Referências Bibliográficas

[1] J. L. Barbosa e M. P. do Carmo, *On the size of a stable minimal surface in* $\mathbb{R}^3$*.*, Pacific Journal Math **98** (1976), no. 2, 515–528 (brazilian).

[2] J. L. Barbosa, M. P. do Carmo, e J Eschenburg, *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in riemannian manifolds.*, Mathematische Zeitschrift **197** (1988), no. 1, 123–138.

[3] P. H. Bérard, *Spectral geometry: Direct and inverse problems*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1986.

[4] P. H. Bérard, *An elementary introduction to eigenvalue problems with an application to catenoids in* $\mathbb{R}^3$*.*, `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/D/notes_fortaleza.pdf`, 2008, Notas da XV Escola de geometria diferencial, em homenagem aos 80 anos de Manfredo do Carmo, Fortaleza.

[5] P. H. Bérard e R. Sá Earp, *Minimal hypersuperfaces in* $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$*, total curvature and index.*, `http://arxiv.org/abs/0808.3838`, 2008.

[6] P. H. Bérard e R. Sá Earp, *Lindelöf's theorem for catenoids revisited.*, `http://arxiv.org/abs/0907.4294`, 2009.

[7] H. Brezis, *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext (Berlin. Print), Springer, 2010.

[8] I. Chavel, *Eigenvalues in riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, Elsevier Science, 1984.

[9] T. H. Colding e W. P. Minicozzi, *A course in minimal surfaces*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2011.

[10] U. Dierkes, A. Küster, S. Hildebrandt, e F. Sauvigny, *Minimal surfaces*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 2010.

[11] M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1976.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1222069/CB

[12] M. P. do Carmo, *O Índice de morse das superfícies mínimas.*, Revista Matemática Universitaria **9/10** (1989).

[13] M. P. do Carmo, *Geometria riemanniana*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011.

[14] M. P. do Carmo e C. K. Peng, *Stable complete minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *are planes*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society **1** (1979), no. 6, 903–906.

[15] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2010.

[16] D. Gilbarg e N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer, 2001.

[17] A. Grigor'yan, N. Nadirashvili, e Y. Sire, *A lower bound for the number of negative eigenvalues of Schrödinger operators*, `http://arxiv.org/pdf/1406.0317v1.pdf`, 2014.

[18] K. Grosse-Brauckmann, *Stable constant mean curvature surfaces minimize area.*, Pacific Journal of Mathematics **175** (1996), no. 2, 527–534.

[19] E. Hebey, *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*, Fondations (Paris. 1996), Diderot Editeur Arts et Sciences, 1997.

[20] D. Hoffman e H. Karcher, *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*, Geometry V (R. Osserman, ed.), Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 90, Springer Berlin Heidelberg, 1997, pp. 5–93.

[21] J. Jürgen, *Riemannian geometry and geometric analysis*, Springer Berlin Heidelberg, 2011.

[22] H. Mori, *Stable complete constant mean curvature surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *and* $\mathbb{H}^3$*.*, Transactions of The American Mathematical Society **278** (1983), no. 2, 671–687.

[23] R. Osserman, *The isoperimetric inequality.*, Bulletin of The American Mathematical Society **84** (1978), no. 6, 1182–1238.

[24] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces.*, vol. 1, Cambridge Univ. Press, New York, 1989.

[25] R. Souam, *Basic geometry of curves and surfaces.*, `http://www.umpa.ens-lyon.fr/~zeghib/Souam1.pdf`, Notes.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1222069/CB

[26] R. Souam, *Select chapters in classical minimal surfaces theory.*, `http://www.umpa.ens-lyon.fr/~zeghib/Souam2.pdf`, Notes.

[27] L-F. Tam e D. Zhou, *Stability properties for the higher dimensional catenoid in* $\mathbb{R}^{n+1}$., Proceedings of The American Mathematical Society **137** (2009), no. 10, 3451–3461.

[28] Henry C. Wente, *A note on the stability theorem of J. L. Barbosa and M. Do Carmo for closed surfaces of constant mean curvature.*, Pacific Journal of Mathematics **147** (1991), no. 2, 375–379.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1222069/CB

Índice Remissivo

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1222069/CB

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1222069/CB

A
Apêndice

A.1
Teoremas de convergência

Os resultados a seguir foram tomados do capítulo 3 de [7].

Definição A.1.1 (Convergência Fraca)**.** *Seja E um espaço de Banach e x_n sequência definida em E. Se x_n converge na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ a x dizemos que x_n converge fracamente a x em $\sigma(E, E^*)$ e denotamos por*

$$x_n \rightharpoonup x. \tag{A.1}$$

Teorema A.1.1. *(Proposição 3.7 em [7]) Seja E um espaço de Banach e x_n sequência definida em E. Então:*
(i) $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E^*)$ se e somente se $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall f \in E^*$.
(ii) Se $x_n \to x$ no sentido forte então $x_n \rightharpoonup x$ no sentido fraco em $\sigma(E, E^*)$.
(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ no sentido fraco em $\sigma(E, E^*)$ então $\{\|x_n\|\}$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ no sentido fraco em $\sigma(E, E^*)$ e se $f_n \to f$ no sentido forte em E^* então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Teorema A.1.2. *(Teorema 3.18 em [7]) Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada em E. Então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ que converge na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$, i.e,*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x. \tag{A.2}$$

A.2
Espaços de Sobolev

Os resultados a seguir foram tomados do capítulo 9 em [7].
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p \leq \infty$.

Definição A.2.1 (Espaço de Sobolev)**.** *O espaço de Sobolev $W^{1,p}$ é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); Du \in L^p(\Omega)\}. \tag{A.3}$$

Observação A.2.1.

(i) O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é claramente linear.

(ii) O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

(iii) No espaço $W^{1,p}(\Omega)$ o conceito de continuamente diferenciável é substituído pelo conceito de diferenciabilidade fraca e o conceito de Hölder continuidade pelo de $p-$integrabilidade.

(iv) O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço normado com a norma associada:

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}. \tag{A.4}$$

(v) O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$.

(vi) Se $u \in \boldsymbol{C}^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ e se $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega),\ \forall i = 1, \ldots, n$ então $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Para o caso especial em que $p = 2$ tem-se que

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega), \tag{A.5}$$

com $H^1(\Omega)$ o espaço de Hilbert definido em Ω.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1222069/CB

Teorema A.2.1 (Teorema de Densidade)**.** *(Corolário 9.8 em [7]) Seja Ω domínio de classe $\boldsymbol{C}^1$ e seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Então existe uma sequência u_n de $\boldsymbol{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que: $u_n|_\Omega \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Em outras palavras, as restrições a Ω das funções em $\boldsymbol{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ formam um subespaço denso de $W^{1,p}(\Omega)$.*

Definição A.2.2 (Espaço $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$)**.** *Seja Ω domínio limitado e $1 \leq p < \infty$ o espaço $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ representa o fecho do conjunto das funções $\boldsymbol{C}_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Segundo esta definição temos que:

$$\mathring{W}^{1,2}(\Omega) = \mathring{H}^1(\Omega). \tag{A.6}$$

Teorema A.2.2 (Segundo Teorema de Densidade)**.** *O espaço $\boldsymbol{C}_c^\infty(\Omega)$ é denso no espaço $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$.*

Observação A.2.2.

(i) Segundo este teorema podemos concluir que na definição do espaço $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ é equivalente usar $\boldsymbol{C}_c^\infty(\Omega)$ ao invés de $\boldsymbol{C}_c^1(\Omega)$.

(ii) Este teorema foi usado implicitamente na forma do primeiro autovalor.

Lema A.2.1. *(Lema 9.5 em [7]) Seja Ω domínio limitado e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Se o suporte de u é um subconjunto compacto de Ω então $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$.*

A.2.1
Teorema de Rellich-Kondrakov

Teorema A.2.3 (Teorema de Rellich-Kondrakov)**.** *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n e sejam $p, q \geq 1$ dois números reais. Então:*

(i) Se $q < n$ e $p < \dfrac{nq}{n-q}$, a inclusão de $H_1^q(M)$ em $L^p(M)$ é compacta.

(ii) Se $q > n$ a inclusão de $H_1^q(M)$ em $\boldsymbol{C}^{\alpha}(M)$ é compacta para todo $\alpha \in]0, 1[$ tal que $(1 - \alpha)q > n$. Em particular, a inclusão de $H_1^q(M)$ em $\boldsymbol{C}^0(M)$ é compacta.

Observação A.2.3. *No material temos usado somente o item (i) deste resultado.*
Uma prova rigorosa do teorema pode ser consultada no capítulo 5 seção 5 de [19].

A.3
Fórmula da co-área

A fórmula da co-área representa uma generalização do Teorema de Fubini, a forma em que temos usado a mesma é dada pelo teorema a seguir o qual pode ser consultado no capítulo IV.2 de [8].

Teorema A.3.1. *Seja Ω domínio relativamente compacto em M variedade Riemanniana e seja $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função em $\boldsymbol{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \boldsymbol{C}^{\infty}(\Omega)$ tal que $f = 0$ em $\partial\Omega$. Para qualquer valor regular t de $|f|$, temos que*

$$\Gamma(t) = |f|^{-1}(t), \quad A(t) = A(\Gamma(t)), \tag{A.7}$$

com dA_t a forma de volume $(n-1)-$dimensional em $\Gamma(t)$. Então,

$$dV|_{\Gamma(t)} = \frac{dA_t dt}{|\nabla f|} \tag{A.8}$$

e para toda $\phi \in L^1(\Omega)$ tem-se que

$$\int_{\Omega} \phi |\nabla f| dV = \int_0^{\infty} dt \int_{\Gamma(t)} \phi dA_t \tag{A.9}$$

com V o volume de Ω.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1222069/CB

A.4
Teoria dos operadores elípticos

Os resultados apresentados nesta seção e que foram usados no desenvolvimento do texto foram tomados de [16] capítulos 3,6 e 8.
As provas dos mesmos podem ser consultadas na referência citada.

Considerações Iniciais

Suponhamos Ω domínio limitado em $\mathbb{R}^n$. Consideremos o operador L definido em Ω

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i - c(x) \tag{A.10}$$

para $u \in \boldsymbol{C}^2(\Omega) \cap \boldsymbol{C}(\overline{\Omega})$. Assumamos que a_{ij}, b_i e c são contínuos então limitados em $\overline{\Omega}$ e L uniformemente elíptico em Ω no seguinte sentido:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda\,|\xi|^2 \quad \forall\, x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{A.11}$$

ou equivalentemente se a matriz $(a_{ij}(x))$ é definida uniformemente positiva em x para alguma constante positiva λ.

Observação A.4.1. *No caso de um operador autoadjunto com respeito a $L^2(\Omega)$, como nosso caso em questão, o operador adquire a forma particular*

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij} - c(x). \tag{A.12}$$

A.4.1
Princípio do Máximo

Teorema A.4.1 (Princípio do Máximo (capítulo 3 [16]))**.** *Seja Ω domínio limitado e*

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i - c(x). \tag{A.13}$$

um operador linear uniformemente elíptico com coeficientes limitados. Se $c(x) \geq 0$ em Ω então $\forall u \in \boldsymbol{C}^2(\Omega) \cap \in \boldsymbol{C}(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} Lu \geq 0 & \text{em } \Omega \\ u \geq 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

$u \geq 0$ em Ω. Neste caso dizemos que L satisfaz o princípio do máximo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1222069/CB

A.4.2
Desigualdade de Harnack

Teorema A.4.2 (Desigualdade de Harnack (Teorema 8.20 de [16])). *Seja o operador L, como em (A.10) e seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ que satisfaz que:*

$$\begin{cases} Lu &= 0 \ \text{em } \Omega \\ u &\geq 0 \ \text{em } \Omega \end{cases}$$

Então $\forall\, B_{4R}(x) \subset \Omega$ tem-se a seguinte desigualdade

$$\sup_{B_R(x)} u \leq C \inf_{B_R(x)} u \tag{A.14}$$

com C constante.

A.4.3
Estimativa global de Schauder

Teorema A.4.3. *(Teorema 6.6 de [16]) Seja Ω domínio $\boldsymbol{C}^{2,\alpha}$ em $\mathbb{R}^n$ e seja $u \in \boldsymbol{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ solução de $Lu = f$ em Ω onde $f \in \boldsymbol{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$ e L é definido como no início tal que os coeficientes também satisfazem a seguinte propriedade*

$$|a_{ij}|_{\boldsymbol{C}^{0,\alpha},\Omega}, |b_i|_{\boldsymbol{C}^{0,\alpha},\Omega}, |c|_{\boldsymbol{C}^{0,\alpha},\Omega} \leq \Lambda. \tag{A.15}$$

Seja $\varphi(x) \in \boldsymbol{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e suponhamos que $u = \varphi$ em $\partial\Omega$. Então,

$$\|u\|_{\boldsymbol{C}^{2,\alpha},\Omega} \leq C(\|u\|_{\boldsymbol{C}^{0},\Omega} + \|\varphi\|_{\boldsymbol{C}^{2,\alpha},\Omega} + \|f\|_{\boldsymbol{C}^{0,\alpha},\Omega}) \tag{A.16}$$

com $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \Omega)$.

A.4.4
Existência de solução não trivial para os problemas homogêneo e não homogêneo

Teorema A.4.4. *(Teorema 6.15 de [16]) Seja o operador estritamente elíptico*

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i - c(x) \tag{A.17}$$

com coeficientes em $\boldsymbol{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$ com Ω domínio $\boldsymbol{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então é satisfeita uma das seguintes afirmações:

(i) O problema homogêneo

$$\begin{cases} Lu &= 0 \ \text{em } \Omega \\ u &= 0 \ \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1222069/CB

possui somente a solução trivial. Neste caso a solução do problema não homogêneo

$$\begin{cases} Lu & = f \ \textit{em}\ \Omega \\ u & = \varphi \ \textit{em}\ \partial\Omega \end{cases}$$

possui uma única solução $u \in \boldsymbol{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $\forall f \in \boldsymbol{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi \in \boldsymbol{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

(ii) *O problema homogêneo possui soluções não triviais as quais constituem um subespaço finito dimensional de* $\boldsymbol{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

A.5 Equações fundamentais numa imersão: Equações de Gauss e Codazzi

Esta seção do apêndice foi elaborada com mais detalhes visto que estes resultados tem uma maior incidência no trabalho desenvolvido.
Dada a imersão isométrica $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ da superfície S de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+1}$ definimos

$$\mathcal{X}(S) = \{\textit{campos de vetores tangentes em } S\}$$

então $\forall p \in S$ temos a decomposição do espaço tangente dada por $T_pS = T_pS \oplus (T_pS)^{\perp}$. Com isto dados $X, Y \in \mathcal{X}(S)$ obtemos a equação de Gauss a seguir que representa a decomposição da conexão em sua parte tangente e sua parte normal

$$\overline{\nabla}_Y X = (\overline{\nabla}_Y X)^T + (\overline{\nabla}_Y X)^{\perp} \tag{A.18}$$

Mais precisamente, notando que $\overline{\nabla}$ representa a conexão do ambiente $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\nabla_Y X$ a conexão na hipersuperfície.

$$\overline{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + B(X,Y)N \quad \text{com} \quad B(X,Y)N = II_p(X,Y). \tag{A.19}$$

E tomando $x = (x_1, \ldots, x_n)$ coordenadas locais num ponto $x \in S$ e o referencial local adaptado $\{X_1, \ldots, X_n\}$ a equação se escreve como

$$\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k} = \overline{\nabla}_{X_k} X_i = \nabla_{X_k} X_i + b_{ik} N$$

com $b_{ik}N = \langle \overline{\nabla}_{X_k} X_i, N \rangle N$.
A partir destas equações obtemos as equações fundamentais numa imersão isométrica ou equações de compatibilidade: as equações de curvatura de Gauss e as equações de Codazzi Mainardi.

(i) **Equações de curvatura de Gauss**
Estas equações correspondem à parte tangente do tensor de curvatura que em $\mathbb{R}^{n+1}$ é nulo (veja [13]).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1222069/CB

$$\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z = 0 \tag{A.20}$$

com $[X, Y]$ o colchete entre os campos X e Y.
Tomando coordenadas locais de S e o referencial local adaptado e notando que o colchete entre dois campos do referencial se anula, a equação se escreve como

$$\nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_{ik} - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_{jk} = 0$$

E como a conexão pode ser escrita a partir dos símbolos de Christofell Γ^l_{ik} como $\nabla_{X_i} X_{ik} = \sum_l \Gamma^l_{ik} X_l$, esta equação pode ser vista também a partir destes símbolos.

(ii) **Equações de Codazzi Mainardi**
Estas equações correspondem à parte normal do tensor de curvatura.

$$\nabla_X AY - \nabla_Y AX = A\,[X, Y] \tag{A.21}$$

com A representando o operador de Weingarten.
Tomando novamente coordenadas locais e o referencial local adaptado e segundo as observações feitas acima é também possível escrever estas equações localmente.

Em resumo tomando $x = (x_1, \ldots, x_n)$ coordenadas locais de S e o referencial local adaptado $\{X_1, \ldots, X_n\}$ notando que o colchete entre dois campos do referencial se anula e usando os símbolos de Christofell as Equações de curvatura de Gauss e Codazzi Mainardi se expressam respetivamente como:

$$\begin{cases} \sum\limits_l (\Gamma^l_{ij}\Gamma^m_{jl} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{il}) + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^m_{ik} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^m_{jk} = \sum\limits_l g^{ml}(b_{ik}b_{jl} - b_{jk}b_{il}) \\ \dfrac{\partial b_{ik}}{\partial x_j} - \dfrac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} = \sum\limits_l (b_{kl}\Gamma^l_{ij} - b_{lj}\Gamma^l_{ik}) \end{cases} \tag{A.22}$$

A.5.1
Operador de Laplace Beltrami

O operador de Laplace usual tem varias generalizações de forma que possa ser mais amplamente usado, mas, como no caso usual é definido a partir do operador gradiente que em este caso também vai ser descrito de modo mais geral do que no espaço euclideano pois estaremos estudando ele sobre a hipersuperfície.

Definição A.5.1 (Gradiente sobre a hipersuperfície S). *Seja $f \in \boldsymbol{C}^\infty$ e $p \in S$, $\forall v \in T_pS$ o gradiente de f sobre a hipersuperfície S de dimensão n imersa em*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1222069/CB

$\mathbb{R}^{n+1}$ *representa o campo vetorial tangente à hipersuperfície no ponto* p *e se define como*

$$\langle \nabla_S f(p), v\rangle = vf(p) = df(p)v. \tag{A.23}$$

Tomando $x = (x_1, \ldots, x_n)$ coordenadas locais numa vizinhança de um ponto p e um referencial local adaptado $X_1, \ldots, X_n$ obtemos

$$\nabla_S f(p) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} X_i = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{A.24}$$

Logo $|\nabla_S f|^2 = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$.
Note que a diferença do laplaciano usual tem aparecido o termo g^{ij} que representa a componente $ij-$ésima da matriz inversa dos coeficientes da métrica (g_{ij}), isto se deve ao fato de que, como já tínhamos antes mencionado, a métrica euclideana em $\mathbb{R}^{n+1}$ induz uma métrica não propriamente euclideana na hipersuperfície S imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$.
O Laplaciano é definido de modo geral como a divergência do vetor gradiente, por isto, vamos primeiramente expressar a forma da divergência de um campo vetorial.
Seja $X \in \mathcal{X}(S)$, a divergência na hipersuperfície S do campo vetorial X é definida como o traço da aplicação $Y \to \overline{\nabla}_Y X$, i.e,

$$div_S X := \text{traço}(Y \to \overline{\nabla}_Y X) \tag{A.25}$$

onde $\overline{\nabla}_Y X$ representa a conexão Riemanniana do ambiente e o endomorfismo $Y \to \overline{\nabla}_Y X$ é tomado em T_pS. Assim em coordenadas locais tomando o referencial local adaptado em T_pS

$$div_S X = \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{X_i} X, X_i\rangle. \tag{A.26}$$

Definição A.5.2 (Operador de Laplace Beltrami)**.** *Seja* S *a hipersuperfície de dimensão* n *imersa em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e* $\mathcal{F}$ *o espaço das funções* $\boldsymbol{C}^\infty$*. O operador de Laplace Beltrami em* S *agindo sobre* $f \in \mathcal{F}$ *é a aplicação linear definida por:*

$$\begin{aligned} \Delta_S : \mathcal{F} &\to \mathcal{F} \\ f &\mapsto div_S(\nabla_S f). \end{aligned} \tag{A.27}$$

Em alguns casos para diferentes aplicações é adotada a convenção de tomar dito operador com sinal negativa.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1222069/CB

Tomando coordenadas locais $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e o referencial local adaptado

$$\begin{aligned}
\Delta_S f &= div_S(\nabla_S f) = \text{traço}(Y \mapsto \overline{\nabla}_Y \nabla_S f) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{X_i} \nabla_S f, X_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i \langle \nabla_S f, X_i \rangle - \langle \nabla_S f, \overline{\nabla}_{X_i} X_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i X_i(f) - \overline{\nabla}_{X_i} X_i(f).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\Delta_S f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial X_i} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial X_j}. \tag{A.28}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1222069/CB