

2. Análise limite

2.1 Considerações iniciais

A análise limite vem despontando como uma ferramenta poderosa para avaliar a estabilidade de taludes. Mas nem sempre ela recebeu a devida atenção, sendo ao longo de muitos anos substituída por outros métodos como o do equilíbrio limite ou o da análise elastoplástica através de elementos finitos.

O método do equilíbrio limite já é bem estabelecido entre os engenheiros civis. Além da experiência acumulada durante os anos sobre esse método, ele também se destaca por sua simplicidade. Isto porque ele não leva em consideração nenhuma relação entre tensão-deformação e apenas analisa a estabilidade do talude por equilíbrio de forças e/ou momentos.

Para tanto, divide-se a massa de solo em fatias verticais, de modo a estabelecer um sistema de forças em cada fatia, como mostra o esquema geral apresentado na Figura 2.1. Se a massa se divide em n fatias, o número de variáveis desse problema será de $6n-2$, discriminado na Tabela 2.1. Para o mesmo número de fatias, o número de equações possíveis de serem formadas é de apenas $4n$, como mostra a mesma tabela. Portanto, para que o sistema de equações não seja indeterminado é preciso que algumas hipóteses sejam feitas em relação a essas forças e ao lugar em que elas atuam. São nessas suposições que os diversos métodos, como o de Janbu (1954), Bishop (1955), Mogenstern-Price (1965) e Sarma (1973), entre outros, diferem.

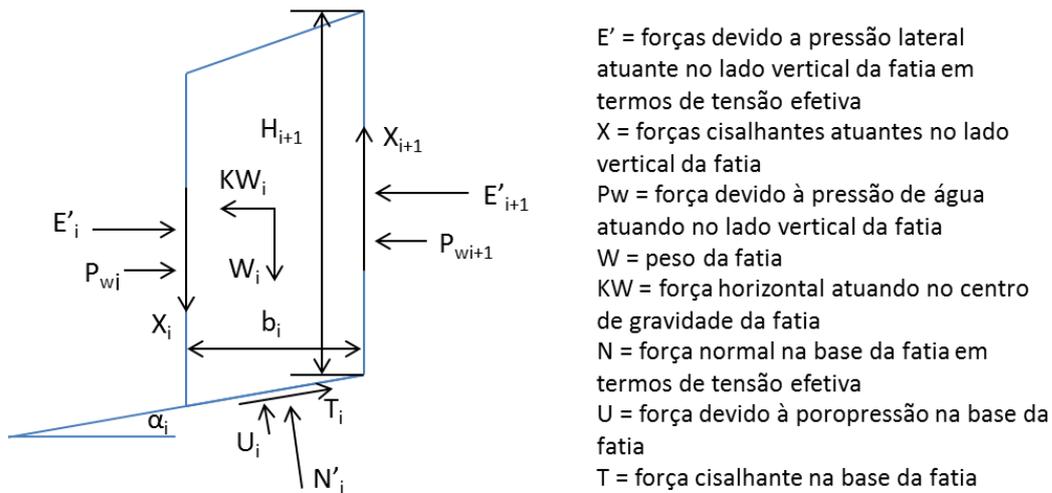


Figura 2.1 - Forças atuantes consideradas no equilíbrio limite.

Tabela 2.1 – Discriminação no número de equações e de variáveis para o método das fatias, adaptado de Abramson et al. (2002).

Número de equações	Condição
n	Equilíbrio de momento para cada fatia
2n	Equilíbrio de força em duas direções para cada fatia
n	Relação entre tensão cisalhante e tensão normal efetiva dada pelo critério de Mohr-Coulomb
Número de variáveis	Variáveis
1	Fator de segurança
n	Força normal na base da fatia, N'
n	Localização da força normal N'
n	Força cisalhante na base da fatia, T
n-1	Força entre fatias, E'
n-1	Força cisalhante entre fatias, X
n-1	Localização da força resultante entre fatias

O método dos elementos finitos também é bastante utilizado para analisar a estabilidade de taludes. Ele é um método numérico capaz de solucionar equações diferenciais para domínios de geometria e condições de contorno complexas. A técnica consiste em dividir o domínio do problema a ser analisado em pequenos elementos, formando uma malha de elementos finitos. São nos vértices dos elementos, chamados nós, que a variável do problema será calculada. Para a análise em solos, a variável que se deseja obter são os deslocamentos e a partir deles se

calculam as tensões e as deformações. É importante ressaltar que também é possível criar elementos com nós tanto nas arestas quanto no seu interior.

Existem diversas formulações que permitem montar a equação a ser resolvida para cada elemento, como a dos resíduos ponderados, a variacional e a direta. Apesar de diferentes, todas essas abordagens consideram que o valor da variável em qualquer ponto dentro do elemento pode ser aproximado por uma função que depende dos valores das variáveis nos nós. Esta função é geralmente polinomial e é conhecida como função de forma.

As equações para cada elemento são então reunidas de maneira a preservar a compatibilidade e a continuidade entre os nós de elementos adjacentes. Para que o problema global possa ser resolvido é preciso ainda atribuir condições de contorno e condições iniciais (estas últimas apenas para o caso de problemas transientes). As condições de contorno são prescritas nos nós, onde se atribui o valor da variável (condição de Dirichlet) ou do seu gradiente (condição de Neumann) naquele ponto.

Como se pode concluir, a análise de deslocamentos ou tensões por elementos finitos não calcula diretamente o fator de segurança, tão utilizado para avaliar a estabilidade em problemas geotécnicos. Para isso, Zienkiewicz et al. (1975) propuseram que os parâmetros de resistência, coesão e ângulo de atrito, fossem sucessivamente reduzidos até que não houvesse mais convergência na solução com elementos finitos, ou seja, até que o equilíbrio não pudesse mais ser mantido.

Ao contrário do método do equilíbrio limite, a análise de deslocamentos através de elementos finitos permite levar em conta o histórico de tensões do solo. Dessa maneira, a análise de uma escavação ou da construção de um aterro será diferenciada da de um talude natural, visto que a distribuição de tensões irá variar para cada caso desses (Abramson et al., 2002). Outra grande diferença na abordagem com os elementos finitos é a de necessitar de um modelo constitutivo que relacione as tensões com as deformações. Esse modelo constitutivo pode englobar endurecimento ou amolecimento do material assim como um material com lei de fluxo não-associada. Também se pode enfatizar que não é preciso estabelecer previamente uma superfície de ruptura, como feito no caso de se aplicar equilíbrio limite. O mecanismo de colapso é gerado como um resultado na análise por

elementos finitos segundo o método da redução dos parâmetros de resistência do solo.

Esta também é uma vantagem da análise limite, como será visto mais adiante. Antes restrita a teoria de plasticidade de materiais metálicos, a aplicabilidade da análise limite na mecânica dos solos só começou a ser mais estudada a partir dos anos 1950, após a publicação de Drucker e Prager (1952). Como já havia sido publicado por Drucker et al. (1952), neste outro trabalho Drucker e Prager também apresentam os dois teoremas da plasticidade que a análise limite tem por base: o teorema do limite superior e o do inferior.

A análise limite tem por objetivo determinar limites para a carga de colapso de um sistema. Um limite superior para a carga de colapso poderá ser calculado (igualando-se a taxa de trabalho das forças externas à taxa de dissipação das forças internas) se for possível estabelecer um campo de velocidades no sistema que obedeça às condições de contorno e que apresente compatibilidade entre velocidade e deformação. É de se esperar que se possa assumir várias configurações diferentes que atendam a esses critérios, também chamado de um campo cinematicamente admissível. Para cada possível configuração dessas, será calculada uma carga de colapso, que será sempre maior do que a carga de colapso real, ou seja, será um limite superior. Portanto, a carga de colapso que mais se aproximará da carga de colapso real será a menor carga de colapso que poderá ser encontrada seguindo essas restrições.

O teorema do limite inferior segue o mesmo raciocínio. Enquanto for possível encontrar uma carga para a qual o sistema permaneça em equilíbrio, atendendo ao critério de ruptura do material e às condições de contorno do sistema, esta carga será inferior à carga real de colapso. Da mesma maneira do que se verifica ao aplicar o teorema do limite superior, várias configurações podem ser assumidas para obedecer às especificações acima, formando um campo estaticamente admissível. O corpo não irá romper nessa situação e, portanto a carga imposta nesse sistema será sempre menor do que a carga real de colapso. Quanto maior a carga que continue a fazer parte de um campo de tensões estaticamente admissível, mais próxima estará da carga real de colapso.

Drucker (1953) resume a ideia dos dois teoremas como se ele fosse um sistema capaz de se adaptar às condições a que é exposto: “um sistema elasto

plástico perfeito (...) irá, por um lado, fazer o melhor para distribuir as tensões para evitar o colapso e, por outro lado, irá experimentar o colapso se qualquer modo cinematicamente compatível existir”.

O teorema da unicidade complementa os dois teoremas da plasticidade ao garantir a existência de uma solução única para a carga de colapso. Dessa maneira, embora os campos de tensão e de velocidade encontrados não sejam únicos, a carga de colapso o é, como discutem Davis e Selvadurai (2002) e Menezes (1990).

Algumas hipóteses sobre o comportamento do material são, no entanto, necessárias para que esses teoremas tenham validade. Para essas condições a análise limite pode ser provada rigorosamente (Davis e Selvadurai, 2002). Essas hipóteses serão desenvolvidas nos itens a seguir.

2.2 Hipóteses da análise limite

2.2.1. Lei de fluxo associada

A lei de fluxo associada também é conhecida como condição de normalidade. Ela é uma relação entre a taxa de deformação e as tensões do material quando há deformações plásticas.

O que difere as deformações plásticas das elásticas é que as últimas são recuperáveis quando há descarregamento. Já as plásticas são deformações permanentes. O comportamento elástico permite que as deformações sejam descritas segundo relações constitutivas que relacionam o estado de tensão com as deformações. No entanto, isto não consegue ser feito quando o material já apresenta deformações plásticas visto que cada valor de tensão não necessariamente corresponderá a um único valor de deformação. A lei de fluxo supera este problema ao utilizar as taxas de deformações ao invés das deformações.

Para que a lei de fluxo tenha validade é importante fazer uso de outra suposição, que é a hipótese de Saint Venant. Esta hipótese propõe que as direções das taxas de deformação principais sejam as mesmas que as das tensões principais do material. Este é realmente o caso se o material for isotrópico e se a taxa de deformação plástica depender apenas das tensões (Davis e Selvadurai, 2002).

A base para o entendimento da lei de fluxo associada é que a taxa de trabalho plástico, trabalho este exercido pelo estado de tensões do material, deve ser

maximizada para um dado estado de tensões ou para uma dada taxa de deformação plástica. Para compreender as decorrências disso, e conseqüentemente se chegar a lei de fluxo associada, Davis e Selvadurai (2002) fazem uma analogia do comportamento do material com o de um bloco na horizontal submetido a duas forças, F_x e F_y (Figura 2.2), que será apresentada a seguir.

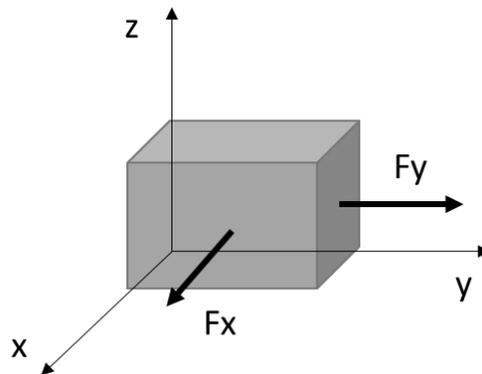


Figura 2.2 – Desenho esquemático de um bloco submetido a duas forças.

O critério para o bloco começar a deslizar será de:

$$F_x^2 + F_y^2 = (Mg\mu)^2 \quad (2.1)$$

Nesta equação, g é a gravidade, μ é o coeficiente estático de atrito do solo e M a massa do bloco.

Este critério é análogo a um critério de ruptura e se for plotado nos eixos F_x , F_y será um círculo de raio $Mg\mu$, como mostra a Figura 2.3 a seguir:

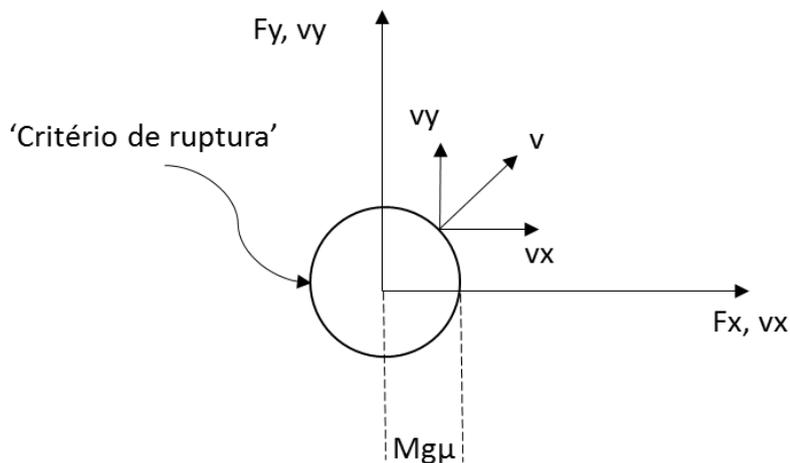


Figura 2.3 – Critério para o deslizamento do bloco.

Para descobrir o sentido da velocidade a que o bloco estará sujeito se for submetido segundo as forças F_x e F_y , tem-se que aplicar o conceito de que a taxa

de trabalho realizada por essas forças, quando o bloco desliza, será a maior possível. Essa taxa de trabalho, análoga à taxa de trabalho plástico já que corresponde ao caso em que as forças tocam o círculo, pode ser descrita como:

$$\dot{W} = F_x v_x + F_y v_y \quad (2.2)$$

Como já foi dito, a taxa de trabalho deve ser maximizada. No entanto ela também deve atender a Eq.(2.1). Esta restrição pode ser adicionada ao problema ao se inserir o multiplicador de Lagrange, γ :

$$\dot{W} = F_x v_x + F_y v_y - \gamma(F_x^2 + F_y^2 - (Mg\mu)^2) \quad (2.3)$$

Para obter o máximo da taxa de trabalho, deriva-se \dot{W} em relação à F_x e à F_y e a iguala a zero, obtendo-se:

$$\frac{\partial \dot{W}}{\partial F_x} = v_x - 2\gamma F_x = 0 \therefore v_x = 2\gamma F_x \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \dot{W}}{\partial F_y} = v_y - 2\gamma F_y = 0 \therefore v_y = 2\gamma F_y \quad (2.5)$$

Duas coisas podem ser concluídas desse exemplo. A primeira delas é que as componentes da velocidade são proporcionais ao gradiente do “critério de ruptura”. Isso resulta na segunda conclusão que é a de que a direção da velocidade é perpendicular a este critério para o bloco deslizar, como ilustra a Figura 2.3. Convém ressaltar que os eixos de força e velocidade coincidem, como prevê a suposição da hipótese de Saint Venant.

A lógica para um material cujo critério de ruptura é função apenas do estado de tensões e no qual se supõe válida a hipótese de Saint Venant é a mesma. Quando o estado de tensões atingir o critério de ruptura, que é função das tensões no corpo, $f(\sigma_{ij})$, haverá deformações plásticas. O trabalho plástico realizado por essas tensões será sempre o máximo, e portanto a direção da taxa de deformação, $\dot{\epsilon}_{ij}$, será perpendicular à envoltória nesse ponto. A lei de fluxo associada é então definida por:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\gamma} \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \begin{cases} f(\sigma_{ij}) \leq 0 \\ \dot{\gamma} \geq 0 \\ f(\sigma_{ij}) \cdot \dot{\gamma} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

$\dot{\gamma}$ é um escalar não negativo, chamado de multiplicador plástico.

Vale ressaltar que esta condição só pode ser válida se o critério de ruptura for convexo. No mais, a lei de fluxo associada está diretamente ligada ao conceito de material estável definido por Drucker (Eq.(2.7)). Como explica Davis e Selvadurai (2002), se deformações plásticas irão ocorrer de maneira que a estabilidade do material seja preservada, então as taxas de deformações plásticas precisam satisfazer a condição de normalidade. Tanto os critérios de ruptura convexos, quanto o postulado de material estável são condições necessárias para que os teoremas da plasticidade estejam bem embasados e serão discutidas a seguir.

2.2.2. Material estável

Drucker define um material como estável se um incremento de suas tensões resulta em trabalho positivo feito por elas, ou seja, se:

$$\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon \geq 0 \quad (2.7)$$

Este conceito também se aplica no caso de um ciclo de carregamento envolvendo deformações plásticas. Segundo a definição de material estável, a taxa de trabalho plástico realizado ao longo de um ciclo de carregamento deve ser não negativa. Isso resulta na seguinte desigualdade, que tem implicação tanto na suposição da convexidade do critério de ruptura quanto na lei de fluxo associada:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (2.8)$$

Chen (1990) demonstra o passo-a-passo para se chegar à Eq.(2.8). Nessa equação, σ_{ij} é um estado de tensões para o qual o material atinge a envoltória do critério de ruptura, σ_{ij}^0 é o estado de tensão do material ao se iniciar o ciclo de carregamento e $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ é a taxa de deformação plástica. Na mesma publicação, o autor também explica as implicações geradas pela suposição de material estável.

Para isso, considera-se o vetor $\overrightarrow{AB} = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)$ e outro $\overrightarrow{BC} = \dot{\varepsilon}_{ij}^p$, como ilustra a Figura 2.4. A Eq.(2.8), condição de material estável, requer que o ângulo entre esses dois vetores seja agudo. Visando satisfazê-la independentemente das tensões escolhidas é preciso que \overrightarrow{BC} seja perpendicular ao critério de ruptura, como define a lei de fluxo associada. Mais uma vez essa dedução só pode ser concluída se o

critério de ruptura for convexo (Figura 2.4b). O próximo item apresenta o critério de ruptura convexo que será utilizado ao longo deste trabalho.

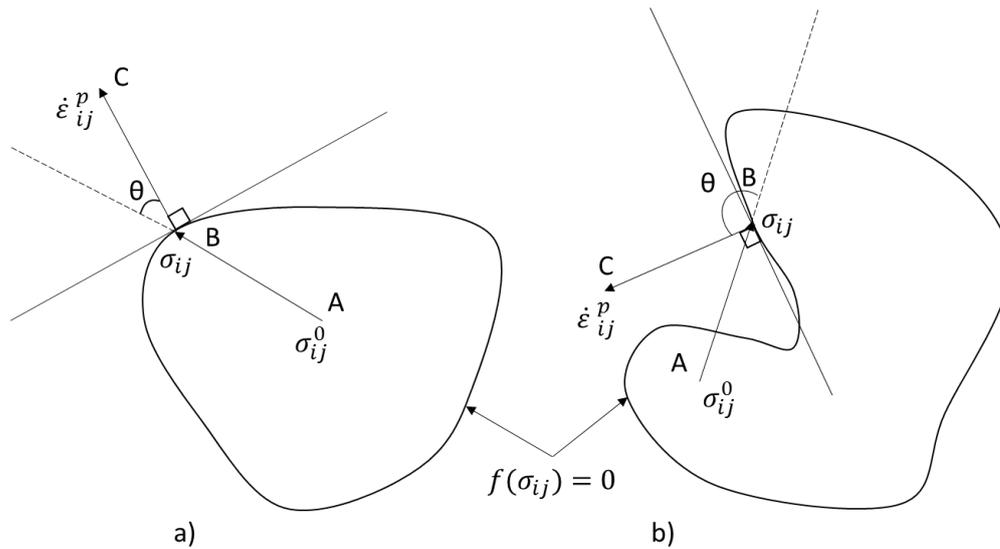


Figura 2.4 – Desenho esquemático visando o conceito de material estável e de critério de ruptura convexo, adaptado de Chen e Liu (1990).

2.2.3. Critério de ruptura convexo

Desai (1984) salienta que no âmbito da teoria da plasticidade, os critérios de ruptura são usados como critérios de escoamento. Os critérios de ruptura são funções que permitem identificar quando o material começa a apresentar deformações plásticas. Para estar de acordo com a lei de fluxo associada e, portanto com o conceito de material estável, os critérios utilizados dependem apenas do estado de tensões do material, ou seja:

$$g(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad (2.9)$$

O estado de tensões atinge a envoltória de ruptura se

$$g(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2.10)$$

Quando isso ocorre, então há deformações plásticas. Para o caso do estado de tensões estar abaixo da envoltória, o material apresenta apenas deformações elásticas (se seu comportamento for elástico perfeitamente plástico) ou não apresenta deformações (se for um material rígido plástico perfeito). Vale lembrar que não existem estados de tensões para os quais $g(\sigma_{ij}) > 0$.

O critério de ruptura utilizado ao longo deste trabalho será o critério de Drucker-Prager (1952) em três dimensões. Optou-se pela convenção de sinais em que tensões de tração são positivas. Este critério é expresso em função dos invariantes do tensor de tensões ou do tensor de tensões desviadoras.

O tensor de tensões é o estado de tensões em determinado ponto. A partir dele é possível obter a tensão atuante em qualquer plano neste ponto, visto que ele informa as tensões normais e cisalhantes em três planos ortogonais. Sendo esses planos denotados por x, y e z, o tensor de tensões, \mathbf{T} , é uma matriz simétrica da forma:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \therefore \tau_{yx} = \tau_{xy}; \tau_{zx} = \tau_{xz}; \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (2.11)$$

O tensor de tensões, \mathbf{T} , pode ser decomposto em dois tensores também simétricos: o tensor de tensões hidrostáticas, \mathbf{p} – Eq.(2.13), composto apenas pela tensão média na diagonal principal, e o tensor de tensões desviadoras, \mathbf{s} – Eq.(2.14):

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{p}] + [\mathbf{s}] \quad (2.12)$$

Onde,

$$[\mathbf{p}] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$[\mathbf{s}] = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

A tensão média, σ_m , é a média das três tensões normais:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad (2.15)$$

O conceito de invariante de um tensor, seja ele de tensões ou de tensões desviadoras, provém do fato de os invariantes serem coeficientes que dependem apenas do valor das componentes do tensor, independente do eixo de coordenadas escolhido. Por essa característica eles são comumente utilizados nos critérios de ruptura.

O primeiro invariante do tensor de tensões (I_1) é a soma das componentes da diagonal principal do tensor:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (2.16)$$

O segundo invariante do tensor de tensões desviadoras (J_2) é a metade da soma dos quadrados das componentes do tensor de tensões desviadoras (s_{ij}):

$$J_2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} s_{ij}^2 \quad (2.17)$$

J_2 também pode ser escrito em termos das componentes do tensor de tensões:

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \quad (2.18)$$

O critério de Drucker-Prager tem um formato regular (um círculo se visto do plano octaédrico) e forma um cone, como mostra o gráfico do critério na Figura 2.5, que tem como eixo as três tensões principais. Vale ressaltar, no entanto, que a denominação σ_1 não implica em σ_1 ser sempre a tensão principal de maior valor. O critério de Drucker-Prager é função de dois outros parâmetros, α e k :

$$\sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k \leq 0 \quad (2.19)$$

Essas constantes do material, α e k , podem ser determinadas experimentalmente e também podem ser relacionadas com os parâmetros de resistência do critério de Mohr-Coulomb, c , a coesão, e φ , o ângulo de atrito (Chen, 1990). Para tanto, basta coincidir a superfície do cone ao longo da aresta desejada. Se esta aresta for o meridiano extensivo, como mostra a Figura 2.6a, essas constantes do solo se relacionam da seguinte maneira:

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{3}(3 + \operatorname{sen} \varphi)} \quad (2.20)$$

$$k = \frac{6c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 + \operatorname{sen} \varphi)} \quad (2.21)$$

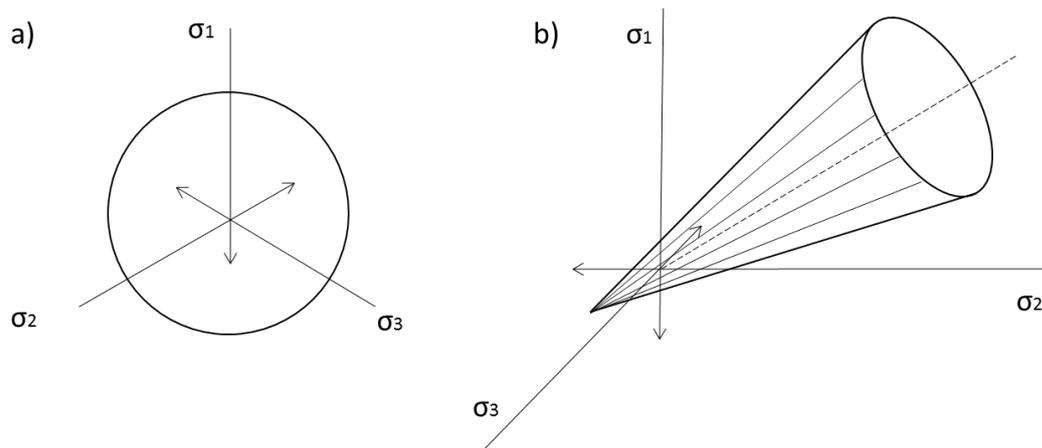


Figura 2.5 – Formato do critério de Drucker-Prager, adaptado de Chen e Liu (1990).

Se a aproximação for feita para os dois critérios coincidirem no meridiano compressivo (Figura 2.6b), então:

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \varphi)} \quad (2.22)$$

$$k = \frac{6c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \varphi)} \quad (2.23)$$

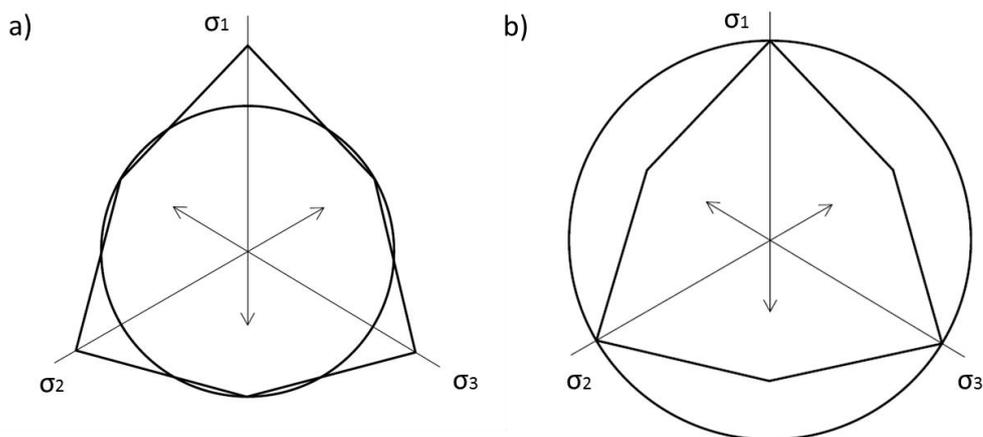


Figura 2.6 – Correspondência entre envoltórias para determinação dos parâmetros de resistência.

Para melhor entender o que seriam esses meridianos, a Figura 2.7 mostra o gráfico do critério de Mohr Coulomb tendo como eixo as três tensões principais. Se a vista for perpendicular ao plano octaédrico, então o formato do critério é um hexágono irregular. Como explica Davis e Selvadurai (2002), em cada vértice da Figura 2.7a e, conseqüentemente, em cada aresta da Figura 2.7b, se localizam as

linhas de simetria, correspondendo à condição em que duas das tensões são iguais. Por exemplo, na aresta identificada por 1 na Figura 2.7a, $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$. Enquanto que esta aresta equivale ao meridiano compressivo, a aresta 2 é um meridiano extensivo, onde $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$.

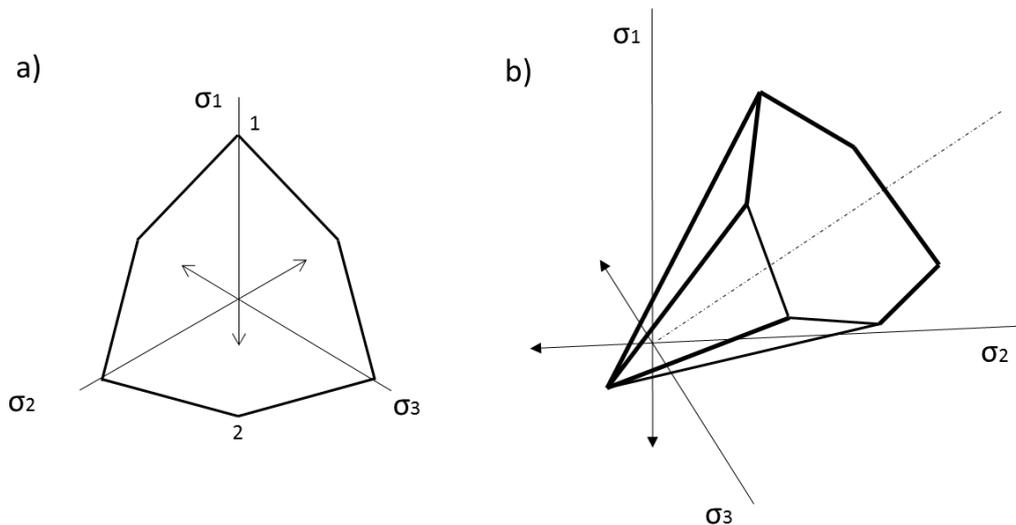


Figura 2.7 – Formato do critério de Mohr-Coulomb, adaptado de Davis e Selvadurai (2002).

Há ainda a possibilidade de relacionar esses parâmetros quando se está em um estado plano de deformações, como desenvolve Drucker e Prager (1952). Neste caso:

$$\alpha = \frac{\tan\varphi}{(9 + 12\tan^2\varphi)^{1/2}} \quad (2.24)$$

$$k = \frac{3c}{(9 + 12\tan^2\varphi)^{1/2}} \quad (2.25)$$

2.2.4. Comportamento plástico perfeito do material

Para que os teoremas da plasticidade tenham validade é importante que o material exiba um comportamento rígido plástico perfeito ou elástico perfeitamente plástico (Figura 2.8 a e b, respectivamente).

Como nesses casos não há endurecimento nem amolecimento, o estado de tensões não pode ultrapassar o critério de ruptura, resultando no fato de o vetor de tensões incremental ser tangencial ao critério de ruptura quando ocorrem deformações plásticas (Chen, 1990). Ao contrário dos materiais que exibem

endurecimento, o critério de ruptura no caso perfeitamente plástico é fixo no espaço de tensões, não sendo dependente do histórico de carregamentos.

Apesar de poder se mover ao longo da envoltória antes do instante do colapso, prova-se que o estado de tensões permanece constante no colapso. As deformações se processam, portanto, sem incremento de tensões. Este comportamento perfeitamente plástico confere deformações exclusivamente plásticas no colapso, chamado colapso plástico. Isso sugere que o fator de colapso será o mesmo para materiais elásticos perfeitamente plásticos ou para materiais rígidos perfeitamente plásticos.

Esta característica de no colapso plástico não haver incremento de tensões ou forças em materiais perfeitamente plásticos é utilizada na prova dos teoremas dos limites inferiores e superiores (Davis e Selvadurai, 2002).

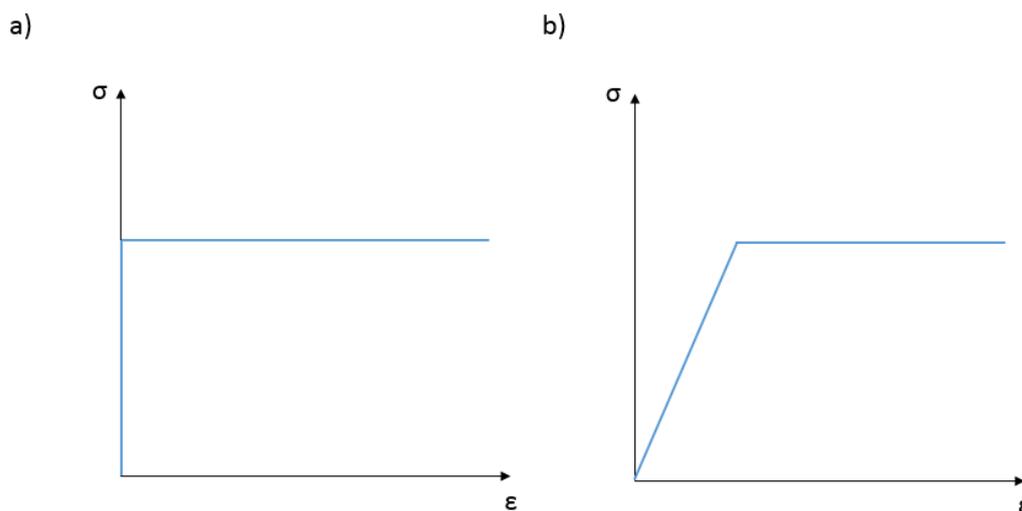


Figura 2.8 – a) Comportamento rígido plástico perfeito e b) elástico perfeitamente plástico.

2.2.5. Princípio das potências virtuais

Apesar do material se deformar indefinidamente sem incremento de tensões, como considera a hipótese do comportamento do material ser perfeitamente plástico, no instante do colapso assume-se que a geometria do corpo não muda significativamente. Por isso, é possível aplicar o princípio das potenciais virtuais na prova dos teoremas da plasticidade. Este princípio relaciona um campo estaticamente admissível, em equilíbrio, com um campo cinematicamente

admissível, ou compatível (Chen, 1990). O princípio das potências virtuais iguala a taxa de trabalho de um deslocamento virtual realizado por forças externas com a taxa de trabalho interno, associado com as deformações virtuais, resultantes dos deslocamentos virtuais (Davis e Selvadurai, 2002).

2.3 Análise limite como um problema de otimização

Os dois teoremas da plasticidade são provados rigorosamente se as hipóteses apresentadas anteriormente são levadas em consideração. Esta prova pode ser acompanhada no trabalho de Drucker et al. (1952) e reorganizada em Chen (1975; 1990) e Davis e Selvadurai (2002).

A seguir será mostrada porque a determinação de um carregamento de colapso através da análise limite pode ser colocada como um problema de programação matemática.

2.3.1. Análise limite pelo teorema do limite superior

Como já foi definido anteriormente, um limite superior para o carregamento de colapso é aquele para o qual um campo cinematicamente admissível pode ser encontrado e no qual a taxa de trabalho das forças externas (\dot{W}_e , Eq.(2.26)) no corpo é igual ou maior que a taxa de dissipação de energia interna (\dot{P} , Eq.(2.27)).

$$\dot{W}_e = \int_V \dot{u}_i \lambda F_i dV + \int_V \dot{u}_i F_{oi} dV + \int_A \dot{u}_i \lambda T_i dA + \int_A \dot{u}_i T_{oi} dA \quad (2.26)$$

$$\dot{P} = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dV \quad (2.27)$$

u_i são os deslocamentos, sendo \dot{u}_i a taxa de deslocamento, ou velocidade. F , T e T_o são carregamentos externos. Enquanto F é uma força de corpo, T e T_o são forças de superfície. A diferença entre T e T_o é que a primeira está sujeita à majoração através do fator de colapso, enquanto que T_o representa as forças que são fixas. O mesmo padrão é adotado para diferenciar F de F_o .

Dentre as diversas configurações possíveis, aquela que gera o menor carregamento é a que mais se aproxima do carregamento real de colapso. Por isso

se deseja minimizar o fator de colapso, λ . Fator de colapso é um fator multiplicador que irá majorar os carregamentos responsáveis pelo colapso do corpo de maneira proporcional. Na aplicação do limite superior, este fator de colapso será função da taxa de trabalho das forças internas e da taxa de trabalho das forças externas fixas (Anderheggen e Knöpfel, 1972; Makrodimoupolos e Martin, 2005b).

Isto se caracteriza como um problema de otimização, pois se deseja minimizar uma função sujeita a um campo de deformações que atendam a lei de fluxo, Eq.(2.28), e às equações de compatibilidade, Eq.(2.29), ambas no domínio V, além das condições de contorno, em S, de velocidade, Eq.(2.30):

$$\varepsilon_{ij}^{\dot{p}} = \dot{\gamma} \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \begin{cases} \dot{\gamma} = 0 & \text{se } f(\sigma_{ij}) < 0 \\ \dot{\gamma} \geq 0 & \text{se } f(\sigma_{ij}) = 0 \end{cases} \quad \text{em } V \quad (2.28)$$

$$\varepsilon_{ij}^{\dot{p}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{em } V \quad (2.29)$$

$$\dot{u}_i = 0 \quad \text{em } S \quad (2.30)$$

2.3.2. Análise limite pelo teorema do limite inferior

Segundo o teorema do limite inferior, o corpo não poderá sofrer colapso se apresenta um campo de tensões cinematicamente admissíveis, atendendo em todo domínio ao critério de ruptura. O carregamento encontrado nessas condições será um limite inferior do carregamento real de colapso. Dentre as diversas configurações, aquela que gera o maior carregamento na estrutura será a mais próxima da condição do colapso.

Da mesma maneira do colocado para o limite superior, este também é um problema de otimização. Procura-se maximizar o carregamento (ou o fator de colapso, λ) de maneira a atender às condições de equilíbrio, Eq.(2.31), e ao critério de ruptura, Eq.(2.32) no domínio em V, assim como às condições de contorno, em S, de forças, Eq.(2.33). É possível optar por fazer uso da equação do princípio da taxa de trabalho virtual como alternativa ao uso das equações de equilíbrio. Quando isto ocorre, a formulação é chamada de fraca. Esta equação será a apresentada, já que foi a utilizada neste trabalho:

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dV = \int_V \dot{u}_i \lambda F_i dV + \int_V \dot{u}_i F_{0i} dV + \int_A \dot{u}_i \lambda T_i dA + \int_A \dot{u}_i T_{0i} dA \quad \text{em } V \quad (2.31)$$

$$g(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad \text{em } V \quad (2.32)$$

$$T_{0i} = \sigma_{ij} n_j \quad \text{em } S \quad (2.33)$$

A notação é a mesma que a utilizada na seção anterior, 2.3.1 e \mathbf{n} é um vetor unitário normal ao contorno.

2.3.3. Formulações numéricas para a análise limite

Visando tornar o cálculo do fator de colapso por análise limite mais eficaz, desde os anos 1970 se começou a combinar a análise limite a métodos numéricos. Técnicas do método dos elementos finitos são usadas para discretizar o domínio de maneira a mais facilmente formular campos estática ou cinematicamente admissíveis. Além disso, o uso da programação matemática juntamente a isto permite achar a carga de colapso de maneira mais eficiente.

Diversas formulações numéricas foram implementadas desde então. Elas diferem no problema a ser resolvido (pelo princípio cinemático, apresentado em 2.3.1, estático, em 2.3.2, ou misto), no fator de colapso encontrado (podendo ser um limite superior, inferior, o fator de colapso exato ou ainda, o aproximado) e também no tipo de problema de otimização (linear ou não linear, dependendo do critério de ruptura utilizado).

A dualidade entre os teoremas da plasticidade é um conceito bem estabelecido, tanto para o problema contínuo quanto para o discreto (Christiansen, 1981; Borges, 1991). Portanto, independentemente do problema objetivar maximizar o fator de colapso, segundo o teorema do limite inferior, ou minimizar, como estabelece o do limite superior, o fator de colapso obtido será o mesmo. Borges (1991) enfatiza em sua tese que existem quatro maneiras equivalentes de se resolver o problema de análise limite. Além das duas formulações já mencionadas, a estática e a cinemática, Borges (1991) apresenta a resolução através de uma

formulação mista ou ainda pela solução das equações advindas das condições de otimalidade de Kuhn–Tucker.

Como explicam Anderheggen e Knöpfel (1972), Christiansen (1981), Borges (1991) e Ciria (2004), serão majoritariamente os espaços de interpolação escolhidos para discretizar a tensão e/ou a velocidade no domínio os responsáveis por se encontrar um limite superior ou inferior seguro. Para cada espaço de otimização escolhido, serão calculadas as matrizes do problema. Nada impede que matrizes provindas de um espaço de interpolação puramente cinemático sejam utilizadas na formulação estática, resultando em um limite superior seguro. O trabalho de Krabbenhoft et al. (2005) é particularmente interessante para exemplificar esta questão. No entanto, na maior parte dos trabalhos desenvolvidos, limites superiores são encontrados segundo a formulação cinemática, limites inferiores provém da formulação estática e soluções aproximadas são resultados de formulações mistas.

Para garantir que a análise limite gere um limite superior seguro é preciso assegurar que a lei de fluxo será respeitada em todo o domínio, apesar de ela ser imposta em apenas alguns pontos. Também se deve assegurar que a taxa de dissipação de energia, calculada através do modelo discreto seja a mesma do domínio contínuo (Ciria et al. 2008). Ao mesmo tempo, sabe-se pelo teorema em questão que é possível haver descontinuidades no campo de velocidade. No entanto, a componente normal à superfície de descontinuidade deve sempre ser contínua.

Para respeitar essa continuidade, muitos autores fazem uso de elementos em que as velocidades variam linearmente (Anderheggen e Knöpfel, 1972; Silva e Antão, 2007). Atrelado a isso, outros permitem que ocorram descontinuidades no campo de velocidade (Bottero et al., 1980; Sloan e Kleeman, 1995; Pastor et al., 2000; Lyamin e Sloan, 2002a; Ciria, 2004; Krabbenhoft et al., 2005). A inserção dessas descontinuidades visa contornar o fenômeno conhecido por *locking* (Nagtegaal et al., 1974), quando materiais puramente coesivos são analisados. Já Makrodimopoulos e Martin (2007) sugerem o uso de um campo quadrático de deslocamento em que as deformações dentro de cada elemento variam como uma combinação linear do valor de deformação dos vértices do elemento. Dessa forma, garantem que o limite encontrado será um limite superior rigoroso. Os mesmos autores também propuseram a inserção de descontinuidades no campo de velocidade nesse mesmo tipo de elemento (Makrodimopoulos e Martin, 2007).

Visando gerar limites inferiores estritos, deve-se discretizar as tensões no domínio de tal maneira que, apesar de ser aferido apenas em alguns pontos, o equilíbrio seja garantido em todo domínio. O mesmo deve ser assegurado para a satisfação do critério de ruptura em todo o domínio. As formulações mais difundidas fazem variar linearmente as tensões nos elementos (Anderheggen e Knopfel, 1972; Basudhar, 1979). Assim como as formulações usadas na determinação do limite superior do fator de colapso, alguns autores possibilitam o aparecimento de descontinuidades no campo de tensões (Lysmer, 1970; Bottero et al., 1980; Sloan, 1988; Lyamin e Sloan, 2002b; Ciria, 2004; Makrodimopoulos e Martin, 2006).

Já a solução não rigorosa não atende rigorosamente a nenhum dos dois teoremas, não sendo portanto um limite inferior nem superior. Casciaro e Cascini (1982) foram um dos precursores dessa técnica, também utilizada por Christiansen e Andersen (1999) e estudada profundamente por Borges (1991) e Zouain et al. (e.g. Zouain et al., 1993; Zouain et al. 2014). O fator de colapso assim encontrado será necessariamente inferior ao limite superior e superior ao limite inferior. Dessa maneira, ele estará mais próximo do fator de colapso real.

Zouain et al. (2014) demonstram que existe uma relação clara entre os fatores de colapso provindos de espaços de discretizações mistas que não geram limites rigorosos. Por exemplo, se o espaço de interpolação de velocidades é aumentado, mantendo-se constante a interpolação das tensões, o fator de colapso diminui, ou seja:

$$\lambda(\sigma_3 - LB) \leq \lambda(\sigma_3 - v_7) \leq \lambda(\sigma_3 - v_6) \leq \lambda(v_6 - UB)$$

Neste ordenamento, λ é o fator de colapso, σ_3 é a identificação para o espaço de discretização em que a tensão varia linearmente no elemento (Figura 2.9c)), v_6 a discretização em que as velocidades variam quadraticamente (Figura 2.9a)) e v_7 , o mesmo que v_6 porém com adição de uma função relativa ao ponto no meio do elemento (Figura 2.9b)).

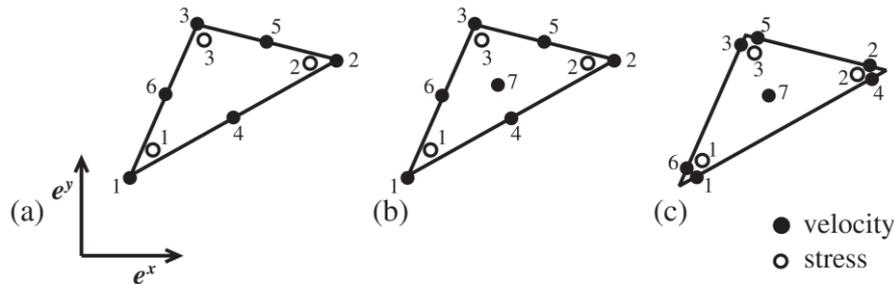


Figura 2.9 – Tipo de discretização dos elementos finitos a) σ_3 -v6 e v6-UB; (b) σ_3 -v7 (c) σ_3 -LB, por Zouain et al. (2014).

Araújo (1997) apresenta uma minuciosa revisão das diversas formulações propostas, destacando as diferenças dos algoritmos utilizados para solucionar o problema de otimização. Sloan (2013) desenvolve uma breve revisão histórica das soluções por análise limite, realçando as situações nas quais as técnicas foram aplicadas (túneis, escavações, taludes e fundações).

Além da classificação dos limites encontrados e o princípio utilizado para resolver o problema, as formulações também diferem pelo tipo do problema de otimização. Nos primeiros trabalhos (Lysmer, 1970; Anderheggen e Knopfel, 1972; Bottero et al., 1980; Sloan, 1988;) buscava-se linearizar os critérios de ruptura a fim de se obter um problema essencialmente linear.

A principal contra partida dessa linearização era o tempo requerido para resolver problemas de grande escala. Por isso, alguns autores (Basudhar, 1979; Zouain et al., 1993; Christiansen e Andersen, 1999; Lyamin e Sloan, 2002a; Krabbenhoft e Damkilde, 2003) procuraram fazer uso de técnicas de otimização que pudessem lidar com o caráter não linear dos critérios de ruptura. Makrodimopolous e Martin (2006) organizaram as diferenças entre essas soluções propostas. Alguns desses algoritmos se mostraram suficientemente eficientes para que casos tridimensionais fossem analisados através deles (Lyamin e Sloan, 2002a; Lyamin e Sloan, 2002b; Silva e Antão, 2007; Sloan, 2013)

Ainda mais recente é o uso de otimizadores específicos para lidarem com critérios de ruptura na forma cônica quadrática (Drucker-Prager, Von Mises e Tresca e Mohr Coulomb em estado plano de deformações). Quando as equações de desigualdade são colocadas nessa forma, o problema de análise limite será um problema de programação cônica de segunda ordem. O algoritmo de pontos interiores, específico para este tipo de problema, se mostrou um método eficiente e

robusto para problemas de grande escala. Apesar de alguns autores já terem proposto a sua aplicação em problemas tridimensionais (Makrodimopoulos e Martin, 2006; Krabbenhoft et al., 2007), ainda se vê pouco uso da programação cônica quadrática nesse tipo de problema. Cruz (2013) analisou um caso em condições tridimensionais e comprovou a eficácia do método. Aplicações bidimensionais podem ser encontradas nos três artigos citados anteriormente e ainda em Ciria (2004).

Neste trabalho a programação cônica quadrática foi escolhida para solucionar o problema de otimização da análise limite para casos tridimensionais. Por isso, este assunto será aprofundado no item a seguir.

Também atual é o uso da programação semidefinida. Assim como a programação cônica quadrática, seu algoritmo de solução se baseia no fato das desigualdades do problema apresentarem um formato cônico. Só que neste caso, os cones não são quadráticos, são cones de matrizes positivas semi definidas. Esta abordagem se mostra ideal para analisar tridimensionalmente materiais que obedecem ao critério de Mohr Coulomb (Krabbenhoft et al., 2008; Martin e Makrodimopoulos, 2008).

Este trabalho tem como objetivo analisar através da análise limite problemas tridimensionais segundo a programação cônica quadrática. Além de exemplos em solos sem poropressão, as situações em solos saturados ou parcialmente saturados também foram consideradas. Os efeitos da poropressão nos solos saturados já foram incorporados em trabalhos tais como o de Miller e Hamilton (1989), Michalowski (1995) e Corfdir (2004), segundo o princípio do limite superior e Cruz (2013) e Tapia Morales (2013) através do limite inferior. Kim et al. (1999) e Sloan (2013) introduzem a poropressão na análise limite com as duas formulações. No entanto, nenhum deles consideram os efeitos da poropressão em problemas tridimensionais.

2.4 Análise limite como um problema de otimização cônica quadrática

2.4.1. Otimização cônica quadrática

Os avanços mais recentes nas técnicas de otimização foram direcionados para a solução de problemas convexos como descreve a Eq.(2.34). Neles, a função objetivo, $f(\mathbf{x})$ e as funções de restrição de desigualdade, $c(\mathbf{x})$, são convexas enquanto

que as de igualdade, $h(\mathbf{x})$, são necessariamente lineares. Além disso o domínio do problema, X , ao qual pertencem as variáveis \mathbf{x} , é um sub conjunto convexo de \mathcal{R}^n (Ben-Tal e Nemirovski, 2001).

$$\begin{aligned} \text{Minimizar:} & \quad f(\mathbf{x}) & \quad \mathbf{x} \in X \\ \text{Sujeito a:} & \quad h_k(\mathbf{x}) = 0 & \quad k = 1 \dots m \\ & \quad c_l(\mathbf{x}) \leq 0 & \quad l = 1 \dots p \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde m e p são o número de restrições de igualdade e de desigualdade respectivamente.

Um problema convexo é classificado como de otimização cônica quadrática (ou de programação cônica de segunda ordem) quando a função objetivo e as funções de igualdade são lineares e as restrições de desigualdade obedecem a funções que caracterizam um espaço cônico quadrático. Também se pode dizer que as variáveis do problema pertencem ao espaço cônico quadrático, \mathcal{K} . A Eq.(2.35) é a forma padrão desse tipo de problema, colocada em notação matricial:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar:} & \quad \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ \text{Sujeito a:} & \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \quad \mathbf{x} \in \mathcal{K} \end{aligned} \quad (2.35)$$

a matriz \mathbf{A} e os vetores \mathbf{c} e \mathbf{b} são dados, enquanto que \mathbf{x} é o vetor de variáveis. \mathbf{x} pertence ao espaço cônico quadrático, que, por sua vez, está contido no domínio \mathcal{R}^n . O espaço cônico quadrático define-se por:

$$\mathcal{K} = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \mid \sqrt{\sum_{i=2}^n x_i^2} \leq x_1 \} \quad (2.36)$$

Vale ressaltar que, como $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, então necessariamente $x_1 \geq 0$.

Um grande progresso para a solução de problemas convexos foi o desenvolvimento do método de pontos interiores (MPI). Como relata Ciria (2004), no trabalho pioneiro de Karmakar (1984, *apud* Ciria, 2004), ele foi aplicado a problemas de programação linear e possibilitou a solução deles em tempos polinomiais. Isso quer dizer que o tempo de solução do problema cresce segundo um polinômio que depende do tamanho do problema. Se comparado com o método Simplex, cuja a eficiência de tempo nos piores casos é exponencial, esta foi uma grande conquista.

O método dos pontos interiores foi estendido para outros tipos de problemas convexos e um trabalho importante nesse sentido foi o de Nesterov e Todd (1994,

apud Ciria, 2004). Como explica Ciria (2004), as variantes dos MPI seguem a mesma lógica. A solução ótima é procurada apenas na região viável das soluções. Para isso, adiciona-se à função objetivo uma função de barreira cuja finalidade é retornar valores tendendo ao infinito à medida que as variáveis se aproximam da fronteira. São essas funções de barreira, apropriadas para cada espaço cônico, o principal motivo da eficiência do MPI. Neste trabalho um solver comercial foi utilizado para solucionar o problema de otimização proposto. O MOSEK (2012) faz uso do método primal-dual de pontos interiores proposto por Andersen et al. (2003).

Como se verá com detalhes no próximo capítulo, a resolução por análise limite segundo o teorema do limite inferior pode ser colocada como um problema de programação cônica de segunda ordem. Nos primeiros trabalhos que tratavam da solução numérica de análise limite, o critério de ruptura era linearizado visando resolver através da programação linear. No entanto, verificou-se que alguns critérios de ruptura poderiam ser colocados na norma cônica quadrática. É o caso dos critérios de Drucker-Prager e de Mohr Coulomb em estado plano de deformação, por exemplo. Através de uma transformação linear do tensor de tensões em um vetor auxiliar, é possível colocar o critério de ruptura na forma cônica quadrática, função desse vetor auxiliar. Essa transformação e suas consequências na restrição de equilíbrio serão detalhadas no item 3.5.