4
Exemplos

Neste capítulo apresentam-se exemplos de análises do comportamento estático, dinâmico e de instabilidade de placas.

É considerado um comportamento elástico que está definido pelo módulo de elasticidade $E = 20000\,MPa$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0{,}3$. Para a obtenção dos deslocamentos, momentos analisou-se a placa circular submetida a diferentes condições de contorno nos bordos:

- **E** = Engastada
- **S** = Simplesmente apoiada
- **L** = Livre
- **R** = Rígido à rotação (permite deslocamento vertical)
- **SAE** = apoio elástico

Para poder diferenciar a formulação da placa como fina ou espessa usaremos a seguinte representação:

- **PE** = Placa espessa
- **PF** = Placa fina

Para todos os resultados apresentados utilizou-se o sistema internacional SI.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

4.1 Análise Estática

4.1.1 Placa circular

Considera-se uma placa circular de raio externo $a = 9{,}00\,m$, com uma espessura de $h = 0{,}20\,m$, um carregamento de $q_o = 50{,}00\,kN/m$ e uma força pontual de $Pz = 50{,}00\,kN$. O fator de correção do cortante da placa espessa é $k_s^{\,2} = \pi^2/12$. Foi feita uma análise comparativa entre a solução analítica da placa e o método energético. Deve-se observar que no modelo numérico é considerada uma placa anular com raio interno muito pequeno.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

Tabela 4-1: Comparação de resultados da placa circular com espessura constante e carregamento uniforme

Condições de contorno	Fonte do resultado	Deslocamento (r = 4,5m)	Momento (r = 4,5m)	
			Mr/ 10^4	Mθ/10^4
E	Timoshenko_PF	0,1968	12,0234	20,8828
	Autor_PF	0,1968	12,0234	20,8828
	Autor_PE	0,1974	12,0234	20,8828
	% Diferença_PF	0,00	0,00	0,00
	% Diferença _PE	0,31	0,00	0,00
S	Timoshenko_PF	1,0041	62,6484	71,5078
	Autor_PF	1,0041	62,6431	71,5062
	Autor_PE	1,0047	62,6436	71,5063
	% Diferença_PF	0,00	-0,01	0,00
	% Diferença _PE	0,06	-0,01	0,00

Tabela 4-2a: Comparação de momentos e deslocamentos da placa fina circular de espessura constante sujeita a uma carga pontual no centro da placa

Condições de contorno	Fonte do resultado	Deslocamento (r = 4,5m)	Momento (r = 4,5m)	
			Mr/ 10^2	Mθ/10^2
E	Timoshenko_PF	0,02218	3,9355	23,9167
	Autor_PF	0,02219	3,8935	24,0042
	Autor_PE	0,02223	3,9294	23,9350
	% Diferença_PF	0,02	-1,07	0,37
	% Diferença _PE	0,20	-0,15	0,08

Tabela 4-3b: Comparação de momentos e deslocamentos da placa fina circular de espessura constante sujeita a uma carga pontual no centro da placa

S	Timoshenko_PF	0,08564	35,8533	63,7054
	Autor_PF	0,08564	35,8952	63,7929
	Autor_PE	0,08568	35,8575	63,7234
	% Diferença_PF	0,00	0,12	0,14
	% Diferença _PE	0,05	0,01	0,03

Pode-se observar na Tab. 4-1, para uma placa circular com carregamento uniformemente distribuído, tanto com bordo livre quanto para uma engastada há uma diferença de deslocamentos e momentos desprezível entre os resultados analíticos e numéricos (tomou-se r = 4,5m). Note-se que para isto foi necessário utilizar quatro polinômios adicionais radiais. A diferença entre resultados para as aproximações PF e PE também é muito pequena, já que a placa tem razão R/h = 45. Também para o caso de força pontual no centro da placa pode-se observar na Tab. 4-2 uma boa aproximação.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

Tabela 4-4: Comparação de deformação de uma placa fina de espessura variável (h0 / h1=1.50, α = 1.26, β = 0.176, β1=0,173 e coeficiente de v = 0,25) medidos no centro da placa.

Condições de contorno	Fonte do resultado	Deslocamento (r = 0,01m)	Momento (r = 4,5m)	
			Mr/10^4	Mθ/10^4
(a) Sujeita a um carregamento distribuído				
S	Timoshenko_PF	0,04899	71,2800	70,0650
	Autor_PF	0,04920	71,4252	69,7306
	Autor_PE	0,04947	71,4382	69,7332
	% Diferença_PF	0,44	0,20	-0,48
	% Diferença _PE	0,98	0,22	-0,47
(b) Sujeita a uma carga pontual				
S	Timoshenko_PF	0,004464	44,0000	61,5000
	Autor_PF	0,004452	43,8748	61,1682
	Autor_PE	0,004558	43,3212	61,0122
	% Diferença_PF	-0,26	-0,28	-0,54
	% Diferença _PE	2,10	-1,54	-0,79

Os resultados para uma placa circular de espessura variável com bordo simplesmente apoiado são apresentados na Tab. 4.3. Há também aqui uma

boa concordância dos resultados. Na placa fina foram necessários quatro polinômios adicionais, enquanto a placa espessa precisou de oito polinômios adicionais.

No problema do carregamento não axissimétrico (variação linear), os resultados apresentados na Tab. 4-4 as deformações e momentos da placa fina também concordam com o valor teórico. Foram utilizados três modos radiais adicionais para PF e seis para PE, sendo apenas um circunferencial (correspondente ao carregamento linear).

Tabela 4-5: Comparação de esforços e deformação da placa circular de espessura constante sujeita a um carregamento não axissimétrico (em r = 6m, θ = 0).

Condições de contorno	Fonte do resultado	Deslocamento	Momento	
			Mr/ 10^3	Mθ/10^3
E	Timoshenko_PF	0,02399	53,1250	44,3750
	Autor_PF	0,02399	53,1250	44,3750
	Autor_PE	0,02417	53,1787	44,4066
	% Diferença_PF	0,00	0,00	0,00
	% Diferença _PE	0,72	0,10	0,07
S	Timoshenko_PF	0,07634	165,6250	109,1477
	Autor_PF	0,07634	165,6244	109,1473
	Autor_PE	0,07654	165,7210	109,2237
	% Diferença_PF	0,00	0,00	0,00
	% Diferença _PE	0,25	0,06	0,07

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

4.1.2
Placa circular anular

Para o problema de placa circular anular, considera-se um raio interno de $b = 3{,}00\,m$. Nas seguintes tabelas apresentam-se resultados para diversos casos de carregamento.

Mostra-se na Tab. 4-5 o problema de a placa circular anular com carregamento uniformemente distribuído, onde a diferença de deslocamentos e momentos novamente desprezível. Para este caso foi necessário utilizar cinco polinômios adicionais radiais para PF e dez para PE.

Tabela 4-6: Comparação de esforços e deformações da placa anular de espessura constante sujeita a um carregamento uniforme.

Condições de contorno	Fonte do resultado	Deformação (r = 6m)	Momento (r = 6m)	
			Mr/10^4	Mθ/10^4
E - L	Timoshenko_PF	0,2402	18,6754	31,6362
	Autor_PF	0,2402	18,6752	31,6384
	Autor_PE	0,2410	18,6760	31,6364
	% Diferença_PF	0,00	0,00	0,01
	% Diferença _PE	0,34	0,00	0,00
R - S	Timoshenko_PF	0,4127	44,1850	38,7087
	Autor_PF	0,4127	44,1876	38,6997
	Autor_PE	0,4131	44,2143	38,7174
	% Diferença_PF	0,00	0,01	-0,02
	% Diferença _PE	0,09	0,07	0,02
R - E	Timoshenko_PF	0,0687	4,7456	8,6277
	Autor_PF	0,0687	4,7466	8,6254
	Autor_PE	0,0691	4,7539	8,6303
	% Diferença_PF	0,00	0,02	-0,03
	% Diferença _PE	0,54	0,18	0,03

Na Tab. 4-6 são apresentados os resultados para uma placa anular de espessura variável. Neste caso os deslocamentos da placa espessa apresentam uma diferença mais considerável (chegando próximo de 3%). Note-se que isto ocorre devido à maior espessura da placa, em que a importância da energia de cisalhamento se torna maior. No caso das tensões máximas, deve ser notado que o valor de r para comparação é variável e há uma discordância um tanto maior em relação aos exemplos anteriores. Para este caso foi necessário utilizar seis polinômios adicionais radiais para PF e doze para PE.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

Tabela 4-7: Comparação de deformação de uma placa anular de espessura variável (a/b=3, h0=0,2, h1=0,6) sujeita a um carregamento distribuído, v = 0,3

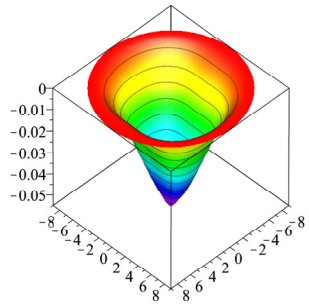
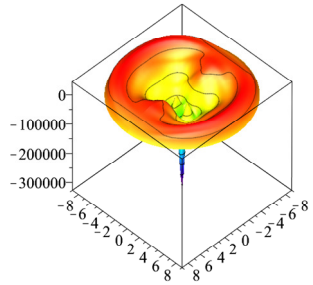
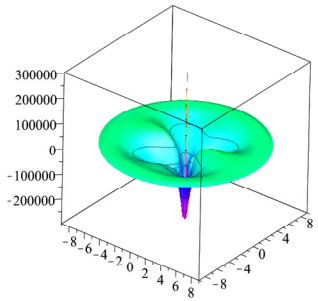
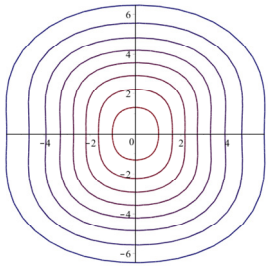
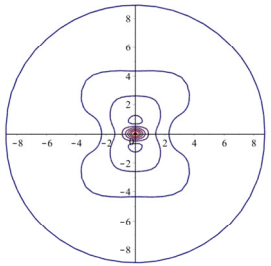
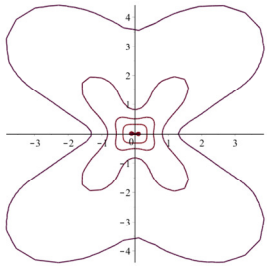
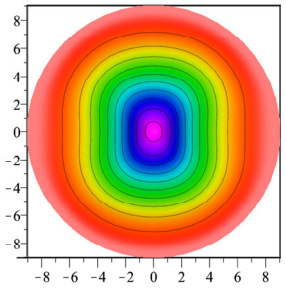
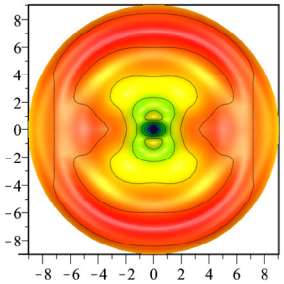
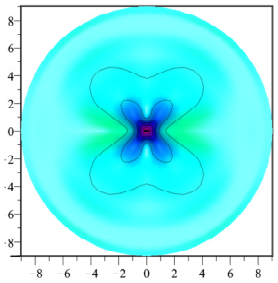
Condições de contorno	Fonte do resultado	Deslocamento (r = 6m)	Tensão max/10^6 (r = variável)
(a) k = 13,64; k1 = 2,12			
E - L	Timoshenko_PF	0,1610	153,4500
	Autor_PF	0,1638	142,4907
	Autor_PE	0,1644	146,1734
	% Diferença _PF	1,74	-7,14
	% Diferença _PE	2,10	-4,74
(b) k = 5,57; k1 = 1,673			
R - S	Timoshenko_PF	0,1270	62,6625
	Autor_PF	0,1299	64,4462
	Autor_PE	0,1302	65,3890
	% Diferença _PF	2,25	2,85
	% Diferença _PE	2,46	4,35
(c) k = 1,27; k1 = 0,193			
R - E	Timoshenko_PF	0,0147	14,2875
	Autor_PF	0,0148	13,6086
	Autor_PE	0,0151	14,1063
	% Diferença _PF	1,14	-4,75
	% Diferença _PE	2,81	-1,27

Nos seguintes quadros mostram-se graficamente os deslocamentos e momentos para cada caso analisado anteriormente.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

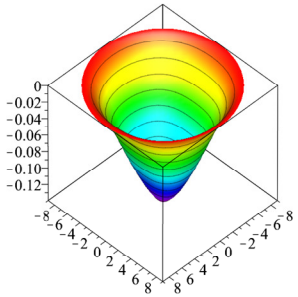
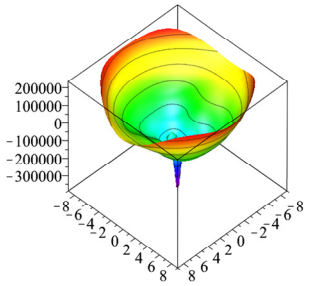
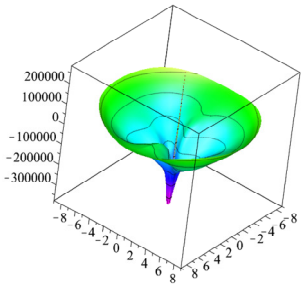
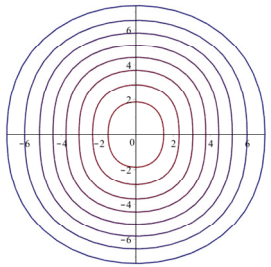
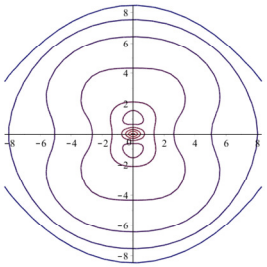
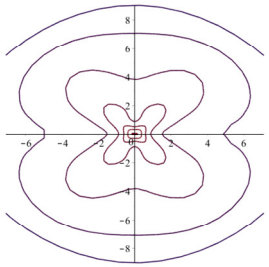
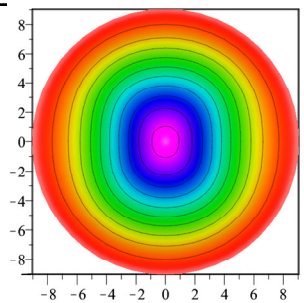
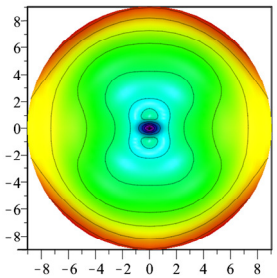
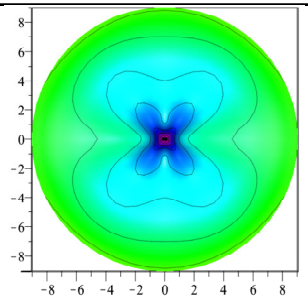
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

Quadro 4-1. Placa circular com bordo engastado sujeita a um carregamento pontual

	Deslocamento	Momento	
		Mr	Mθ
3 -D			
Plano			
Plano da superfície			

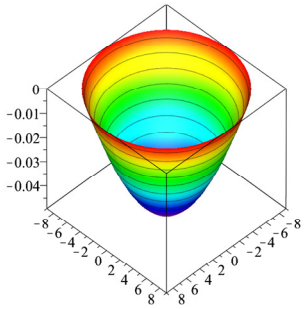
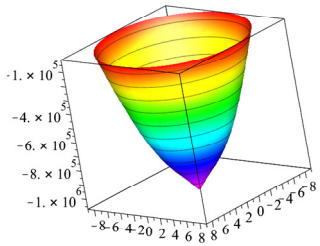
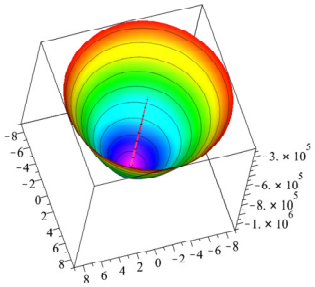
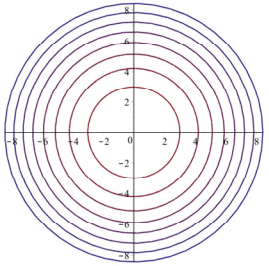
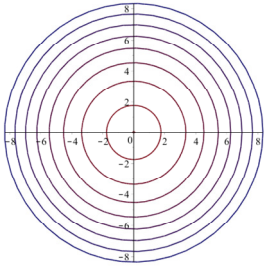
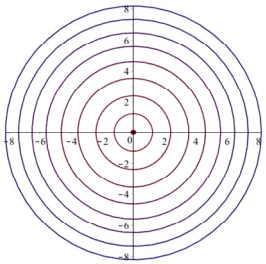
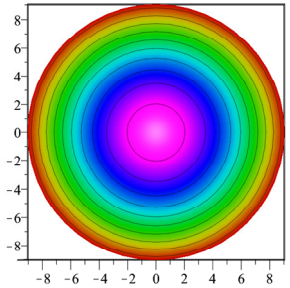
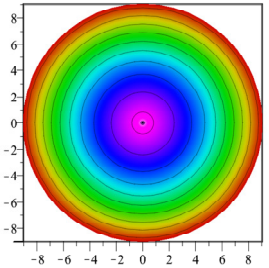
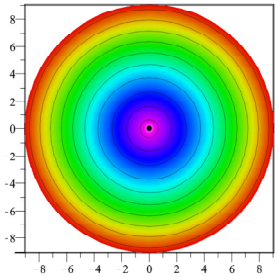
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

Quadro 4-2. Placa circular com bordo simplesmente apoiado sujeita a um carregamento pontual

	Deslocamento	Momento	
		Mr	Mθ
3 -D			
Plano			
Plano da superfície			

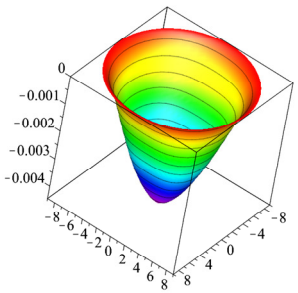
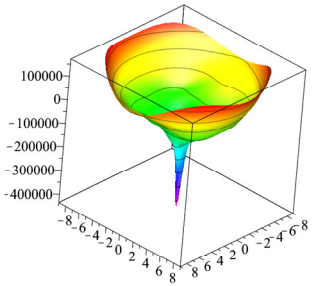
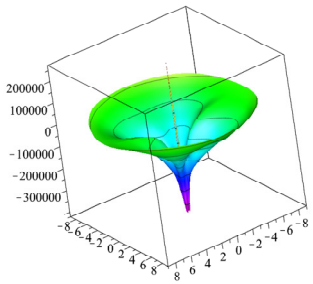
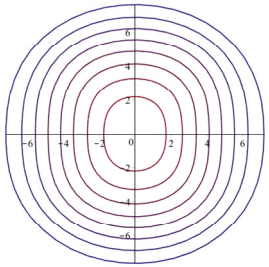
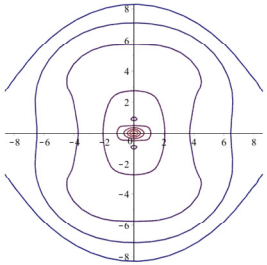
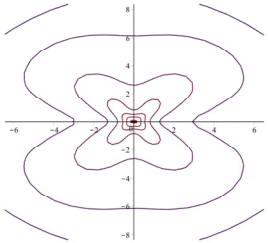
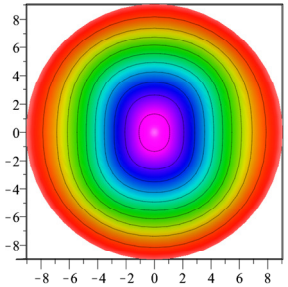
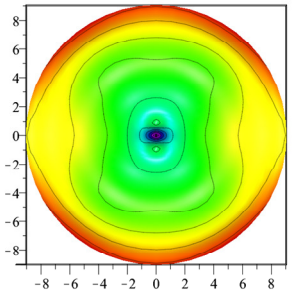
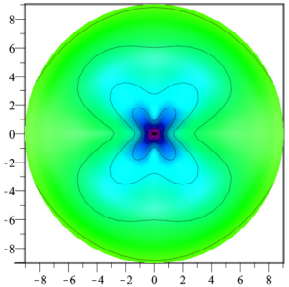
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

Quadro 4-3. Placa circular de espessura variável com bordo engastado sujeita a um carregamento distribuído

	Deslocamento	Momento	
		Mr	Mθ
3 -D			
Plano			
Plano da superfície			

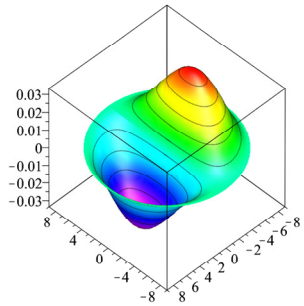
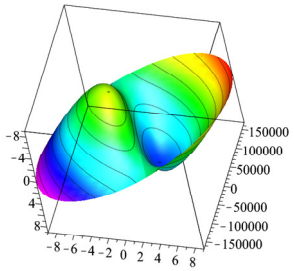
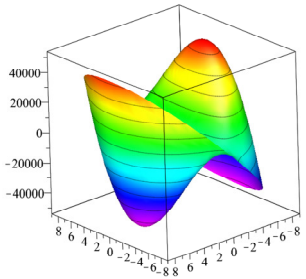
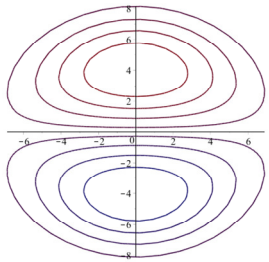
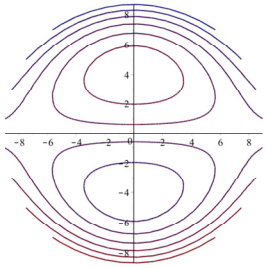
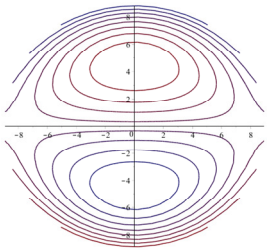
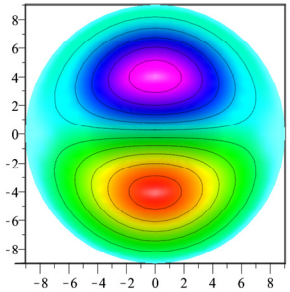
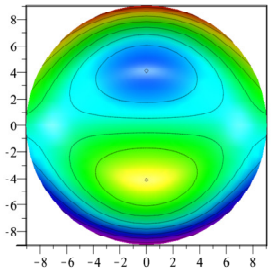
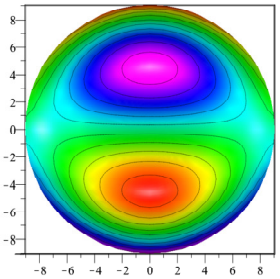
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

Quadro 4-4. Placa circular de espessura variável com bordo simplesmente apoiado sujeita a um carregamento pontual

	Deslocamento	Momento	
		Mr	Mθ
3 -D			
Plano			
Plano da superfície			

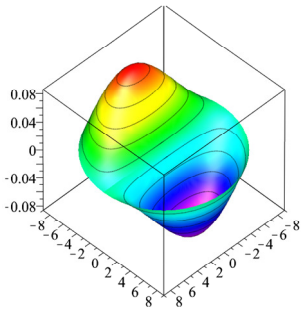
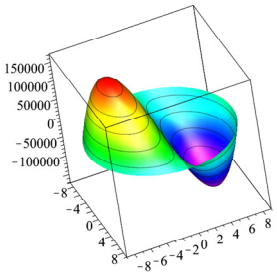
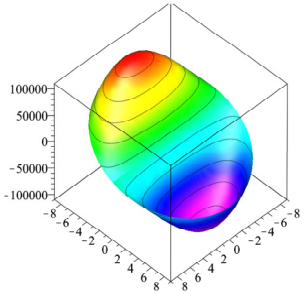
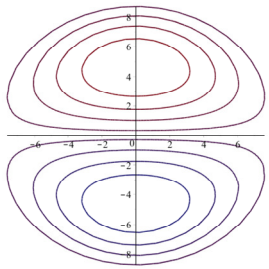
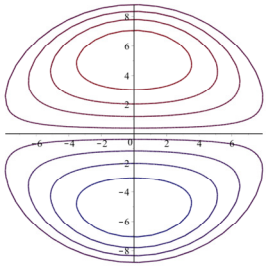
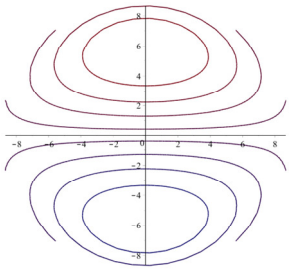
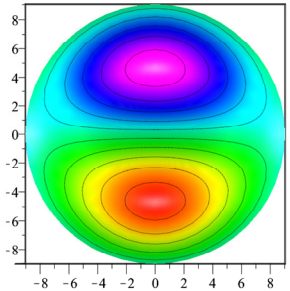
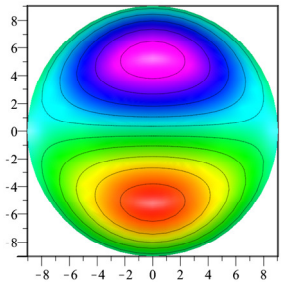
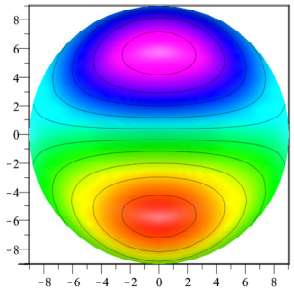
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

Quadro 4-5. Placa circular de espessura constante engastado no bordo e sujeita a um carregamento não axissimétrico (linear)

	Deslocamento	Momento	
		Mr	Mθ
3 -D			
Plano			
Plano da superfície			

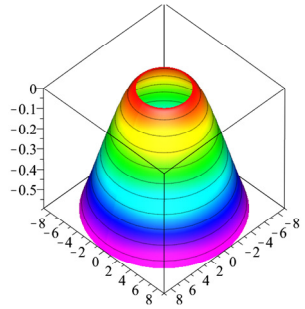
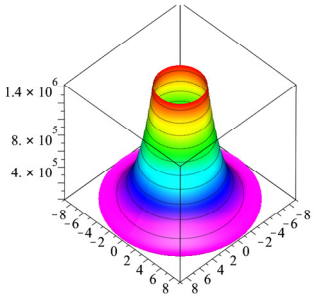
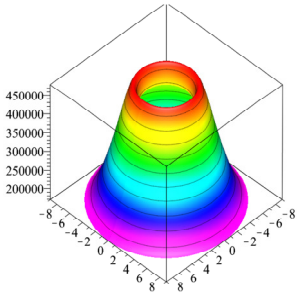
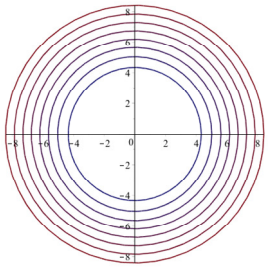
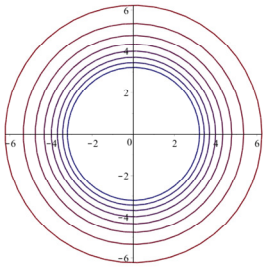
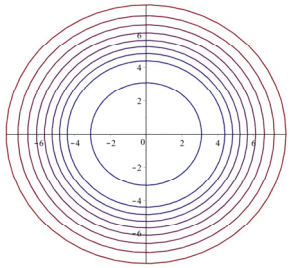
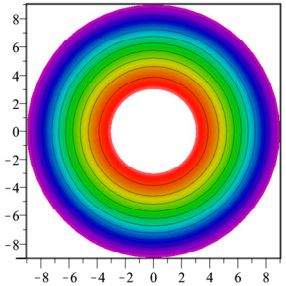
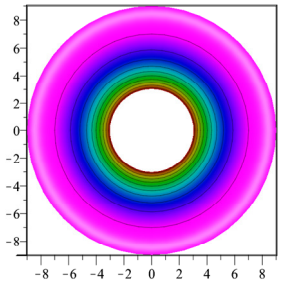
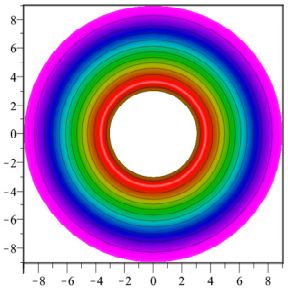
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

Quadro 4-6. Placa circular de espessura constante simplesmente apoiado no bordo e sujeita a um carregamento não axissimétrico (linear)

	Deslocamento	Momento	
		Mr	Mθ
3 -D			
Plano			
Plano da superfície			

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

Quadro 4-7. Placa circular anular de espessura constante com bordo interno engastado e externo livre sujeita a um carregamento constante

	Deslocamento	Momento	
		Mr	Mθ
3 -D			
Plano			
Plano da superfície			

4.2 Análise de Vibrações

4.2.1 Placa Circular

Para encontrar as frequências e modos de vibração da placa com diferentes condições de contorno, considera-se uma densidade de massa $\rho = 27000\, N/m^3$. Para obter as primeras três frequencias e modos de vibração próximos aos valores é necessário utilizar quatro funções trigonométricas circunferenciais com três polinômios adicionais radiais em PF na e seis polinomios adicionais radiais em PE.

Observa-se na Tab. 4-7 uma boa concordância entre os resultados obtidos com o modelo deste trabalho e os resultados de (LEISSA, 1969).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

Tabela 4-8: Comparação das frequências da placa circular de espessura constante

Condições de contorno	Fonte do resultado	Modo			
		0	1	2	3
E	Leissa_PF	10,22	21,26	34,88	51,04
	Autor_PF	10,21	21,25	34,86	51,12
	Autor_PE	10,20	21,20	34,77	50,59
	% Diferença_PF	-0,01	-0,03	-0,06	0,16
	% Diferença _PE	-0,14	-0,27	-0,31	-0,89
S	Leissa_PF	4,98	13,94	25,65	
	Autor_PF	4,93	13,89	25,60	
	Autor_PE	4,93	13,88	25,54	
	% Diferença_PF	-0,85	-0,33	-0,19	
	% Diferença _PE	-0,88	-0,47	-0,41	

4.2.2 Placa Circular Anular

Considera-se uma placa circular anular de raio interno $b = 2{,}70\, m$. Novamente, aqui foram utilizadas quatro funções circunferenciais e três adicionais radiais para PF e seis para PE.

Na Tab. 4-8 observam-se resultados muito próximos aos valores teoricos demonstrando a efetividade deste método para cálculo de frequências.

Tabela 4-9: Comparação das frequências da placa circular anular de espessura constante

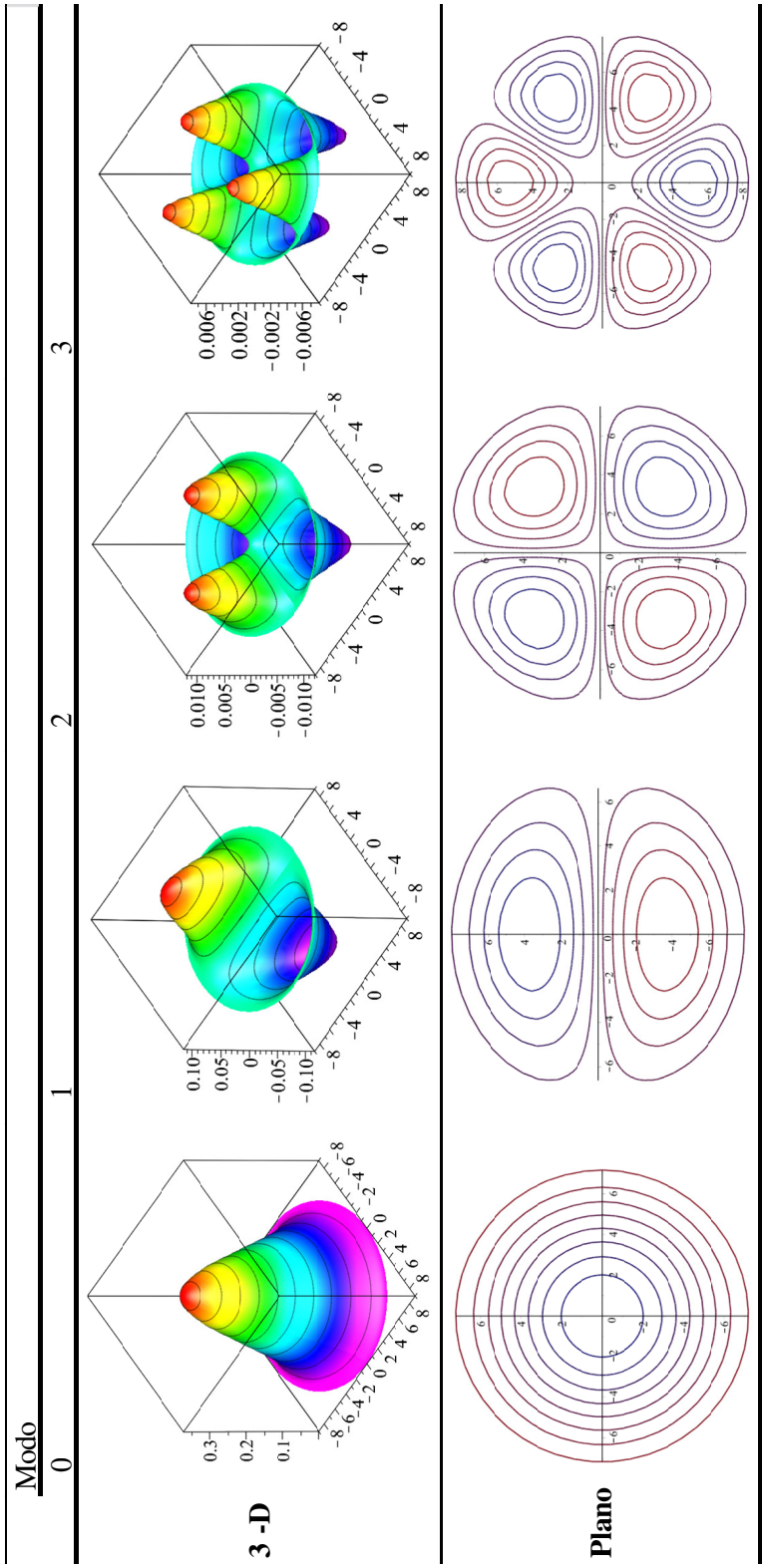
Condições de contorno	Fonte do resultado	Modo			
		0	1	2	3
E - L	Leissa_PF	6,33	6,66	7,96	13,27
	Autor_PF	6,55	6,66	7,96	13,28
	Autor_PE	6,55	6,65	7,96	13,25
	% Diferença_PF	3,51	0,00	-0,03	0,04
	% Diferença _PE	3,46	-0,10	-0,03	-0,17
E - S	Leissa_PF	29,90	31,40	36,20	45,40
	Autor_PF	29,97	31,39	36,24	45,47
	Autor_PE	29,83	31,32	36,15	45,01
	% Diferença_PF	0,22	-0,02	0,11	0,14
	% Diferença _PE	-0,23	-0,25	-0,15	-0,86
S - S	Leissa_PF	21,10	23,30	30,20	42,00
	Autor_PF	21,07	23,31	30,26	41,87
	Autor_PE	21,03	23,24	30,12	41,71
	% Diferença_PF	-0,14	0,03	0,18	-0,30
	% Diferença _PE	-0,31	-0,27	-0,26	-0,70
E- E	Leissa_PF	45,20	46,60	51,00	60,00
	Autor_PF	45,33	46,62	51,13	60,04
	Autor_PE	44,98	46,59	50,97	59,02
	% Diferença_PF	0,28	0,05	0,25	0,07
	% Diferença _PE	-0,48	-0,02	-0,06	-1,64

Nos seguintes quadros apresentam-se os modos de vibração das frequências para os diferentes casos analisados, tanto para a placa circular como para a placa anular, finas e espessas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

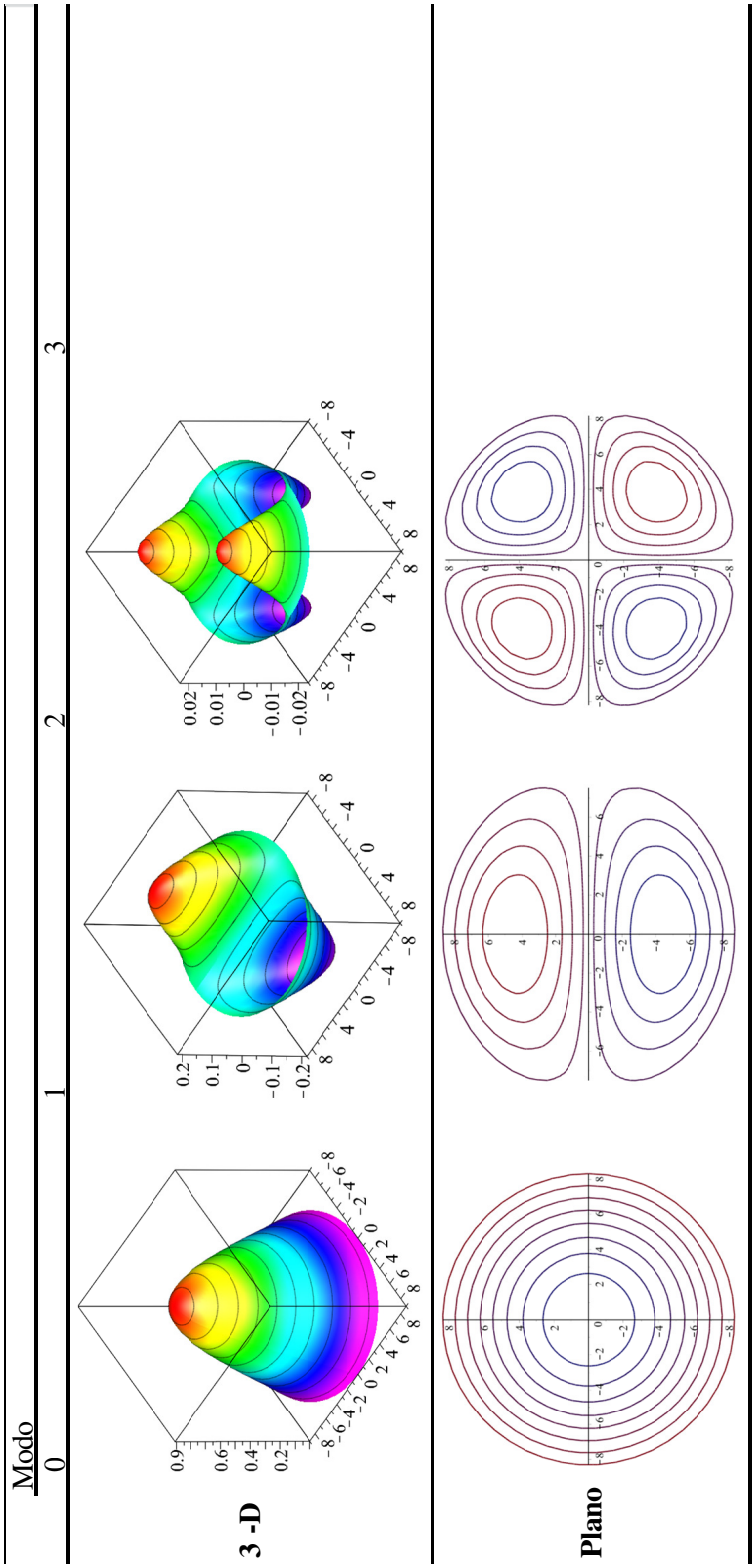
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

Quadro 4-8. Placa circular de espessura constante com bordo engastado



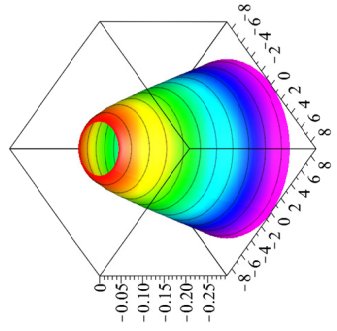
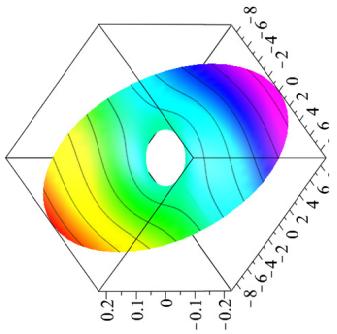
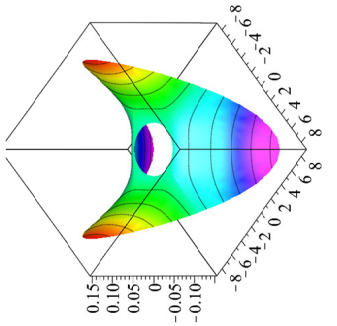
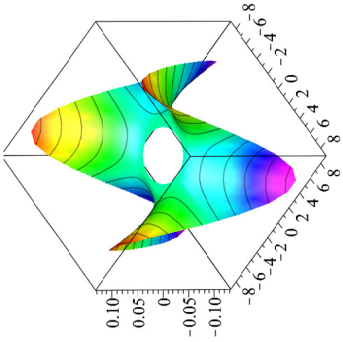
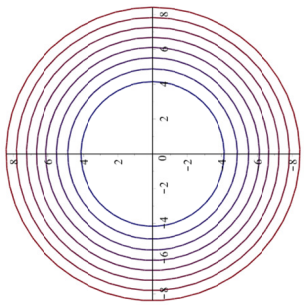
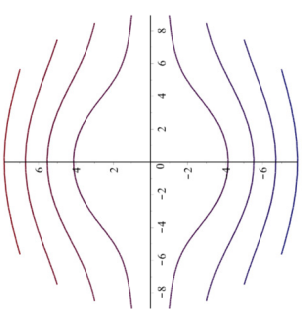
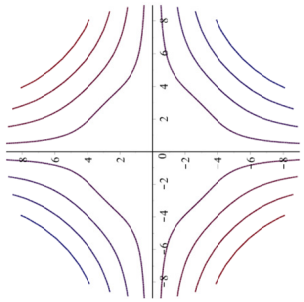
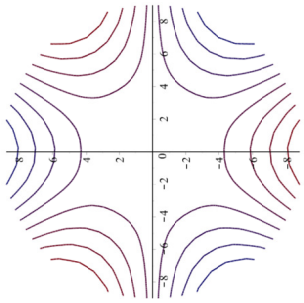
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

Quadro 4-9. Placa circular de espessura constante com bordo simplesmente apoiado



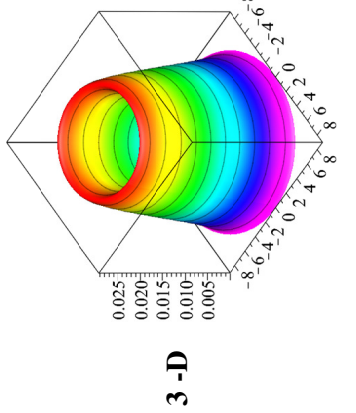
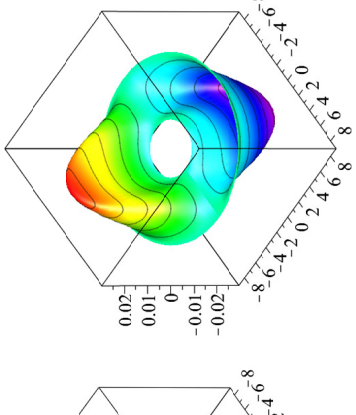
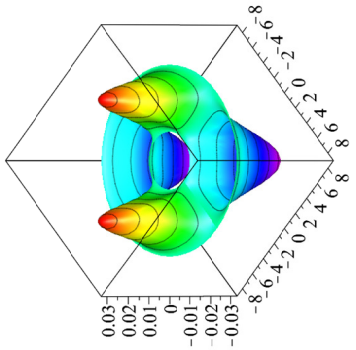
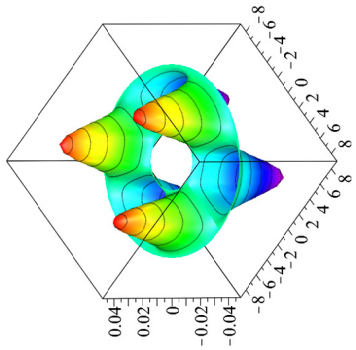
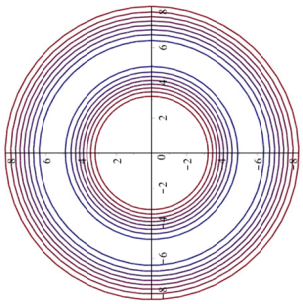
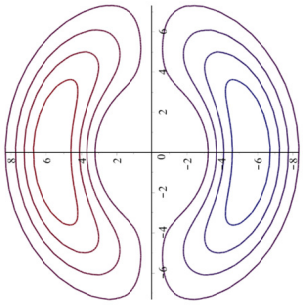
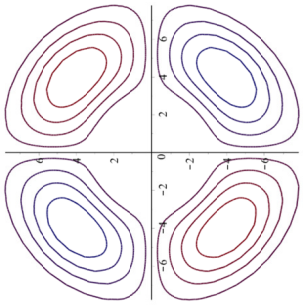
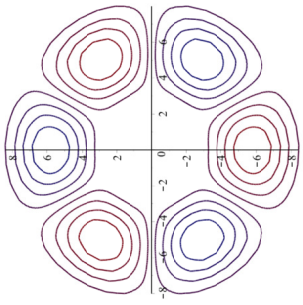
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

Quadro 4-10. Placa circular anular de espessura constante com bordo interno engastado e libre no bordo externo

Modo	0	1	2	3
3 -D				
Plano				

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

Quadro 4-11. Placa circular anular de espessura constante com bordo interno e externo engastados

Modo	0	1	2	3
3 -D				
Plano				

4.3 Análise de Instabilidade

4.3.1 Carga Crítica

Para análise comparativa da carga crítica sob compressão radial uniforme de placas circulares e anulares de espessura constante foram considerados modos axissimétricos, com quatro polinômios radiais adicionais para PF e oito para PE. Deve-se mencionar que alguns casos de placa anular os modos circunferenciais podem corresponder a cargas críticas inferiores às de modos radiais. Os resultados não apresentaram uma diferença significativa em relação aos valores teóricos, como pode-se observar nas Tabs. 4-9 e 4-10. Na Tab. 4.9 foi considerada uma placa com h = 0,20 m e raio externo a = 9,00 m, e na Tab. 4.10 uma placa com h = 0,20 m, raio externo a = 9,00 m e raio interno b = 3,00 m.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

Tabela 4-10: Carga crítica de flambagem de placa circular de espessura constante

Condições de contorno	Fonte do resultado	Pcr / 10^5
E	Timoshenko_PF*	26,5622
	Autor_PF	26,5585
	Autor_PE	26,5043
	% Diferença_PF	-0,01
	% Diferença _PE	-0,22
S	Timoshenko_PF*	7,6019
	Autor_PF	7,5933
	Autor_PE	7,5888
	% Diferença_PF	-0,11
	% Diferença _PE	-0,17

*Parâmetros k = 3,832 da placa engastada e k = 2,05 da placa simplesmente apoiada

Tabela 4-11: Carga crítica de flambagem da placa circular anular de espessura constante

Condições de contorno	Fonte do resultado	Pcr/10^5
E - E	(KOOHKAN, KIMIAEIFAR, *et al.*, 2010)**	167,7509
	Autor_PF	168,0834
	Autor_PE	167,5924
	% Diferença_PF	0,20
	% Diferença _PE	-0,09

** Parâmetros k = 3,21 para E-E , k = 1,65 para S-S e k = 2,17 para E-S

Tabela 4-12: Carga crítica de flambagem de aplaca circular anular de espessura constante

Condições de contorno	Fonte do resultado	Pcr/10^5
E - S	(KOOHKAN, KIMIAEIFAR, *et al.*, 2010)**	76,6610
	Autor_PF	76,0726
	Autor_PE	75,9651
	% Diferença_PF	-0,77
	% Diferença _PE	-0,91
S - S	(KOOHKAN, KIMIAEIFAR, *et al.*, 2010)**	44,3223
	Autor_PF	44,1498
	Autor_PE	44,1404
	% Diferença_PF	-0,39
	% Diferença _PE	-0,41

**Parâmetros k = 3,21 para E-E , k = 1,65 para S-S e k = 2,17 para E-S

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

4.4 Análise comparativa da carga crítica e frequências

As figuras abaixo permitem uma análise de cargas críticas e frequências de placas espessas circulares e circulares anulares para diferentes condições de contorno.

Os resultados para placas circulares são apresentados em relação a resultados da literatura para placas finas (valor unitário correspondendo ao caso de placa fina), sendo que, no caso de cargas críticas, em relação às de (TIMOSHENKO e GERE, 1963) e, no caso das frequências, em relação às de (LEISSA, 1969) Fica evidenciado que quando a espessura cresce em relação ao raio, a relação entre frequências PE/PF decresce

significativamente, e este decréscimo se acentua nas frequências mais altas. Já a carga crítica tem um decréscimo quase imperceptível no gráfico, no caso da placa circular. Deve ser mencionado que as frequências usualmente correspondem a modos radiais-circunferenciais, enquanto a carga crítica corresponde a um modo puramente radial. Há situações em que há coincidência de frequências para modos radiais e circunferenciais. Em alguns casos com bordos simplesmente apoiados, observou-se pequena discrepância na primeira carga crítica entre o resultado da literatura e o obtido neste trabalho. Isto deverá ser investigado em futuras pesquisas.

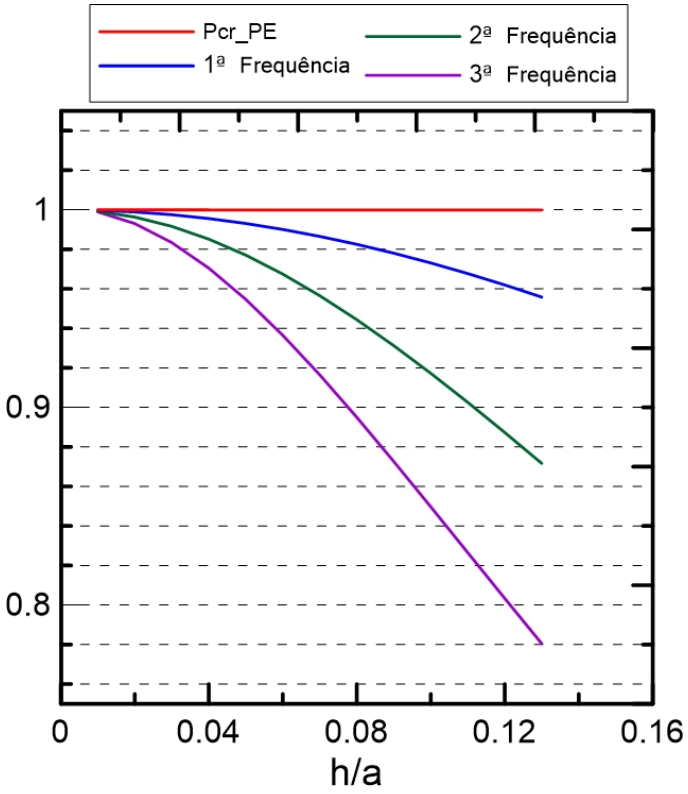


Figura 4-1: Variação dos valores de carga crítica e frequência com relação à espessura da placa circular com bordo engastado.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

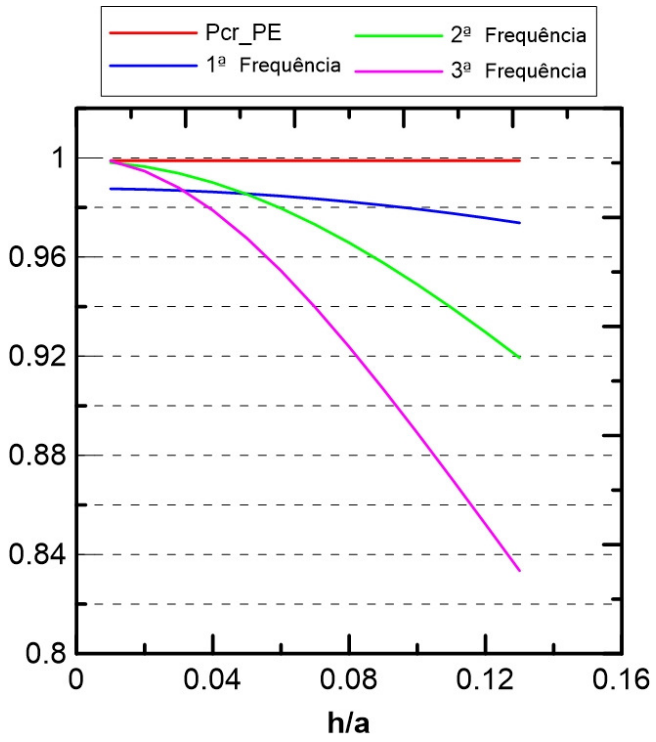


Figura 4-2: Variação dos valores de carga crítica e frequência com relação à espessura da placa circular com bordo simplesmente apoiado.

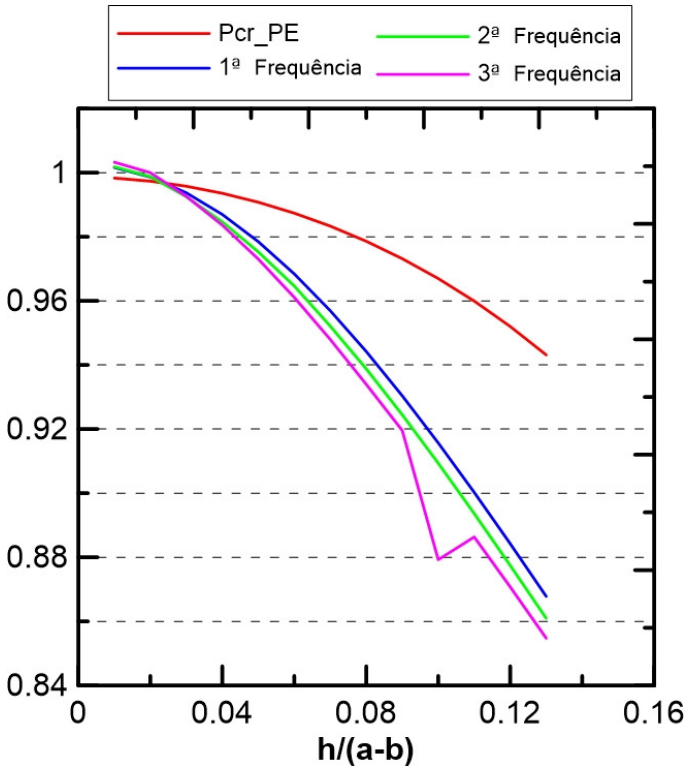


Figura 4-3: Variação dos valores de carga crítica e frequência com relação à espessura da placa circular anular com o bordo interno engastado e o externo simplesmente apoiado.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

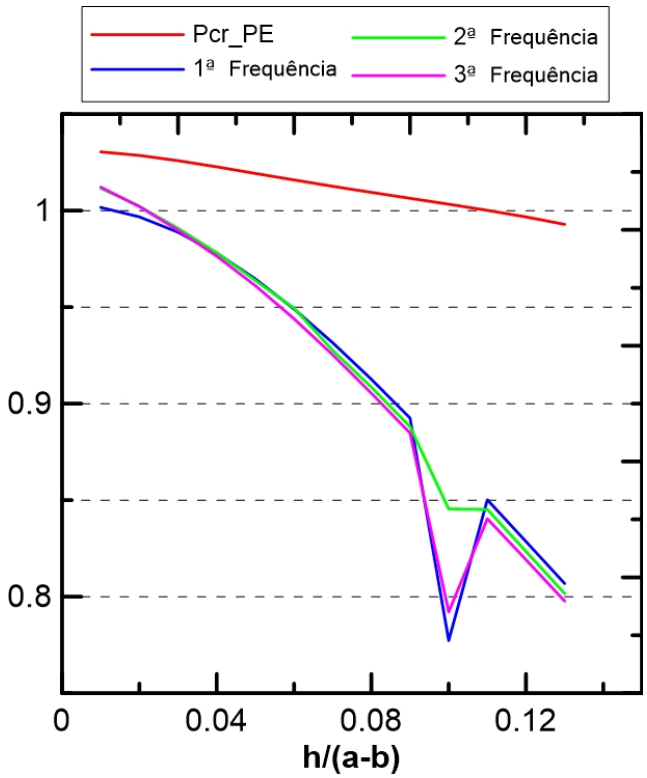


Figura 4-4: Variação dos valores de carga crítica e frequência com relação à espessura da placa circular anular com o bordo interno e externo engastados.

No caso de placas anulares a comparação de cargas críticas é feita com o trabalho de (KOOHKAN, KIMIAEIFAR, *et al.*, 2010), enquanto as frequências são referidas ao trabalho de (LEISSA, 1969). Observa-se aqui uma queda acentuada na carga crítica relativa ao se aumentar a relação espessura/raio externo, diferentemente do ocorrido na placa circular. As frequências apresentam um comportamento decrescente com o aumento de h/a, como para o caso circular, mas em torno de h/a = 0,1 surgem reduções bruscas que desaparecem logo após. Este fenômeno parece ter origem numérica ou ser devido a uma alternância entre modos de vibração circunferenciais/radiais.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

4.5 Carga crítica de *Flutter* (drapejamento)

Para o cálculo da carga crítica dinâmica, de *flutter* (drapejamento), sob carga radial uniforme seguidora (i.e., permanecendo tangente à superfície média durante a flambagem), que caracteriza um problema não conservativo, foram observados os pontos de coalescência das duas primeiras frequências. Esta coalescência é atingida, para placas finas, quando a estrutura é submetida a uma magnitude de carga igual aproximadamente a 4,14 vezes a da carga para carregamento de direção constante (carga estática) em placas circulares finas e de 6.32 vezes para placas anulares finas.

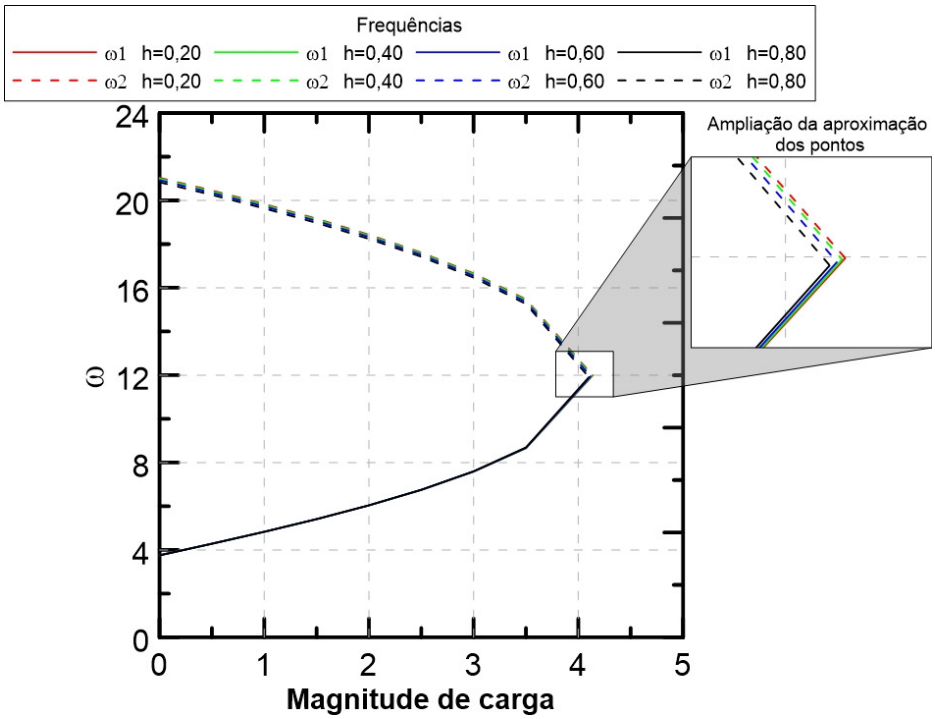


Figura 4-5: Coalescência das duas primeiras frequências da placa circular fina.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

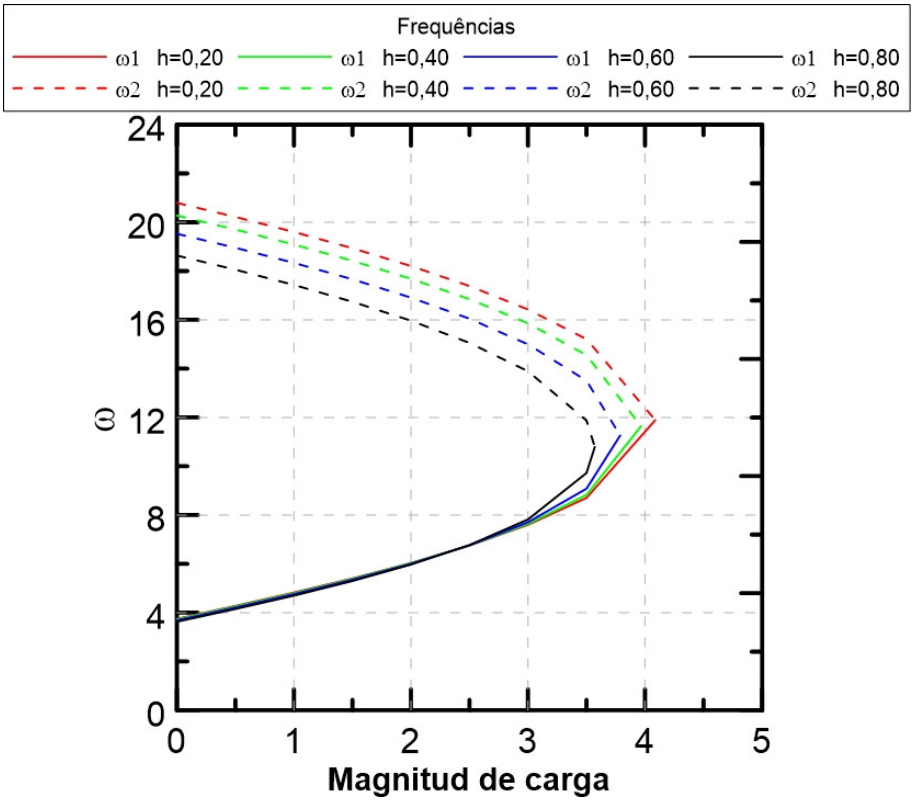


Figura 4-6: Coalescência das duas primeiras frequências da placa circular espessa.

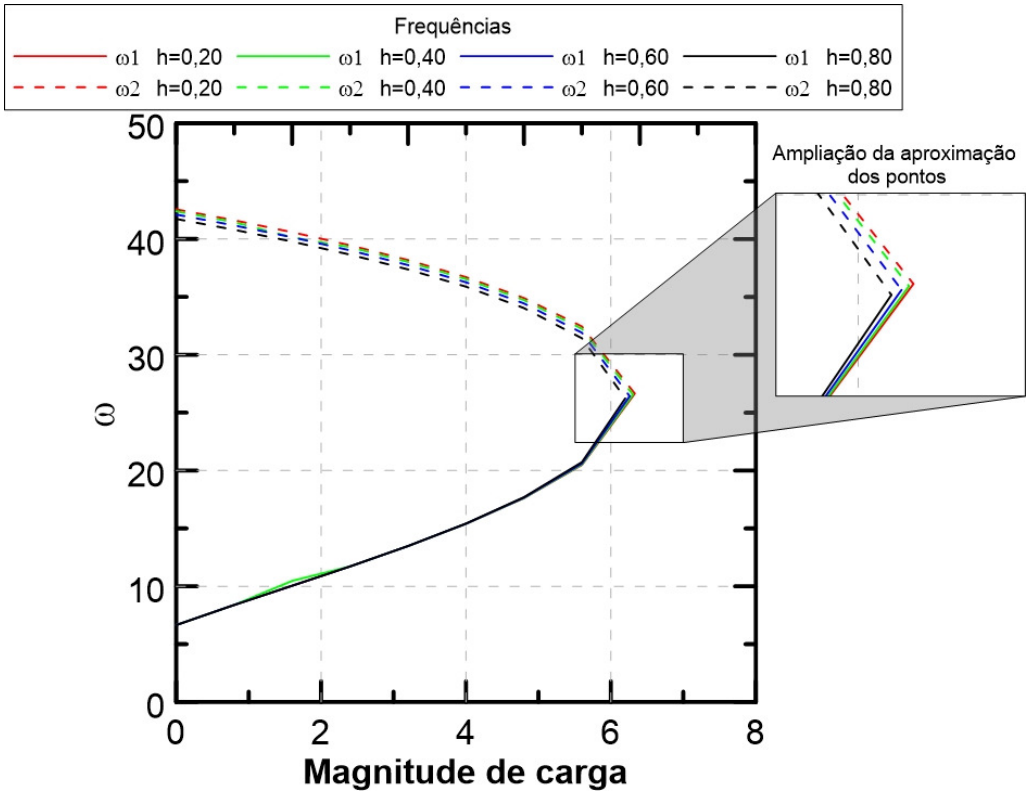


Figura 4-7: Coalescência das duas primeiras frequências da placa fina circular anular.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

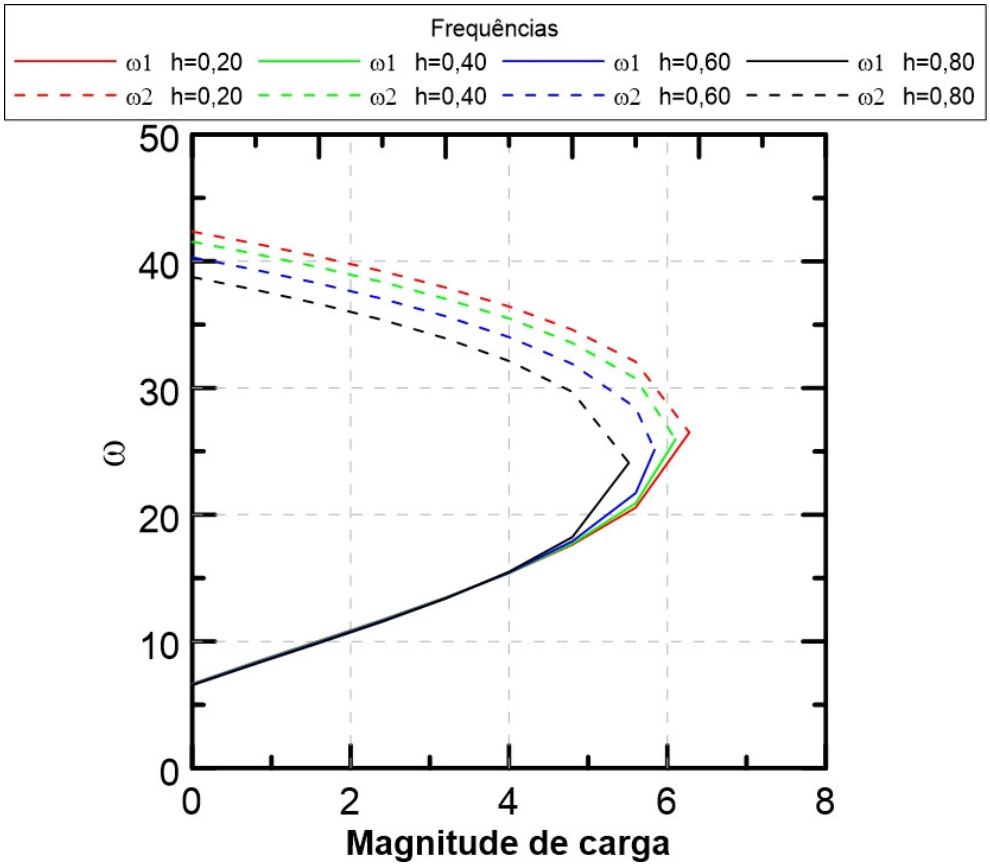


Figura 4-8: Coalescência das duas primeiras frequências da placa espessa circular anular.

Ao ser considerada a deformação de cisalhamento e a inércia rotatória, ou seja, utilizando a aproximação de placas espessas, observa-se uma queda no valor da carga de flambagem dinâmica em relação à carga estática de placa fina. Isto é ilustrado nos gráficos abaixo, e ocorre devido à carga dinâmica envolver também o segundo modo de vibração que é mais afetado pelas deformações de cisalhamento. Por exemplo, a redução desse fator (quando h/a atinge o valor 0,09) é de 4,14 para cerca de 3,5 no caso da placa circular e de 6,32 para cerca de 5,9 para a placa anular. Este comportamento é semelhante ao observado por (SUANNO e ROSAS E SILVA, 2009) para colunas, em que a razão Pcr(dinâmico)/Pcr(estático) é constante e igual a 8,125 para a teoria de vigas esbeltas. A pequena redução aqui observada, no caso de placas finas, parece ser devida aos cálculos terem levado em consideração a inércia rotatória também no caso de placas finas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA

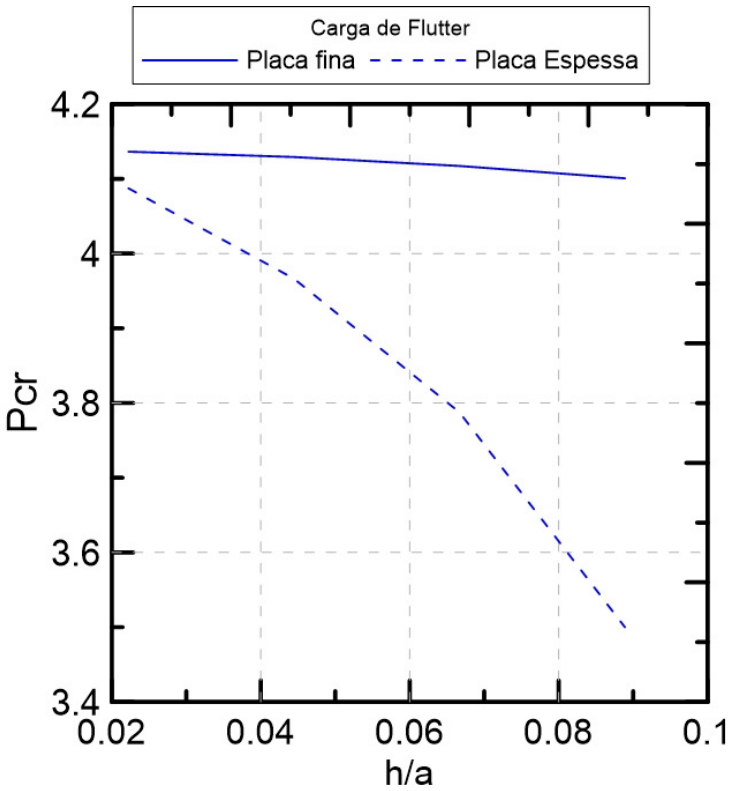


Figura 4-9: Variação da carga de *flutter* em relação à espessura da placa circular.

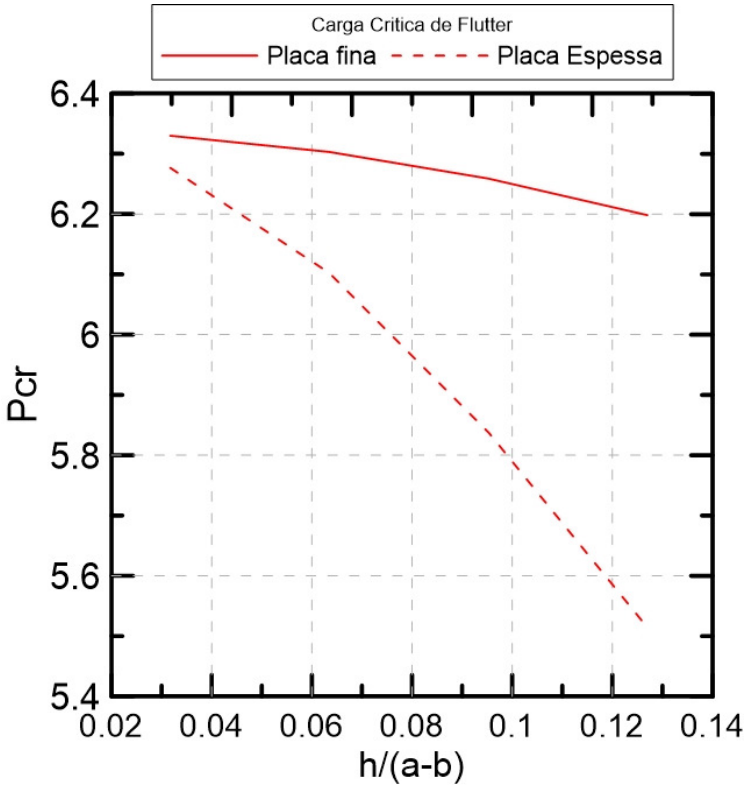


Figura 4-10: Variação da carga de flutter em relação à espessura da placa circular anular.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1312969/CA