada. Neste material a modo de focar em nosso estudo estaremos nos referindo à desigualdade de Faber-Krahn no espaço ambiente $\mathbb{R}^3$ para o operador Laplaciano pois é a versão necessária para a prova do critério de estabilidade de Barbosa-Do Carmo do capítulo 3.

Teorema 2.3.4 (Desigualdade de Faber-Krahn). *Seja Ω um domínio regular da esfera unitária $\mathbb{S}^2$ e seja Ω^* um disco circular com a mesma área que Ω então*

$$\lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^2}, \Omega) \geq \lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^2}, \Omega^*)$$

com $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ o laplaciano em $\mathbb{S}^2$ e a igualdade válida se e somente se Ω for também um disco circular.

Demonstração.

Seja λ_1 o primeiro autovalor associado ao laplaciano $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ no domínio Ω da esfera. Como vimos na observação 2.3.8 $\lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^2}, \Omega)$ pode ser calculado a partir do quociente de Rayleigh associado. Seja ϕ_1 a autofunção correspondente a λ_1 , então

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{S}^2} \phi_1 = \lambda_1 \phi_1 & \text{em } \Omega; \\ \phi_1 = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponhamos que ϕ_1 é positiva em Ω (ϕ_1 não muda de sinal). Além disso, $\phi_1 \in \mathbf{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathbf{C}^\infty(\Omega)$, logo, pelo teorema de Sard o conjunto dos valores críticos de ϕ_1 tem medida zero. Denotemos R_ϕ ao conjunto dos valores regulares de ϕ_1 .

A área do domínio Ω , $A(\Omega) \in \mathbf{C}^0([0, \infty)) \cap \mathbf{C}^\infty(R_\phi)$ pois $\forall x \in \phi_1^{-1}(x) \cap \Omega$ a forma de volume em Ω resulta

$$dA = |\nabla \phi_1|^{-1} dA_{\phi_1^{-1}(x)} dx.$$

com $dA_{\phi_1^{-1}(x)}$ a forma de volume $(n-1)$ -dimensional em $\phi_1^{-1}(x)$. Sejam os conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \{p \in \mathbb{S}^2; |\phi_1(p)| > x\} \\ \Gamma(x) &= \{p \in \mathbb{S}^2; |\phi_1(p)| = x\} \end{aligned}$$

com $x \in R_\phi$ e $\Gamma(x)$ que representa o conjunto de nível de ϕ_1 .

E B_δ a bola de raio δ em $\mathbb{S}^2$ com área A_δ e sua esfera correspondente ∂B_δ com área $A_\delta(\partial B_\delta)$.

Seja $T = \max_\Omega \phi_1$, para $0 \leq x \leq T$ e $\Omega^*(x)$ o disco circular em $\mathbb{R}^3$ de área $A(\Omega^*(x)) = A(\Omega(x))$. Tomando $r(x)$ como o raio de $\Omega^*(x)$ temos

$$A(\Omega(x)) = A(\Omega^*(x)) = A_{r(x)}(\Omega(x)). \quad (2.60)$$

Para $r_0 = r(0)$, em particular, tomemos $\Omega^* = B_{r_0}$.

A função

$$r : [0, T] \rightarrow [0, r_0]$$

é tal que $r(x) \in \mathbf{C}^0([0, T]) \cap \mathbf{C}^\infty(R_\phi \cap (0, T))$ e é estritamente decrescente.

Seja ψ a função inversa de r , i.e,

$$\psi : [0, r_0] \rightarrow [0, T]$$

e definamos

$$\tilde{\phi} = \psi \circ r \quad (2.61)$$

como a aplicação identidade. Com isto, usando (2.60) e (2.61) se verifica que

$$A'(\Omega(x)) = A'_{r(x)}(\Omega(x))r'(x) = A_{r(x)}(\partial\Omega(x))r'(x) \quad (2.62)$$

e

$$\psi'(r(x))r'(x) = 1. \quad (2.63)$$

Por outro lado usando a fórmula da co-área (veja apêndice),

$$A'(\Omega(x)) = - \int_{\Gamma(x)} |\nabla\phi_1|^{-1} dA(\Omega(x)), \quad (2.64)$$

logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} \tilde{\phi}^2 d\tilde{A} &= \int_0^{r_0} \psi^2(r) A_r(\partial\Omega) dr \\ &= - \int_0^T \psi^2(r(x)) A_r(\partial\Omega(x)) r'(x) dx \\ &= - \int_0^T x^2 A'(\Omega(x)) dx \\ &= \int_0^T x^2 \left(\int_{\Gamma(x)} |\nabla\phi_1|^{-1} dA(\Omega(x)) \right) dx \\ &= \int_0^{\sup \Omega \phi_1} \phi_1^2 \left(\int_{\Gamma(x)} |\nabla\phi_1|^{-1} dA(\Omega(x)) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \phi_1^2 dA, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\Omega^*} \tilde{\phi}^2 d\tilde{A} = \int_{\Omega} \phi_1^2 dA, \quad (2.65)$$

e $\forall x \in R_\phi$ (a partir de (2.64):

$$r'(x) = \frac{A'(\Omega(x))}{A_{r(x)}(\partial\Omega(x))} = - \frac{1}{\partial A_{r(x)}(\Omega(x))} \int_{\Gamma(x)} \frac{dA(\Omega(x))}{|\nabla\phi_1|}.$$

Definamos

$$p(x) = \begin{cases} \int_{\Gamma(x)} |\nabla\phi_1| dA(\Omega(x)) & \text{se } x \in R_\phi \\ 0 & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

e lembremos que $A(\Omega) = A(\Omega^*)$. Usando a desigualdade isoperimétrica para o domínio Ω (veja [23]),

$$A(\partial\Omega) \geq A(\Omega) \quad (2.66)$$

obtemos a seguinte desigualdade isoperimétrica entre as áreas das esferas definidas por Ω e Ω^*

$$A(\partial\Omega) \geq A(\Omega) = A(\Omega^*) = A(\partial\Omega^*).$$

Então para $x \in R_\phi$,

$$\begin{aligned}
 -r'(x)p(x) &= \frac{1}{A_{r(x)}(\partial\Omega(x))} \int_{\Gamma(x)} \frac{dA(\Omega(x))}{|\nabla\phi_1|} \int_{\Gamma(x)} |\nabla\phi_1| dA(\Omega(x)) \\
 &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} \frac{dA(\Omega(x))}{|\nabla\phi_1|} \left(\int_{\Gamma(x)} dA(\Omega(x)) \right)^2 = \frac{A^2(\Omega(x))}{A_{r(x)}(\partial\Omega(x))} \\
 &\geq \frac{A^2(\Omega(x))}{A(\partial\Omega)} \geq A(\Omega(x)) = A(\Omega^*(x)) \geq A(\partial\Omega^*(x)) \\
 &= A_{r(x)}(\partial\Omega(x)).
 \end{aligned}$$

Com isto e usando novamente a fórmula da co-área obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |\nabla\phi_1|^2 dA &= \int_0^\infty dx \int_{\Gamma(x)} |\nabla\phi_1| dA(\Omega(x)) \\
 &= \int_0^T p(x) dx \\
 &\geq - \int_0^T \frac{A_{r(t)}(\partial\Omega(x))}{r'(x)} dx \\
 &= - \int_0^T (\psi'(r(x)))^2 A_{r(t)}(\partial\Omega(x)) r'(x) dx \\
 &= \int_0^{r_0} (\psi'(r))^2 A_r(\partial\Omega) dr \\
 &= \int_{\Omega^*} |\nabla\tilde{\phi}|^2 d\tilde{A},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} |\nabla\phi_1|^2 dA \geq \int_{\Omega^*} |\nabla\tilde{\phi}|^2 d\tilde{A}. \quad (2.67)$$

Então por (2.65) e por (2.67) obtemos

$$\int_{\Omega} (2K\phi_1^2 + |\nabla\phi_1|^2) dA \geq \int_{\Omega^*} (2K\tilde{\phi}^2 + |\nabla\tilde{\phi}|^2) d\tilde{A}. \quad (2.68)$$

O que significa que a forma quadrática associada à primeira autofunção em Ω é maior do que igual que a forma quadrática associada à primeira autofunção em Ω^* , logo

$$\lambda_1(\Delta_1, \Omega) \geq \lambda_1(\Delta_1, \Omega^*). \quad (2.69)$$

Ora, se $\lambda_1(\Delta_1, \Omega) = \lambda_1(\Delta_1, \Omega^*)$

$$A(\Omega(x)) = A_{r(x)}(\partial\Omega(x)), \quad \forall x \in R_\phi.$$

Neste caso $\Omega(x)$ é isométrico a $\Omega^*(x)$ pois a igualdade na desigualdade isoperimétrica (2.66) é satisfeita somente se os domínios forem isométricos (veja [23]). Então, como o conjunto dos pontos críticos tem medida nula temos em particular que $\Omega = \Omega(0)$ é isométrico a $\Omega^* = \Omega^*(0)$. Portanto Ω é também

um disco circular. Claramente se Ω é um disco circular os autovalores associados coincidem. $\square$

Observação 2.3.10. *Note que os resultados usados na demonstração acima são válidos em dimensões maiores. Logo, a propriedade pode ser deduzida nestes casos repetindo a mesma análise. Temos então que para um domínio regular da esfera unitária $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$ e Ω^* um disco geodésico com área igual à área de Ω que $\lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^n}, \Omega) \geq \lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^n}, \Omega^*)$. Ou seja, a desigualdade de Faber Krahm continua sendo válida.*

Corolário 2.3.4. *Seja Ω um domínio em $\mathbb{S}^2$. Assumamos que a área de Ω é menor que 2π . então $\lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^2}, \Omega) > 2$.*

Demonstração.

Sabemos pelo exemplo 2.3.1 que $\lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}_+^2}, \mathbb{S}_+^2) = 2$. Além disso como $A(\Omega) < 2\pi$ sendo Ω^* um disco circular que tem a mesma área de Ω temos que $A(\Omega^*) < 2\pi$. O que implica que $\Omega^* \subset \mathbb{S}_+^2$, assim:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^2}, \Omega) &\stackrel{Teo2.3.4}{\geq} \lambda_1(\Delta_{\mathbb{S}^2}, \Omega^*) \\ &\stackrel{corol2.3.3}{>} \lambda_1(\Delta_1, \mathbb{S}_+^2) = 2. \end{aligned} \quad \square$$