Departamento de Matemática e NEAM (Núcleo de Estudo e Ação sobre o Menor)

PROJETO MATEMÁTICA

COMUNIDADE E UNIVERSIDADE

Número 4

Atividades Sobre Sistemas de Numeração Materiais para Trabalhar em Bases Diversas

Autores:

Alcilea Augusto

Gilda de La Rocque Palis

Silvana Marini

PUC RIO

Matemática PUC-Rio

NEAM NÚCLEO DE ESTUDO E AÇÃO SOBRE O MENOR

PROJETO MATEMÁTICA

C O M U N I D A D E e U N I V E R S I D A D E

Atividades sobre Sistemas de Numeração

Materiais para trabalhar em bases diversas

Alcilea Augusto

Gilda de La Rocque Palis

Silvana Marini

2016

Resumo: apresentamos as atividades sobre sistemas de numeração oferecidas num curso de formação continuada para professores que lecionam Matemática no ensino fundamental, no âmbito do *Projeto Matemática, Comunidade e Universidade*, oferecido pelo Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, com apoio e participação de psico-pedagogas da mesma instituição. Estas atividades, elaboradas para o trabalho com professores que atuam em diferentes anos do ensino fundamental, são inovadoras e visam a propiciar a construção, de maneira significativa, das propriedades de um sistema de numeração posicional, independentemente de sua base, mas sem esquecer a importância do sistema de numeração decimal. Elas podem ser utilizadas em vários contextos, no ensino regular ou em cursos de formação continuada. As avaliações das atividades, tanto pelos professores-alunos, quanto pelas agências financiadoras do projeto foram excelentes.

Palavras chave: Formação continuada de professores que ensinam Matemática no ensino fundamental; sistemas de numeração posicional; blocos multibase.

Atividades sobre Sistemas de Numeração
Materiais para trabalhar em bases diversas

(*Atividades propostas no 2º semestre de 1985.*)

Sumário

Atividades sobre Sistemas de Numeração

Materiais para trabalhar em bases diversas

(*Atividades propostas no 2º semestre de 1985.*)

Introdução

Nestas atividades, o trabalho focaliza quatro conceitos básicos em numeração:

base, agrupamento, valor equivalente e valor posicional.

Os melhores sistemas de numeração são os que usam o conceito de valor posicional, pois podem usar menos símbolos. Para isso, usam ainda uma base, agrupamento e valor equivalente.

Nestas atividades, são destacadas duas características importantes do nosso sistema de numeração, agrupamento e valor posicional. O trabalho será feito em diversas bases e com material que pode ser utilizado com crianças.

A atividade 1 lida com agrupamento e valor posicional por meio de jogos que envolvem a noção de valor equivalente.

A atividade 2 focaliza agrupamento e valor posicional em bases distintas de 10.

A atividade 3 propõe alguns quebra-cabeças, em cuja resolução há oportunidade de aplicar a compreensão de numeração adquirida nas atividades anteriores.

Atividade 1 - Agrupamento e valor posicional por meio de jogos

Nesta atividade, são apresentados três jogos. Um com blocos multibase, outro com fichas coloridas e um com ábaco.

Estes jogos podem ser usados com crianças para desenvolver três conceitos importantes em numeração: agrupamento, valor equivalente e valor posicional. Estes três conceitos são essenciais para compreensão dos sistemas de numeração com uma base.

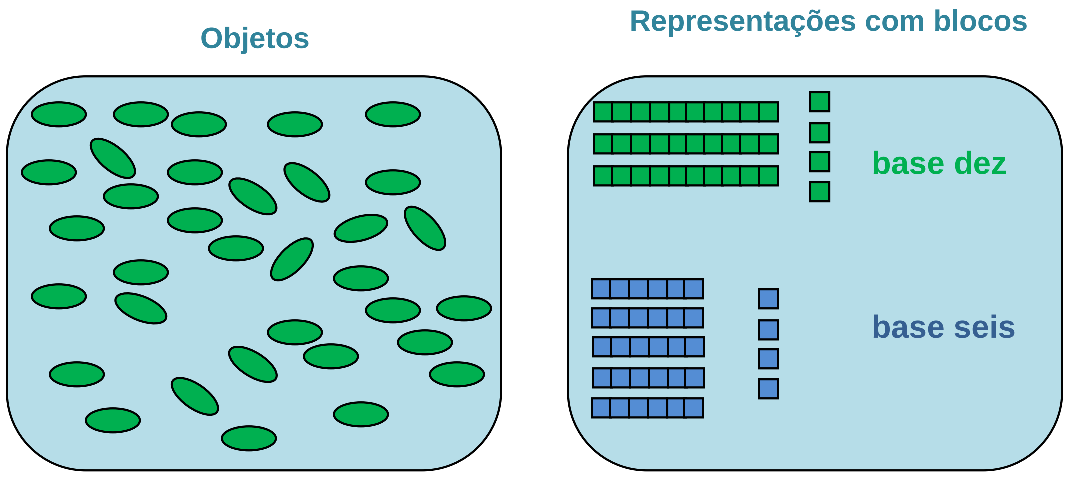
Para registrar números grandes, utiliza-se um esquema de agrupamento. No caso do nosso sistema de numeração, os agrupamentos são feitos em conjuntos de dez (nesta atividade, agrupamentos também serão feitos em bases diferentes de 10).

Numa experiência de agrupamento, a representação usada precisa refletir exatamente o número no grupo.

Por exemplo, bastões podem ser usados em uma experiência de agrupamento porque se desejarmos representar um grupo de seis objetos, seis bastões são então usados.

Os blocos multibase foram concebidos por Zoltan Dienes para a manipulação de várias bases de numeração[1] e podem ser usados também em experiências de agrupamento. O professor pode ainda utilizar materiais similares com o mesmo objetivo.

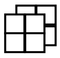
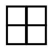
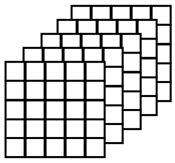
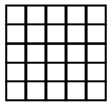
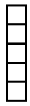
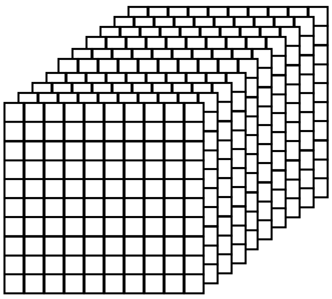
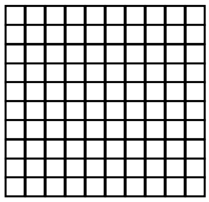
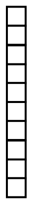
Observe as representações a seguir e pense no porquê de cada uma delas.



[1] Artigos, em Inglês, de Zoltan Dienes e a seu respeito podem ser encontrados em http://www.zoltandienes.com/.
O texto em Português: Soares, E.T.P. e Pinto, N.B. *Zoltan Dienes e as diferentes Bases de Numeração: apropriação ao tempo da Matemática Moderna* pode ser encontrado em http://seminariotematico.ufsc.br/files/2014/03/ATA4RR_soares_art_DAC.doc.pdf

Outros materiais auxiliares para estudo de sistemas de numeração em bases diversas

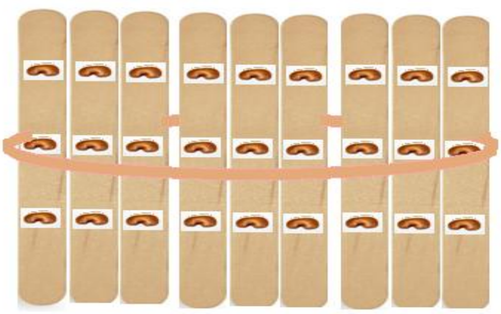
Tiras de papel quadriculado

	Bloco	Placa	Barra	Unidade
Base dois				
Base cinco				
Base dez				

Palitos de sorvete com feijões colados

Base três

Bloco **Placa** **Barra** **Unidade**



reunidos com elástico

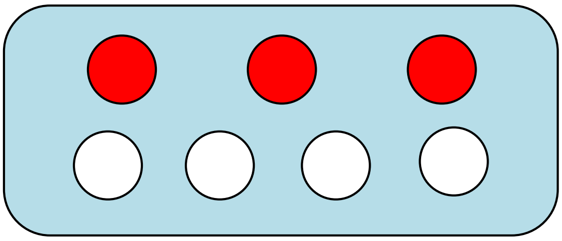
presos com fita durex

Valor equivalente é um conceito fundamental que relaciona conceitos de agrupamento e valor posicional. Trabalhando com blocos multibase quando se tem b unidades (b = dez ou seis, por exemplo), trocamos b unidades por uma barra, b barras por uma placa e b placas por um bloco.

O jogo 1 focaliza os princípios de agrupamento e valor equivalente.

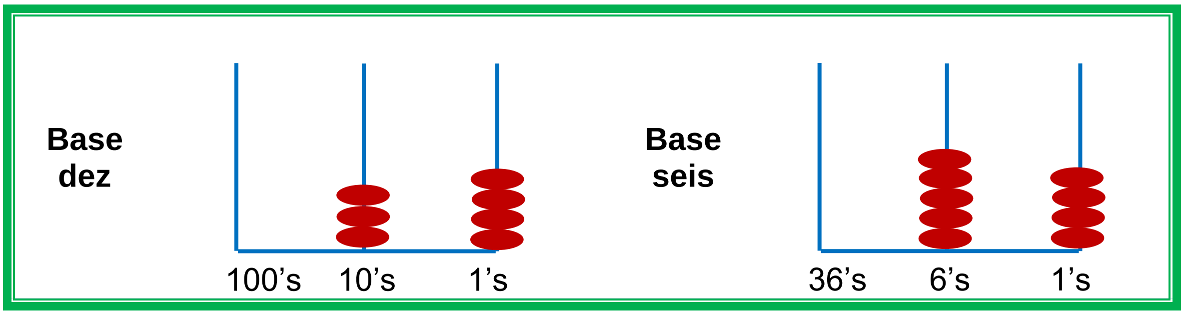
O jogo 2 representa uma etapa intermediária entre agrupamento e valor posicional. Fichas coloridas podem ser usadas para representar diferentes números de objetos. Quando uma coleção de fichas é obtida, elas são trocadas por uma ficha de cor diferente para representar um grupo. Aí, uma única ficha representa um certo número de objetos e não um único objeto. Assim como com os blocos multibase, diferentes bases podem ser escolhidas.

Se a base 10 é usada e se uma ficha branca representa um objeto, uma vermelha representa dez brancas e uma azul representa dez vermelhas, então os 34 objetos da figura anterior seriam representados como a seguir:



Assim como no jogo 1, valor equivalente é um conceito essencial para este jogo.

O jogo 3 destaca o valor posicional. Aqui, a posição de uma representação determina seu valor. No nosso sistema de numeração, usamos dígitos (algarismos). Um 3 pode representar 3, 30, ou 300, dependendo de sua posição (por exemplo, em 333). Neste jogo, um ábaco é usado. Uma conta na linha dos 1's representa um único objeto, na linha dos 10's representa dez e na linha dos 100's representa dez 10's. É claro que o número de objetos que uma conta representa depende do valor posicional da linha e da base usada. Os objetos mostrados nas figuras anteriores seriam representados, como a seguir, nas bases dez e seis.



As noções de agrupamento, base e valor posicional são desenvolvidas na escola elementar por meio de atividades de valor equivalente.

Após participar nos três jogos abaixo, responda às perguntas propostas depois deles.

Enquanto joga, anote quaisquer observações que podem lhe ser úteis ao trabalhar com crianças.

Estes jogos podem facilmente ser adaptados para uso com crianças.

Jogo 1: Atingir o objetivo, um bloco.

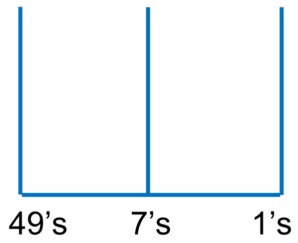
Este jogo deve ser jogado em grupos pequenos. Cada grupo deve ter um conjunto de blocos multibase ou material similar em uma certa base e um dado (ou um par de dados para agilizar o jogo). O objetivo do jogo é ganhar um bloco. Na sua vez, cada jogador lança o dado e apanha tantas unidades quantas indica o dado. E, se a base escolhida tiver sido seis, vai trocando seis unidades por uma barra, seis barras por uma placa e seis placas por um bloco. O primeiro jogador a conseguir um bloco ganha.

Jogo 2: Atingir o objetivo, uma ficha azul.

Cada grupo deve ter um conjunto de fichas coloridas de 3 ou 4 cores diferentes. Suponha que haja 3 cores: branca, vermelha e azul. O objetivo do jogo é trocar fichas até que um jogador consiga uma ficha azul. Qualquer base pode ser usada e o grupo pode selecionar sua própria base. Suponha que um grupo tenha selecionado a base 10. Então, 10 fichas brancas podem ser trocadas por 1 vermelha, 10 vermelhas por uma azul. Na sua vez, cada jogador lança o dado apanhando tantas fichas brancas quantas o dado indica. Trocas devem ser feitas sempre que possível.

Jogo 3: O objetivo é atingir uma conta na linha dos b^2's (base b).

Este jogo é jogado essencialmente do mesmo modo que os jogos 1 e 2, exceto que o registro de pontos deve ser feito em um ábaco. Você pode escolher qualquer base. Se você escolher base sete, lembre de trocar sete contas na linha dos 1's por uma conta na linha dos 7's e sete contas na linha dos 7's por uma na linha dos 49's. O vencedor será o que primeiro colocar uma conta na linha dos 49's.



Perguntas[2]

1. O jogo 1 ilustra o conceito de agrupamento. Em uma atividade de agrupamento, existem exatamente tantas unidades na representação quantas no número representado. Logo, se existem 42 objetos a serem representados, então 42 unidades são utilizadas (em combinações apropriadas de unidades, barras, placas) para representar aquele número.

Suponha que o jogo 1 tenha sido jogado na base 6.

a) Quando você ganha uma barra, quantas unidades você tem?

Você pode contá-las na barra?

b) Quando você ganha uma placa, quantas unidades você tem?

Você pode contá-las na placa?

c) Seria impossível contar todas as unidades em um bloco, mas você pode trocar um bloco por ______ placas. Quantas unidades você tem no conjunto de placas equivalente a um bloco?

---

[2] Respostas na parte final.

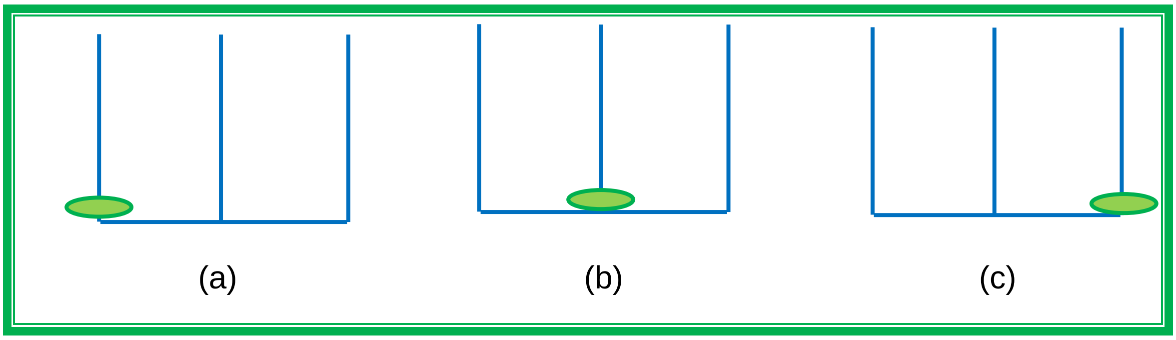
2. O jogo 2 ilustra uma ponte entre o conceito de agrupamento e o de valor posicional. Cada ficha, dependendo da cor, representa uma, 10 ou 100 unidades (base 10 escolhida). Em se tratando de valor posicional, a posição do dígito (e não a cor) determina o valor que ele representa.

a) Suponha que você tenha 10 fichas vermelhas e 4 brancas. Quantas unidades isto representa em base 10?

Você pode contá-las realmente agora?

b) Suponha que você tenha uma ficha azul, 4 vermelhas e 18 brancas. Quantas unidades você tem?

3. No jogo 3, o ábaco representa a notação posicional. A posição da conta determina o seu valor. Então, embora cada um dos ábacos a seguir tenha somente uma conta, cada um representa um valor diferente.



a) Que ábaco representa o maior valor, (a), (b) ou (c)?

b) Suponha que a base seja oito, quais os números aí representados?

c) Reflita porque o jogo 2 é uma transição entre os jogos 1 e 3.

4. Escolha um conjunto de objetos (número) e uma base. Represente a quantidade desses objetos com os blocos, fichas e ábaco.

5. Reflita sobre o significado dos termos seguintes e a diferença entre eles:

agrupamento

valor equivalente

valor posicional.

6. Que materiais podem ser usados com crianças para desenvolver cada uma destas ideias?

Quão sutis são estas ideias para as crianças?
Como cada ideia pode ser apresentada para crianças?

Atividade 2 - Agrupamento e valor posicional em bases diferentes de 10

Apesar do trabalho com bases diferentes de 10 não ser uma parte central no currículo da escola elementar, este estudo com outras bases é aqui apresentado com dois objetivos.

1. dar-lhe a oportunidade de adquirir uma compreensão mais profunda de agrupamento e valor posicional.

2. proporcionar-lhe maior discernimento e perspectiva das dificuldades que as crianças possam ter na compreensão de nosso sistema de numeração.

Na atividade 1, os jogos eram centrados nas ideias de agrupamento e valor posicional. Esta atividade visa a proporcionar experiências adicionais em valor equivalente tanto em situações de agrupamento como em valor posicional.

Lembre que a noção subjacente à de agrupamento e valor posicional é a de base. A base determina quantos há em cada grupo quando o agrupamento é feito.

A primeira parte desta atividade é dirigida para agrupamentos e a segunda enfoca valor posicional.

À medida que você trabalha os exemplos, esteja alerta para possíveis dificuldades que as crianças possam ter quando introduzidas aos conceitos de numeração.

Parte 1 Conceito de agrupamento[3].

Ao agrupar com os blocos multibase, o seguinte princípio é usado:

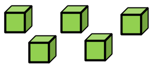
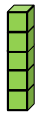
---

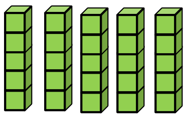
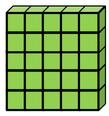
[3] Respostas na parte final.

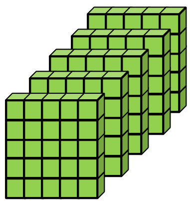
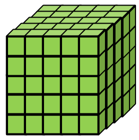
Em base n, sempre que há n objetos iguais, eles são agrupados e o resultado é um objeto “maior” equivalente.

Por exemplo, em base cinco, quando 5 unidades (ou barras, etc.) são reunidas, elas são agrupadas e trocadas por uma barra (ou placa, etc.).

Então, em base cinco:

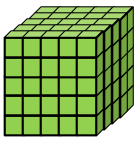
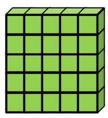
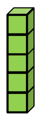
5 unidades  são equivalentes a uma barra 

5 barras  são equivalentes a uma placa 

5 placas  são equivalentes a um bloco 

Responda, usando blocos ou similares na base cinco para as questões de 1 a 5 a seguir.

1. Coloque sobre a mesa as peças

2 , **4** , **3**  **e** **2** 

Esta quantidade é registrada por

2432_{cinco} e se lê**: “dois quatro três dois, base cinco”.**

Quantas unidades este numeral representa? (Isto é, qual é o numeral equivalente em base dez?)

2. Coloque sobre a mesa material que represente os seguintes numerais e determine o número total de unidades representadas (isto é, em base dez)

a) 343_{cinco}

b) 2231_{cinco}

c) 1010_{cinco}

3. Cada pessoa no grupo, uma de cada vez, coloca material sobre a mesa enquanto as outras determinam o numeral equivalente em base dez.

4. Coloque sobre a mesa 3 blocos, 6 placas e 8 unidades.

a) Qual o número (base dez) representado?

b) Escreva o numeral em base cinco representado.

5. Suponha que todas as trocas possíveis tenham sido feitas.

a) Qual o maior número que pode ser representado usando só unidades, barras e placas em base cinco? Escreva o numeral equivalente em base cinco e em base dez.

b) Qual o maior número que pode ser representado usando só barras e unidades em base cinco? Escreva o numeral equivalente em base cinco e em base dez.

c) Qual o maior número que pode ser representado usando só blocos, placas, barras e unidades em base cinco? Escreva o numeral equivalente em base cinco e em base dez.

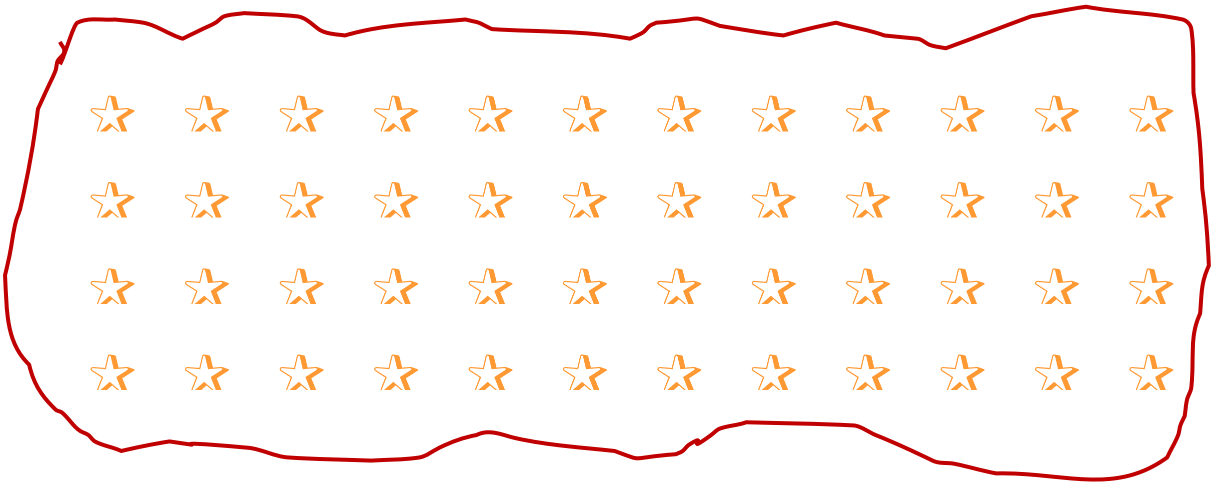
d) Qual o numeral em base cinco equivalente a uma unidade, uma barra, uma placa e um bloco em base cinco?

6. Complete (use o menor número possível de peças)

	Blocos	**Placas**	**Barras**	**Unidades**	**Numeral**
base 5	**4**	**2**	**3**	**3**	**4233_{cinco}**
base 10					
base 6					

	Blocos	Placas	Barras	Unidades	Numeral
base 2	1	1	0	1	1101_{dois}
base 10					
base 4					

7. Represente o número de estrelas do quadro em cada base indicada na tabela seguinte.



	Blocos	Placas	Barras	Unidades	Numeral
base 4					$_{quatro}$
base 10					$_{dez}$
base 8					$_{oito}$

8. Em base dez, somente 10 dígitos são necessários. Eles são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

a) Em base cinco, quantos dígitos são necessários? Quais são eles?

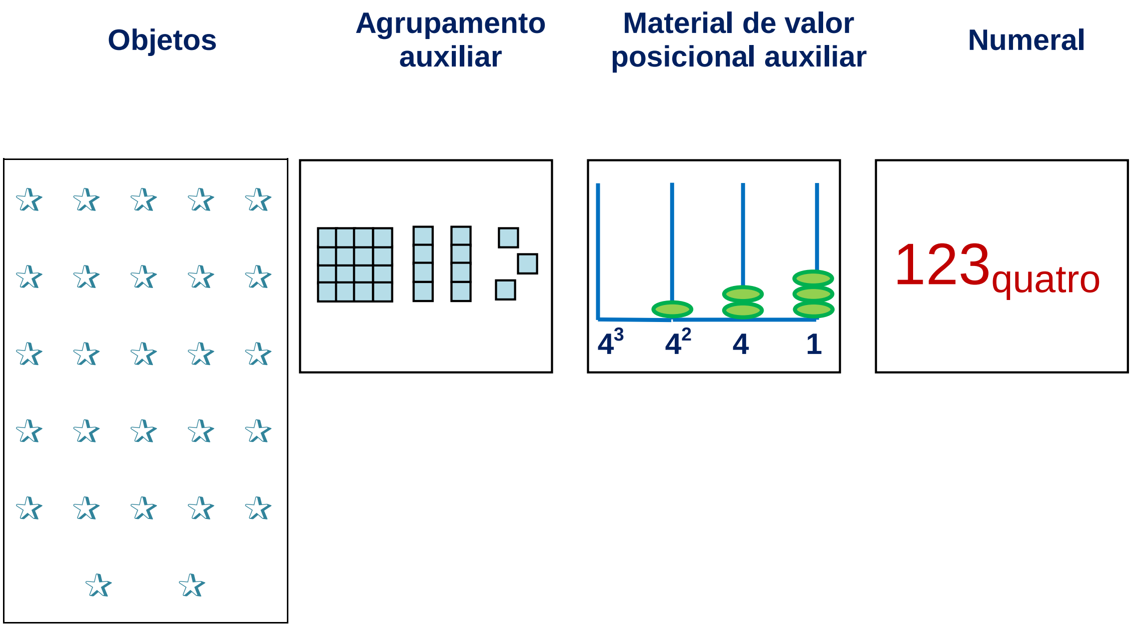
b) Em base oito, quantos dígitos são necessários? Quais são eles?

c) Em base *n*, quantos dígitos são necessários? Quais são eles?

Parte 2 Conceito de valor posicional.

Na parte anterior, você usou material para focalizar o conceito de agrupamento. Os blocos (ou similares) representavam o número total de objetos a serem agrupados. Um material como o ábaco (ou QVL = quadro valor de lugar, etc.) pode ser usado para preencher a lacuna entre o número total de objetos concretos a ser registrado e o registro do numeral em si.

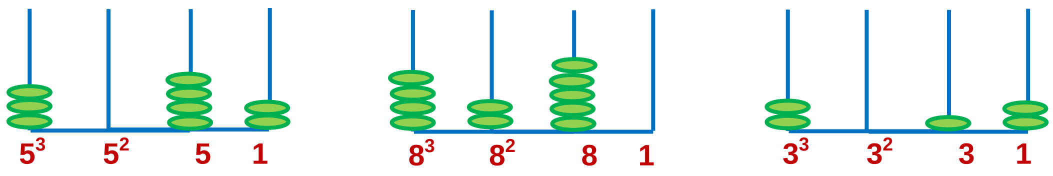
Na ilustração a seguir, usando base quatro, uma conta na linha das unidades representa um objeto, na linha b representa 4 unidades, na linha b^2 representa 4^2 ou 16 objetos.



O uso de expoentes ajuda a ver a estrutura do sistema posicional e o valor de cada posição. Você lembra que um expoente indica quantas vezes um número deve ser multiplicado por ele mesmo. Assim, 5^4 significa $5 \times 5 \times 5 \times 5$.As cinco primeiras posições das bases dois, seis e dez são mostradas nos ábacos a seguir.

Responda[4]

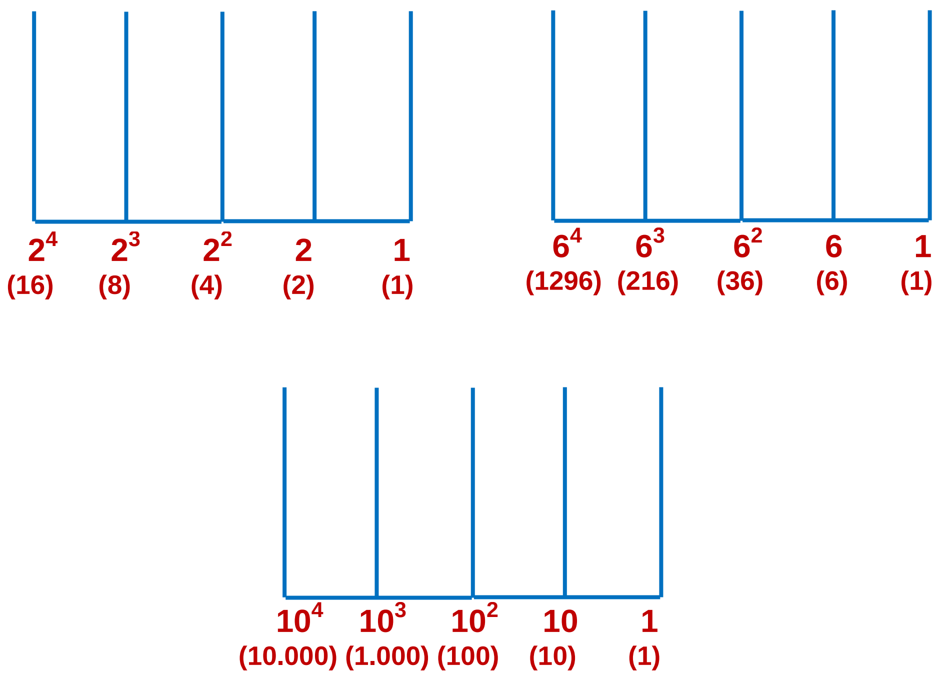
1. Escreva os numerais representados nos ábacos a seguir.



Encontre os numerais equivalentes em base dez.

Qual o maior número de contas em uma linha de um ábaco em base *n*?

2. Escolha uma base e represente um número no ábaco. Pergunte a um colega qual o correspondente numeral em base dez e na base escolhida.



[4] Respostas na parte final.

3. Escolha um número e dê seu numeral em base dez. Pergunte a um colega qual o numeral correspondente em outra base e peça que o represente no ábaco.

4 Observe:

$$43072_{dez} \text{ significa } 4(10^4) + 3(10^3) + 0(10^2) + 7(10) + 2$$

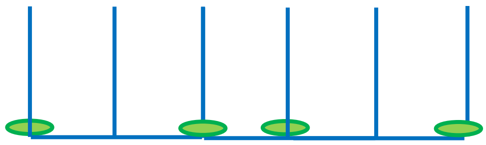
e complete de modo análogo:

23511_{seis} significa...

61213_{sete} significa...

5. Observe

101101_{dois}



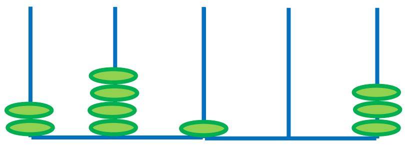
2^5 2^4 2^3 2^2 2 1

$32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1$

45

equivalente em base dez

24103_{cinco}



5^4 5^3 5^2 5 1

$2(625) + 4(125) + 25 + 0 + 3$

1778

equivalente em base dez

e desenvolva de modo análogo num ábaco e calculando o equivalente em base dez:

3246_{sete} **312011_{quatro}**

6. (*Opcional*) Às vezes, bases diferentes de 10 são introduzidas. Apesar da intenção não ser desenvolver nas crianças habilidades em operações com outras bases, elas podem gostar de somar e subtrair em bases distintas de 10. Ao fazer os cálculos a seguir, esteja atento para o fato de que, quando crianças são introduzidas a cálculos rotineiros (em base 10), elas frequentemente

sentem as mesmas dificuldades que você pode sentir ao trabalhar em outras bases. Frisamos, porém, que cálculos em outras bases não é uma habilidade que valha a pena desenvolver com crianças.

Observe:

$$\begin{array}{cccc} & 3 & 4 & 5_{\text{seis}} \\ + & 2 & 4 & 3_{\text{seis}} \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2_{\text{seis}} \end{array}$$

e calcule:

$675_{\text{oito}} + 436_{\text{oito}}$; $432_{\text{cinco}} - 143_{\text{cinco}}$; $121_{\text{três}} \cdot 21_{\text{três}}$; $32_{\text{quatro}} \mid 12_{\text{quatro}}$.

7. Que procedimento você sugere para traduzir um numeral em base *n* para um numeral em base 10? Dê um exemplo.

8; Que procedimento você sugere para traduzir um numeral em base 10 para um numeral em base *n*? Dê um exemplo.

Atividade 3 - Usando bases para resolver alguns quebra – cabeças

Esta atividade é apresentada para dar – lhe a oportunidade de resolver alguns quebra– cabeças usando bases. Esperamos que você tenha prazer no desafio.

Compartilhe com os colegas, não só o resultado, mas os procedimentos que você utilizou para resolvê – los[5].

1. Um matemático excêntrico, ao morrer, deixou pilhas de papéis escritos. Um de seus amigos encontrou o seguinte trecho:

> ***“Eu me graduei na Universidade aos 44 anos. Um ano depois, eu, um homem de 100 anos, me casei com uma moça de 34***

[5] Respostas na parte final.

anos. Como a diferença de idade entre nós era só de 11 anos, nós tínhamos muitos interesses em comum. Alguns anos depois, nós tínhamos uma família com 10 crianças. Eu tinha um emprego na Universidade e meu salário era de R$1.000.000,00 por mês. 1/10 do meu salário se destinava ao sustento dos meus pais. No entanto, o saldo de R$400.000,00 era mais do que suficiente para vivermos confortavelmente."

Obviamente, os cálculos estavam sendo feitos em outra base (diferente de dez). Você pode traduzir o trecho acima em expressões equivalentes em base 10?

2. Traduza os numerais em base dez para numerais nas bases indicadas e coloque suas respostas da esquerda para a direita nos quadrados conforme indicado na tabela. Se você acertou, as respostas serão as mesmas lidas horizontalmente e verticalmente.

a)				
b)				
c)				
d)				

a) 486_{dez} em base cinco;

b) 1.064_{dez} em base seis;

c) 848_{dez} em base sete;

d) 298_{dez} em base seis.

3. Códigos.

Você consegue decodificar a mensagem no quadro a seguir? Cada numeral, em base seis, representa uma letra no alfabeto:

1 ↔ A	**5 ↔ E**	**15 ↔ L**
2 ↔ B	**10 ↔ F**	**20 ↔ M**
3 ↔ C	**...........**	**..........**

4 ↔ D **14 ↔ J** **35 ↔ Z**

Mensagem:

33 – 22 – 3 – 5 5 – 21 – 31 – 5 – 21 – 4 – 5 – 32

2 – 1 – 30 – 5 – 30 21 – 32 – 20 – 5 – 25 – 13 – 3 – 1 – 30

30 – 5 33 – 22 – 3 – 5 25 – 5 – 30 – 22 – 15 – 33 – 5 – 32

13 – 30 – 31 – 22

23 – 1 – 25 – 1 – 2 – 5 – 21 – 30

4. Tabelas de idade.

Tabelas de idade ou tiras mágicas são um fascínio. O conjunto de tiras a seguir tem os números dispostos de tal maneira que, se uma pessoa diz em que tiras a sua idade aparece, o "mágico" pode dizer a sua idade. O truque é fácil. Simplesmente adicionam-se os primeiros números de cada tira apontada pela pessoa. Por exemplo, se uma pessoa diz que sua idade aparece nas tiras A, B, D e E, então o "mágico" diz com absoluta confiança: "*Você tem 27 anos (= 16 + 8 + 2 + 1)!*"

F	E	D	C	B	A
32	16	8	4	2	1
33	17	9	5	3	3
34	18	10	6	6	5
35	19	11	7	7	7
36	20	12	12	10	9
37	21	13	13	11	11
38	22	14	14	14	13
39	23	15	15	15	15
40	24	24	20	18	17
41	25	25	21	19	19
42	26	26	22	22	21
43	27	27	23	23	23
44	28	28	28	26	25
45	29	29	29	27	27
46	30	30	30	30	29
47	31	31	31	31	31
48	48	40	36	34	33
49	49	41	37	35	35
50	50	42	38	38	37
51	51	43	39	39	39
52	52	44	44	42	41
53	53	45	45	43	43
54	54	46	46	46	45
55	55	47	47	47	47
56	56	56	52	50	49
57	57	57	53	51	51
58	58	58	54	54	53
59	59	59	55	55	55
60	60	60	60	58	57
				59	59

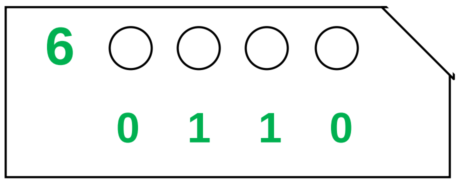
Por que funciona? *“Dica”: tem a ver com numeração em base dois.*

5. Cartões perfurados.

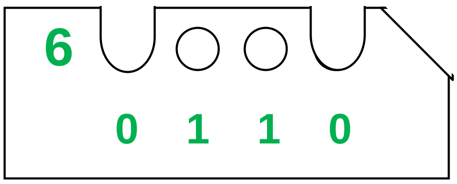
Uma maneira de registrar números é usando cartões perfurados. O processo de classificação descrito a seguir forma a base do sistema de cartões perfurados utilizados em algumas máquinas e nos primeiros computadores.

a) Construa um conjunto de dezesseis cartões e numere-os de zero a quinze (normalmente, em base dez). Perfure quatro orifícios no topo de cada um e corte um canto fora. Escreva a representação binária (em base dois) do numeral em base dez de cada cartão, colocando um dígito abaixo de cada furo. Exceto pelos numerais, todos os cartões devem ser exatamente iguais como o modelo que segue:

$(0110_{dois} = 6_{dez})$



b) A seguir, corte uma fenda para cada "0" que aparece no numeral binário, como na figura a seguir.



c) Suponha que você tenha misturado a pilha de 16 cartões e deseje reaver o cartão "6". Como você poderá fazê-lo, sem ler os numerais?

d) Misture os cartões. Como você poderá colocá-los em ordem numérica, sem ler os numerais?

6. Pares e ímpares.

Descubra um procedimento para verificar se um número é par ou ímpar, olhando para sua representação em base cinco, em base seis, em base *n*.

Respostas e Comentários

Respostas da Atividade 1.

1a) Você tem 6 unidades que podem ser contadas na barra.

1b) Você tem $6^2 = 36$ unidades que podem ser contadas na placa.

1c) Num bloco, você tem $6^3 = 216$ unidades que não podem ser contadas num bloco sólido, mas que podem ser contadas em 6 placas que substituem o bloco.

2a) 10 fichas vermelhas e 4 brancas representam 104 unidades, mas, neste tipo de material, elas não podem ser contadas. Observe que não foram feitas todas as trocas possíveis, pois as 10 fichas vermelhas podem ainda ser trocadas por 1 ficha azul. Este não é o menor número de fichas que representam 104 unidades. Aqui, estão sendo usadas 10 + 4 = 14 fichas, quando 104 pode ser representado por 1 + 4 = 5 fichas, se forem feitas todas as trocas possíveis.

2b) 1 ficha azul, 4 vermelhas e 18 brancas representam 100 + 40 + 18 = 158 unidades. Estas também podem ser representadas por menos fichas, 1 azul, 5 vermelhas e 8 brancas e esse é o menor número de fichas possível.

3a) O ábaco que representa o maior valor é o primeiro (a), onde, em base b, a conta está na posição dos b^2's. Como a base é sempre um número natural maior do que 1, b^2 é sempre maior do que b que, por sua vez, é maior do que 1.

3b) Em base oito, o ábaco (a) representa $8^2 = 64$, o ábaco (b) representa 8 e o ábaco (c) representa 1. Repare que indicamos em base 10 o número representado em cada ábaco. De resto, o nome dos números já é baseado no seu desenvolvimento em base 10.

3c) Há por trás do uso desses materiais a ideia de levar a criança a progredir de um material em que ela “vê" todas as unidades representadas àquela em que a mesma “conta" assume valores diferentes, conforme a posição. Trocar uma barra por uma ficha vermelha pretende ser um estágio intermediário: a ficha é também uma só, mas é diferente na cor. O passo seguinte é manter a "conta", mudando só a posição.

4 e 5) Respostas pessoais, em que se pretende destacar a diferença e progressão no uso desses materiais.

6) Materiais análogos aos que foram citados aqui, podem ser encontrados em lojas especializadas ou confeccionados, muitos deles com material reciclável. Por exemplo, tampinhas coloridas podem substituir fichas, embalagens de ovos ou copinhos descartáveis colados em tiras de papel ou fitas de pano com pedrinhas podem substituir ábacos e contas. Quanto às questões sobre essas ideias e as crianças, espera-se que o professor-estudante reveja e organize mentalmente sua experiência passada à luz destas propostas.

Respostas da Atividade 2.

Parte 1

1) Esse numeral representa

$$2\times 5^3 + 4\times 5^2 + 3\times 5 + 2\times 1 =$$
$$2\times 125 + 4\times 25 + 3\times 5 + 2\times 1 =$$
$$250 + 100 + 15 + 2 = 367$$

2a) 343_{cinco} = $3\times 5^2 + 4\times 5 + 3\times 1 = 98$

2b) 2231_{cinco} = $2\times 5^3 + 2\times 5^2 + 3\times 5 + 1\times 1 = 316$

2c) 1010_{cinco} = $1\times 5^3 + 0\times 5^2 + 1\times 5 + 0\times 1 = 130$

3) Respostas pessoais.

4a) $3\times 5^3 + 6\times 5^2 + 0\times 5 + 8\times 1 = 533$

4b) 3608_{cinco}

5a) Em base cinco, o maior número de peças de cada tipo será quatro. Então, com unidades, barras e placas, o maior número é:

$444_{cinco} = 4\times5^2 + 4\times5 + 4 = 124$.

5b) $44_{cinco} = 4\times5 + 4 = 24$.

5c) $4444_{cinco} = 4\times5^3 + 4\times5^2 + 4\times5 + 4 = 624$

5d) $1111_{cinco} = 1\times5^3 + 1\times5^2 + 1\times5 + 1 = 156$.

6)

	Blocos	Placas	Barras	Unidades	Numeral
base 5	**4**	**2**	**3**	**3**	**4233_{cinco}**
base 10	**0**	**5**	**6**	**8**	**568_{dez}**
base 6	**2**	**3**	**4**	**4**	**2344_{seis}**

	Blocos	Placas	Barras	Unidades	Numeral
base 2	**1**	**1**	**0**	**1**	**1101_{dois}**
base 10	**0**	**0**	**1**	**3**	**13_{dez}**
base 4	**0**	**0**	**3**	**1**	**31_{quatro}**

7)

	Blocos	Placas	Barras	Unidades	Numeral
base 4	0	3	0	0	300_{quatro}
base 10	0	0	4	8	48_{dez}
base 8	0	0	6	0	60_{oito}

8)

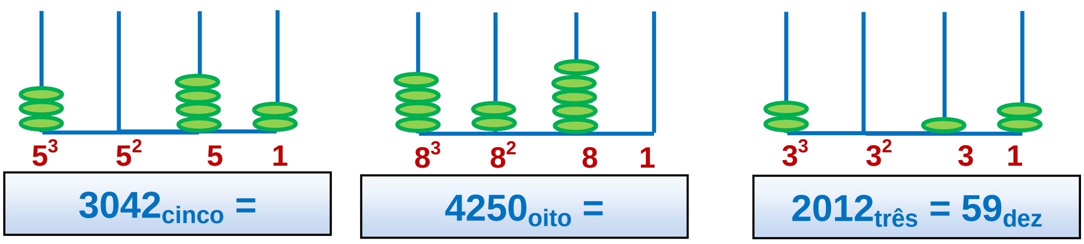
8a) Em base cinco, são necessários 5 dígitos. Eles podem ser 0, 1, 2, 3, 4.

8b) Em base oito, são necessários 8 dígitos. Eles podem ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

8a) Em base n, são necessários $n – 1$ dígitos. Eles podem ser 0, 1, 2, 3, ... , $n – 2$, $n – 1$.

Parte 2

1)



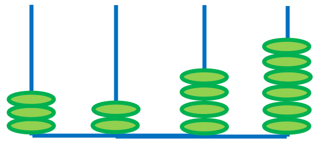
O maior número de contas em uma linha de um ábaco em base n é $n – 1$, porque com 1 conta a mais, faz-se a troca por uma conta na linha seguinte.

2) e 3) Respostas pessoais.

4) 23511_{seis} significa $2(6^4) + 3(6^3) + 5(6^2) + 1(6) + 1$

61213_{sete} significa $6(7^4) + 1(7^3) + 2(7^2) + 1(7) + 3$.

5) **3246_{sete}**

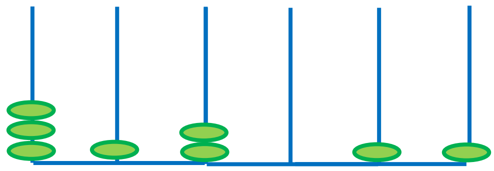


$7^3 \quad 7^2 \quad 7 \quad 1$

$3{\cdot}7^3 + 2{\cdot}7^2 + 4{\cdot}7 + 6{\cdot}1 =$

$= 1.161$

312011_{quatro}



$4^5 \quad 4^4 \quad 4^3 \quad 4^2 \quad 4 \quad 1$

$3{\cdot} 4^5 + 1{\cdot} 4^4 + 2{\cdot} 4^3 + 0{\cdot} 4^2 + 1{\cdot} 4 + 1$

$= 3.461$

6) (0pcional)

$675_{oito} + 436_{oito}$; $432_{cinco} - 143_{cinco}$; $121_{três} \times 21_{três}$;

$32_{quatro} \div 12_{quatro}$.

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 7 & 5_{oito} \\ + & 4 & 3 & 6_{oito} \\ \hline 1 & 3 & 3 & 3_{oito} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 4 & 3 & 2_{cinco} \\ - & 1 & 4 & 3_{cinco} \\ \hline & 2 & 3 & 4_{cinco} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 2 & 1_{três} \\ & \times & & 2 & 1_{três} \\ \hline & & 1 & 2 & 1_{três} \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0_{três} \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1_{três} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 3\ 2_{quatro} & 1\ 2_{quatro} \\ \cline{2-2} 3\ 0_{quatro} & 2_{quatro} \\ \cline{1-1} 0\ 2_{quatro} & \end{array}$$

Quociente = 2_{quatro} e resto = 2_{quatro}.

<u>Observação</u>: se quiser conferir, passe os dados e resultados para a base 10 e refaça os cálculos.

7) Em várias respostas às questões desta unidade, foram feitas essas transformações. Ela pode ser feita pelo cálculo da soma dos produtos de cada dígito pela potência da base correspondente à posição do dígito. Formalmente, trata-se do cálculo do valor numérico de um polinômio. Há exemplos nas respostas já dadas. Um outro modo de fazer esse cálculo é distribuindo os produtos pela base. Por exemplo, o cálculo de **312011**$_{\textbf{quatro}}$ da questão (5), pode ser feito na seguinte ordem:

$$\{\ \{\ [\ (3 \square 4 + 1) \square 4 + 2] \square 4 + 0\} \square 4 + 1\} \square 4 + 1 = 3.461$$

Esta ordem das operações é muito conveniente nas calculadoras.

8) Um procedimento simples de obter o desenvolvimento de um número dado no nosso sistema de numeração (em base 10, portanto) para uma outra base é o de divisões sucessivas pela nova base. O resto da 1ª divisão é o algarismo da unidade, o resto da 2ª é o 2º algarismo da direita para a esquerda, isto é, correspondente à posição dos b's. Assim por diante, o resto de cada divisão é o algarismo da posição anterior (de expoente maior), até que o quociente seja menor do que a base, pela primeira vez. O primeiro algarismo é o último quociente que é menor do que b. Veja que isso dá, de fato, o desenvolvimento que se pretende.

3	4	5	6	7						
	6	3		4	9	3	7			
		2	6		0	3	7	0	7	
			5			**3**		0	1	0	7
								0		**3**	**1**

Vamos escrever o número 3456 em base 7, usando esse procedimento:

$$3456 = 493 \cdot 7 + 5 = (70 \cdot 7 + 3) \cdot 7 + 5 = [(10 \cdot 7 + 0) \cdot 7 + 3] \cdot 7 + 5 =$$
$$= \{\ [\ (1 \cdot 7 + 3) \cdot 7 + 0] \cdot 7 + 3\} \cdot 7 + 5 = 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 + 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 + 0 \cdot 7 \cdot 7 + 3 \cdot 7 + 5 =$$
$$= 1 \cdot 7^4 + 3 \cdot 7^3 + 0 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 5 = 13035_{sete}$$

Respostas da Atividade 3.

1) A primeira informação é que 44 + 1 = 100, isto é, 4 + 1 = 5 unidades não deixam unidade livre, o que significa que a base utilizada é cinco. Com efeito, $44_{cinco} + 1_{cinco} = 100_{cinco}$. A tradução dos demais dados é feita como os cálculos já realizados aqui.

2)

a) 486_{dez} em base cinco	a)	**3**	**4**	**2**	**1**
b) 1.064_{dez} em base seis	b)	**4**	**5**	**3**	**2**
c) 848_{dez} em base sete	c)	**2**	**3**	**2**	**1**
d) 298_{dez} em base seis	d)	**1**	**2**	**1**	**4**

3) Completando a tabela:

	10 ↔ F	20 ↔ M	30 ↔ S
1 ↔ A	11 ↔ G	21 ↔ N	31 ↔ T
2 ↔ B	12 ↔ H	22 ↔ O	32 ↔ U
3 ↔ C	13 ↔ I	23 ↔ P	33 ↔ V
4 ↔ D	14 ↔ J	24 ↔ Q	34 ↔ X
5 ↔ E	15 ↔ L	25 ↔ R	35 ↔ Z

Mensagem:

VOCE ENTENDEU
BASES NUMERICAS
SE VOCE RESOLVEU
ISTO

PARABENS

Ou, com acentos e pontuação:

VOCÊ ENTENDEU BASES NUMÉRICAS SE VOCÊ RESOLVEU ISTO. PARABÉNS!

4) O segredo do mágico está na escrita dos números de 1 a 60 em base 2. Veja que na lista F estão todos os números entre 32 e 60, isto é, números que começam em $2^5 = 32$ e não chegam a $2^6 = 64$. Sua representação na base 2 tem, portanto, 6 dígitos, começando por 1, isto é, têm 1 na posição dos 5^5's. Na lista E, estão os números que começam em $2^4 = 16$, não chegam a $2^5 = 32$ e prosseguem de $2^5 + 2^4 = 48$ e não chegam a $2^6 = 64$. Todos têm, portanto, 1 na posição dos 5^4's em seu desenvolvimento binário. Na lista D, os números começam em $2^3 = 8$, não chegam a $2^4 = 16$, mas recomeçam em $2^4+2^3 = 24$, não chegam a 2^5 para recomeçar em $2^5 + 2^3 = 40$, mas não chegam a $2^6=64$, isto é, todos têm 1 na posição dos 2^3's. Assim por diante, os números da lista A são os números ímpares que têm, portanto, 1 na posição das unidades no seu desenvolvimento em base 2. Veja que, cada lista começa por uma potência de 2, cujo desenvolvimento binário tem um único dígito não nulo. E é exatamente o dígito 1 na posição em que ele aparece nos demais números da lista. Ou seja cada número é a soma das potências de 2 que correspondem às posições dos dígitos 1 de seu desenvolvimento binário... Daí, a mágica!

Tudo isso fica mais claro quando se escrevem os números da lista em base 2.

F	E	D
32=100000	16=010000	8=001000
33=100001	17=010001	9=001001
34=100010	18=010010	10=001010
35=100011	19=010011	11=001011
36=100100	20=010100	12=001100
37=100101	21=010101	13=001101
38=100110	22=010110	14=001110
39=100111	23=010111	15=001111
40=101000	24=011000	24=011000
41=101001	25=011001	25=011001
42=101010	26=011010	26=011010
43=101011	27=011011	27=011011
44=101100	28=011100	28=011100
45=101101	29=011101	29=011101
46=101110	30=011110	30=011110
47=101111	31=011111	31=011111
48=110000	48=110000	40=101000
49=110001	49=110001	41=101001
50=110010	50=110010	42=101010
51=110011	51=110011	43=101011
52=110100	52=110100	44=101100
53=110101	53=110101	45=101101
54=110110	54=110110	46=101110
55=110111	55=110111	47=101111
56=111000	56=111000	56=111000
57=111001	57=111001	57=111001
58=111010	58=111010	58=111010
59=111011	59=111011	59=111011
60=111100	60=111100	60=111100

C	B	A
4=000100	2=000010	1=000001
5=000101	3=000011	3=000011
6=000110	6=000110	5=000101
7=000111	7=000111	7=000111
12=001100	10=001010	9=001001
13=001101	11=001011	11=001011
14=001110	14=001110	13=001101
15=001111	15=001111	15=001111
20=010100	18=010010	17=010001
21=010101	19=010011	19=010011
22=010110	22=010110	21=010101
23=010111	23=010111	23=010111
28=011100	26=011010	25=011001
29=011101	27=011011	27=011011
30=011110	30=011110	29=011101
31=011111	31=011111	31=011111
36=100100	34=100010	33=100001
37=100101	35=100011	35=100011
38=100110	38=100110	37=100101
39=100111	39=100111	39=100111
44=101100	42=101010	41=101001
45=101101	43=101011	43=101011
46=101110	46=101110	45=101101
47=101111	47=101111	47=101111
52=110100	50=110010	49=110001
53=110101	51=110011	51=110011
54=110110	54=110110	53=110101
55=110111	55=110111	55=110111
60=111100	58=111010	57=111001
	59=111011	59=111011

5) Cartões perfurados.

5a) Observe que o canto recortado mostra a posição certa de cada cartão.

5b) Os furos e as fendas têm também a finalidade de prender ou soltar cartões quando se usam 4 pinos passando pelas posições dos furos.

5c) Um modo de encontrar o cartão do 6 será procurar o único que tem as fendas nas extremidades e somente estas.

Esta busca pode ser automatizada com uso de pinos e com os cartões superpostos numa pilha, todos na mesma posição. Para isso, passe 4 pinos pelas posições dos 4 furos iniciais. Só o cartão do 0 fica solto. Numerando os pinos de 1 a 4, da esquerda para a direita e tirando o 3º pino, só o cartão do 2 fica solto. Recolocando esse pino e soltando o 2º pino, só o cartão do 4 fica solto. Soltando agora o 2º pino e mantendo fora o 3º, só o cartão do 6 ficará solto.

5d) Na tabela a seguir, a letra P numa posição significa o pino passando pelo furo naquela posição e a letra V significa que o pino daquela posição foi retirado. Cada cartão ficará solto quando só houver pino nas posições relativas ao 0, pois o pino não segura as fendas. Sendo assim, para retirar os cartões em ordem numérica de uma pilha presa por 4 pinos, será preciso retirar e recolocar os pinos numa ordem conveniente. Começando por retirar o único cartão solto o 0. Retirando o pino 4, o único cartão solto será o 1. Repondo o 4 e retirando o 3, o único cartão solto será o 4 e, assim por diante, a tabela a seguir indica a ordem em que os pinos devam ser retirados ou recolocados.

cartão	binário	pinos
0	0000	$P_1P_2\ P_3\ P_4$
1	0001	$P_1P_2\ P_3\ V_4$
2	0010	$P_1P_2\ V_3\ P_4$
3	0011	$P_1P_2\ V_3\ V_4$

cartão	binário	pinos
8	1000	$V_1P_2\ P_3\ P_4$
9	1001	$V_1P_2\ P_3\ V_4$
10	1010	$V_1P_2\ V_3\ P_4$
11	1011	$V_1P_2\ V_3\ V_4$

4	0100	$P_1V_2\,P_3\,P_4$
5	0101	$P_1V_2\,P_3\,V_4$
6	0110	$P_1V_2\,V_3\,P_4$
7	0111	$P_1V_2\,V_3\,V_4$

12	1100	$V_1V_2\,P_3\,P_4$
13	1101	$V_1V_2\,P_3\,V_4$
14	1110	$V_1V_2\,V_3\,P_4$
15	1111	$V_1V_2\,V_3\,V_4$

6) Começando pela base 6, que é o caso mais simples porque 6 é um número par. Então, todas as potências de 6 com expoente de 1 em diante, são números pares e, multiplicadas por qualquer outro número natural permanecem números pares. O desenvolvimento do número em potências de 6 será, portanto, uma soma de números pares com o termo das unidades.

Conclusão: na base seis, se o dígito das unidades for par, o número será par e se esse dígito for ímpar, o número será ímpar.

Formalmente, sejam a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n números naturais entre 0 e 5, o número

$$a_n\,a_{n-1}\ldots a_2a_1a_0\,_{\text{seis}} = (\text{número} \times 6) + a_0 = (\text{número par}) + a_0.$$

Na base 5, ao contrário, todas as potências de 5 são ímpares. Logo, todas as potências de 5 deixam resto 1 quando são divididas por 2. Ou seja, todas as potências de 5 são iguais a um número par mais 1. No desenvolvimento do número em potências de 5, todas as parcelas serão, portanto, somas de números pares mais 1 vezes o dígito correspondente. O resultado será, portanto, a soma de um número par com a soma dos dígitos da escrita do número na base 5.

Conclusão: na base cinco, o número será par ou ímpar conforme a soma dos seus dígitos seja par ou ímpar.

Formalmente, sejam a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n números naturais entre 0 e 4, o número

$a_n\, a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0\,{}_{\text{cinco}}$ =

= a_n (número par + 1) + a_{n-1} (número par + 1) + ... + a_2 (número par + 1) +

a_1 (número par + 1) + a_0 =

= (número par) + a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0.

Observe que nos raciocínios anteriores, só foi levado em conta o fato de que 6 é par e 5 é ímpar. Analogamente, conclui-se, portanto, que

Um número escrito em base *n*, será par se e, somente, se:

se *n* for par, quando o algarismo das unidades for par

e,

se *n* for ímpar, quando a soma de todos os seus algarismos for par.

Observações da equipe proponente

Esses jogos fizeram parte das primeiras atividades propostas, nas quais eram revistos os conceitos de agrupamento, valor equivalente e posicional e discutidos materiais instrucionais apropriados. Nesta ocasião, a equipe pôde observar que quase todos os professores-alunos misturavam convenções de cor ou forma com convenções de posição e alguns misturavam convenções de agrupamento com as de valor posicional.

Depois, jogos análogos foram propostos com a utilização de bases diferentes de 10, o resultado da multiplicação ou divisão por potências da base foi procurado, e operações foram feitas utilizando o ábaco ou material posicional similar.

O material multibase, em que ficam mais visíveis as unidades, é vantajoso na troca de dezenas por unidades, ou vice-versa, nos cálculos das primeiras operações. Por outro lado, ele pode ser responsável por um erro comum em que crianças tendem a escrever 10 6, ao invés de 16. É preciso ficar alerta para essa questão.

Houve uma discussão geral sobre o uso de material concreto, na qual eclodiu a possibilidade de isso favorecer adestramento se for empregado com rigidez. Foi também comentada a imposição de uso de material concreto como mais um modismo e o desconhecimento de vantagens e limitações de materiais instrucionais em geral.

O uso de outras bases em atividades com professores-alunos se mostrou eficaz (na visão da equipe e dos próprios professores-alunos) para detectar dúvidas e falhas no conhecimento da estrutura do sistema decimal. Por exemplo, que na 3ª posição aparecem múltiplos de b^2, ao empregar a base b; e. que multiplicar por b se reduz a acrescentar um 0 à direita no numeral.

––