



Patrick Anderson Bahia Vieira da Silva

**Uma Implementação do Método Estendido
dos Elementos Finitos para Análise de
Propagação de Fraturas Bidimensionais**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientadora: Prof^a. Deane de Mesquita Roehl

Rio de Janeiro
Abril de 2015



Patrick Anderson Bahia Vieira da Silva

**Uma Implementação do Método Estendido
dos Elementos Finitos para Análise de
Propagação de Fraturas Bidimensionais**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof^a. Deane de Mesquita Roehl

Orientadora

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Celso Romanel

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof^a. Tereza Denyse Pereira de Araújo

Universidade Federal do Ceará

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do

Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 10 de abril de 2015

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do autor, da orientadora e da universidade.

Patrick Anderson Bahia Vieira da Silva

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Pará em janeiro de 2012. Foi pesquisador-bolsista no Instituto Tecgraf/PUC-Rio com atuação na área de geomecânica computacional voltada à indústria do petróleo.

Ficha Catalográfica

Silva, Patrick Anderson Bahia Vieira da

Uma Implementação do Método Estendido dos Elementos Finitos para Análise de Propagação de Fraturas Bidimensionais / Patrick Anderson Bahia Vieira da Silva; orientadora: Deane de Mesquita Roehl. –2015.

v., 105 f.: il. (color); 29,7 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2015.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil – Teses. 2. Propagação de Fratura. 3. Mecânica da Fratura. 4. Método Estendido dos Elementos Finitos. 5. Métodos Numéricos. I Roehl, Deane de Mesquita. II Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III Título.

CDD: 624

Dedico esta dissertação à minha princesa
Marcela. Todo o sentido da vida mudou
para mim com a sua chegada.
Filha, amo você mais que tudo!

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida e pela iluminação da minha trajetória.

À minha amada filha Marcela Ribeiro Vieira da Silva por ter me proporcionado a maior felicidade do mundo com a sua chegada, no período da realização desta dissertação, dando-me força e sendo um incentivo a mais para que eu conseguisse concluir este ciclo.

Aos meus pais, João Paulo Vieira da Silva e Neyla Regina Bahia Vieira da Silva, e às minhas irmãs, Pâmela Anne Bahia Vieira da Silva e Polyana Andressa Bahia Vieira da Silva, pela base familiar, fundamental e necessária à minha vida, pelos incentivos ao meu desenvolvimento acadêmico e profissional, e por terem suprido a minha ausência no convívio com a minha filha e de certa forma, assim, terem me confortado, enquanto estive longe na realização deste trabalho.

À minha especial e amada namorada, noiva e mulher, Izabelle Figueiredo, pelo amor e companheirismo doados durante todo o período em que estamos juntos, por ter suportado, muitas vezes sozinha, todas as dificuldades de uma gravidez, por ter sido mãe e pai da nossa princesa na minha ausência, por ter tido paciência e nunca ter desistido do nosso compromisso e sonho de sermos uma família, mesmo diante das dificuldades, da distância e das minhas inúmeras chatices, inúmeros erros e muitos defeitos. Nunca esquecerei disso! Muito obrigado!

À professora Deane por toda orientação prestada, pelos ensinamentos transmitidos, sendo em aula, dissertação e/ou projeto, pela paciência com as minhas teimosias e, principalmente, pela sensibilidade em compreender minhas dificuldades e condições correntes.

A todos os amigos do Tecgraf pela companhia e amizade, pelo compartilhamento de conhecimento e pelo auxílio no desenvolvimento deste trabalho. Alguns nomes merecem destaque: Marko “Markini” Bendezu, Fernanda Pereira, Roberto Quevedo, Maria Fernanda Oliveira, Nilthson Noreña, Jéferson Coêlho, Cristian Meija e Nuno Brandão.

A todos os meus amigos da PUC com quem convivi, me divertir e aprendi muitas coisas, não só acadêmicas, mas também coisas da vida e de relacionamento com pessoas. Os destaques externos são: Ítalo Salomão (Fortaleza), um grande amigo que ganhei por um acaso, por ter aceitado dividir apartamento, mas que depois mostrou ter sido posto com um grande propósito na minha vida; Hélio Peixoto (Maceió), um grande amigo com quem aprendi muitas coisas e dividi muitas felicidades, e a quem devo muitos créditos na realização deste curso; Graciele Tanaka (Curitiba), uma grande amiga que do seu jeito soube me transmitir seu carinho, mesmo por trás das inúmeras brigas e implicâncias. Os destaques internos, assim chamados por serem paraenses, são: Luis Tadaiesky, Carlos Castro, Andre Daltro, Murilo Santos, Magno Almeida e Larissa Novelino. Todos

nos seus jeitos souberam me transmitir amizade e força para suportar a saudade da terra.

A todos os meus amigos de Belém pela fiel amizade, em especial aos que moram no Rio (Estado), por estarem mais perto de mim e por sempre terem me dado apoio quando precisei. São eles: Amaury Teixeira, Bernard Cunha, Victor Lopes e Laila Novelino.

Aos professores da PUC de quem tive o privilégio de receber o tão desejado conhecimento.

Aos funcionários da PUC com quem tive convívio e dos quais recebi apoio nas minhas atividades dentro da universidade.

À PUC-Rio – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro pelo excelente curso oferecido e pela bolsa de isenção cedida.

Ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pela concessão de bolsa de formação e fomento à pesquisa.

Ao Tecgraf/PUC-Rio – Instituto Tecgraf de Desenvolvimento de Software Técnico-Científico da PUC-Rio por todo o suporte físico e material disponibilizados para a realização deste trabalho e pela extensão de bolsa de estudos.

Resumo

Silva, Patrick Anderson Bahia Vieira da Silva; Roehl, Deane de Mesquita. **Uma implementação do método estendido dos elementos finitos para análise de propagação de fraturas bidimensionais**. Rio de Janeiro, 2015. 105p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O Método Estendido dos Elementos Finitos (XFEM) consiste em uma técnica para modelagem explícita de fraturas. Este método carrega toda a estrutura do método dos elementos finitos e baseia-se no Método da Partição da Unidade. O método tem como essência a adição de funções de enriquecimento ao campo dos deslocamentos contínuos, de modo a representar descontinuidades no modelo. O referido método permite a inserção da fratura no modelo de forma independente da malha e apresenta a grande vantagem de não requerer a atualização da mesma à medida que a fratura se propaga. Neste trabalho, foi desenvolvida uma implementação do XFEM para análises bidimensionais de propagação de fraturas com base na Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). Essa implementação foi feita para o programa ABAQUS® através da sub-rotina UEL. A propagação da fratura ocorre de forma automática em um único processamento. O critério de propagação da fratura adotado baseia-se nos fatores de intensidade de tensão. Estes, por sua vez, tem seus cálculos efetuados com uso da integral de interação na forma de domínio equivalente. Utiliza-se o critério da máxima tensão tangencial para determinação da direção de propagação. O modelo foi aplicado à análise de propagação de fraturas em estruturas com material quase-frágil. Obtiveram-se excelentes resultados na predição da trajetória de propagação da fratura, comprovando a aplicação vantajosa do XFEM na modelagem de fraturas em Modo I e em modo misto de carregamento em estruturas.

Palavras-chave

Propagação de Fratura; Mecânica da Fratura; Método Estendido dos Elementos Finitos; Métodos Numéricos

Abstract

Silva, Patrick Anderson Bahia Vieira da Silva; Roehl, Deane de Mesquita (Advisor). **An implementation of the extended finite element method for analysis of two-dimensional fracture propagation**. Rio de Janeiro, 2015. 105p. MSc. Dissertation. Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The Extended Finite Element Method (XFEM) is a powerful technique for the explicit modeling of fractures. This method has the background of the Finite Element Method and is based on the Partition Unity Method. The essential idea of the method is the addition of enrichment functions to the displacement field approximation for the representation of the discontinuities in the model. The crack geometry is modeled independently of the mesh and remeshing with crack growth is unnecessary. This thesis presents an ABAQUS[®] implementation of XFEM through the UEL subroutine for two-dimensional analysis of fracture propagation following the Linear Elastic Fracture Mechanics theory. Fracture propagation occurs in an automatic procedure. The fracture criterion is based on the stress intensity factors. The domain form of the interaction integral was used for the computation of the stress intensity factors and the maximum circumferential stress criterion was used to determine the fracture propagation direction. The model was applied to the analysis of the propagation of fractures in structures of quasi-brittle material. The implementation shows good results in the prediction of the fracture propagation trajectories and proves the efficiency of the XFEM in Mode I and mixed mode fracture analyzes.

Keywords

Fracture Propagation; Fracture Mechanics; eXtended Finite Element Method; Numerical Methods

Sumário

1	Introdução	20
1.1.	Objetivos	23
1.2.	Organização da Dissertação	24
2	Mecânica da Fratura Linear Elástica	25
2.1.	Taxa de Liberação de Energia	25
2.2.	Tensões em um Corpo Trincado	26
2.3.	Fator de Intensidade de Tensão	27
2.3.1.	Relação entre o parâmetro K e a Taxa de Liberação de Energia G	31
2.3.2.	Critério de Fratura	32
3	Mecânica da Fratura Computacional	34
3.1.	Método dos Elementos Finitos	36
3.2.	Elementos de Fratura Coesiva	38
3.3.	Método Estendido dos Elementos Finitos – XFEM	41
3.3.1.	Formulação do XFEM para modelagem de fraturas	43
4	Implementação do Método	45
4.1.	Pré-processamento	46
4.2.	Incorporação do XFEM através da sub-rotina UEL	47
4.2.1.	Formulação <i>shifted-basis</i>	47
4.2.2.	Integração Numérica	48
4.2.3.	Cálculo dos Fatores de Intensidade de Tensão	49
4.2.4.	Propagação da fratura	53
4.2.5.	Características dos elementos	55
4.3.	Pós-processamento	56
5	Exemplos e Resultados	57
5.1.	Trinca de Aresta em Placa Submetida a Carregamento de Tração	57
5.2.	Trinca de Aresta em Placa Submetida a Carregamento de Cisalhamento	61
5.3.	Trinca Centralizada em Placa Submetida a Carregamento de Tração	63
5.4.	Propagação de Fratura em Modo I	65

5.4.1. Propagação de Trinca de Aresta em Placa submetida à Tração	65
5.4.2. Ensaio Monotônico de Flexão de Corpo de Prova de Concreto	69
5.5. Propagação de Fratura em Modo Misto	74
5.5.1. Cálculo do Ângulo Crítico em Trinca Centralizada	75
5.5.2. Viga em Balanço com Trinca Excêntrica	77
5.5.3. Teste de <i>Flexão em Quatro Pontos</i> para Fratura em Modo Misto.	79
6 Conclusão	94
6.1. Conclusões	94
6.2. Sugestões para trabalhos futuros	99
7 Referências Bibliográficas	100

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Navio <i>Liberty Ship</i> com casco rompido ao meio devido a fraturamento.	20
Figura 1.2 – Fratura em vaso de pressão sob teste hídrico.	21
Figura 1.3 – Principais variáveis da Mecânica da Fratura (adaptada de Anderson, 2005).	21
Figura 1.4 – Fraturamento hidráulico na indústria do petróleo.	22
Figura 2.1 – Definição do eixo de coordenadas com origem na ponta da trinca, onde a direção z é normal ao plano (Anderson, 2005).	27
Figura 2.2 – Modos de carregamento atuantes na fratura.	27
Figura 2.3 – Limite de aplicação da MFLE (Castro & Meggiolaro, 2009).	29
Figura 3.1 – Elementos singulares <i>quarter-points</i> .	36
Figura 3.2 – Roseta padrão de elementos <i>quarter-points</i> . [Editada de Miranda (2003)].	37
Figura 3.3 – Rosetas em malha de elementos finitos (Miranda, 2003).	37
Figura 3.4 – Elementos coesivos em uma malha de elementos finitos.	38
Figura 3.5 – Forças coesivas atuando na ponta da fratura.	39
Figura 3.6 – Lei constitutiva do elemento coesivo – Gráfico tração x separação.	40
Figura 3.7 – Diferentes modelos do gráfico tração x separação.	40
Figura 3.8 – Malha de elementos finitos com fratura.	41
Figura 3.9 – Malha de XFEM	42
Figura 3.10 – Trinca em uma malha do XFEM (Moes et al., 1999).	44
Figura 4.1 – Dados de entrada – código gerador de arquivos	46
Figura 4.2 – Subdivisão dos elementos para integração (Giner et al., 2009).	48
Figura 4.3 – Contorno arbitrário em torno da ponta da trinca (Araújo T. D., 1999).	50
Figura 4.4 – Convenções na ponta da trinca (Ahmed, 2009).	52
Figura 4.5 – Elementos selecionados e variação de q no domínio da integral de interação (Ahmed, 2009).	53
Figura 5.1 – Placa com trinca de aresta.	58
Figura 5.2 – Deslocamentos em y – estrutura indeformada. (Deslocamentos expressos em milímetros)	60

Figura 5.3 – Deslocamentos em y – estrutura deformada. (Deslocamentos expressos em milímetros)	60
Figura 5.4 – Trinca centralizada em placa “infinita”.	63
Figura 5.5 – Gráfico comparativo dos fatores de intensidade de tensão.	64
Figura 5.6 – Evolução da fratura nos passos finais.	65
Figura 5.7 – Erro no valor numérico de K_I .	66
Figura 5.8 – Variação de K_I com o comprimento da trinca.	67
Figura 5.9 – Modelo em elementos finitos (Quebra2D).	68
Figura 5.10 – Refinamento da malha em elementos finitos ao longo da fratura (Quebra2D).	68
Figura 5.11 – Aparato para ensaio de flexão (Marangon, 2011).	69
Figura 5.12 – Curvas Carga x Deslocamento dos concretos C1 e C2 (Marangon, 2011).	71
Figura 5.13 – Modelo numérico do corpo de prova submetido a ensaio de flexão monotônica.	72
Figura 5.14 – Gráfico Carga x Deslocamento para os modelos experimental e numéricos.	72
Figura 5.15 – Modelo numérico de fratura em Modo I – Ensaio Monotônico de Flexão (visualização no ABAQUS®).	73
Figura 5.16 – Fratura em Modo I em corpos de prova submetidos à ensaio de flexão monotônica (Marangon, 2011).	73
Figura 5.17 – Modelo numérico de fratura em Modo I – Ensaio Monotônico de Flexão.	74
Figura 5.18 – Ângulo crítico de trinca centrada em placa “infinita” submetida à tensão uniforme (Ahmed, 2009).	76
Figura 5.19 – Viga em balanço com trinca excêntrica.	77
Figura 5.20 – Trajetórias de propagação da fratura para diferentes valores de Δa .	78
Figura 5.21 – Configuração deformada da viga para um $\Delta a = 0,025$ cm (ABAQUS®).	78
Figura 5.22 – Configuração deformada da viga para um $\Delta a = 0,025$ cm (Sigma2D).	78
Figura 5.23 – Modelo de teste de flexão em quatro pontos idealizado (Gálvez et al., 1998).	79
Figura 5.24 – Modelo de teste de flexão em quatro pontos adotado (Gálvez et al., 1998).	80

Figura 5.25 – Geometria, forças aplicadas e condições de contorno dos modelos avaliados. (a) Modelo de teste tipo 1 ($K_{stiff} = 0$). (b) Modelo de teste tipo 2 ($K_{stiff} = \infty$) (Gálvez et al., 1998).	80
Figura 5.26 – Trajetórias de propagação da fratura para os modelos numéricos e experimental.	82
Figura 5.27 – Malha do modelo numérico para as análises tipos 1 e 2.	82
Figura 5.28 – Configuração deformada do modelo tipo 1 (ABAQUS®).	83
Figura 5.29 – Configuração deformada do modelo tipo 1 (Sigma2D).	83
Figura 5.30 – Configuração deformada do modelo tipo 2 (ABAQUS®).	83
Figura 5.31 – Configuração deformada do modelo tipo 2 (Sigma2D).	83
Figura 5.32 – Estudo comparativo de diferentes valores de K_{Ic} para as curvas: (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento – Modelo Linear - Teste tipo 1.	85
Figura 5.33 – Estudo comparativo de diferentes valores de K_{Ic} para as curvas: (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento – Modelo Linear - Teste tipo 2.	85
Figura 5.34 – Estudo comparativo de diferentes valores de K_{Ic} para as curvas: (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento – Modelo Elíptico - Teste tipo 2.	87
Figura 5.35 – Estudo comparativo dos critérios de fratura para as curvas: (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento – Teste tipo 1.	88
Figura 5.36 – Estudo comparativo dos critérios de fratura para as curvas: (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento – Teste tipo 2	88
Figura 5.37 – Curvas (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento do modelo XFEM em comparação com as curvas de referência – Teste tipo 1.	90
Figura 5.38 – Curvas (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento do modelo XFEM em comparação com as curvas de referência – Teste tipo 2.	90
Figura 5.39 – Curvas (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento dos Modelos XFEM e coesivo em comparação com as curvas de referência – Teste tipo 1.	92
Figura 5.40 – Curvas (a) carga x CMOD e (b) carga x deslocamento dos Modelos XFEM e coesivo em comparação com as curvas de referência – Teste tipo 2.	92

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Campo de tensões em torno da ponta da trinca para os modos I e II em um material isotrópico e linear elástico.	30
Tabela 2.2 – Campo dos deslocamentos em torno da ponta da trinca para os modos I e II em um material isotrópico e linear elástico.	30
Tabela 5.1 – Resultados de K_I ($MPa\sqrt{mm}$) para diferentes domínios de avaliação da integral de interação.	58
Tabela 5.2 – Erro no cálculo do FIT.	59
Tabela 5.3 - Valores de K_I ($MPa\sqrt{mm}$) para diferentes domínios de avaliação da integral de interação.	61
Tabela 5.4 - Valores de K_{II} ($MPa\sqrt{mm}$) para diferentes domínios de avaliação da integral de interação.	61
Tabela 5.5 – Erro no cálculo de K_I .	62
Tabela 5.6 – Erro no cálculo de K_{II} .	62
Tabela 5.7 – Valores de módulo de elasticidade (média e coeficiente de variação) e tenacidade.	70
Tabela 5.8 – Valores (média e coeficiente de variação) das tensões de primeira fissura e de ruptura.	70
Tabela 5.9 – Resultado do cálculo do ângulo crítico de propagação.	76

Lista de Abreviaturas e Símbolos

Abreviaturas

2D	Bidimensional ou Duas Dimensões
CMOD	<i>Crack Mouth Opening Displacement</i>
CV	Coeficiente de Variação
EFEM	Método Embutido dos Elementos Finitos
EPD	Estado Plano de Deformações
EPT	Estado Plano de Tensões
FIT	Fator de Intensidade de Tensão
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MF	Mecânica da Fratura
MFC	Mecânica da Fratura Coesiva
MFEP	Mecânica da Fratura Elastoplástica
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica
UEL	<i>User Element</i>
VCCT	<i>Virtual Crack Closure Technique</i>
XFEM	Método Estendido dos Elementos Finitos

Símbolos

Números Romanos

<i>I, II, III</i>	Índices dos modos de carregamento
-------------------	-----------------------------------

Alfabeto Romano

A	Domínio de integração
A_c	Área da trinca
A_{el}	Área do elemento
A_m	Amplitude
A_r	Área delimitada pelo caminho C
C, C^+, C^-	Contornos ou caminhos
C_g	Constante de correção geométrica
C1, C2	Tipo de misturas de concreto

D	Dimensão característica da peça (teste de flexão em quatro pontos)
E	Módulo de Young ou Módulo de elasticidade
E'	Módulo de elasticidade característico
F	Força aplicada
$F_l(x)$	Funções assintóticas de ponta de fratura
G	Taxa de liberação de energia
G_f	Energia de fratura
G_f^{II}	Energia de fratura correspondente ao Modo II de fratura
G_I, G_{II}, G_{III}	Taxa de liberação de energia para os modos de carregamento I, II e III, respectivamente
G_{Ic}, G_{IIc}	Taxa crítica de liberação de energia para os Modo I e II de carregamento
$H(x)$	Função de “salto”
I_n	Conjunto de todos os nós do modelo
J	Integral J
J_n	Conjunto dos nós dos elementos cujo suporte é totalmente cortado pela superfície da fratura
J_n^*	Conjunto dos nós dos elementos cujo suporte é totalmente cortado pela superfície da fratura e que não são nós do elementos que contém a ponta mesma
$J^{(1+2)}$	Integral J para uma superposição de dois estados de equilíbrio
$J^{(1)}, J^{(2)}$	Integral J para os Estados 1 e 2 de equilíbrio, respectivamente
K	Fator de Intensidade de Tensão
K_n	Conjunto dos nós do elemento que contém a ponta da fratura
K_c	Fator de intensidade de tensão crítico
K_I, K_{II}, K_{III}	Fatores de intensidade de tensão para os modos de carregamento I, II e III, respectivamente
$K_{Ic}, K_{IIc}, K_{IIIc}$	Fatores de intensidade de tensão críticos para os modos de carregamento I, II e III, respectivamente
K_{stiff}	Rigidez da mola (teste de flexão em quatro pontos)
L	Dimensão característica da peça
M	Momento fletor

$M^{(1,2)}$	Integral de interação
N_i	Função de forma
P	Trabalho das forças externas
$P1, P2$	Forças aplicadas no teste de flexão em quatro pontos
$Q4$	Elemento de quatro nós
S	Superfície de um corpo
T	Tenacidade
T_n, T_t	Componentes normal e tangencial do tensor de tensões coesivas
T_c	Vetor de tensões coesivas nas interfaces da trinca
T_{ext}	Vetor de forças externas aplicadas no contorno Γ
T_{max}	Tensão coesiva máxima
U	Energia de deformação
V	Volume de um corpo
W	Densidade de energia de deformação
$W^{(1,2)}$	Energia de deformação de interação
a	Comprimento da trinca
b_i	Graus de liberdade de deslocamentos adicionais
b_t, h_t	Largura e altura da seção transversal da amostra prismática
c	Constante ajustável a partir de dados experimentais
c_i^l	Graus de liberdade de deslocamentos adicionais
$d(x)$	Distância com sinal do ponto x à superfície da fratura
$f(a/w)$	Função que descreve toda a influência das geometrias da peça e da trinca, e do carregamento no campo de tensões
$f_{ij}, g_{ij}, h_{ij}^{(m)}$	Funções adimensionais de θ
$f_{ij}^{(I)}, g_{ij}^{(I)}$	Funções adimensionais de θ em Modo I de carregamento
h, t, w	Dimensões características da peça
h_{local}	Comprimento característico
k	Constante
m	Número de termos da expansão em série
m_j	Vetor normal à curva C
n_j	Vetor unitário normal à Γ

q	Função peso
r	Raio ou coordenada radial
r_d	Raio do círculo correspondente ao domínio de integração A
s	Comprimento de arco
u_i	Vetor dos deslocamentos ou graus de liberdade de deslocamento
$u_i^{(I)}$	Vetor dos deslocamentos em Modo I de carregamento
$u(\mathbf{x})$	Aproximação do campo dos deslocamentos
\mathbf{x}	Vetor de coordenadas cartesianas
x, y	Coordenadas cartesianas e/ou direções dos eixos de referência
z_p	Zona plástica

Alfabeto Grego

Δ	Abertura da trinca
Δa	Acréscimo de comprimento de trinca
Δ_n, Δ_t	Deslocamentos relativos nominal e tangencial, respectivamente
Γ, Γ_0	Contornos ou caminhos
Γ_c	Contorno da fratura
Π	Energia potencial
Ω	Domínio avaliado
β	Ângulo de inclinação
δ_{1j}	Delta de Kronecker
δ_c	Abertura crítica
δ_{nc}, δ_{tc}	Componentes normal e tangencial de abertura crítica
δ_n, δ_t	Componentes normal e tangencial do vetor de deslocamentos correspondente à separação total das faces da trinca
$\delta\Delta$	Abertura virtual da trinca
$\delta\varepsilon$	Deformações virtuais
δu	Deslocamentos virtuais
ε_{ij}	Tensor de deformações
γ	Ângulo com valor igual a $\pi/2 - \theta$

κ	Constante de Kolosov
μ	Módulo de cisalhamento
ν	Coefficiente de Poisson
θ	Ângulo ou coordenada angular
θ_{cr}	Ângulo crítico de propagação
σ	Tensão nominal ou tensão aplicada
σ_{cr}	Tensão de primeira fissura
σ_u	Tensão de ruptura
σ_{ij}	Tensor de tensões
$\sigma_{ij}^{(total)}$	Tensor total de tensões
$\sigma_{ij}^{(I)}, \sigma_{ij}^{(II)}, \sigma_{ij}^{(III)}$	Tensor de tensões para os modos de carregamento I, II e III, respectivamente
$\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$	Tensões próximas à ponta da fratura em coordenadas polares
τ	Tensão cisalhante
τ_{xy}	Tensão cisalhante na direção xy
τ_{xz}	Tensão cisalhante na direção xz
τ_{yz}	Tensão cisalhante na direção yz
ψ	Potencial qualquer