

3

Animação de fluidos com SPH

O SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) é um método Lagrangeano baseado em partículas, proposto originalmente para simulação de problemas astrofísicos por Gingold e Monaghan (1977) e por Lucy (1977). No entanto, o método é geral o bastante para ser aplicado em vários tipos de problemas em mecânica, tanto de fluidos quanto de sólidos. A independência de malhas que o método SPH proporciona o tornou atraente para simulações envolvendo fluidos. Este método permite evitar custos adicionais com a geração/adaptação da malha que discretiza o domínio do fluido quando a fronteira deste é modificada. Além disso, o método apresenta uma formulação simples. Estas características o colocam como uma alternativa interessante para aplicações que demandam taxas interativas como jogos e simuladores.

A formulação do SPH se baseia no método de representação integral de funções e posterior aproximação por partículas. Detalhes à respeito da formulação e fundamentos do método SPH são apresentados em (Liu; Liu, 2003), (Nakamura, 2007) e (Giraldi et al., 2005).

Neste capítulo, descrevemos a metodologia introduzida por Muller et al. (Muller et al., 2003) que utilizou SPH para animação interativa de fluidos em computação gráfica. Na Seção 3.1, o comportamento do fluido é modelado por um sistema de equações diferenciais parciais (equações de Navier-Stokes) sujeito a certas condições iniciais e de contorno. Em seguida (Seção 3.2), o método SPH é aplicado na discretização dessas equações para simulação computacional do movimento do fluido. O resultado é uma representação através de um sistema de partículas que se movem sob a influência de forças decorrentes da gravidade, pressão e viscosidade.

3.1

Navier-Stokes em animação de fluidos

O fluido descrito no trabalho de (Muller et al., 2003) corresponde a um fluido incompressível e isotérmico. Em um fluido isotérmico a conservação de energia é garantida e portanto não precisa ser modelada. Sendo assim, a evolução do fluido

no tempo é dada por duas equações. A primeira delas (Equação (3-1)) é conhecida como equação de continuidade e assegura a conservação de massa.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3-1)$$

A Equação de Navier-Stokes é a equação de conservação do momento, ou equação de movimento, a qual, para este trabalho, será escrita na forma simplificada abaixo:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{v}, \quad (3-2)$$

onde \vec{g} é um campo de força externo, μ a viscosidade do fluido e ∇^2 representa o Laplaciano do campo de velocidade \vec{v} .

A utilização de um sistema de partículas em vez de uma malha estacionária para resolver numericamente estas equações simplifica o problema. Primeiramente, mantendo o número de partículas constante durante a simulação e supondo todas as partículas com massa constante, temos como consequência a conservação da massa e portanto a equação (3-1) pode ser omitida. Além disto, vamos substituir a expressão $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$ pela derivada material $\frac{d\vec{v}}{dt}$, uma vez que as partículas movem-se junto com o fluido.

Existem três forças no lado direito da Equação (3-2): modelando a pressão ($-\vec{\nabla} p$), as forças externas ($\rho \vec{g}$) e a viscosidade ($\mu \nabla^2 \vec{v}$). A soma dessas forças determina a alteração do momento $\rho \frac{d\vec{v}}{dt}$ das partículas. Como aceleração da partícula i , temos:

$$a_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{\vec{f}_i}{\rho_i}, \quad (3-3)$$

onde \vec{v}_i é a velocidade da partícula i e \vec{f}_i representa a força (na verdade, força por unidade de volume) resultante sobre esta partícula. Na seção seguinte será descrito o método SPH e como ele foi aplicado para obtenção da versão discreta da equação (3-2).

3.2 Navier-Stokes e SPH

Os fundamentos do método SPH estão na teoria de interpolação. Com o SPH, valores de campos, que são definidos apenas nas posições (discretas) das partículas, podem ser avaliados em qualquer posição no espaço via interpolação. Para este propósito, o SPH distribui as grandezas em uma vizinhança local a cada partícula através do uso de uma função W , chamada de núcleo de suavização (*smoothing kernel*). De acordo com o método SPH, uma grandeza (escalar ou vetorial) A é interpolada na posição \vec{r} por uma soma ponderada das contribuições de todas as partículas em sua vizinhança. Essa interpolação é dada por:

$$A(\vec{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(\vec{r} - \vec{r}_j, h), \quad (3-4)$$

onde j itera sobre todas as partículas, m_j é a massa de cada partícula j , \vec{r}_j é a posição, ρ_j a massa específica e A_j o valor da grandeza na posição \vec{r}_j .

A função $W(\vec{r}, h)$ é o núcleo de suavização e deve ser normalizada:

$$\int W(\vec{r}, h) d\vec{r} = 1, \quad (3-5)$$

onde a constante h é usada para definir o domínio do suporte do núcleo de suavização.

A massa e a massa específica da partícula aparecem na Equação (3-4) uma vez que cada partícula i representa um determinado volume $V_i = m_i/\rho_i$. Enquanto a massa m_i é constante para toda a simulação e, nesse caso específico, a mesma para todas as partículas, a massa específica ρ_i varia e deve ser calculada a cada instante de tempo. Particularizando a Equação (3-4) para o caso da massa específica obtemos:

$$\rho_S(\vec{r}) = \sum_j m_j \frac{\rho_j}{\rho_j} W(\vec{r} - \vec{r}_j, h) = \sum_j m_j W(\vec{r} - \vec{r}_j, h). \quad (3-6)$$

Nas equações de fluidos apresentadas na Seção 3.1, aparecem derivadas das grandezas envolvidas. No método SPH, pode-se demonstrar que tais derivadas são calculadas a partir de derivadas do núcleo de suavização ((Liu; Liu, 2003)). Em particular, o gradiente de A é simplesmente:

$$\vec{\nabla} A_S(\vec{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \vec{\nabla} W(\vec{r} - \vec{r}_j, h). \quad (3-7)$$

Enquanto o Laplaciano de A é dado por:

$$\nabla^2 A_S(\vec{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla^2 W(\vec{r} - \vec{r}_j, h). \quad (3-8)$$

É importante perceber que o método SPH apresenta alguns problemas. Quando é utilizado nas equações de fluidos, por exemplo, não é garantido que estas equações satisfaçam certos princípios físicos como simetria de forças e conservação do momento. A seguir apresentamos como o método SPH foi aplicado na discretização da equação de Navier-Stokes.

A aplicação da Equação (3-4) sobre o termo da pressão ($-\vec{\nabla} p$) leva a:

$$\vec{f}_i^{press} = -\vec{\nabla} p(\vec{r}_i) = - \sum_j m_j \frac{p_j}{\rho_j} \vec{\nabla} W(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h). \quad (3-9)$$

Entretanto, esta força não é simétrica, como pode ser visto quando apenas duas partículas interagem. Neste caso, uma vez que o núcleo de suavização tem gradiente nulo no centro e a partícula i usa apenas a pressão na posição da partícula j para computar a força de pressão, e vice-versa, as forças de pressão

não serão simétricas caso a pressão seja diferente nas posições das partículas. Para simetria da Equação (3-9) será adotada neste trabalho a solução proposta em Muller et al. (2003).

$$\vec{f}_i^{press} = - \sum_j m_j \frac{p_i + p_j}{2\rho_j} \vec{\nabla} W(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h). \quad (3-10)$$

Esta forma é simétrica, já que usa uma média aritmética das pressões das partículas que estão interagindo.

Uma vez que as partículas apenas carregam três grandezas: massa, posição e velocidade; a pressão nas posições das partículas deve ser avaliada primeiro. Isto é feito em duas etapas. A Equação (3-6) calcula a massa específica da partícula na posição r . Então, a pressão pode ser calculada por uma equação de estado do tipo gás ideal, dada por:

$$p = k(\rho - \rho_0), \quad (3-11)$$

onde k é um parâmetro (dependente da temperatura no gás ideal) e ρ_0 a massa específica inicial.

A aplicação da regra descrita na Equação (3-4) sobre o termo de viscosidade ($\mu \nabla^2 \vec{v}$) leva a:

$$\vec{f}_i^{visc} = \mu \nabla^2 \vec{v}(\vec{r}) = \mu \sum_j m_j \frac{\vec{v}_j}{\rho_j} \nabla^2 W(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h). \quad (3-12)$$

Mais uma vez, foram produzidas forças assimétricas. Como a força de viscosidade depende apenas das diferenças de velocidade e não da velocidade absoluta, existe uma maneira natural de simetrizar as forças de viscosidade usando as diferenças de velocidades:

$$\vec{f}_i^{visc} = \mu \sum_j m_j \frac{\vec{v}_j - \vec{v}_i}{\rho_j} \nabla^2 W(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h). \quad (3-13)$$

A força gravitacional na posição da partícula j é dada por:

$$\vec{f}_j^{grav} = \rho_j \vec{g}_j, \quad (3-14)$$

a massa específica ρ_j é dada pela expressão (3-6).

Além da força gravitacional, presente na equação (3-2), a colisão do fluido com a fronteira do domínio e forças inseridas através da interação com o usuário podem ser modeladas. Em (Muller et al., 2003) e (Silva Neto et al., 2005), a colisão é modelada de forma simples: Quando uma partícula colide com a parede de um objeto sólido, a componente da velocidade, normal à superfície rígida, é refletida para o interior do fluido.

As forças de superfície não estão presentes na Equação (3-2), entretanto, foram modeladas em (Muller et al., 2003) explicitamente baseadas nas idéias de

Morris (Morris, 2000). As moléculas de um fluido estão sujeitas às forças atrativas de suas moléculas vizinhas. Dentro do fluido, essas forças intermoleculares são iguais em todas as direções e, portanto, balanceadas. Ao contrário, as forças que atuam sobre as moléculas da superfície livre (fronteira entre o fluido e o meio externo) não são balanceadas. As forças de tensão de superfície livre atuam na direção normal à superfície do fluido. A superfície do fluido pode ser obtida usando-se um campo adicional que assume valor unitário nas posições das partículas e zero em qualquer outra parte. Este campo é denominado “campo de cor” na literatura e sua versão suavizada é dada pela expressão:

$$c_S(\vec{r}) = \sum_j m_j \frac{1}{\rho_j} W(\vec{r} - \vec{r}_j, h). \quad (3-15)$$

A normal \vec{n} e curvatura κ da superfície livre podem ser obtidas por:

$$\vec{n} = \vec{\nabla} c_S, \quad \kappa = \frac{-\nabla^2 c_S}{|\vec{n}|}. \quad (3-16)$$

Finalmente, as forças na superfície livre são modeladas por:

$$\vec{t}^{sup} = \sigma \kappa \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, \quad (3-17)$$

onde σ é um parâmetro que controla a influência desta força. O objetivo final é reproduzir o efeito de minimização da curvatura observado para este tipo de força. De fato, se considerarmos uma superfície inicial S , que se movimenta de acordo com uma equação do tipo:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sigma \kappa \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, \quad (3-18)$$

observamos, exatamente, uma evolução que suaviza pontos onde a curvatura é mais elevada (Sethian, 1996).

Os núcleos de suavização para o caso 3D são dados pelas seguintes expressões:

$$W_{cor}(\vec{r}, h) = \frac{315}{64\pi h^9} \begin{cases} (h^2 - r^2)^3, & 0 \leq r \leq h, \\ 0, & \text{cc.} \end{cases} \quad (3-19)$$

$$W_{press}(\vec{r}, h) = \frac{15}{\pi h^6} \begin{cases} (h - r)^3, & 0 \leq r \leq h, \\ 0, & \text{cc.} \end{cases} \quad (3-20)$$

$$W_{visc}(\vec{r}, h) = \frac{15}{2\pi h^3} \begin{cases} -\frac{r^3}{2h^3} + \frac{r^2}{h^2} + \frac{h}{2r} - 1, & 0 \leq r \leq h, \\ 0, & \text{cc.} \end{cases} \quad (3-21)$$

A Equação 3-21 foi escolhida por possuir Laplaciano positivo em todo domínio.

Esse Laplaciano é dado pela seguinte expressão:

$$\nabla^2 W_{visc}(\vec{r}, h) = \begin{cases} \frac{45}{\pi h^6} (h - r), & 0 \leq r \leq h, \\ 0, & \text{cc.} \end{cases} \quad (3-22)$$

3.3 Simulação

As equações de Navier-Stokes dadas pela Expressão (3-2) são discretizadas, substituindo-se cada termo do segundo membro pela sua versão obtida via núcleo de suavização; ou seja, pelas Expressões (3-10), (3-13) e (3-14), com a massa específica ρ dada pela equação (3-6), e usando-se no primeiro membro a derivada material $\frac{d\vec{v}}{dt}$. Desta forma, obtém-se o seguinte esquema numérico:

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{Q}_i^t, \quad (3-23)$$

onde

$$\vec{Q}_i^t = \left(\frac{1}{\rho_j^t} \right) \left[- \sum_j m_j \frac{p_j^t + p_i^t}{2\rho_j^t} \vec{\nabla} W_{press}(\vec{r}_i^t - \vec{r}_j^t, h) + \rho_j^t \vec{g}_j + \mu \sum_j m_j \left(\frac{\vec{v}_j^t - \vec{v}_i^t}{\rho_j^t} \right) \nabla^2 W_{visc}(\vec{r}_i^t - \vec{r}_j^t, h) \right] \quad (3-24)$$

e, usando-se as equações (3-6)-(3-11), reproduzidas abaixo:

$$\rho_j^t = \sum_k m_k W(\vec{r}_j^t - \vec{r}_k^t), \quad (3-25)$$

$$p_j^t = k(\rho_j^t - \rho_j^0). \quad (3-26)$$

Uma vez resolvida a Equação (3-23), o campo de acelerações $\left(\frac{d\vec{v}_i}{dt} \right)$ obtido é finalmente utilizado para atualizar a velocidade e posição das partículas, de acordo com o seguinte esquema:

$$\vec{v}_i^{t+\Delta t} = \vec{v}_i^t + \frac{\delta t}{2} \vec{Q}_i^t, \quad (3-27)$$

$$\vec{r}_i^{t+\Delta t} = \vec{r}_i^t + \delta t \vec{v}_i^{t+\Delta t}. \quad (3-28)$$

Este esquema, denominado Leap-Frog, é um método iterativo de segunda ordem. Em (Muller et al., 2003), usou-se um intervalo de tempo constante de $\delta t = 10^{-2}$ segundos.