

4

Estabilidade do catenoide. Teorema de Lindelöf.

Os critérios mostrados no capítulo anterior foram enunciados de modo geral e podem se aplicar em caso de uma hipersuperfície mínima qualquer. Pretendemos estudar neste capítulo, separadamente, alguns critérios formulados para o caso específico em que a hipersuperfície seja um catenoide. O primeiro é apresentado no ambiente $\mathbb{R}^3$ e está baseado na teoria de Sturm Liouville. Razão pela qual aprofundaremos um pouco as propriedades essenciais dos autovalores associados ao operador de Sturm Liouville. Já o segundo refere-se ao critério obtido a partir do teorema de Lindelöf em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^{n+1}$. O teorema de Lindelöf é estudado de forma independente nos casos de catenoide em $\mathbb{R}^3$ e catenoides em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$. Pois este último caso não constitui uma simples generalização.

4.1

Aplicações da teoria de Sturm Liouville.

Dado o operador de Jacobi para o catenoide de $\mathbb{R}^3$, $L = -\Delta_S + 2K$, usaremos séries de Fourier de modo que o problema se reduza a um problema unidimensional com operador de Sturm Liouville associado

$$L_V(y(t)) := -\ddot{y}(t) + V(t)y(t)$$

com V função contínua de variável real e y função de variável real de classe C^2 . Desta maneira a estabilidade pode ser estudada a partir do operador de Sturm Liouville.

4.1.1

Autovalores associados ao operador de Sturm Liouville.

Começamos por mostrar alguns resultados interessantes da teoria espectral associada ao operador de Sturm Liouville.

As propriedades gerais apresentadas no capítulo 2 válidas serão reescritas neste contexto, porém não repetimos as demonstrações das mesmas.

Definição 4.1.1 (Problemas de autovalores de Dirichlet para o operador de

Sturm Liouville). Seja $V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua real procuramos o par (λ, y) com λ um número real e y função de variável real na classe $\mathbf{C}^2([a, b])$ não identicamente nula tal que:

$$\begin{cases} -\ddot{y}(t) + V(t)y(t) = \lambda y(t) & \text{para } t \in]a, b[\\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Observação 4.1.1. *Pela existência e unicidade das soluções das equações diferenciais lineares como os coeficientes da equação no problema (4.1) são funções contínuas em $]a, b[$ existe uma única solução do problema de Sturm Liouville para as condições iniciais fixadas.*

É claro que o espaço natural no qual se procuram as soluções de (4.1) é:

$$E_2 := \{y \in \mathbf{C}^2([a, b], \mathbb{R}); y(a) = y(b) = 0\}. \quad (4.2)$$

Mas, o operador $L_V := -D^2 + V$ não deixa invariante ao espaço E_2 . E esta condição é necessária para poder obter uma sequência crescente dos autovalores segundo a construção feita na dedução do teorema 2.3.2. Para lidar com este problema vamos introduzir dois novos produtos escalares associados naturalmente aos espaços E_0 e E_1 , definidos a seguir, que correspondem também a produtos escalares em E_2 . Sejam,

E_0 o espaço das funções contínuas em $[a, b]$ que se anulam em a e b :

$$E_0 := \{y \in \mathbf{C}^0([a, b], \mathbb{R}); y(a) = y(b) = 0\}. \quad (4.3)$$

e E_1 o espaço das funções $\mathbf{C}^1$ por partes e contínuas em $[a, b]$ que se anulam em a e b :

$$E_1 := \{y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{seccionalmente } \mathbf{C}^1; y(a) = y(b) = 0\}. \quad (4.4)$$

Consideremos o produto escalar: $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ em qualquer um dos subespaços $E_i, i \in \{0, 1, 2\}$ com sua norma associada $\|\cdot\|_0$, onde

$$\langle u, v \rangle_0 := \int_a^b u(t)v(t)dt. \quad (4.5)$$

Consideremos também o produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ em qualquer um dos subespaços $E_i, i \in \{1, 2\}$ com sua norma associada $\|\cdot\|_1$, onde

$$\langle u, v \rangle_1 := \int_a^b (\dot{u}(t)\dot{v}(t) + u(t)v(t))dt. \quad (4.6)$$

Com isto podemos enunciar o seguinte resultado:

Lema 4.1.1. *O operador de Sturm Liouville é autoadjunto em $(E_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$, i.e.*

$$\langle L_V(u), v \rangle_0 = \langle u, L_V(v) \rangle_0 \quad \forall u, v \in E_2 \quad (4.7)$$

Demonstração.

Usando integração por partes e que u e v se anulam em a e b , obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle L_V(u), v \rangle_0 &= \int_a^b (-\ddot{u}v + V u v) dt \\
 &= -\dot{u}v|_a^b + \int_a^b \dot{u}\dot{v} + \int_a^b V u v dt \\
 &= \int_a^b \dot{u}\dot{v} + \int_a^b V u v dt \\
 &= -\int_a^b u\ddot{v} + \dot{u}\dot{v}|_a^b + \int_a^b V u v dt \\
 &= \int_a^b (-\ddot{v}u + V u v) dt \\
 &= \langle L_V(v), u \rangle_0
 \end{aligned}
 \quad \square$$

Assim, podemos definir o quociente de Rayleigh associado ao operador de Sturm Liouville. Para isto basta tomar o produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ em E_2 .

$$R_{L_V}(y) := \frac{\langle L_V(y), y \rangle_0}{\langle y, y \rangle_0} \quad (4.8)$$

Mais precisamente, logo de fazer integração por partes obtemos:

$$R_{L_V}(y) := \frac{\int_a^b (\dot{y}^2(t) + V(t)y^2(t))dt}{\int_a^b y^2(t)dt} \quad \text{para } y \in E_1, y \neq 0. \quad (4.9)$$

Com forma quadrática associada dada por:

$$J_{L_V}(y) := \int_a^b (\dot{y}^2(t) + V(t)y^2(t))dt \quad \text{para } y \in E_1, y \neq 0. \quad (4.10)$$

Então, podemos reformular em este contexto os resultados da teoria espectral mostrados no capítulo 2 como segue:

Lema 4.1.2 (Primeiro autovalor). *Sejam $L_V = -D^2 + V$ o operador de Sturm Liouville definido em E_2 e*

$$\lambda_1(L_V, E_2) := \inf \{R_{L_V}(y); y \in E_1, y \neq 0\}. \quad (4.11)$$

Então, existe uma função $u_1 \in E_2$ tal que $\|u_1\|_0 = 1$ e $\lambda_1 = R_{L_V}(u_1)$. Além disso, u_1 satisfaz o problema de autovalores de Dirichlet para o operador de Sturm-Liouville com autovalor λ_1 , i.e.,

$$\begin{cases} L_V(u_1) = \lambda_1 u_1 \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Teorema 4.1.1 (Construção indutiva dos autovalores.). *Sejam L_V o operador de Sturm Liouville definido em E_2 e λ_1 o primeiro autovalor definido por (4.11). Então, o resto dos autovalores com autofunções associadas $u_k, k \geq 2$ podem ser escritos indutivamente como*

$$\lambda_k := \inf \{R_{L_V(y)}; y \in G_k^\perp \subset E_1, y \neq 0\} \quad k \geq 2 \quad (4.12)$$

com $G_{k-1} = [u_1, \dots, u_{k-1}]$ o subespaço gerado pelas $k-1$ primeiras autofunções e $u_k \in G_{k-1}^\perp$.

Esta construção permite que os autovalores sejam escritos em ordem estritamente crescente segundo:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k \quad (4.13)$$

com autofunções associadas u_k que formam uma base ortonormal de E_2 . O fato da ordem ser estritamente crescente é dado pela unicidade da solução do problema de Sturm Liouville (veja observação 4.1.1). Além disso,

Proposição 4.1.1 (Sequência de autovalores discreta.). *A sequência $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ de autovalores associados ao operador de Sturm Liouville formam um conjunto discreto que tende para o infinito.*

Teorema 4.1.2 (Caracterização min-max). *Seja G_k o conjunto de todos os subespaços lineares H_k de dimensão k do espaço E_1 das funções seccionalmente $\mathbf{C}^1$ em $[a, b]$ que se anulam em a e b . Seja $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ a sequência de autovalores associados ao operador de Sturm Liouville definido em E_2 escritos em ordem crescente. Então o k -ésimo autovalor se caracteriza por*

$$\lambda_k(L_V, E_2) = \inf_{H_k \subset G_k} \sup \{R_{L_V(y)}; y \in H_k \subset G_k, y \neq 0\}. \quad (4.14)$$

Ora, para o operador de Sturm Liouville, em particular, são satisfeitas as seguintes propriedades:

Proposição 4.1.2. *Sejam $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ os autovalores do problema de Dirichlet (4.1) para o operador de Sturm Liouville tomados em ordem crescente dados pelo teorema 4.1.1. Seja $\{u_k\}_{k \geq 1}$ a correspondente sequência ortonormal de autofunções associadas aos ditos autovalores. Então u_k tem exatamente $k-1$ zeros em $]a, b[$.*

Demonstração.

Afirmção 1: A autofunção u_k associada ao autovalor λ_k tem no máximo $k-1$ autovalores em $[a, b]$.

Suponhamos que $u_k \not\equiv 0$ e seja $z \in [a, b]$ um zero de u_k , i.e, $u_k(z) = 0$. Pela unicidade da solução do problema de Cauchy para equações diferenciais de

segunda ordem $\dot{u}_k(z) \neq 0$ pois caso contrário a função u_k seria identicamente nula o que contradiz a hipótese. Daí, u_k possui um número finito de zeros em $[a, b]$.

De fato, se existe uma sequência z_n de zeros de u_k tais que $z_n \rightarrow z$ e $0 = u_k(z_n) \rightarrow u_k(z) = 0$. Então, existe sequência $\{w_n\}$ com $w_n \in (z, z_n) \forall n$ tal que $\dot{u}_k(w_n) = 0$ e $w_n \rightarrow z$. Logo, $\dot{u}_k(w_n) \rightarrow \dot{u}_k(z)$ e por conseguinte $\dot{u}_k(z) = 0$ e $u_k(z) = 0$ o que é impossível.

Claramente, u_k muda de sinal toda vez que se anule em $[a, b]$. Sejam $z_0 := a < z_1, \dots, z_m < z_{m+1} := b$ os zeros de u_k assumamos que $k \leq m$. Para $1 \leq j \leq k$ definamos v_j pelas relações:

$$\begin{cases} v_j(t) = u_k(t) & \text{em } t \in [z_{j-1}, z_j] \\ v_j(t) = 0 & \text{em } t \notin [z_{j-1}, z_j] \end{cases} \quad (4.15)$$

A função $v := \sum_{j=1}^k a_j v_j$ pertence a E_1 e é identicamente nula no conjunto $z_k < t < b$. Os coeficientes $a_j, j = 1, 2, \dots, k-1$, podem ser escolhidos de modo que v seja ortogonal às autofunções $u_1, \dots, u_{k-1}$ e v não identicamente nula.

Também temos que $R_{L_V}(v) = \lambda_k$ pois v é ortogonal a todos os u_j salvo quando $j = k$. Em detalhes,

$$\begin{aligned} R_{L_V}(v) &= \frac{\langle L_V(v), v \rangle_0}{\langle v, v \rangle_0} \\ &= \frac{\langle L_V(\sum_{j=1}^k a_j v_j), \sum_{j=1}^k a_j v_j \rangle_0}{\langle \sum_{j=1}^k a_j v_j, \sum_{j=1}^k a_j v_j \rangle_0} \\ &= \frac{\langle L_V(a_k u_k), a_k u_k \rangle_0}{\langle a_k u_k, a_k u_k \rangle_0} \\ &= \frac{\langle L_V(u_k), u_k \rangle_0}{\langle u_k, u_k \rangle_0} \\ &= \lambda_k. \end{aligned}$$

Daí, obtemos que v é autofunção associada ao autovalor λ_k , logo, satisfaz a equação diferencial:

$$-\ddot{v}(t) + V(t)v(t) - \lambda_k v(t) = 0$$

e se anula num conjunto aberto ($\{t; z_k < t < b\}$). Pela unicidade da solução do problema de Cauchy v teria que ser identicamente nula. Isto contradiz a definição dada para v . Portanto $m < k$, ou seja, temos ao sumo $k-1$ zeros para a autofunção.

Afirmção 2: A autofunção u_k associada ao autovalor λ_k tem como mínimo

$k - 1$ zeros em $[a, b]$.

Afirmção 2.1: Se a autofunção w associada ao autovalor λ_{k-1} possui dois zeros consecutivos α, β , então, a autofunção u_k associada ao autovalor λ_k tem um zero no intervalo $] \alpha, \beta [$.

De fato, assumamos u_k não se anula em $] \alpha, \beta [$. Podemos supor, então, que w e u_k são positivas neste intervalo. Em outro caso escolhemos $-u_k, -w$ que também são autofunções associadas aos mesmos autovalores associados a u_k e w . Consideremos o Wronskiano de ditas autofunções

$$W(t) := W(u_k, w)(t) := u_k(t)\dot{w}(t) - w(t)\dot{u}_k(t). \quad (4.16)$$

Como u_k y w correspondem a autovalores diferentes são linearmente independentes. Assim o Wronskiano não se anula e vai manter a sinal no intervalo em que é definido. Logo, as autofunções não possuem zeros em comum. Consequentemente:

$$\dot{W}(t) = u_k(t)\ddot{w}(t) - w(t)\ddot{u}_k(t) = u_k(t)w(t)(\lambda_k - \lambda_{k-1}) > 0 \quad (4.17)$$

onde a última desigualdade é válida pois $u_k, w > 0$ e $\lambda_k > \lambda_{k-1}$. O fato de $\lambda_k > \lambda_{k-1}$ é dado porque os autovalores para este problema são diferentes (veja a observação 4.1.2 que segue à prova) junto com a propriedade dos autovalores serem escritos em ordem crescente. Obtemos, então, que a função Wronskiano é estritamente crescente.

Por outra parte, avaliando em α e β e notando que $\dot{w}$ é contínua e w possui um zero em α e em β temos que $\dot{w}$ muda de sinal. Suponhamos que $\dot{w}(\alpha) > 0$ e $\dot{w}(\beta) < 0$, daí segue que,

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= u_k(\alpha)\dot{w}(\alpha) - w(\alpha)\dot{u}_k(\alpha) = u_k(\alpha)\dot{w}(\alpha) > 0 \\ W(\beta) &= u_k(\beta)\dot{w}(\beta) - w(\beta)\dot{u}_k(\beta) = u_k(\beta)\dot{w}(\beta) < 0 \end{aligned}$$

O que contradiz que o Wronskiano é estritamente crescente como obtivemos em (4.17).

Para concluir a afirmação 2 prosseguimos por indução:

Pela primeira afirmação a autofunção associada ao autovalor k -ésimo tem ao sumo $k - 1$ zeros no intervalo $]a, b[$. Logo, a autofunção u_1 não possui zeros no intervalo $]a, b[$. A autofunção u_2 é ortogonal a u_1 então deve se anular pelo menos uma vez no intervalo. Certamente pela afirmação 1 vai se anular exatamente uma vez. Assumamos agora, como hipótese de indução, que a autofunção u_{k-1} se anula $k - 2$ -vezes em $]a, b[$, então, u_k deve-se anular pelo menos uma vez no intervalo definido por dois zeros consecutivos de u_{k-1} incluindo os extremos a e b . Logo, vai ter pelo menos $k - 1$ zeros.

Juntando as afirmações 1 e 2 obtemos o resultado desejado. $\square$

Observação 4.1.2. *Note que na dedução precedente definimos a sequência de autovalores como simples. Isto não exclui caso algum pois o problema de autovalores de Dirichlet para o operador de Sturm Liouville tem solução única (observação 4.1.1). Logo, sendo o par (λ_k, u_k) uma solução não trivial do problema tem-se que u_k é única salvo uma constante multiplicativa, i.e os autovalores do problema de Dirichlet são simples. Este resultado não é válido para operadores mais gerais onde temos possibilidade de autovalores repetidos (veja o corolário 2.3.1 do capítulo 2 onde estabelecemos a não multiplicidade somente no caso do primeiro autovalor ou [3]).*

Proposição 4.1.3. *Seja L_V o operador de Sturm Liouville definido em $[a, b]$ como*

$$L_V(y) := -\ddot{y} + V y$$

com $V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponhamos que existe alguma função $\omega \geq 0, \omega \not\equiv 0$ tal que $L_V(\omega) = 0$ em $[a, b]$. Então os autovalores do problema de Dirichlet em $[a, b]$ não são negativos. Além disso se $\omega(a) > 0$ ou $\omega(b) > 0$ os autovalores são positivos.

Demonstração.

Afirmção: Se existe $w \geq 0, w \not\equiv 0$ tal que $L_V(w) = 0$ em $[a, b]$ então $w > 0$ em (a, b) .

De fato, seja $w \geq 0, w \not\equiv 0$. Suponhamos que existe $p \in (a, b)$ tal que $w(p) = 0$ daí $\dot{w}(p) = 0$. Logo, pela unicidade das equações diferenciais ordinárias $w \equiv 0$ em (a, b) o que é impossível.

Assumamos agora que existe um autovalor negativo do problema de Dirichlet para L_V em $[a, b]$. Então, dado que sempre é possível tomar uma ordem crescente para os autovalores o menor autovalor λ_1 é negativo ($\lambda_1 < 0$). Tomemos uma autofunção r associada a dito autovalor tal que $r(a) = r(b) = 0$ (o que é possível pelas condições de fronteira preestabelecidas no problema de Dirichlet associado), e $r > 0$ em $]a, b[$, daí $\dot{r}(a) > 0$ e $\dot{r}(b) < 0$. Consideremos agora o Wronskiano de r e ω :

$$W(t) := \omega(t)\dot{r}(t) - r(t)\dot{\omega}(t)$$

então

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= -(r(t)\ddot{\omega}(t) - \omega(t)\ddot{r}(t)) \\ &= -\lambda_1 r(t)\omega(t) > 0, \end{aligned} \tag{4.18}$$

pois $\lambda_1 < 0$, $r(t) > 0$, $\forall t \in (a, b)$ e $w(t) > 0$, $\forall t \in (a, b)$.

Daí, W é estritamente crescente, logo $W(b) > W(a)$.

Por outro lado,

$$\begin{cases} W(a) = \omega(a)\dot{r}(a) - r(a)\dot{\omega}(a) = \omega(a)\dot{r}(a) \geq 0 \\ W(b) = \omega(b)\dot{r}(b) - r(b)\dot{\omega}(b) = \omega(b)\dot{r}(b) \leq 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

O que contradiz o resultado obtido acima. Portanto, os autovalores não são negativos.

Assumamos agora que $\lambda_1 = 0$ e que $\omega(a) > 0$ ou $\omega(b) > 0$. Segue de (4.18) que $W(t)$ é constante, por conseguinte $W(b) = W(a) = 0$. Se $\omega(a) > 0$ então segue de (4.19) que $W(a) > 0$ e $W(b) \leq 0$ o que produz uma contradição. Se $\omega(b) > 0$ então segue de (4.19) que $W(a) \geq 0$ e $W(b) < 0$ o que também contradiz o resultado anterior. Portanto os autovalores são todos positivos. $\square$

Aplicações aos Catenoides em $\mathbb{R}^3$.

Façamos o estudo da estabilidade de domínios simétricos do catenoide a partir do operador de Sturm Liouville associado. Na próxima seção este resultado será demonstrado de uma outra maneira fazendo uso do Teorema de Lindelöf.

Tomemos a família de catenoides como no exemplo 1.1.6:

$$\begin{aligned} C_a : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, au) \end{aligned} \quad (4.20)$$

com $a > 0$.

Definamos para esta família de catenoides o Operador de Jacobi: $L_a = -\Delta_{C_a} + 2K_a$ com Δ_a o operador de Laplace-Beltrami da família e K_a a curvatura intrínseca para a métrica induzida na família.

Procuremos agora a forma explícita do operador num sistema de coordenadas locais (u, v) .

Sabemos que o operador de Laplace Beltrami se relaciona com o Laplaciano usual segundo $\Delta_{C_a} = \frac{1}{\Lambda^2} \Delta$ com Λ o fator conforme da métrica induzida (equação (1.48)). Pelo exemplo 1.1.6 do capítulo 1 temos que para a família de catenoides, $E = G = a^2 \cosh^2 u$, $F = 0$ e $\Lambda^2 = W = a^2 \cosh^2 u$. Além disso $K_a = -\frac{2}{a^2 \cosh^4 u}$, logo, o operador de Jacobi pode ser escrito explicitamente como

$$L_a = -\frac{1}{a^2 \cosh^2 u} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) - \frac{2}{a^2 \cosh^4 u}. \quad (4.21)$$

Consideremos o domínio $C_{a,T}$ simétrico da família de catenoides definido para $T > 0$ por

$$C_{a,T} := C_a([-T, T] \times [0, 2\pi]) \quad (4.22)$$

e o problema de autovalores para L_a com condições de fronteira em $C_{a,T}$:

$$\begin{cases} L_a(\phi) = \lambda\phi & \text{em } C_{a,T} \\ \phi = 0 & \text{em } \partial C_{a,T}. \end{cases} \quad (4.23)$$

Sob estas condições enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 4.1.3. *Seja $L_a = -\Delta_a + 2K_a$ o operador de Jacobi com condições de fronteira em $C_{a,T}$ e seja T_0 o zero positivo da equação $u \tanh u = 1$. Então:*

- (i) *Para $0 < T < T_0$ o operador L_a tem somente autovalores positivos, daí o domínio $C_{a,T}$ é estritamente estável.*
- (ii) *Para $T = T_0$ o operador L_a é não negativo e tem o zero como autovalor simples, logo dizemos que o domínio C_{a,T_0} é estável.*
- (iii) *Para $T > T_0$ o operador L_a tem exatamente um valor próprio negativo e o resto positivos. Dizemos que $C_{a,T}$ é instável e tem índice 1.*

Demonstração.

Afirmção: Para o problema (4.23) temos que os autovalores são decrescentes em T e positivos para T pequeno.

De fato, pela caracterização dos autovalores dada no teorema 4.1.2, como todos os autovalores podem ser calculados a partir do ínfimo se o domínio aumenta então o ínfimo diminui. Por outro lado para T suficientemente pequeno se garante a propriedade de monotonicidade dos autovalores dada no corolário 2.3.3 e $\lambda_1(L_a, C_{a,T}) > 0$.

Então, vamos procurar o valor de T para o qual os autovalores podem passar de um valor positivo para um valor negativo. Nos parâmetros (u, v) escrevemos (4.23) no domínio $C_{a,T}$ como:

$$-\frac{1}{a^2 \cosh^2 u} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) (\phi(u, v)) - \frac{2(\phi(u, v))}{a^2 \cosh^4 u} = \lambda(\phi(u, v)) \quad (4.24)$$

ou equivalentemente:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) (\phi(u, v)) + \frac{2(\phi(u, v))}{a^2 \cosh^2 u} + \lambda a^2 \cosh^2 u (\phi(u, v)) = 0 \quad (4.25)$$

com $\phi(-T, v) = \phi(T, v) = 0$.

Assumamos que para um T dado o problema tem um autovalor λ negativo com autofunção associada $\phi(u, v)$ (pois estamos a estudar o valor de T para o qual a sinal muda).

Fixando u e desenvolvendo $\phi(u, v)$ em série de Fourier na variável v ,

$$\phi(u, v) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \phi_p(u) e^{ipv}. \quad (4.26)$$

Usando a forma alternativa (4.25) para o problema nas coordenadas (u, v) podemos observar que:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \phi_p(t) e^{ipv} + \lambda a^2 \cosh^2 u \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \phi_p(t) e^{ipv}\right) = 0 \quad (4.27)$$

ou seja, o coeficiente ϕ_p satisfaz a equação:

$$\ddot{\omega}(u) + \left(\frac{2}{a^2 \cosh^2 u} - p^2\right) \omega(u) + \lambda a^2 \cosh^2 u \omega(u) = 0 \quad \text{em }]-T, T[\quad (4.28)$$

com condições de fronteira $\omega(-T) = \omega(T) = 0$.

Introduzimos operadores de tipo Sturm Liouville a partir de (4.28) dados por:

$$L_p(u) := -\ddot{\omega}(u) + \left(p^2 - \frac{2}{a^2 \cosh^2 u}\right) \omega(u) \quad (4.29)$$

com condição de fronteira de Dirichlet em $]-T, T[$. Então, o problema tem valor próprio negativo se e somente se a equação (4.28) tem solução ϕ_p não trivial para algum valor p .

Para examinar os valores próprios do problema consideremos a forma quadrática associada a L_p dada por:

$$J_p(\omega) := \langle L_p(\omega), \omega \rangle = \int_{-T}^T (\dot{\omega}^2(u) + (p^2 - \frac{2}{a^2 \cosh^2 u}) \omega^2(u)) du. \quad (4.30)$$

Esta é, claramente, positiva para $|p| \geq 2$. Nesse caso os autovalores obtidos seriam todos positivos. Portanto, somente temos que estudar o que acontece quando $p = 0$ ou $p = 1$. Pois seriam as únicas possibilidade de ter autovalor negativo. Para fazer em detalhes este estudo precisamos do seguinte lema prévio.

Lema 4.1.3. *Sejam as funções $k_z(u) := \tanh u$, $k_h(u) := \frac{1}{\cosh u}$ e $k_a(u) := 1 - u \tanh u$. Então,*

- (i) *A função k_z é positiva em $]0, \infty[$ e satisfaz $L_0(k_z) = 0$.*
- (ii) *A função k_h é positiva em $\mathbb{R}$ e satisfaz $L_{\pm 1}(k_h) = 0$.*
- (iii) *A função k_a tem exatamente um zero T_0 em $]0, \infty[$ e satisfaz $L_0(k_a) = 0$, $k_a(0) = 1$ e $\dot{k}_a(0) = 0$.*

Demonstração.

Veja as figuras que seguem à demonstração.

(i) Seja $k_z(u) := \tanh u$.

No intervalo $]0, \infty[$ sabemos que por sua definição $k_z(u)$ é positiva. Por outro

lado,

$$\begin{aligned} L_0(k_z) &= -\ddot{k}_z(u) - \frac{2}{\cosh^2 u} k_z(u) \\ &= -\left(-\frac{2}{\cosh^2 u} \tanh u\right) - \frac{2}{\cosh^2 u} \tanh u = 0 \end{aligned}$$

(ii) Seja $k_h(u) := \frac{1}{\cosh u}$.

Por sua definição $k_h(u)$ é positiva em $\mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} L_{\pm 1}(k_h) &= -\ddot{k}_h(u) + \left(1 - \frac{2}{\cosh^2 u}\right) k_h(u) \\ &= -\frac{1}{\cosh u} \left(1 - \frac{2}{\cosh^2 u}\right) + \left(1 - \frac{2}{\cosh^2 u}\right) \frac{1}{\cosh u} = 0 \end{aligned}$$

(iii) Seja $k_a(u) := 1 - u \tanh u$

$$\dot{k}_a(u) = -\left(\tanh u + u \frac{1}{\cosh^2 u}\right)$$

Ora, $\tanh u > 0$ sempre no intervalo $]0, \infty[$ e igual do que zero se e somente se $u = 0$. O termo $\tanh u + u \frac{1}{\cosh^2 u} \geq 0$ sempre, tomando o valor zero somente se $u = 0$. Logo, $\dot{k}_a(u) \leq 0 \quad \forall u \in [0, \infty[$ e $\dot{k}_a(u) = 0$ se e somente se $u = 0$ assim $k_a(u)$ é estritamente decrescente em $]0, \infty[$. Além disso é contínua e $k_a(0) = 1 > 0$, logo, $k_a(u)$ possui exatamente um zero em $]0, \infty[$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} L_0(k_a) &= -\ddot{k}_a(u) + \left(-\frac{2}{\cosh^2 u}\right) k_a(u) \\ &= \frac{2}{\cosh^2 u} (1 - u \tanh u) + \left(-\frac{2}{\cosh^2 u}\right) (1 - u \tanh u) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

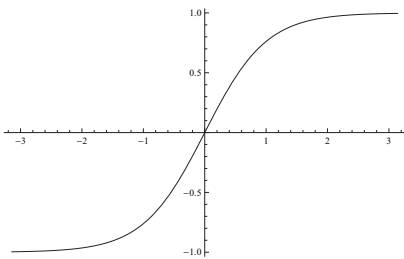


Figura 4.1: $k_z(u) = \tanh u$.

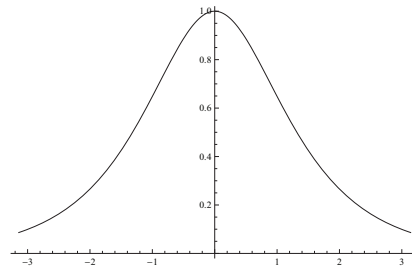
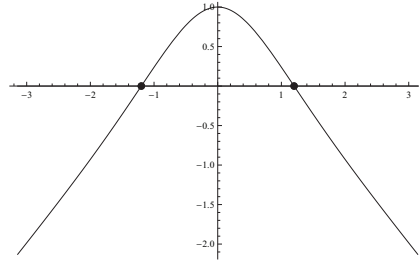


Figura 4.2: $k_h(u) = \frac{1}{\cosh u}$.

Figura 4.3: $k_a(u) = 1 - u \tanh u$.

Tendo introduzidos estes resultados retomemos a prova do teorema.

Analisemos primeiramente $L_0(L_p; p = 0)$:

Para o valor próprio zero temos k_a como a primeira autofunção que satisfaz o problema pois $L_0(k_a) = 0$ em $[-T_0, T_0]$ e $k_a(-T_0) = k_a(T_0) = 0$. Logo, pela monotonicidade estrita dos autovalores para o operador de Sturm Liouville $L_0(\omega)$ concluímos que L_0 é positivo em $[-T, T]$ para $T < T_0$. Como $J_p \geq J_0 > 0$ vamos ter somente autovalores positivos para todo p no intervalo $[-T, T]$ com $T < T_0$. Então, para $0 < T < T_0$ temos estabilidade estrita, completando a prova de (i).

Por outro lado sabemos que L_p para $|p| \geq 2$ é positivo. Afirmamos que $L_{\pm 1}$ é também positivo. De fato, tomando a função k_h que é positiva em $\mathbb{R}$ e satisfaz $L_{\pm 1}(k_h) = 0$ pela proposição 4.1.3 obtemos que $L_{\pm 1}$ é positivo. Então, associado a estes operadores somente podemos ter autovalores positivos. Segue que os autovalores negativos podem estar associados somente a L_0 , i.e, a autofunção correspondente vai ser uma função radial, o único coeficiente no nulo da série de Fourier seria ϕ_0 . Pelo mostrado anteriormente para $T = T_0$ obtemos o autovalor $\lambda = 0$ associado ao operador L_0 com autofunção k_a e para os restantes valores de p , L_p é positivo, assim L_p é não negativo em $T = T_0$ e o autovalor é simples. Portanto, para $T = T_0$ somente se garante a estabilidade.

Finalmente, temos que os autovalores são decrescentes em T e positivos quando T é pequeno. Além disso pelos resultados anteriores para $T \leq T_0$ temos somente autovalores não negativos. Logo, para $T > T_0$ deve existir pelo menos um autovalor negativo pois o problema possui autovalores negativos para soluções não triviais. Para provar que existe exatamente um autovalor negativo assumamos que para $T_0 \in]-T, T[$ o operador tem pelo menos dois autovalores negativos. Uma autofunção associada ao segundo autovalor negativo pela proposição 4.1.2 possui exatamente um zero no intervalo $]-T, T[$. Tomando k_z pela proposição 4.1.3 obtemos que os autovalores são positivos

o que é uma contradição. Portanto, existe exatamente um autovalor negativo daí o índice do domínio $C_{a,T}$ da família de catenoides é 1. $\square$

4.2

Teorema de Lindelöf em $\mathbb{R}^3$.

Os resultados obtidos por Lindelöf são relevantes pois a estabilidade pode ser estudada a partir de uma construção geométrica conhecida como construção de Lindelöf. A construção geométrica de Lindelöf é dada no ambiente $\mathbb{R}^3$ e se descreve como segue.

Seja C o catenoide em $\mathbb{R}^3$ correspondente à família definida no exemplo 1.1.6 para $a = 1$. Seja $c = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2; z = \cosh x\}$ sua catenária geratriz (tomamos a catenária vertical para uma maior visualização da construção, veja figura 4.4). Seja A um ponto de c qualquer traçamos a tangente a c em A e tomemos a I como o intercepto desta tangente com o eixo $z = 0$ (o eixo sobre o qual será feita a revolução). Então, a partir de I traçamos a segunda tangente a c . Denotemos por B o novo ponto de tangência obtido.

Segundo esta construção vemos como o arco $\widehat{AB}$ gera um domínio maximal de estabilidade (definição 2.2.2) sobre C . Do que se pode concluir que o semicatenóide superior de $\mathbb{R}^3$ corresponde a um domínio maximal de estabilidade.

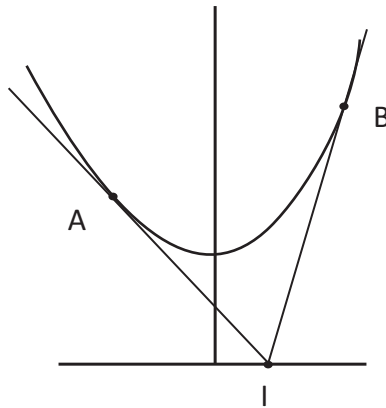


Figura 4.4: Construção de Lindelöf.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Lindelöf em $\mathbb{R}^3$). *Seja T_0 o zero positivo da função $e(u) = 1 - u \tanh u$, então*

- (i) *O domínio $\tilde{C}_{T_0} := C([-T_0, T_0] \times [0, 2\pi])$ é um domínio maximal de estabilidade do catenoide C .*
- (ii) *O domínio $\tilde{C}_+ := C([0, \infty[\times [0, 2\pi])$ é um domínio maximal de estabilidade invariante por rotação no catenoide C . Mais precisamente, dado $\alpha > 0$ qualquer, a função*

$$e(\alpha, u) = v(\alpha)e(u) + e(\alpha)v(u) \quad (4.31)$$

com $v(u) = \tanh(u)$ tem um único zero positivo $\beta(\alpha)$ e o domínio $\tilde{C}_{\alpha, \beta} := C([- \alpha, \beta(\alpha)[\times [0, 2\pi])$ é um domínio maximal de estabilidade invariante por rotação no catenoide C .

Observação 4.2.1. O teorema acima é também válido para qualquer membro da família de catenoides C_a . Além disso, note que o item (i) se corresponde com o teorema 4.1.3 da seção anterior. Naquele momento a análise foi feita a partir de caracterizações sobre os autovalores sem entrar em detalhes sobre a função $e(u)$. Agora, é apresentado novamente com o intuito de mostrar como podemos obter diretamente domínios maximais de estabilidade. Para sua demonstração usaremos o fato de $e(u)$ ser um campo positivo do catenoide e a propriedade dada na proposição 3.6.1. O enfoque a partir de campos de Jacobi é o que permite enunciar o item (ii) a diferença do teorema anterior.

Demonstração.

(i) Segundo o exemplo 3.6.2 $e(u) = 1 - u \tanh u$ é um campo de Jacobi em C . Como T_0 é o zero positivo de e temos que

$$\begin{cases} L(e) = 0 & \text{em } \tilde{C}_{T_0} \\ e = 0 & \text{em } \partial\tilde{C}_{T_0}. \end{cases}$$

Daí $\lambda_1(L, \tilde{C}_{T_0}) = 0$, logo $\tilde{C}_{T_0}$ é um domínio maximal de estabilidade de C .

(ii) Seja $v(u) = \tanh u$. Temos que v é positiva no interior de $\tilde{C}_+$. Logo v é um campo de Jacobi positivo. Daí, pelo lema 3.6.1 concluímos que $\tilde{C}_+$ é um domínio estável do catenoide.

Tomando $\alpha > 0$, dado que $e(u) = 1 - u \tanh u$ e $v(u) = \tanh u$ são campos de Jacobi temos pela proposição 3.6.1 que

$$e(\alpha, u) = v(\alpha)e(u) + e(\alpha)v(u)$$

é também um campo de Jacobi.

Analisemos os zeros de esta função e os domínios de estabilidade que determinam:

Para $u = -\alpha$ com α fixado dado que a função $\tanh u$ é ímpar temos que

$e(\alpha, -\alpha) = 0$. Por outro lado resulta que $e(\alpha, \pm\infty) = -\infty$ e

$$\begin{aligned}\frac{\partial e}{\partial u}(\alpha, -\alpha) &= v(\alpha)e'(-\alpha) + e(\alpha)v'(\alpha) \\ &= \tanh \alpha \left(\frac{\alpha}{\cosh^2 \alpha} + \tanh \alpha \right) + (1 - \alpha \tanh \alpha) \left(\frac{1}{\cosh^2 \alpha} \right) \\ &= \frac{\sinh^2 \alpha + 1}{\cosh^2 \alpha} \neq 0.\end{aligned}$$

Assim a função $e(\alpha, \cdot)$ deve possuir um outro zero $\beta(\alpha) \neq -\alpha$.

Afirmamos que $\beta(\alpha) > 0$. De fato, $e(\alpha, \cdot)$ não possui dois zeros positivos nem dois zeros negativos.

Suponhamos que possui dois zeros u_1, u_2 positivos. Sejam u_1, u_2 tais que $0 < u_1 < u_2$, então, o domínio $C([u_1, u_2] \times [0, 2\pi])$ do catenoide poderia ser estável e tal que

$$L(e(\alpha, u)) = 0 \quad \forall u \in [u_1, u_2]$$

ou seja, $\lambda_1(L, [u_1, u_2]) = 0$. Mas,

$$C([u_1, u_2] \times [0, 2\pi]) \subset \tilde{C}_+,$$

logo, pelo lema 3.3.1 $C([u_1, u_2] \times [0, 2\pi])$ é estritamente estável. Analogamente se supomos que possui dois zeros negativos a análise seria a mesma desde que

$$\tilde{C}_- := C(]-\infty, 0[\times [0, 2\pi])$$

é também estável, o que pode ser demonstrado escolhendo $-v$ ao invés de v . Portanto, a função possui somente um zero positivo e um zero negativo que correspondem a $-\alpha$ e $\beta(\alpha)$ respectivamente. Usando o mesmo argumento do item anterior, agora para o domínio $[-\alpha, \beta(\alpha)]$ concluímos que 0 é o menor autovalor do operador de Jacobi no domínio $\tilde{C}_{\alpha, \beta}$. Assim, este domínio é um domínio maximal de estabilidade sobre os domínios invariantes por rotações. Pelo visto acima temos que $\tilde{C}_+$ é um domínio estável do catenoide. Suponhamos agora que não é um domínio maximal de estabilidade. Ou seja, podemos puxar um pouco este domínio e continuamos tendo estabilidade. Assim, como $\alpha > 0$ qualquer temos que o domínio $C(]-\alpha, +\infty[\times [0, 2\pi])$ é um domínio estável. O que contradiz o fato de ser $\tilde{C}_{\alpha, \beta}$ um domínio maximal de estabilidade. Logo, $\tilde{C}_+$ é um domínio maximal de estabilidade invariante por rotação no catenoide C . $\square$

4.3

Teorema de Lindelöf em $\mathbb{R}^{n+1}$.

4.3.1

Catenoides em $\mathbb{R}^{n+1}$

Consideramos a parametrização da hipersuperfície obtida pela revolução da curva $t \mapsto (f(t), t)$ em $\mathbb{R}_{\{x_1, x_{n+1}\}}^2$ sobre o eixo x_{n+1} com $f > 0$ no ambiente euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por:

$$\begin{cases} F : \mathbb{R} \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \\ F : (t, \omega) \mapsto (f(t)\omega, t). \end{cases} \quad (4.32)$$

A partir desta parametrização e dado que,

$$F(t, \omega) = (f(t)\omega, t) \quad (4.33)$$

temos:

$$F_t = (f_t\omega, 1) \Rightarrow \langle F_t, F_t \rangle = f_t^2 + 1, \quad (4.34)$$

$$F_\omega = (f(t), 0) \Rightarrow \langle F_\omega, F_\omega \rangle = f^2(t), \quad (4.35)$$

logo, a métrica induzida por F na hipersuperfície resulta

$$g_F = (1 + f_t^2)dt^2 + f^2(t)d\omega^2,$$

e por conseguinte um vetor normal unitário à imersão F é dado por

$$N_F(t, \omega) = (1 + f_t^2)^{-1/2}(-\omega, f_t). \quad (4.36)$$

Assim, para calcular a curvatura média da hipersuperfície de revolução segundo (1.27) vamos calcular as curvaturas principais na hipersuperfície como nos exemplos 1.1.9 e 1.1.10 .

Como a hipersuperfície tem dimensão n , vamos ter nk_i curvaturas principais definidas no ponto p segundo N_F definido como em (4.36). Sejam $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ as curvas regulares parametrizadas pelo comprimento de arco que determinam as curvaturas principais. Temos que uma delas corresponde à catenária geratriz da hipersuperfície dada pela aplicação $t \mapsto (f(t), t)$ e o resto correspondem à interseção da hipersuperfície de revolução e a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$.

Sejam α_1 a curva geratriz da hipersuperfície, com n_1 um vetor normal à mesma e k_1 a curvatura escalar. Note que $n_1 = N_F$ e que k_1 corresponde à curvatura de um gráfico horizontal em $\mathbb{R}^2$. Daí,

$$k_1(N) = k_1 \langle n_1, N_F \rangle = k_1 = \frac{-f''}{((f')^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.37)$$

Sejam $\alpha_i, i \geq 2$ o resto das curvas (todas com a mesma forma) com n_2 um normal unitário as mesmas passando por p e vetor velocidade $\alpha'_i(0) = X_i$

com X_i o referencial ortonormal em $\mathbb{R}^n$. Estas podem-se expressar como $\alpha_i = [X_i, n_2] \cap \mathbb{S}^{n-1}$ e correspondem a círculos de raio $f(t)$ como pode ser visualizado no desenho a seguir.

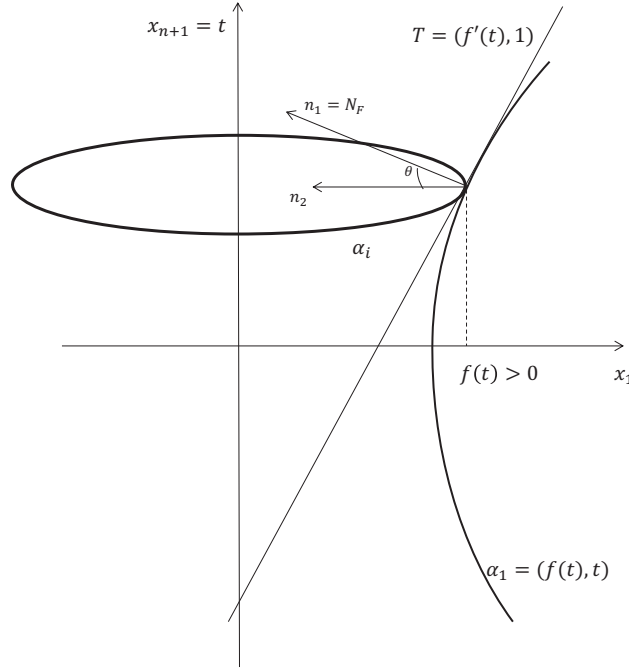


Figura 4.5: Hipersuperfície obtida pela revolução da curva $t \mapsto (f(t), t)$.

Logo, as curvaturas normais obtidas a partir de cada uma delas são iguais e se calculam como segue

$$k_i(N) = k_2 \langle n_2, N_f \rangle = \frac{1}{f(t)} \cos \theta = \frac{1}{f(t)(1 + f_t^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \forall i = 2, \dots, n \quad (4.38)$$

com θ o ângulo determinado por n_2 e N_F . Assim,

$$\begin{aligned} nH &= -\frac{f_{tt}}{(f_t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} + (n-1) \frac{1}{f(t)(1 + f_t^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -f_{tt}(1 + f_t^2)^{-3/2} + (n-1)f^{-1}(1 + f_t^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Como estamos procurando a hipersuperfície mínima de revolução fazemos $H = 0$ na expressão acima, daí

$$-f_{tt}(1 + f_t^2)^{-3/2} + (n-1)f^{-1}(1 + f_t^2)^{-1/2} = 0. \quad (4.40)$$

Multiplicando (4.40) de ambos lados por $f(1 + f_t^2)^{\frac{3}{2}}$ obtemos que a hipersuperfície parametrizada por F é mínima se e somente se

$$f f_{tt} = (n-1)(1 + f_t^2). \quad (4.41)$$

Vamos encontrar agora uma forma equivalente de expressar a equação (4.41). Para isto note que:

$$\frac{d}{dt}(f^{n-1}(1+f_t^2)^{-1/2}) = (n-1)f^{n-2}f_t(1+f_t^2)^{-\frac{1}{2}} - f^{n-1}(1+f_t^2)^{-\frac{3}{2}}f_tf_{tt},$$

daí

$$\begin{aligned} nH(t)f^{n-1}f_t &= \frac{d}{dt}(f^{n-1}(1+f_t^2)^{-1/2}) \\ &= (n-1)f^{n-2}f_t(1+f_t^2)^{-\frac{1}{2}} - f^{n-1}(1+f_t^2)^{-\frac{3}{2}}f_tf_{tt} \end{aligned} \quad (4.42)$$

multiplicando a última igualdade de ambos lados por $\frac{1}{f^{n-1}f_t}$ obtemos

$$nH(t) = -f_{tt}(1+f_t^2)^{-3/2} + (n-1)f^{-1}(1+f_t^2)^{-1/2} \quad (4.43)$$

que é exatamente a expressão (4.39). Ou seja,

$$\frac{d}{dt}(f^{n-1}(1+f_t^2)^{-1/2}) = nH(t)f^{n-1}f_t. \quad (4.44)$$

é equivalente à equação (4.39). Avaliando em $H = 0$ obtemos uma nova expressão equivalente à forma da hipersuperfície mínima parametrizada por F dada em (4.41):

$$f^{n-1}(1+f_t^2)^{-\frac{1}{2}} = c \quad \text{com } c = \text{cte}. \quad (4.45)$$

Observação 4.3.1. *A partir de (4.45) podemos deduzir que uma solução de (4.41) que não se anule em um ponto nunca se anula em seu intervalo de definição.*

Observação 4.3.2. *Pela teoria de equações diferenciais tem-se que se $f(t)$ é solução de (4.41) então $f(-t)$ e $\frac{1}{a}f(\frac{t}{a})$, $a > 0$ são também soluções.*

No capítulo 1 mostramos como fora dos planos os catenoides de $\mathbb{R}^3$ são as únicas superfícies mínimas de revolução. Agora vamos deduzir como este resultado pode ser obtido de modo geral para os catenoides em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposição 4.3.1. *Para $n \geq 2$, $a > 0$, as hipersuperfícies mínimas de revolução geradas pelas curvas soluções do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} f f_{tt} = (n-1)(1+f_t^2), \\ f(0) = a, \\ f_t(0) = 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

da forma

$$F(a, t, \omega) = (ac_n(\frac{t}{a})\omega, t), \quad a > 0, \quad t \in]-aT_n, aT_n[, \quad \omega \in \mathbb{S}^{n-1},$$

formam uma família mínima de catenoides C_a em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demonstração.

Para $n \geq 2$ seja (I_n, c_n) a solução maximal do problema de Cauchy definido por

$$\begin{cases} f f_{tt} = (n-1)(1 + f_t^2), \\ f(0) = 1, \\ f_t(0) = 0. \end{cases} \quad (4.47)$$

Então, segundo a observação 4.3.2 temos que o intervalo, I_n , é da forma $I_n =]-T_n, T_n[$ para algum T_n tal que $0 < T_n \leq \infty$ e que para $a > 0$ a solução maximal do problema de Cauchy (4.46) é $(]-aT_n, aT_n[, ac_n(\frac{t}{a}))$. $\square$

4.3.2

Propriedades do catenoide em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Antes de passar ao estudo da estabilidade do catenoide em $\mathbb{R}^{n+1}$ precisamos do estudo de suas propriedades principais as quais se deduzem a partir de nosso último resultado.

Proposição 4.3.2. *Para $n \geq 3$ o catenoide em $\mathbb{R}^{n+1}$ possui altura limitada (figura 4.6).*

Demonstração.

Seja (I_n, c_n) a solução maximal do problema de Cauchy dado por (4.47), usando a equação (4.45) e substituindo as condições iniciais do problema temos que $t \mapsto c_n(t)$ é uma função suave e par que satisfaz

(i)

$$c_n^{n-1}(t) (1 + c_{n,t}^2(t))^{1/2} \geq 1 \Rightarrow c_n(t) \geq 1 \quad \text{em } I_n$$

do que se deduz que

$$c_n^{n-1}(t) = (1 + c_{n,t}^2(t))^{-1/2} = 1. \quad (4.48)$$

(ii) c_n é estritamente crescente em $[0, T_n[$.

De fato, a partir do problema (4.47) temos

$$\begin{cases} f(0) f_{tt}(0) = (n-1)(1 + f_t^2(0)) \Rightarrow f_{tt}(0) = n-1 \geq 1 > 0 \\ f_t(0) = 0 \end{cases}$$

logo $t = 0$ é um mínimo local. E como $f > 0$ e $(n-1)(1 + f_t^2) > 0$ temos que $f_{tt} > 0$, ou seja, f é convexa. Assim para $t = 0$ temos um mínimo global. Daí, c_n é estritamente crescente em $[0, T_n[$.

(iii) O limite

$$X_n := \lim_{t \rightarrow T_n, t < T_n} c_n(t)$$

existe mesmo se for infinito em $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Além disso, por (4.48) podemos concluir que

$$c_{n,t}(t) = (c_n^{2n-2}(t) - 1)^{1/2}, \quad t \in [0, T_n[. \quad (4.49)$$

Definamos

$$d_n(x) :]0, T_n[\rightarrow]1, X_n[\quad (4.50)$$

como a função inversa de $t \mapsto c_n(t)$. Ou seja, $d_n(c_n(t)) \equiv t$ para $t > 0$. Logo, segundo (4.49) a derivada $d_{n,x}$ se expressa como

$$d_{n,x}(x) = (x^{2n-2} - 1)^{-1/2}, \quad (4.51)$$

daí,

$$d_n(x) = \int_1^x (u^{2n-2} - 1)^{-1/2} du. \quad (4.52)$$

Portanto $X_n = \infty$ e

$$T_n = \int_1^\infty (u^{2n-2} - 1)^{-1/2} du. \quad (4.53)$$

Para $n = 2$

$$T_2 = \int_1^\infty (u^2 - 1)^{-1/2} du \sim \int_1^\infty \frac{1}{u} du = +\infty. \quad (4.54)$$

Ou seja, neste caso o catenoide não tem altura limitada $T_2 = +\infty$. Ora, para $n \geq 3$ tem-se que $2(n-1) \geq 4$ e além disso é par, logo

$$\begin{aligned} T_n &= \int_1^\infty (u^{2n-2} - 1)^{-1/2} du \\ &\sim \int_1^\infty (u^{2n-2})^{-1/2} du \\ &= \int_1^\infty (u^{n-1}) du. \end{aligned}$$

que é integrável pois $n \geq 3$. Daí T_n é finito para $n \geq 3$. Por tanto, podemos concluir que o catenoide em $\mathbb{R}^{n+1}$ para $n \geq 3$ tem altura limitada e fica contido na faixa $] -T_n, T_n[$ com T_n finito. $\square$

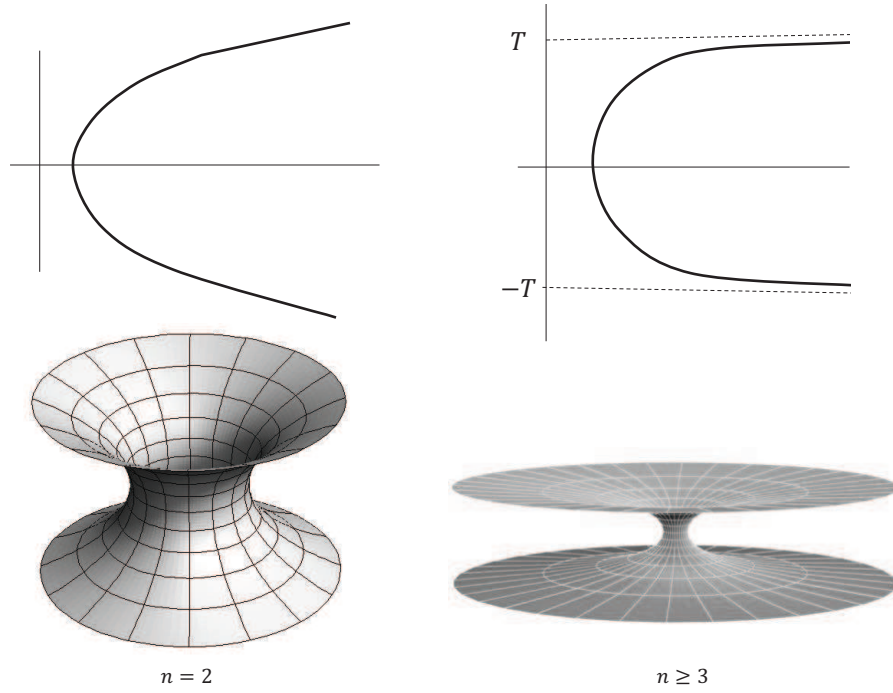


Figura 4.6: Catenoide de $\mathbb{R}^{n+1}$ possui altura limitada para $n \geq 3$.

Pode se pensar que ao ser o catenoide em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $n \geq 3$ limitado que este não é completo. Mas, as curvas geratrizes do catenoide, curvas soluções do problema (4.46), são completas. Este último resultado se obtém diretamente da teoria de equações diferenciais para uma solução maximal. Portanto o catenoide em $\mathbb{R}^{n+1}$ é completo.

Por comodidade tomaremos a partir deste momento c por c_n e T por T_n . Notação que não foi escolhida com antecedência pois estávamos querendo distinguir entre os casos de $n = 2$ ou $n \geq 3$.

Proposição 4.3.3. *O campo vertical de Jacobi $v(a, t) := \langle N(a, t, \omega), \frac{\partial}{\partial t} \rangle$ no catenoide é tal que satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $v(a, t) = v(\frac{t}{a})$, onde v é uma função ímpar.
- (ii) $v(t) = c_t(t) \left(1 + c_t^2(t)\right)^{-1/2} = \text{sgn}(t) \left(1 - c^{2-2n}(t)\right)^{1/2}$.
- (iii) $v(0) = 0$.
- (iv) $\lim_{t \rightarrow T_-} v(t) = 1$.

Demonstração.

(i) Um normal unitário a C_a segundo (4.36) é

$$N(a, t, \omega) = \left(1 + c_t^2\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{-1/2} \left(-\omega, c_t\left(\frac{t}{a}\right)\right). \quad (4.55)$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 v(a, -t) &= \langle N(a, -t, \omega), -\frac{\partial}{\partial t} \rangle \\
 &= -\langle N(a, -t, \omega), \frac{\partial}{\partial t} \rangle \\
 &= -\langle (1 + c_t^2(-\frac{t}{a}))^{-\frac{1}{2}}(-\omega, c_t(-\frac{t}{a})), \frac{\partial}{\partial t} \rangle \\
 &= -\langle (1 + c_t^2(\frac{t}{a}))^{-\frac{1}{2}}(-\omega, c_t(\frac{t}{a})), \frac{\partial}{\partial t} \rangle \\
 &= -\langle N(a, t, \omega), -\frac{\partial}{\partial t} \rangle \\
 &= -v(a, t)
 \end{aligned}$$

com isto temos que v é ímpar.

Observação 4.3.3. *Este resultado pode-se obter diretamente se analisarmos o fato de que a função $t \mapsto c(t)$ é par, logo, serão pares também as funções $f(t)$ e f_t . Daí, ao tomar $-t$ ao invés de t a única sinal que é alterada é a do campo variacional, portanto obtemos que v é ímpar. E,*

$$v\left(\frac{t}{a}\right) = c_t\left(\frac{t}{a}\right)\left(1 + c_t^2\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.56)$$

(ii) Para $a = 1$ e segundo (4.56) tem-se

$$v(t) = c_t(t)\left(1 + c_t^2(t)\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.57)$$

Ora, a partir de (4.49) podemos calcular

$$\begin{aligned}
 c_t(1 + c_t^2)^{-\frac{1}{2}} &= (c^{2n-2} - 1)^{\frac{1}{2}}(1 + (c^{2n-2} - 1)^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \\
 &= (c^{2n-2} - 1)^{\frac{1}{2}}(1 + (c^{2n-2} - 1))^{-\frac{1}{2}} \\
 &= (c^{2n-2} - 1)^{\frac{1}{2}}c^{1-n} \\
 &= \operatorname{sgn}(t)(c^{2-2n}c^{2n-2} - c^{2-2n})^{\frac{1}{2}} \\
 &= \operatorname{sgn}(t)(1 - c^{2-2n})^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Ou seja, $v(t) = c_t(t)(1 + c_t^2(t))^{-1/2} = \operatorname{sgn}(t)(1 - c^{2-2n}(t))^{1/2}$.

(iii) No instante $t = 0$, se verifica facilmente que

$$v(0) = c_t(0)(1 + c_t^2(0))^{-1/2} = 0$$

com a última igualdade válida desde que $c_t(0) = 0$.

(iv) Usando a regra L'Hospital podemos verificar que

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow T_-} v(t) &= \lim_{t \rightarrow T_-} c_t(t) (1 + c_t^2(t))^{-1/2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow T_-} \frac{c_t(t)}{c^{n-1}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow T_-} \frac{(c^{2(n-1)} - 1)^{\frac{1}{2}}}{c^{n-1}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow T_-} \frac{(c^{n-1})}{(c^{2(n-1)} - 1)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow T_-} \frac{1}{(1 - \frac{1}{c^{2n-1}})^{\frac{1}{2}}} = 1. \quad \square
 \end{aligned}$$

Proposição 4.3.4. *O campo variacional de Jacobi $e(a, t) := \langle N(a, t, \omega), \frac{\partial F}{\partial a} \rangle$ na família de catenoides satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $e(a, t) = e(\frac{t}{a})$ onde e é uma função par.
- (ii) $e(t) = -c^{2-n}(t) + tv(t)$.
- (iii) $e(0) = -1$
- (iv) $\lim_{t \rightarrow T_-} e(t) = T$.

Demonstração.

(i) Com $N(a, t, \omega)$ como em (4.55) obtemos que

$$\begin{aligned}
 e(a, t) &= \langle N(a, t, \omega), \frac{\partial F}{\partial a} \rangle \\
 &= \langle (1 + c_t^2(\frac{t}{a}))^{-1/2} (-\omega, c_t(\frac{t}{a})), (c(\frac{t}{a}) - \frac{t}{a}c_t(\frac{t}{a})\omega, 0) \rangle \\
 &= (1 + c_t^2(\frac{t}{a}))^{-1/2} (\frac{t}{a}c_t(\frac{t}{a}) - c(\frac{t}{a})).
 \end{aligned}$$

Logo, a função $e(a, t)$ satisfaz a seguinte igualdade: $e(a, t) = e(\frac{t}{a})$. Como a aplicação $t \mapsto c(t)$ é par e como $e(t)$ se escreve como uma combinação linear de $c(t)$ e c_t , esta resulta também par.

(ii) Como $e(a, t) = (1 + c_t^2(\frac{t}{a}))^{-1/2} (\frac{t}{a}c_t(\frac{t}{a}) - c(\frac{t}{a}))$ para $a = 1$ obtemos

$$\begin{aligned}
 e(t) &= (1 + c_t^2(\frac{t}{a}))^{-1/2} (tc_t - c) \\
 &= tc_t(1 + c_t^2(\frac{t}{a}))^{-1/2} - c(1 + c_t^2(\frac{t}{a}))^{-1/2} \\
 &= -c^{2-n} + tv.
 \end{aligned}$$

(iii) O terceiro item é trivial pois como $c^{2-n}(0) = 0$ temos que

$$e(0) = -c^{2-n}(0) = 0.$$

(iv) Tomando o limite quando $t \rightarrow T_-$ obtemos,

$$\lim_{t \rightarrow T_-} e(t) = \lim_{t \rightarrow T_-} -c^{2-n} + tv = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow T_-} -\frac{1}{c^{n-2}} + tv, & \text{para } n \geq 3 \\ \infty & \text{para } n = 2 \end{cases} = T \quad \forall n.$$

□

Observação 4.3.4. Como $e(t)$ e $v(t)$ são campos de Jacobi para a família de catenoides, ambos satisfazem a mesma equação de Sturm Liouville no intervalo $]0, T[$. Ora, o campo $v(t)$ se anula somente em $t = 0$. Como c é estritamente crescente (segundo a demonstração da proposição 4.3.2) isto não acontece novamente no intervalo $]0, T[$. Por conseguinte, como as soluções do problema de Sturm Liouville podem ser escritas como uma combinação linear de autofunções associadas ao operador de Sturm Liouville seguindo a demonstração da afirmação 2.1 da proposição 4.1.2 obtemos que $e(t)$ se anula exatamente uma vez no intervalo $]0, T[$.

4.3.3

Estabilidade do catenoide em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Analogamente à construção de Lindelöf em $\mathbb{R}^3$ se garante para $\mathbb{R}^{n+1}$ a possibilidade de uma construção similar. Neste caso, a construção vai estar dada por um *envelope*. A continuação mostramos a existência do mesmo e a seguir uma análise da estabilidade como consequência.

Proposição 4.3.5. A família de catenoides em $\mathbb{R}^{n+1}$ admitem um envelope que é um cone cuja pendente é determinada pelo único zero positivo da função $e(t)$.

Demonstração.

Basta mostrar o que acontece com a família de catenárias que geram o catenoide (figura 4.7). Pois projetando a família $F(a, t, \omega)$ de catenoides no plano $x_1 x_{n+1}$, ($x_{n+1} = t$), obtemos a família de catenárias. O *envelope* da família de curvas ao parâmetro a

$$\left\{ (f(a, t), t) \mapsto \left(ac \left(\frac{t}{a} \right), t \right) \right\} \quad a > 0$$

solução do problema de Cauchy (4.46) é dado pela equação $\frac{\partial f}{\partial a}(a, t) = 0$. Ou seja, pelos zeros da expressão

$$c\left(\frac{t}{a}\right) - \frac{t}{a}c_t\left(\frac{t}{a}\right).$$

Estos coincidem com os zeros $\pm z(a)$ no intervalo $] -T, T[$ da função $t \mapsto e(a, t)$. E segundo a proposição 4.3.4 $z(a) = az$ com z o único zero positivo de e . $\square$

Observação 4.3.5. Como os zeros de e são iguais e de sinais contrárias o envelope é gerado por dois retas tangentes à família de catenárias sendo uma a refletida da outra pelo eixo t , veja figura 4.7.

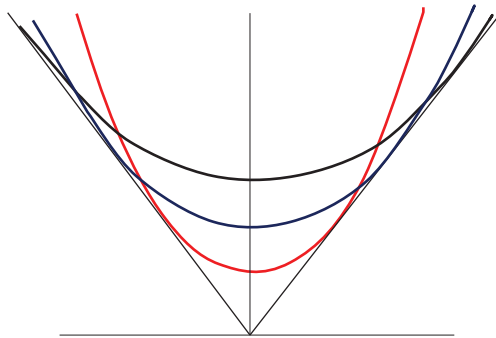


Figura 4.7: *Envelope* da família de catenárias.

Seja C o catenoide da família obtido para $a = 1$, denotemos por $F(t, \omega)$ à imersão $F(1, t, \omega)$. Então, em $\mathbb{R}^{n+1}$ para domínios simétricos do catenoide temos o seguinte resultado de estabilidade.

Proposição 4.3.6. *O catenoide n -dimensional C em $\mathbb{R}^{n+1}$ possui as seguintes propriedades:*

- (i) *O semi-catenóide $\tilde{C}_+ := F([0, T[, \mathbb{S}^{n-1})$ é estável.*
- (ii) *Seja z o único zero positivo do campo de Jacobi e . O domínio $\tilde{C}_z := F(]-z, z[, \mathbb{S}^{n-1})$ é um domínio maximal de estabilidade. Este domínio é limitado por duas esferas onde o catenoide C intersecta o envelope da família.*
- (iii) *O catenoide tem índice 1.*

Demonstração.

(i) Para demonstrar este item notemos primeiramente que uma análise da estabilidade sobre o domínio $F([0, T[, \mathbb{S}^{n-1})$ (figura 4.8) é equivalente a um

análise da estabilidade sobre o domínio $\tilde{C}_+ = F(]0, T[, \mathbb{S}^{n-1})$.

No domínio $F(]0, T[, \mathbb{S}^{n-1})$, temos que $v(t) = \text{sgn}(t)(1 - c^{2-2n}(t))^{\frac{1}{2}}$ é um campo de Jacobi positivo. Logo, pelo lema 3.4.1 o domínio do catenoide $F(]0, T[, \mathbb{S}^{n-1})$ é estável. Por conseguinte podemos concluir que $\tilde{C}_+$ é estável.

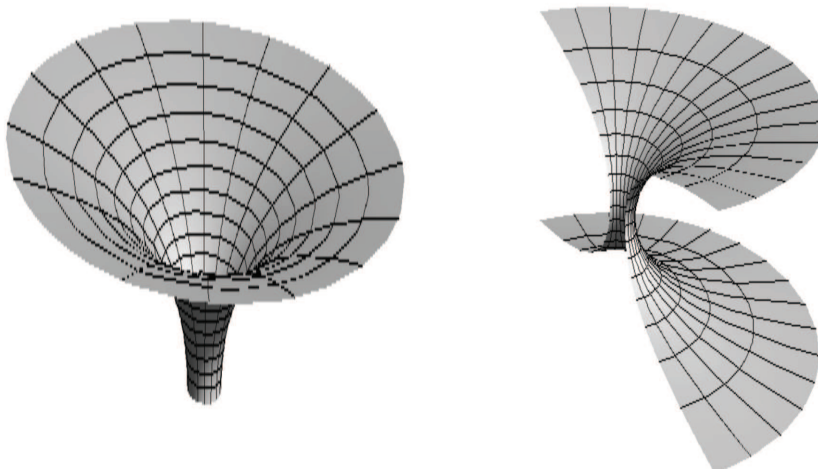


Figura 4.8: O semi-catenoide é estável.

(ii) Dado $e(t)$ campo de Jacobi em $\tilde{C}_z$ e $\{z, -z\}$ os zeros do mesmo temos que

$$\begin{cases} L(e) = 0 & \text{em } \tilde{C}_z \\ e = 0 & \text{em } \partial\tilde{C}_z. \end{cases}$$

Logo, $\lambda_1(L, \tilde{C}_z) = 0$, i.e, $\tilde{C}_z$ é um domínio maximal de estabilidade.

Por outro lado para $t = z$ temos $F(z, \omega) = (c(z)\omega, z)$, ou seja, uma esfera onde o catenoide intersecta o *envelope*. Como $c(z) = c(-z)$ por ser c par, para $t = -z$ obtemos uma outra esfera como reflexão da anterior pelo eixo $t = 0$. Com isto observamos como o domínio maximal de estabilidade é limitado por duas esferas onde o catenoide intersecta o *envelope* (figura que segue).

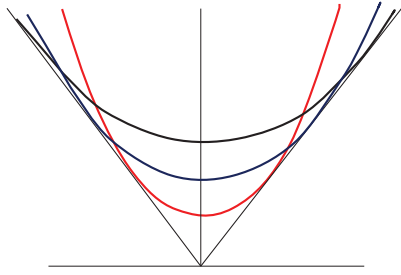


Figura 4.9: Envelope.

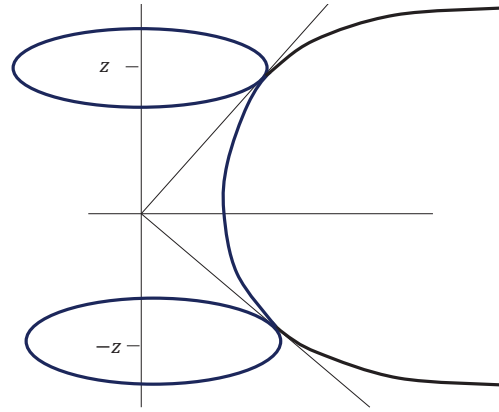


Figura 4.10: Domínio simétrico de estabilidade.

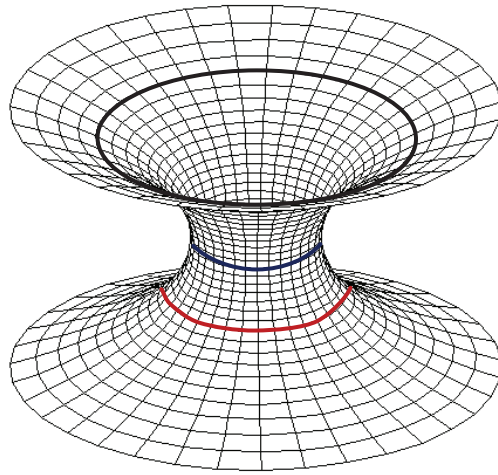


Figura 4.11: Domínios maximais de estabilidade do catenoide.

(iii) Pelo item anterior temos que o catenoide tem índice de pelo menos um. Basta mostrar, então, que tem índice ao sumo 1.

Suponhamos que o segundo autovalor do operador de Jacobi é negativo, ou seja, o índice é pelo menos 2. Definamos um domínio do catenoide para $0 < R < T$ por

$$D := F([-R, R], \mathbb{S}^{n-1}).$$

Então, existe uma função u tal que

$$\begin{cases} L(u) = \lambda_2 u & \text{em } D \\ u = 0 & \text{em } \partial D. \end{cases} \quad (4.58)$$

Afirmamos que u é uma função radial.

De fato, seja $v \in \mathbb{S}^n$ tal que $v \perp (1, 0, \dots, 0)$, denotemos por T_v ao hiperplano

definido por

$$T_v := \{p \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle p, v \rangle = 0\}.$$

Seja

$$\Sigma_v := \{p \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle p, v \rangle > 0\}$$

a região à direita do hiperplano T_v e Σ_v^* sua reflexão com respeito a T_v . Definamos, agora, a função

$$\phi_v(r, \theta) = u(r, \theta) - u_v(r, \theta)$$

com $u_v(p) := u(\Sigma_v^*(p))$, $\forall p \in D$. Ou seja, $u_v(p)$ é a reflexão de u com respeito a T_v .

Claramente podemos observar que u_v satisfaz o problema (4.58) ao ser a refletida de u . Isto também implica que ambas coincidem sobre T_v . Pela escolha do hiperplano no ponto aonde este intersecta perpendicularmente à fronteira do domínio na direção x_1 , a fronteira à direita do hiperplano se reflete na fronteira à esquerda do hiperplano. Logo, as duas funções coincidem na fronteira. Daí,

$$\begin{cases} L\phi_v = \lambda_2 \phi_v & \text{em } D \\ \phi_v = 0 & \text{em } D \cap T_v \\ \phi_v = 0 & \text{em } \partial D. \end{cases} \quad (4.59)$$

Então, $D_v^+ = \Sigma_v|_{p \in D}$ é um gráfico mínimo sobre um domínio de T_v , logo é estável.

Segundo a equação (4.59) e dado que $\lambda_2 < 0$ temos que pelo princípio do máximo $\phi_v \equiv 0$. Logo, u é uma função radial na direção determinada pelo hiperplano T_v . Como um elemento do grupo $O(n-1)$ pode-se expressar como um número finito de reflexões, tomando as restantes direções temos que u é rotacionalmente simétrica, i.e, u é radial em qualquer direção. Dizemos então que u é radial.

Por outro lado u corresponde à segunda autofunção, daí, pelo corolário 2.3.2 sabemos que esta muda de sinal. Logo, existe $r_0 \in]-R, R[$ tal que $u(r_0) = 0$. Assumamos sem perda de geralidade que $r_0 \geq 0$. Então, para $D(r_0, R) = \{F(r, \omega), r \in (r_0, R), \omega \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ temos novamente que u é autofunção do operador de Jacobi. Pelo lema 3.3.1 e o item (i) temos que o domínio $D(r_0, R)$ é estritamente estável o que contradiz o fato de $\lambda_2 < 0$ pois neste caso u seria identicamente nula.

Portanto, o segundo autovalor é positivo e consequentemente o resto dos autovalores. Do que se deduz que o catenoide tem índice 1. $\square$

Observação 4.3.6. *O terceiro item acima pode ser mostrado também de modo*

semelhante à prova dada no ambiente $\mathbb{R}^3$. Mas, note que neste caso é preciso usar desenvolvimento em harmônicos esféricos ao invés de desenvolvimento em séries de Fourier. Para esta variante de prova pode consultar [5]. A prova mostrada acima segue o método dos planos móveis [27].

Observação 4.3.7. Note que na proposição anterior temos estabelecido no item (i) que o semi-catenóide $\tilde{C}_+$ é estável, porém não concluímos que este fosse um domínio maximal de estabilidade.

Teorema 4.3.1 (Teorema de Lindelöf em $\mathbb{R}^{n+1}$). Para $n \geq 3$ o catenoide n -dimensional em $\mathbb{R}^{n+1}$ não satisfaz a propriedade de Lindelöf. Mais precisamente, tomando z o zero positivo do campo de Jacobi e, existe $\ell \in]0, z[$ tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i) O domínio $\tilde{C}'_\ell := F(]-\ell, \infty[, \mathbb{S}^{n-1})$ é estritamente estável.
- (ii) Para qualquer $\alpha > \ell$ existe $\beta(\alpha) \in]0, \infty[$ tal que o domínio $\tilde{C}'_{\alpha, \beta(\alpha)} := F(]-\alpha, \beta(\alpha)[, \mathbb{S}^{n-1})$ é um domínio maximal de estabilidade. Em particular, para $\alpha > \ell$ o domínio $\tilde{C}'_\alpha := F(]-\alpha, \infty[, \mathbb{S}^{n-1})$ tem índice 1.
- (iii) O domínio maximal de estabilidade é dado pela construção de Lindelöf. Mais precisamente, as tangentes à catenária $t \mapsto (c(t), t)$ nos pontos $(c(\alpha), -\alpha)$ e $(c(\beta(\alpha)), \beta(\alpha))$ se intersectam no eixo da catenária.

Demonstração.

Definimos o campo de Jacobi

$$\omega(\alpha, t) := v(\alpha)e(t) + e(\alpha)v(t).$$

Pelas proposições 4.3.3 e 4.3.4 temos que e é par e v é ímpar assim,

$$\omega(\alpha, -\alpha) = v(\alpha)e(-\alpha) + e(\alpha)v(-\alpha) = v(\alpha)e(\alpha) - e(\alpha)v(\alpha) = 0.$$

Por outro lado

$$\omega(\alpha, 0) = v(\alpha)e(0) + e(\alpha)v(0) = -v(\alpha) < 0.$$

e

$$\lim_{t \rightarrow T_-} \omega(\alpha, t) = v(\alpha) \lim_{t \rightarrow T_-} e(t) + e(\alpha) \lim_{t \rightarrow T_-} v(t) = e(\alpha) + v(\alpha)T.$$

Seja a função $y(t) = e(t) + Tv(t)$, temos que para $n \geq 3$, $y(0) = -1$ e $y(z) = Tv(z) > 0$. Então, como y é contínua possui um único zero em $]0, z[$

que vamos a denotar por ℓ . Assim, em particular,

(i) Para $\alpha \leq \ell$ claramente $y(\alpha) \leq 0$ daí

$$0 \geq y(\alpha) = \lim_{t \rightarrow T_-} \omega(\alpha, t),$$

logo $\omega(\alpha, \cdot)$ não se anula em $]-\alpha, \infty[$. Em particular, $\omega(\alpha, \cdot)$ não se anula em $]-\ell, \infty[$. Portanto, pelo lema 3.6.1 obtém-se que $F(]-\ell, \infty[, \mathbb{S}^{n-1})$ é um domínio estritamente estável do catenoide.

(ii) Ora se $\alpha > \ell$, $y(\alpha) > 0$ o que implica que $\lim_{t \rightarrow T_-} \omega(\alpha, t) > 0$. E dado que $\omega(\alpha, 0) < 0$ temos que $\omega(\alpha, \cdot)$ possui um zero em $\beta(\alpha) \neq -\alpha$. Este zero é único e positivo. Suponhamos que existe um outro $\tilde{\beta}(\alpha)$ positivo tal que $\tilde{\beta}(\alpha) > \beta(\alpha) > 0$, então, $F(]\beta(\alpha), \tilde{\beta}(\alpha)[, \mathbb{S}^{n-1})$ poderia ser um domínio maximal de estabilidade, i.e, $\lambda_1(L,]\beta(\alpha), \tilde{\beta}(\alpha)[) = 0$. Porém

$$F(]\beta(\alpha), \tilde{\beta}(\alpha)[, \mathbb{S}^{n-1}) \subset F(]-\alpha, \infty[, \mathbb{S}^{n-1})$$

e $F(]-\alpha, \infty[, \mathbb{S}^{n-1})$ é estável segundo o item (i). Logo, pelo lema 3.3.1 $F(]\beta(\alpha), \tilde{\beta}(\alpha)[, \mathbb{S}^{n-1})$ é estritamente estável. Assim os únicos zeros de $\omega(\alpha, \cdot)$ são $-\alpha < 0$ e $\beta(\alpha) > 0$, daí,

$$\begin{cases} L\omega = 0 & \text{em } \tilde{C}'_{\alpha, \beta(\alpha)} \\ \omega = 0 & \text{em } \partial \tilde{C}'_{\alpha, \beta(\alpha)}. \end{cases} \quad (4.60)$$

Por conseguinte $\lambda_1(L, \tilde{C}'_{\alpha, \beta(\alpha)}) = 0$. Assim $\tilde{C}'_{\alpha, \beta(\alpha)}$ é um domínio maximal de estabilidade. Em particular, pela proposição 4.3.6, o domínio $\tilde{C}'_{\alpha}$ tem índice 1.

(iii) Escrevamos as equações para as tangentes à catenária nos pontos $(c(\alpha), -\alpha)$ e $(c(\beta), -\beta)$.

Para $(c(\alpha), -\alpha)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(\alpha) \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_t(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daí, a tangente no ponto $(c(\alpha), -\alpha)$ é descrita pela equação paramétrica:

$$\begin{cases} x = c(\alpha) + tc_t(\alpha) \\ y = \alpha + t. \end{cases}$$

Esta passa pela origem se e somente se

$$\begin{cases} 0 = c(\alpha) + tc_t(\alpha) \\ 0 = \alpha + t, \end{cases}$$

ou seja, se $\alpha = \frac{c(\alpha)}{c_t(\alpha)}$.

Analogamente a equação paramétrica da reta tangente à catenária no ponto $(c(\beta), \beta)$ é

$$\begin{cases} x = c(\beta) + tc_t(\beta) \\ y = \beta + t, \end{cases}$$

e passa pela origem se e somente se $\beta = \frac{c(\beta)}{c_t(\beta)}$.

Assim, uma condição necessária e suficiente para que ambas tangentes passem pela origem é dada pela expressão

$$\alpha + \beta = \frac{c(\alpha)}{c_t(\alpha)} + \frac{c(\beta)}{c_t(\beta)}. \quad (4.61)$$

Por outro lado calculando $\omega(\alpha, \beta) = 0$ obtemos novamente (4.61). Em detalhes,

$$\begin{aligned} v(\alpha)e(\beta) &= -e(\alpha)v(\beta) \\ \Leftrightarrow -\frac{c_t(\alpha)}{c^{n-1}(\alpha)}c^{2-n}(\beta) + \frac{c_t(\alpha)}{c^{n-1}(\alpha)}\beta\frac{c_t(\beta)}{c^{n-1}(\beta)} &= \frac{c_t(\beta)}{c^{n-1}(\beta)}c^{2-n}(\alpha) - \frac{c_t(\alpha)}{c^{n-1}(\alpha)}\alpha\frac{c_t(\beta)}{c^{n-1}(\beta)} \\ \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\left(\frac{c_t(\alpha)c_t(\beta)}{c^{n-1}(\alpha)c^{n-1}(\beta)}\right) &= \frac{c_t(\beta)}{c^{n-1}(\beta)}c^{2-n}(\alpha) + \frac{c_t(\alpha)}{c^{n-1}(\alpha)}c^{2-n}(\beta) \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta &= \frac{c(\alpha)}{c_t(\alpha)} + \frac{c(\beta)}{c_t(\beta)}. \end{aligned}$$

Ou seja, (4.61) é uma condição necessária e suficiente para que o campo de Jacobi ω possua um zero em β . Como β determina quando o campo muda de sinal dita equação estabelece uma condição necessária e suficiente para a existência do domínio maximal de estabilidade. $\square$

Observação 4.3.8. *Note que para o catenoide em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $n \geq 3$ o resultado de não ser satisfeita a propriedade de Lindelöf está diretamente relacionado com o fato de estos serem limitados. O que pode ser analisado geometricamente pela construção de domínios maximais de estabilidade por médio de tangentes.*