



Thomás Yoiti Sasaki Hoshina

**Otimização topológica com refinamento
adaptativo de malhas poligonais**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Ivan Fábio Mota de Menezes

Rio de Janeiro
Abril de 2016



Thomás Yoiti Sasaki Hoshina

Otimização topológica com refinamento adaptativo de malhas poligonais

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ivan Fábio Mota de Menezes

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Marcelo de Andrade Dreux

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Anderson Pereira

Departamento de Estruturas e Fundações – UERJ

Prof. Márcio da Silveira Carvalho

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 8 de Abril de 2016

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Thomás Yoiti Sasaki Hoshina

Graduou-se em Engenharia de Computação pelo Instituto Militar de Engenharia. Coursou especialização em Engenharia de Petróleo na Universidade Petrobras. Atua na Petrobras como engenheiro em segurança de poço.

Ficha Catalográfica

Hoshina, Thomás Yoiti Sasaki

Otimização topológica com refinamento adaptativo de malhas poligonais / Thomás Yoiti Sasaki Hoshina; orientador: Ivan Fábio Mota de Menezes. – Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, 2016.

v., 52 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Mecânica – Tese. 2. Refinamento adaptativo de malhas. 3. Otimização topológica. 4. Elementos finitos poligonais. 5. Diagrama de Voronoi. I. Menezes, Ivan Fábio Mota de. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ivan Menezes, pela atenção, paciência, confiança e dedicação durante a realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Anderson Pereira pela sugestões, colaboração e disponibilidade.

À minha namorada Hayra Manhães pela paciência, incentivo, amor e carinho mesmo tão ausente nesse período.

À minha mãe Teresa Sasaki e à minha irmã Mayumi Sasaki pelo apoio, preocupação e amparo durante toda a minha vida.

Resumo

Hoshina, Thomás Yoiti Sasaki; Menezes, Ivan Fábio Mota de. **Otimização topológica com refinamento adaptativo de malhas poligonais**. Rio de Janeiro, 2016. 52p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A otimização topológica tem como objetivo encontrar a distribuição mais eficiente de material (ótima topologia) em uma determinada região, satisfazendo as restrições de projeto estabelecidas pelo usuário. Na abordagem tradicional atribui-se uma variável de projeto, constante, denominada densidade, para cada elemento finito da malha. Dessa forma, a qualidade da representação dos novos contornos da estrutura depende do nível de discretização da malha: quanto maior a quantidade de elementos, mais bem definida será a topologia da estrutura otimizada. No entanto, a utilização de malhas super-refinadas implica em um elevado custo computacional, principalmente na etapa de solução numérica das equações de equilíbrio pelo método dos elementos finitos. Este trabalho propõe uma nova estratégia computacional para o refinamento adaptativo local de malhas utilizando elementos finitos poligonais em domínios bidimensionais arbitrários. A ideia consiste em realizar um refinamento da malha nas regiões de concentração de material, sobretudo nos contornos internos e externos, e um desrefinamento nas regiões de baixa concentração de material, como por exemplo, nos furos internos. Desta forma, é possível obter topologias ótimas, com alta resolução e relativamente baixo custo computacional. Exemplos representativos são apresentados para demonstrar a robustez e a eficiência da metodologia proposta por meio de comparações com resultados obtidos com malhas super-refinadas e mantidas constantes durante todo o processo de otimização topológica.

Palavras-chave

Refinamento adaptativo de malhas; Otimização topológica; Elementos finitos poligonais; Diagrama de Voronoi.

Abstract

Hoshina, Thomás Yoiti Sasaki; Menezes, Ivan Fábio Mota de (Advisor). **Topology optimization with adaptive polygonal mesh refinement**. Rio de Janeiro, 2016. 52p. MSc. Dissertation – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Topology optimization aims to find the most efficient distribution of material (optimal topology) in a given domain, subjected to design constraints defined by the user. The quality of the new boundary representation depends on the level of mesh refinement: the greater the number of elements in the mesh, the better will be the representation of the optimized structure. However, the use of super refined meshes implies in a high computational cost, especially regarding the numerical solution of the linear systems of equations that arise from the finite element method. This work proposes a new computational strategy for adaptive local mesh refinement using polygonal finite elements in arbitrary two-dimensional domains. The idea is to perform a mesh refinement in regions of material concentration, mostly in inner and outer boundaries, and a mesh derefinement in regions of low material concentration such as the internal holes. Thus, it is possible to obtain optimal topologies with high resolution and relatively low computational cost. Representative examples are presented to demonstrate the robustness and efficiency of the proposed methodology by comparing the results obtained herein with the ones from the literature where super refined meshes are held constant throughout all topology optimization process.

Keywords

Adaptive mesh refinement; Topology optimization; Polygonal finite elements; Voronoi tessellation.

Sumário

1	Introdução	13
2	Otimização Topológica	15
2.1	Métodos de Elementos Finitos	17
2.2	Malhas Poligonais	20
2.3	Refinamento de Malha	21
3	Implementação do Refinamento Poligonal Autoadaptativo	23
3.1	Processo Adaptativo	23
3.1.1	Seleção de Elementos para Refino e Desrefino	24
3.1.1.1	(I) Controle do Processo Adaptativo	25
3.1.1.2	(II) Gradiente de Fração Volumétrica	25
3.1.1.3	(III) Desrefinamento de Elemento Central	26
3.1.1.4	(IV) Refinamento de Elemento Preenchido	27
3.1.2	Adição e Remoção de Sementes de Voronoi	28
3.1.3	Atualização da Malha de Elementos Finitos	30
3.2	Otimização Topológica	32
4	Resultados Numéricos	36
4.1	Problemas Simulados	36
4.2	Refinamento Adaptativo	37
4.2.1	Domínio MBB	38
4.2.2	Domínio Wrench	40
4.2.3	Domínio Michell	42
4.2.4	Domínio Hook	45
4.3	Tempo de Processamento	46
5	Conclusões	48
5.1	Trabalhos Futuros	48
	Referências bibliográficas	50

Lista de figuras

2.1	(a) Otimização paramétrica ou dimensional. (b) Otimização de forma ou geométrica. (c) Otimização topológica. Fonte: Bendsøe et al. (2002) (3).	15
2.2	Procedimento típico de projeto estrutural por otimização topológica. Fonte: Silva (2001) (4).	16
2.3	Malha estruturada. Fonte: Batista (2005) (7).	17
2.4	Malha não-estruturada. Fonte: Batista (2005) (7).	17
2.5	Exemplo de <i>Checkerboard</i> . Fonte: Talischi et al. (2008) (8).	18
2.6	Exemplo de <i>One-node Connection</i> . Fonte: Talischi et al. (2008) (8).	18
2.7	Exemplo de diferença de resolução por dependência de malha. Fonte: Zhou et al. (2012) (9).	19
2.8	Exemplo de criação de novos membros para resultados de um mesmo problema de otimização com alteração da malha: (a) malha com 1200 elementos, (b) malha com 1875 elementos e (c) malha com 3000 elementos. Fonte: Kiyono (2008) (10).	19
2.9	Representação das linhas da triangulação de Delaunay em preto. Fonte: Wikipedia (2016) (13).	20
2.10	Representação do diagrama de Voronoi tracejado em vermelho. Fonte: Wikipedia (2016) (13), adaptado pelo autor.	20
2.11	Representação das células do diagrama de Voronoi formado por 20 sementes. Fonte: Wikipedia (2016) (14).	21
2.12	Representação da escala de cinza.	22
3.1	Fluxograma básico de otimização topológica.	23
3.2	Fluxograma de otimização topológica considerando o processo de adaptação de malha.	24
3.3	Definições de (a) elemento sólido; (b) elemento vazio; (c) elemento preenchido; e (d) elementos vizinhos.	25
3.4	Os elementos com contorno azul possuem $\rho = 1$ e $\rho = 0,438$. Considerando $\Delta\rho = 0,333$, ambos são marcados para refinamento.	26
3.5	Todos os elementos com contorno azul estão marcados para refinamento, considerando $\Delta\rho = 0,333$.	26
3.6	O elemento central com contorno amarelo possui $\rho = 1$ e seus vizinhos com contorno vermelho possuem $\rho = 1$. Considerando $\rho_s = 0,950$, o elemento central com contorno amarelo é marcado para desrefinamento.	27
3.7	Todos os elementos com contorno amarelo estão marcados para desrefinamento, considerando $\rho_s = 0,950$.	27
3.8	O elemento central com contorno amarelo possui $\rho = 0$ e seus vizinhos com contorno vermelho possuem $\rho = 0$ ou $\rho = 0,004$ ou $\rho = 0,011$. Considerando $\rho_v = 0,050$, o elemento central com contorno amarelo é marcado para desrefinamento.	27
3.9	Todos os elementos com contorno amarelo estão marcados para desrefinamento, considerando $\rho_v = 0,050$.	28

- 3.10 O elemento com contorno azul possui $\rho = 0,516$. Para $\rho_p = 0,333$, o elemento com contorno azul é marcado para refinamento. 28
- 3.11 Todos os elementos com contorno azul estão marcados para refinamento para $\rho_p = 0,333$. 28
- 3.12 Malha poligonal em um domínio retangular e suas sementes de Voronoi representadas pelos pontos azuis. 29
- 3.13 Malha poligonal em um domínio com contornos curvilíneos e suas sementes de Voronoi representadas pelos pontos azuis. 29
- 3.14 Sementes a serem adicionadas em um passo da malha poligonal. 29
- 3.15 Sementes a serem removidas em um passo da malha poligonal. 29
- 3.16 Domínio retangular com 1000 elementos iniciais no terceiro passo de penalização **antes** da adaptação da malha. 30
- 3.17 Domínio retangular com 1000 elementos iniciais no terceiro passo de penalização **após** a adaptação da malha. 30
- 3.18 Domínio com contornos curvilíneos com 1000 elementos iniciais no quarto passo de penalização **antes** da adaptação da malha. 30
- 3.19 Domínio com contornos curvilíneos com 1000 elementos iniciais no quarto passo de penalização **após** a adaptação da malha. 30
- 3.20 A reflexão de uma semente do interior do domínio Ω por meio do seu contorno $\partial\Omega$ gera sementes externas a Ω que, na construção do diagrama de Voronoi, traçam arestas tangentes definindo o contorno do domínio. Nota-se que sementes mais internas, como z , não precisam ser refletidas, pois não influenciam no contorno. Fonte: Talischi et al. (2012) (11). 31
- 3.21 Para se obter o vértice (V) do domínio Ω , as sementes x e y não podem ser refletidas apenas no segmento do contorno mais próximos, mas devem ser refletidas em ambos os segmentos do contorno do domínio. Fonte: Talischi et al. (2012) (11), adaptado pelo autor. 31
- 3.22 A banda (faixa cinza) determina quais elementos serão refletidos. Fonte: Talischi et al. (2012) (11). 32
- 3.23 Os 6 passos de desrefinamento sem utilização de iterações de Lloyd são representados pela sequência das 7 malhas da parte superior, enquanto a parte inferior destaca os elementos em amarelo que são os elementos que estão sendo desrefinados. 34
- 3.24 Os 6 passos de desrefinamento utilizando uma iteração de Lloyd são representados pela sequência das 7 malhas da parte superior, enquanto a parte inferior destaca os elementos em amarelo que são os elementos que estão sendo desrefinados. 35
- 4.1 Viga MBB (Olhoff et al. (1991) (22)). 36
- 4.2 Domínio Wrench (Talischi et al. (2012) (23)). 37
- 4.3 Viga de Michell (Talischi et al. (2012) (23)). 37
- 4.4 Modelo Hook (Talischi et al. (2012) (23)). 38
- 4.5 Processo de otimização topológica com adaptatividade da malha no domínio MBB com $n_0 = 625$, $R = 0,04$ e $\tilde{v} = 0,5$. 39
- 4.6 (a) Malha inicial do processo de otimização topológica do domínio MBB com 625 elementos poligonais, $R = 0,04$ e $\tilde{v} = 0,5$; (b) Malha final com 5398 elementos poligonais. 39

- 4.7 Topologia ótima do domínio MBB (Olhoff et al. (1991) (22)) com $R = 0,04$ e $\tilde{v} = 0,5$: (a) com malha adaptativa partindo de 625 elementos e chegando a 5398 elementos; e (b) com malha refinada com 5000 elementos e mantida constante durante todo o processo de otimização topológica. 40
- 4.8 Topologias ótimas e suas respectivas malhas adaptativas do domínio MBB (Olhoff et al. (1991) (22)) com $n_0 = 625$, $R = 0,04$ e $\tilde{v} = 0,5$: (a) sem iteração de Lloyd; e (b) com uma iteração de Lloyd. 40
- 4.9 Processo de otimização topológica com adaptatividade da malha no domínio Wrench com $n_0 = 625$, $R = 0,03$ e $\tilde{v} = 0,4$. 42
- 4.10 (a) Malha inicial do processo de otimização topológica do domínio Wrench com 625 elementos poligonais, $R = 0,03$ e $\tilde{v} = 0,4$; (b) Malha final com 5133 elementos poligonais. 42
- 4.11 Topologia ótima do domínio Wrench (Talischi et al. (2012) (23)) com $R = 0,03$ e $\tilde{v} = 0,4$: (a) com malha adaptativa partindo de 625 elementos e chegando a 5133 elementos; e (b) com malha refinada com 5000 elementos e mantida constante durante todo o processo de otimização topológica. 43
- 4.12 Topologias ótimas e suas respectivas malhas adaptativas do domínio Wrench (Talischi et al. (2012) (23)) com $n_0 = 625$, $R = 0,03$ e $\tilde{v} = 0,4$: (a) sem iteração de Lloyd; e (b) com uma iteração de Lloyd. 43
- 4.13 Topologias ótimas e suas respectivas malhas adaptativas do domínio Wrench (Talischi et al. (2012) (23)) com $n_0 = 1000$, $R = 0,03$ e $\tilde{v} = 0,4$: (a) sem iteração de Lloyd; e (b) com uma iteração de Lloyd. 44
- 4.14 Topologias ótimas e suas respectivas malhas inicial e final do domínio Michell $R = 0,04$ e $\tilde{v} = 0,4$: (a) malha adaptativa com $n_0 = 2000$ e malha final com 10309 elementos, sem iteração de Lloyd; (b) malha adaptativa com $n_0 = 2000$ e malha final com 10630 elementos, com uma iteração de Lloyd; e (c) mantida constante com 16000 elementos durante todo o processo de otimização topológica. 44
- 4.15 Topologias ótimas e suas respectivas malhas inicial e final do domínio Hook $R = 2,00$ e $\tilde{v} = 0,4$: (a) malha adaptativa com $n_0 = 2000$ e malha final com 15249 elementos, sem iteração de Lloyd; (b) malha adaptativa com $n_0 = 2000$ e malha final com 15147 elementos, com uma iteração de Lloyd; e (c) mantida constante com 16000 elementos durante todo o processo de otimização topológica. 45

Lista de tabelas

- 4.1 Quantidade de elementos e nós em cada passo do processo de adaptatividade referente ao domínio MBB, com $R = 0,04$ e $\tilde{\nu} = 0,5$. 41
- 4.2 Quantidade de elementos e nós em cada passo do processo de adaptatividade referente ao domínio Wrench, com $R = 0,03$ e $\tilde{\nu} = 0,4$. 43
- 4.3 Tempo de processamento (segundos) e quantidade inicial e final de elementos na malha no domínio MBB com $R = 0,04$ e $\tilde{\nu} = 0,5$. 46
- 4.4 Tempo de processamento (segundos) e quantidade inicial e final de elementos na malha no domínio Wrench com $R = 0,03$ e $\tilde{\nu} = 0,4$. 46
- 4.5 Tempo de processamento (segundos) e quantidade inicial e final de elementos na malha no domínio Michell com $R = 0,04$ e $\tilde{\nu} = 0,4$. 47
- 4.6 Tempo de processamento (segundos) e quantidade inicial e final de elementos na malha no domínio Hook com $R = 2,00$ e $\tilde{\nu} = 0,4$. 47

Lista de símbolos

A	Área
ρ	Densidade
ρ_s	Limite inferior de densidade definido pelo usuário
ρ_v	Limite superior de densidade definido pelo usuário
ρ_p	Valor de densidade definido pelo usuário
$\Delta\rho$	Gradiente de fração volumétrica
Ω	Domínio
Ω_S	Subdomínio
$ \Omega $	Área do domínio
e	Elemento
n_0	Quantidade de elementos iniciais da malha
t	Passo de adaptação da malha (iteração)

1

Introdução

Neste capítulo, são apresentadas a importância da otimização topológica, a escolha da utilização de elementos poligonais e a motivação para se implementar uma técnica de autoadaptação de malhas de elementos finitos.

Os problemas de engenharia estão intrinsicamente associados a diversas variáveis e restrições e os projetos estruturais não são uma exceção. Uma estrutura é um sistema capaz de transmitir esforços mecânicos estáticos ou dinâmicos. Para aumentar a eficiência de um projeto estrutural busca-se, em geral, encontrar o menor custo possível, satisfazendo seus estados limites, ou seja, busca-se uma solução “ótima”.

A otimização estrutural é um problema de minimização (ou maximização) de uma função com relação às variáveis de projeto (tamanho, forma e topologia) satisfazendo as equações de estado e as restrições em suas variáveis. Em geral, ela é categorizada em: dimensional, geométrica ou topológica. A otimização dimensional consiste na modificação das dimensões das seções dos elementos; a otimização de forma busca uma definição ótima dos contornos da estrutura; e a otimização topológica consiste na modificação da topologia da estrutura.

No contexto atual de projeto, devido à exigência da qualidade dos resultados e pela crescente escassez de recursos e de tempo, a otimização topológica tem uma importância cada vez maior. Trata-se de um método computacional que permite projetar uma estrutura mecânica no interior de um domínio predeterminado com base em um critério de custo, maximizando a rigidez e minimizando o volume, por exemplo.

Para utilização do método de otimização topológica, técnicas de análise numérica são empregadas. Uma das mais aplicadas na engenharia é o método de elementos finitos (MEF). Uma etapa do processamento do MEF é a discretização do domínio do problema, ou seja, a geração da malha de elementos finitos na qual será buscada a solução.

As malhas tradicionais como triangulares e quadrangulares geralmente apresentam problemas como *checkerboard* e *one-node connections* (ver Talischi et al. (2010) (1)). Neste trabalho será utilizada uma malha poligonal baseada no diagrama de Voronoi. Sua característica principal é uma estrutura formada

por polígonos convexos arbitrários. Esta estruturação permite reduzir e até mesmo eliminar os problemas encontrados nas malhas tradicionais.

O presente trabalho tem como objetivo principal apresentar uma metodologia para se obter a topologia ótima com alta resolução e relativamente baixo custo computacional de uma estrutura bidimensional. Alcançar resultados em alta resolução permite uma visualização mais precisa da estrutura e estende sua aplicação a diversas possibilidades desde a indústria civil até a área médica, ver Lotti et al. (2006) (2), por exemplo. Como a otimização topológica busca formas de aplicar material apenas onde é necessário, a estrutura final desenvolvida terá uma melhor utilização da matéria prima, diminuindo seu custo de produção, além de apresentar uma maior rigidez e um menor peso.

Tendo em vista esse objetivo, foi implementada uma estratégia autoadaptativa na qual regiões compostas essencialmente por vazios ou sólidos são desrefinadas e regiões de transição entre vazios e sólidos (contornos) são refinadas. Desse modo, foi possível reduzir o custo computacional e a memória utilizada.

Os demais capítulos deste trabalho estão distribuídos da seguinte forma:

O capítulo 2 apresenta uma visão geral sobre: otimização topológica, método de elementos finitos e malhas poligonais, incluindo uma breve descrição dos problemas numéricos encontrados em malhas tradicionais. O capítulo 3 apresenta a proposta de uma nova estratégia computacional para o refinamento adaptativo local e sua implementação, utilizando elementos finitos poligonais. O capítulo 4 apresenta os resultados de quatro exemplos de topologias obtidas pelo código implementado e uma comparação com resultados que utilizam malhas super-refinadas e mantidas constantes durante todo o processo de otimização. São apresentadas aqui soluções envolvendo ou não a aplicação de iterações de Lloyd (ver Talischi et al. (2010) (1)) na adaptação da malha de elementos finitos. Finalmente, as principais conclusões e sugestões para trabalhos futuros são apresentadas no capítulo 5.

2 Otimização Topológica

A otimização topológica é um tipo de otimização estrutural que tem por objetivo determinar a distribuição ótima de material no domínio do projeto. Para tanto, é minimizada uma função objetivo dado um conjunto de cargas e condições de contorno. Além da topológica, existem outros tipos de otimização como otimização dimensional ou paramétrica, que apresenta uma forma fixa definida e procura variar as dimensões da estrutura (áreas das seções, por exemplo), e otimização de forma ou geométrica, que tem por objetivo definir as curvas de contorno para minimizar uma dada função de desempenho. Comparada aos outros tipos de otimização estrutural, ver Fig. 2.1, a otimização topológica permite a inserção de áreas vazadas (furos), o que confere à estrutura uma maior flexibilidade e liberdade na topologia final.

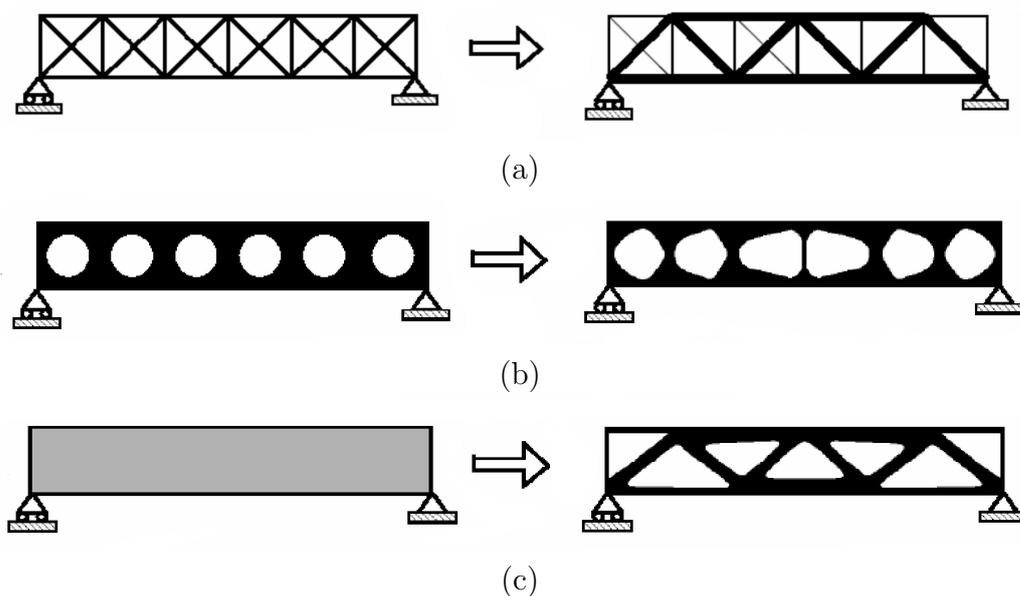


Figura 2.1: (a) Otimização paramétrica ou dimensional. (b) Otimização de forma ou geométrica. (c) Otimização topológica. Fonte: Bendsøe et al. (2002) (3).

Para efetuar o processo de otimização topológica, deve-se inicialmente selecionar o domínio desejado e, em seguida, distribuir o material por todo domínio da estrutura. Depois, através da aplicação de um algoritmo de otimização, caso haja convergência, obtém-se a topologia ótima. Uma vez

que a distribuição ótima pode não ter um nível de refinamento desejado para fabricação, há uma etapa muito importante de verificação da topologia obtida, ver Fig. 2.2.

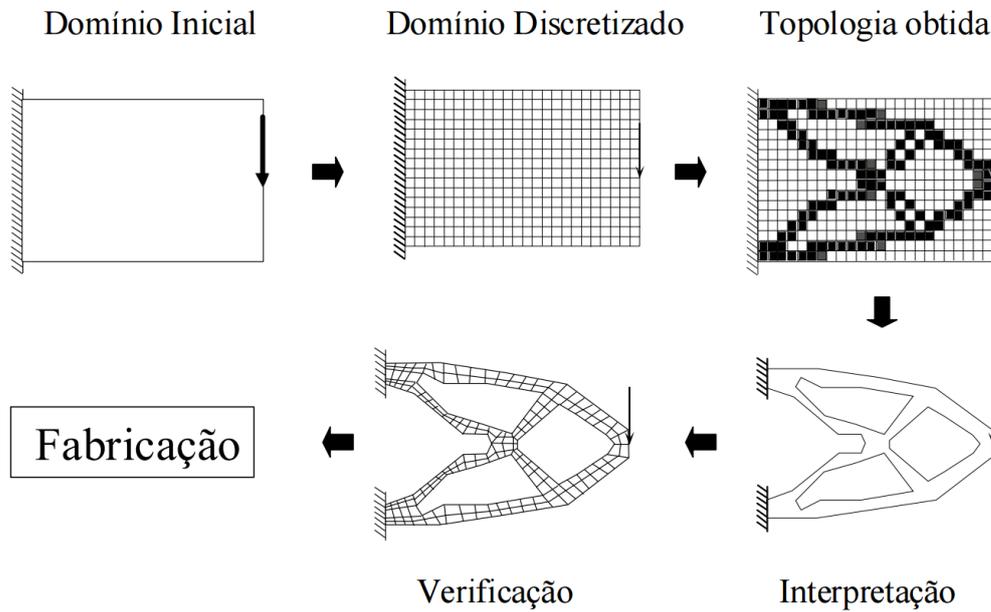


Figura 2.2: Procedimento típico de projeto estrutural por otimização topológica. Fonte: Silva (2001) (4).

A formulação matemática do problema de otimização topológica consiste em encontrar a distribuição de material ρ para todo ponto \mathbf{x} do domínio Ω , resultando num subdomínio Ω_S que minimiza a função objetivo c , sujeita a uma restrição de volume da estrutura V_S , ou seja:

$$\begin{cases} \min_{\rho(\mathbf{x})} : c(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\rho(\mathbf{x}))) = \mathbf{f}^t \mathbf{u}(\rho(\mathbf{x})) \\ \text{s.t.} : V(\rho(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV \leq V_s \end{cases}$$

com : $\mathbf{K}(\rho(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\rho(\mathbf{x})) = \mathbf{f}$ (2-1)

$$\text{onde : } \rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{se vazio (ausência de material)} \\ 1 & \text{se cheio (total presença de material)} \end{cases}$$

onde c representa a flexibilidade da estrutura (em inglês, *compliance*); \mathbf{K} , a matriz de rigidez global da estrutura; \mathbf{f} , o vetor de forças externas aplicadas e \mathbf{u} , o campo de deslocamento.

2.1 Métodos de Elementos Finitos

O Método de Elementos Finitos é atualmente uma das formas mais difundidas de resolução numérica de problemas modelados por meio de equações diferenciais parciais como, por exemplo, análise de estruturas sólidas e escoamento de fluidos. Esse método consiste na discretização de um domínio contínuo em subdomínios menores, conhecidos como elementos. Estes elementos são conectados por nós e, mantendo as características do domínio original, permitem que modelos matemáticos solucionem as equações diferenciais descritas pelas propriedades desses elementos. Devido à sua natureza numérica, uma quantidade significativa de dados é armazenada durante o processo de execução, assim como o tempo necessário para solução cresce com o tamanho da malha a ser analisada. Além desses problemas, a malha exerce um papel fundamental no resultado final da solução obtida.

As malhas podem ser classificadas como estruturadas e não-estruturadas, ver Fig. 2.3 e 2.4. As estruturadas são mais simples de serem geradas, porém possuem menor capacidade de adaptação à geometria do domínio. Para se obter uma melhor definição dos contornos utilizando malhas estruturadas, é necessária a utilização de elementos menores, aumentando a quantidade de elementos para preenchimento do domínio. As malhas não-estruturadas, por outro lado, possuem alta capacidade de adaptação aos contornos e uma geração de malha mais complexa. Uma forma de se reduzir a complexidade da geração de malhas não-estruturadas, é efetuar a decomposição em elementos triangulares e quadrangulares. No entanto, elas se tornam vulneráveis a instabilidades numéricas quando usadas na otimização topológica em conjunto com métodos de densidade (ver Saxena (2008) (5), Talischi et al. (2009) (6) e Talischi et al. (2010) (1)).

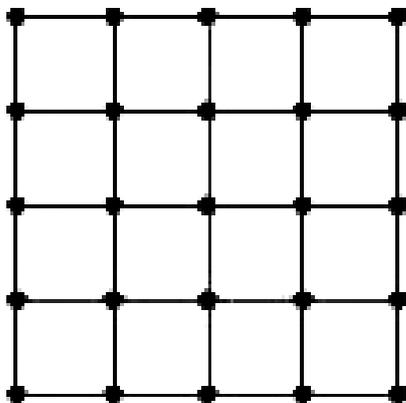


Figura 2.3: Malha estruturada.
Fonte: Batista (2005) (7).

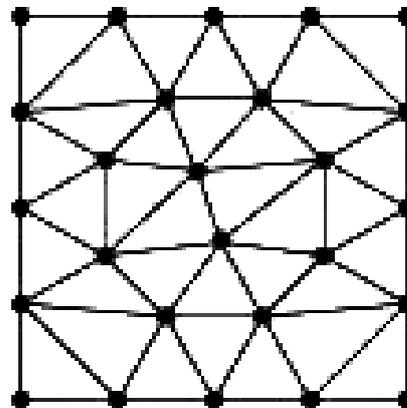


Figura 2.4: Malha não-estruturada.
Fonte: Batista (2005) (7).

Os aspectos numéricos encontrados na otimização topológica são:

- O tabuleiro de xadrez (em inglês, *checkerboard*) é uma instabilidade numérica que ocorre no processo de otimização topológica formando regiões com material (ilustrado com elementos de cor escura) e sem material (ilustrado com elementos de cor branca) na forma de um tabuleiro de xadrez, conforme mostrado na Fig. 2.5. Este problema ocorre com elementos de baixa ordem associados com métodos de densidade e pode ser resolvido com a utilização de elementos de alta ordem ou de métodos de regularização.

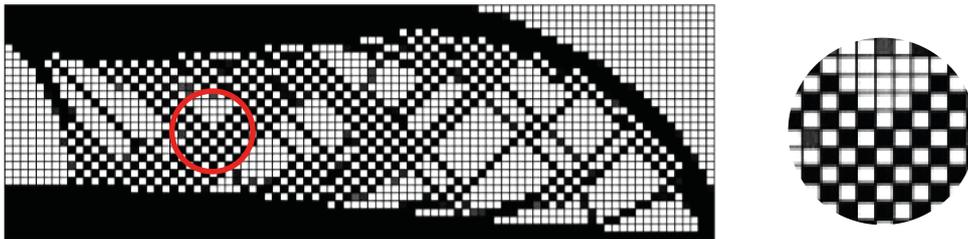


Figura 2.5: Exemplo de *Checkerboard*. Fonte: Talischi et al. (2008) (8).

- Conexão nó a nó (em inglês, *one-node connection*) é um outro problema comum gerado por meio de instabilidades numéricas nas malhas de elementos finitos convencionais. Alguns dos elementos presentes na solução terão apenas um nó em comum, ver Fig. 2.6, o que invalida utilização prática dos resultados obtidos.

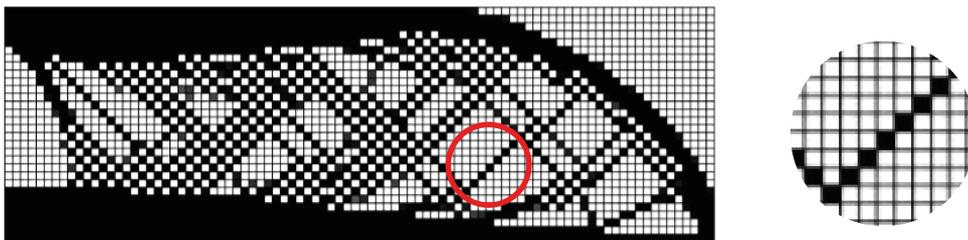


Figura 2.6: Exemplo de *One-node Connection*. Fonte: Talischi et al. (2008) (8).

- A dependência da malha é um fato frequentemente observado na solução de problemas que utilizam o método dos elementos finitos (ver Silva (2001) (4)). Quanto mais refinada a malha, maior será a resolução da solução, e quanto menos refinada, menos detalhes serão encontrados na topologia final. Entretanto, da mesma forma que é esperado uma melhoria da resolução, novos membros da estrutura também podem ser criados, como mostrado na Fig. 2.8.

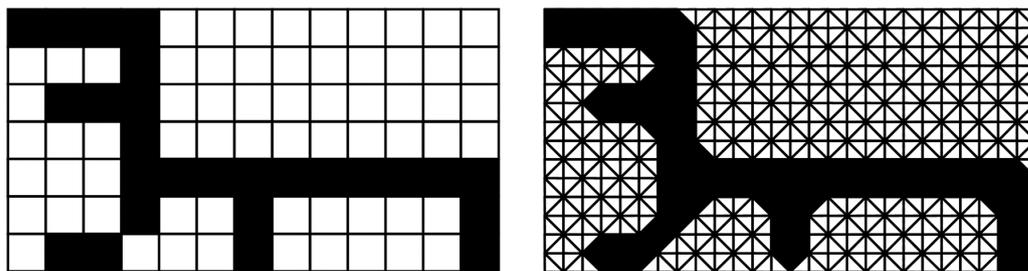


Figura 2.7: Exemplo de diferença de resolução por dependência de malha. Fonte: Zhou et al. (2012) (9).



(a)



(b)



(c)

Figura 2.8: Exemplo de criação de novos membros para resultados de um mesmo problema de otimização com alteração da malha: (a) malha com 1200 elementos, (b) malha com 1875 elementos e (c) malha com 3000 elementos. Fonte: Kiyono (2008) (10).

Com o objetivo de reduzir os problemas apresentados acima, neste trabalho foram utilizadas malhas de elementos finitos poligonais associadas com a técnica de penalização SIMP (que será apresentada na próxima seção). As malhas poligonais por construção não permitem o aparecimento de conexões nó a nó nem instabilidades do tabuleiro, enquanto o modelo de material SIMP reduz o problema da dependência da malha.

2.2

Malhas Poligonais

Este trabalho tem como base o código `PolyMesher` para geração de malha de elementos finitos poligonais (Talischi et al. (2012) (11)). A geração é construída a partir de um conjunto de sementes que tecerá uma malha determinada pelo diagrama de Voronoi. O diagrama de Voronoi é um grafo dual da triangulação de Delaunay, ver Hjelle e Dæhlen. (2006) (12).

Dado um conjunto de pontos P , conhecido como sementes, a triangulação de Delaunay $DT(P)$ é dada quando nenhum ponto $x \in P$ está no interior de uma circunferência formada por qualquer triângulo pertencente a $DT(P)$, conforme mostrado na Fig. 2.9. Seu grafo dual é o diagrama de Voronoi, que particiona o plano ao conectar os centros das circunferências da triangulação de Delaunay, tal como ilustrado na Fig. 2.10.

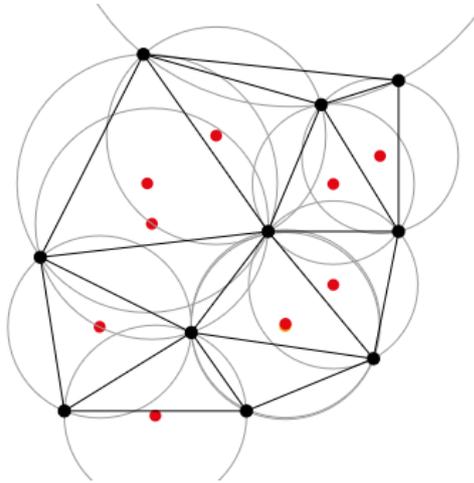


Figura 2.9: Representação das linhas da triangulação de Delaunay em preto. Fonte: Wikipedia (2016) (13).

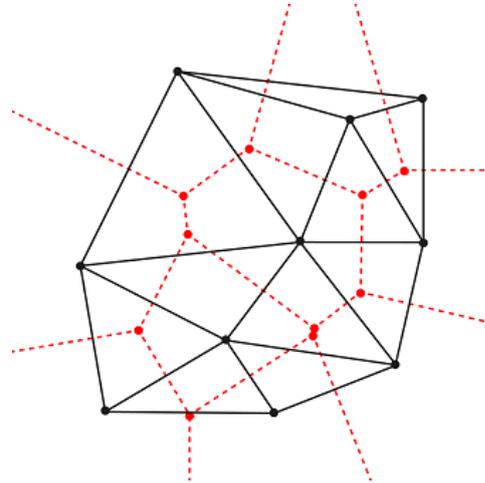


Figura 2.10: Representação do diagrama de Voronoi tracejado em vermelho. Fonte: Wikipedia (2016) (13), adaptado pelo autor.

O diagrama de Voronoi tece um grafo no plano ou no espaço com a seguinte propriedade: se a distância entre um ponto x e uma semente p é menor que a distância entre x e todos os elementos de $P - \{p\}$, então x pertence a célula da semente p (ver Fig. 2.11). Dessa forma, cada semente possui uma célula associada e estará em seu interior. Assim, o número de células é igual ao número de sementes. Também, é possível identificar que, para um vértice da tesselação possuir 4 arestas conectadas, é necessário que dentro do conjunto de sementes haja 4 pontos circunscritíveis e que, no interior dessa circunferência circunscrita, não exista nenhuma outra semente. Esse fato reduz e até elimina os problemas do *checkerboard* e *one-node connection* visto que dois elementos da malha estarão sempre conectados por mais de um nó.

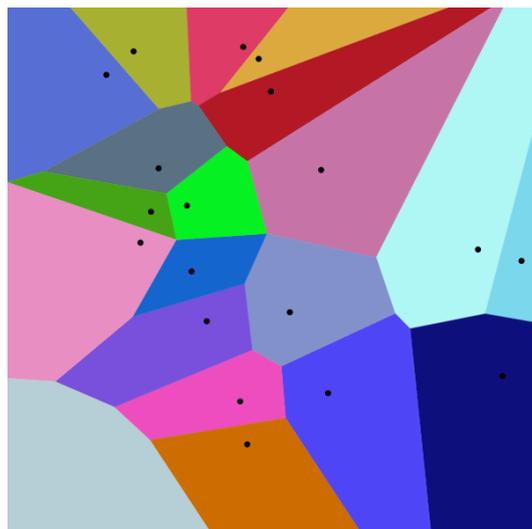


Figura 2.11: Representação das células do diagrama de Voronoi formado por 20 sementes. Fonte: Wikipedia (2016) (14).

O uso de elementos poligonais numa malha não-estruturada conta ainda com a adicional vantagem de possuir alta capacidade de adaptação aos contornos das soluções e dos domínios.

2.3 Refinamento de Malha

O refinamento de malha é amplamente utilizado na literatura para permitir melhores soluções dos problemas numéricos sem que haja um elevado aumento no custo computacional e na memória utilizada. Visando obter uma melhor resolução, critérios de refinamento da malha foram definidos para aumentar a quantidade de elementos nos contornos.

Por sua vez, foram também adotados critérios de desrefinamento com o intuito de limitar o aumento excessivo de nós e de elementos. Esse procedimento permite uma redução do custo computacional para armazenamento de dados e tempo de processamento. Existem outros métodos que combinam refinamento de malha com otimização de *layout* (ver, por exemplo, Wang et al. (2013) (15), Wang (2002) (16) e Ramm et al (1998) (17)).

A solução do problema de otimização topológica desejada é uma distribuição binária de material, ou seja, 0 (ausência de material) ou 1 (total presença de material), porém essa implementação requer o uso de algoritmos de otimização discreta, tornando a abordagem numericamente instável. A técnica SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) de Bendsøe et al. (1995) (18) e Bendsøe et al. (1999) (19) é definida por uma função paramétrica associada a densidade do material. Ela auxilia a determinação de uma solução discreta, evitando a escala de cinza, ilustrada na Fig. 2.12, porém transforma a função

objetivo. Essa alteração pode permitir que um mínimo alcançado seja local e não global (Cardoso (2000) (20)). De modo a evitar que um mínimo local seja determinado, é utilizado o método da continuação. Esse método consiste em executar diversas vezes o procedimento de otimização, mesmo obtendo resultados com densidades intermediárias de material, e a cada passo de execução, aumentar o expoente de penalização p de modo a minimizar as densidades intermediárias.



Figura 2.12: Representação da escala de cinza.

A formulação matemática do problema de otimização topológica utilizando a técnica SIMP consiste em encontrar a distribuição de material ρ para todo ponto x do domínio Ω , resultando num subdomínio Ω_S que minimiza a função objetivo c , sujeita a uma restrição de volume da estrutura V_S e a penalização do tensor de material \mathbf{C} por um fator exponencial p , ou seja, $\mathbf{C} = [\rho(\mathbf{x})]^p \mathbf{C}_0$. O problema pode ser, então, escrito como:

$$\begin{cases} \min_{\rho(\mathbf{x})} : c(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\rho(\mathbf{x}))) = \mathbf{f}^t \mathbf{u}(\rho(\mathbf{x})) \\ \text{s.t.} : V(\rho(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV \leq V_s \end{cases} \quad (2-2)$$

$$\text{com : } \mathbf{K}(\rho(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\rho(\mathbf{x})) = \mathbf{f}$$

$$\text{onde : } 0 \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1$$

onde c representa a flexibilidade da estrutura (em inglês, *compliance*); \mathbf{K} , a matriz de rigidez global da estrutura; \mathbf{f} , o vetor de forças externas aplicadas, \mathbf{u} , o campo de deslocamento, e \mathbf{C}_0 , o tensor de material para $\rho = 1$.

3

Implementação do Refinamento Poligonal Autoadaptativo

Neste capítulo, é descrita em detalhes a implementação numérica da abordagem adaptativa proposta. Utilizando uma malha inicial de elementos finitos poligonais gerada por um conjunto de sementes de Voronoi, são inseridas e removidas sementes a cada passo de adaptatividade de forma a aprimorar a qualidade dos contornos internos e externos e reduzir o custo computacional envolvido no processo de otimização. A cada etapa de otimização, o método de penalização SIMP é aplicado de forma a evitar uma convergência prematura nas iterações de otimização através da penalização de densidades intermediárias pelo parâmetro $p > 1$. Desse modo, são intercalados um processo de otimização com um processo de adaptação da malha.

3.1

Processo Adaptativo

A Fig. 3.1 apresenta um algoritmo básico do processo de otimização topológica. Após a definição da região escolhida pelo usuário, é estabelecida uma malha inicial com uma distribuição de material. Iterativamente, essa distribuição evolui até encontrar a solução topológica ótima.

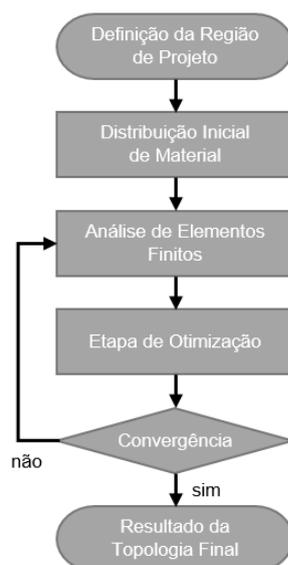


Figura 3.1: Fluxograma básico de otimização topológica.

Nesse trabalho, o processo adaptativo é efetuado na malha de elementos finitos, transformando-a por meio da adição e remoção de sementes de Voronoi. A adição de sementes permite um melhor refinamento nas regiões de contorno, enquanto que a remoção de sementes específicas (desrefinamento) reduz o custo computacional na análise de elementos finitos. O fluxo desse processo é esquematizado na Fig. 3.2.

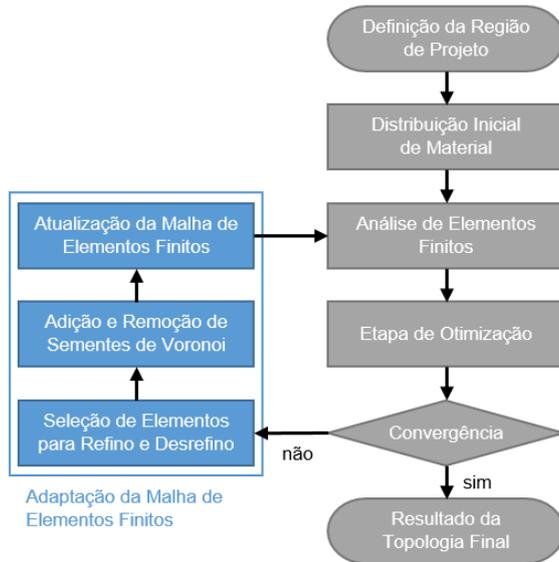


Figura 3.2: Fluxograma de otimização topológica considerando o processo de adaptação de malha.

A seguir, serão descritas as três etapas da adaptatividade da malha de elementos finitos: a seleção de elementos para refino e desrefino, a adição e a remoção de sementes de Voronoi e a atualização da malha.

3.1.1

Seleção de Elementos para Refino e Desrefino

Para a descrição do processo de refinamento e desrefinamento da malha, as seguintes definições são necessárias e estão representadas graficamente na Fig. 3.3:

- Um elemento e_i é dito sólido caso sua fração volumétrica $\rho_{e_i} \in [\rho_s, 1]$, onde $\rho_s > 0,5$ é um limite inferior de densidade definido pelo usuário;
- Um elemento e_i é dito vazio caso sua fração volumétrica $\rho_{e_i} \in [0, \rho_v]$, onde $\rho_v < 0,5$ é um limite superior de densidade definido pelo usuário;
- Um elemento e_i é dito preenchido caso sua fração volumétrica $\rho_{e_i} \in [\rho_p, 1]$, onde $\rho_p \in [\rho_v, \rho_s]$ é um valor de densidade definido pelo usuário;
- Para um elemento e_i , são ditos vizinhos todos os elementos da malha $e_{i,1}, e_{i,2}, \dots, e_{i,m}$ que possuem uma aresta em comum com e_i .

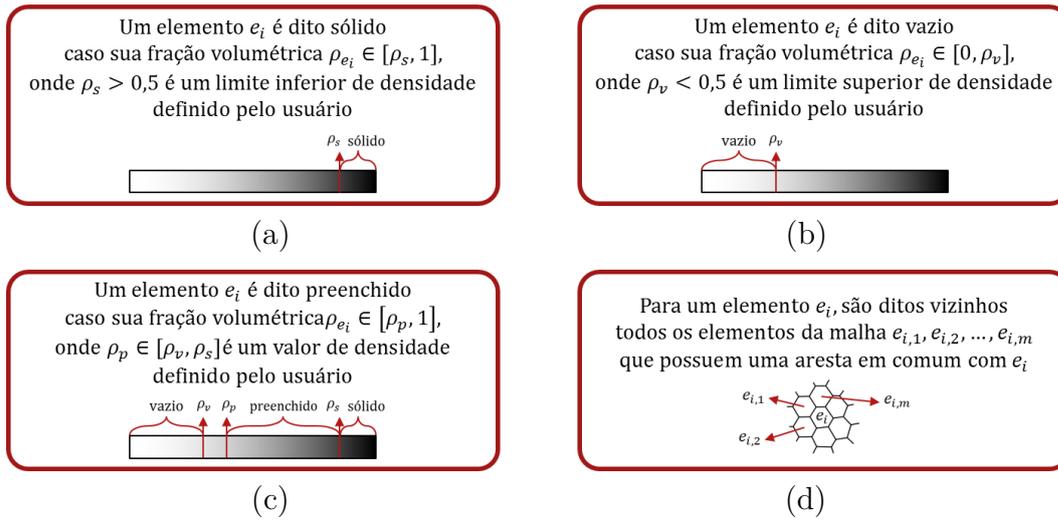


Figura 3.3: Definições de (a) elemento sólido; (b) elemento vazio; (c) elemento preenchido; e (d) elementos vizinhos.

Os critérios de seleção dos elementos da malha para o processamento de refinamento/desrefinamento são aplicados de tal maneira que nenhum elemento pode ser marcado por um critério caso o mesmo já tenha sido marcado por um critério anterior.

3.1.1.1

(I) Controle do Processo Adaptativo

O primeiro critério do processo adaptativo limita o refinamento e desrefinamento da malha pelo tamanho das células, não permitindo que um elemento e_i com área A_{e_i} seja refinado caso $A_{e_i} < A_{min}$ nem desrefinado caso $A_{e_i} > A_{max}$, ou seja, A_{min} e A_{max} não definem respectivamente a menor e maior área que um elemento pode ter na malha, e sim os parâmetros a partir dos quais os elementos não serão mais candidatos ao refinamento ou desrefinamento. O objetivo desse critério é impedir um refinamento descontrolado em determinadas regiões do domínio.

3.1.1.2

(II) Gradiente de Fração Volumétrica

O segundo critério tem por finalidade refinar a malha nas regiões com certa variação ou gradiente de fração volumétrica. Caso dois elementos vizinhos e_i e e_j satisfaçam $|\rho_{e_i} - \rho_{e_j}| > \Delta\rho$, isto é, se o gradiente de fração volumétrica entre e_i e e_j for maior que um valor $\Delta\rho$, pré-definido, ambos são marcados para refinamento.

A Fig. 3.4 mostra um exemplo de dois elementos marcados para refinamento e a Fig. 3.5 apresenta todos os elementos que foram marcados para

refinamento.

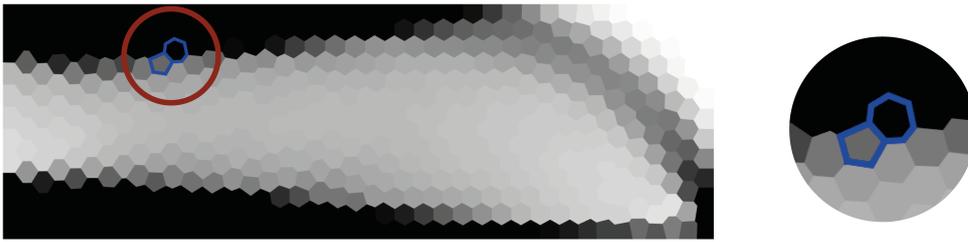


Figura 3.4: Os elementos com contorno azul possuem $\rho = 1$ e $\rho = 0,438$. Considerando $\Delta\rho = 0,333$, ambos são marcados para refinamento.

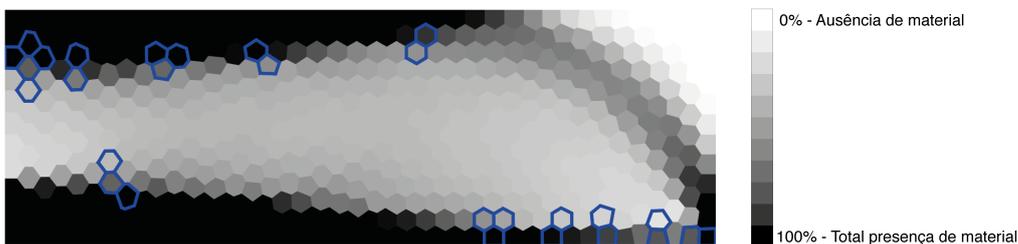


Figura 3.5: Todos os elementos com contorno azul estão marcados para refinamento, considerando $\Delta\rho = 0,333$.

3.1.1.3

(III) Desrefinamento de Elemento Central

O terceiro critério é de desrefinamento, no qual um elemento sólido envolto por elementos sólidos é marcado para desrefinamento. O mesmo fundamento vale para um elemento vazio que, cercado de elementos vazios, é marcado para desrefinamento.

Quando um elemento e_i e seus vizinhos são todos sólidos ou todos vazios, apenas e_i é marcado para desrefinamento. Então, se o elemento e_i é sólido e seus elementos vizinhos $e_{i,1}, e_{i,2}, \dots, e_{i,m}$ também o são, o elemento e_i é marcado para desrefinamento ou, ainda, se o elemento e_j é vazio e seus elementos vizinhos $e_{j,1}, e_{j,2}, \dots, e_{j,n}$ também o são, o elemento e_j é marcado para desrefinamento.

De forma a impedir o desrefinamento de um conjunto de elementos vizinhos na mesma iteração e, conseqüentemente, criar um elemento muito maior que os demais, não é permitido desrefinar um elemento caso um de seus vizinhos já esteja marcado para desrefinamento.

A Fig. 3.6 mostra um exemplo de um elemento sólido marcado para desrefinamento, enquanto a Fig. 3.7 apresenta todos os elementos sólidos que foram marcados para desrefinamento.

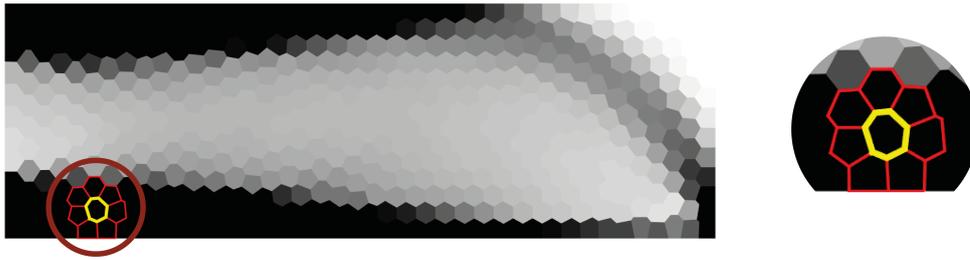


Figura 3.6: O elemento central com contorno amarelo possui $\rho = 1$ e seus vizinhos com contorno vermelho possuem $\rho = 1$. Considerando $\rho_s = 0,950^1$, o elemento central com contorno amarelo é marcado para desrefinamento.

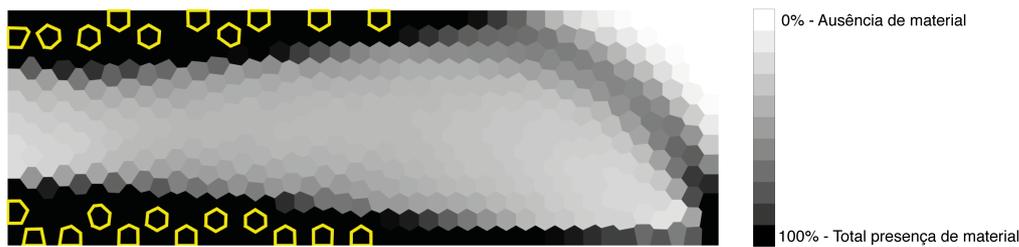


Figura 3.7: Todos os elementos com contorno amarelo estão marcados para desrefinamento, considerando $\rho_s = 0,950$.

A Fig. 3.8 mostra um exemplo de um elemento vazio marcado para desrefinamento, enquanto a Fig. 3.9 apresenta todos os elementos vazios que foram marcados para desrefinamento.

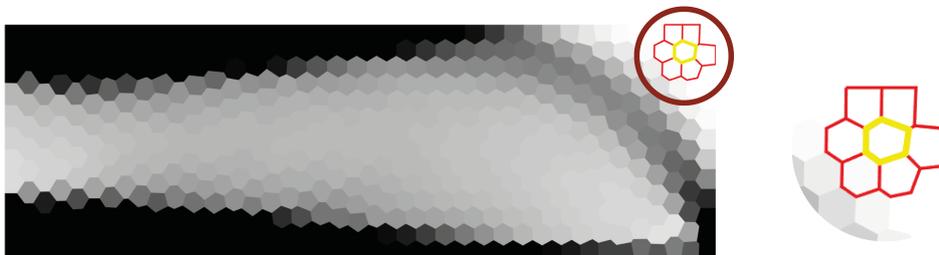


Figura 3.8: O elemento central com contorno amarelo possui $\rho = 0$ e seus vizinhos com contorno vermelho possuem $\rho = 0$ ou $\rho = 0,004$ ou $\rho = 0,011$. Considerando $\rho_v = 0,050^2$, o elemento central com contorno amarelo é marcado para desrefinamento.

3.1.1.4

(IV) Refinamento de Elemento Preenchido

O quarto e último critério tem por objetivo refinar a malha onde há fração de material superior ao valor definido pelo usuário e que ainda não tenha sido marcado para desrefinamento, permitindo um refinamento da malha onde

¹ ρ_s é um limite inferior de densidade definido pelo usuário.

² ρ_v é um limite superior de densidade definido pelo usuário.

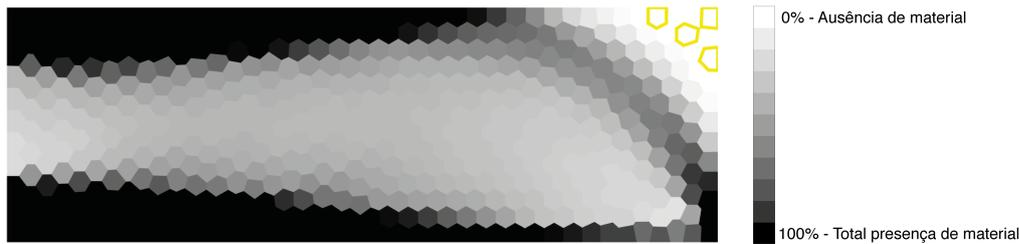


Figura 3.9: Todos os elementos com contorno amarelo estão marcados para desrefinamento, considerando $\rho_v = 0,050$.

exista algum elemento com densidade intermediária que ainda não tenha sido definido como vazio ou cheio. Ou seja, caso o elemento e_i seja preenchido e não tenha sido marcado para desrefinamento, ele é então marcado para refinamento.

A Fig. 3.10 mostra um exemplo de um elemento marcado para refinamento, enquanto a Fig. 3.11 apresenta todos os elementos que foram marcados para refinamento.

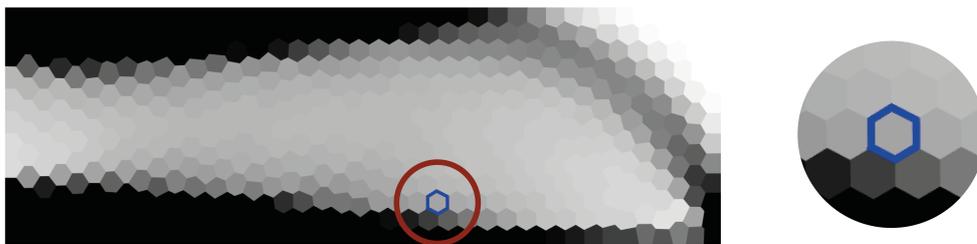


Figura 3.10: O elemento com contorno azul possui $\rho = 0,516$. Para $\rho_p = 0,333^3$, o elemento com contorno azul é marcado para refinamento.

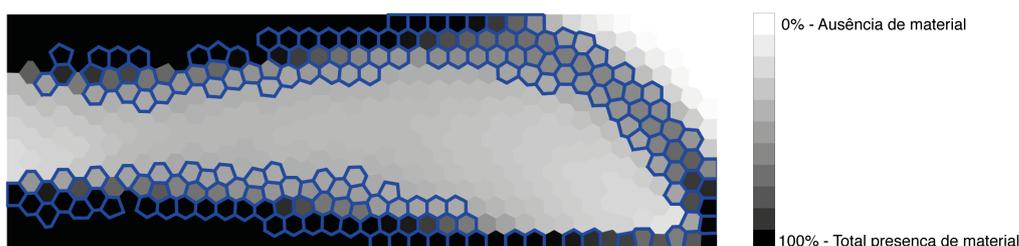


Figura 3.11: Todos os elementos com contorno azul estão marcados para refinamento para $\rho_p = 0,333$.

3.1.2

Adição e Remoção de Sementes de Voronoi

Para a geração da malha poligonal utilizada neste trabalho, é necessário um conjunto de pontos, chamados de sementes e distribuídos inicialmente no

³ ρ_p é um valor de densidade definido pelo usuário.

interior do domínio de interesse, a partir das quais será construído o diagrama de Voronoi, conforme ilustrado nas Fig. 3.12 e Fig. 3.13.

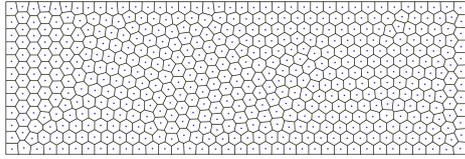


Figura 3.12: Malha poligonal em um domínio retangular e suas sementes de Voronoi representadas pelos pontos azuis.

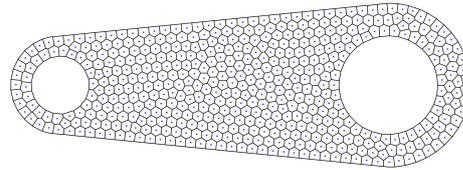


Figura 3.13: Malha poligonal em um domínio com contornos curvilíneos e suas sementes de Voronoi representadas pelos pontos azuis.

Após a seleção dos elementos para refinamento e desrefinamento da primeira etapa, a adição e remoção de sementes acontecem da seguinte forma:

- Todos os nós (vértices) que compõem um elemento marcado para refinamento são adicionados como novas sementes (ver Fig. 3.14);

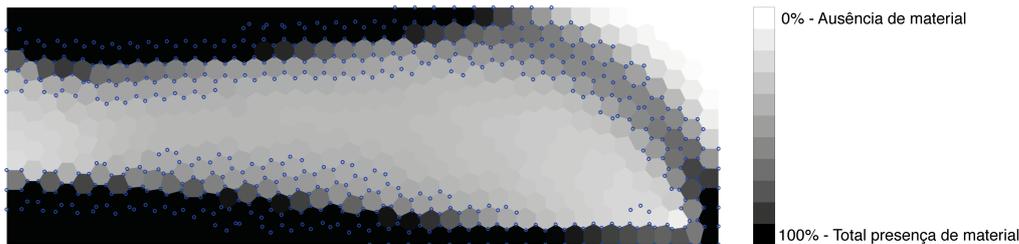


Figura 3.14: Sementes a serem adicionadas em um passo da malha poligonal.

- Todas as sementes geradoras de um elemento marcado para desrefinamento são removidas, ver Fig. 3.15.

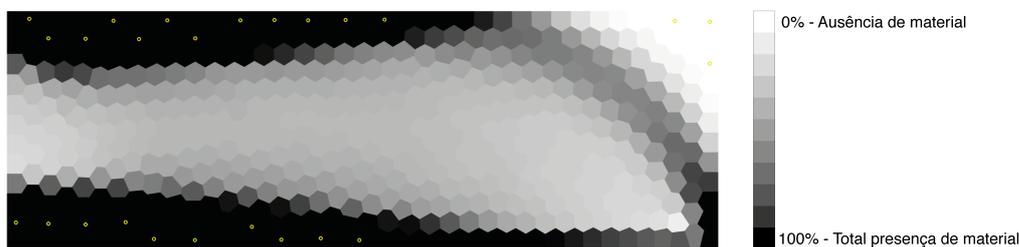


Figura 3.15: Sementes a serem removidas em um passo da malha poligonal.

Como explicado no Capítulo 2, devido ao modo de construção do diagrama de Voronoi, cada semente se encontra no interior do elemento gerado por ela, logo, a quantidade de sementes e de sub-regiões no diagrama de Voronoi é igual. Dessa forma, o critério de refinamento cria uma nova sub-região a

cada nó adicionado como semente, reduzindo a área dos elementos vizinhos e permitindo um refinamento da malha. Por outro lado, o critério de desrefinamento permite que, ao se remover uma semente, os elementos vizinhos sejam forçados a preencher aquela sub-região do elemento central.

A inserção das sementes para geração da malha necessita manter as propriedades de distribuição de material. Essa transferência de atributo de uma malha para outra é efetuada utilizando a seguinte expressão:

$$\rho_\epsilon = \frac{\sum_{k=1}^m \rho_k \times A_k}{\sum_{k=1}^m A_k} \quad (3-1)$$

onde ρ_ϵ é a densidade do elemento a ser criado a partir do nó (vértice) adicionado por refinamento pertencente aos elementos e_1, \dots, e_m , ρ_k é a densidade do elemento e_k e A_k é a área do elemento e_k .

A transferência de atributo pode ser vista nas Fig. 3.16 e 3.17 para um domínio retangular e nas Fig. 3.18 e 3.19 para um domínio com contornos curvilíneos.



Figura 3.16: Domínio retangular com 1000 elementos iniciais no terceiro passo de penalização **antes** da adaptação da malha.



Figura 3.17: Domínio retangular com 1000 elementos iniciais no terceiro passo de penalização **após** a adaptação da malha.

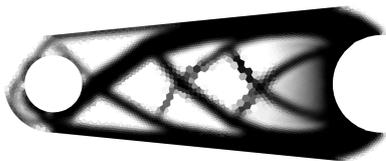


Figura 3.18: Domínio com contornos curvilíneos com 1000 elementos iniciais no quarto passo de penalização **antes** da adaptação da malha.

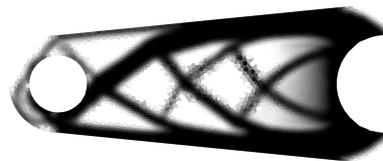


Figura 3.19: Domínio com contornos curvilíneos com 1000 elementos iniciais no quarto passo de penalização **após** a adaptação da malha.

3.1.3

Atualização da Malha de Elementos Finitos

A geração da malha poligonal, apesar de possuir uma alta capacidade de adaptação ao domínio definido pelo usuário, possui a desvantagem do custo

computacional em sua criação. De forma a definir melhor os contornos da região, é necessário um espelhamento das sementes internas pelo contorno do domínio, gerando sementes externas que fazem parte do conjunto de sementes de Voronoi para criação da malha poligonal, conforme ilustrado na Fig. 3.20. Desta forma, uma aresta tangente ao domínio é construída entre uma semente, interna ao domínio, e sua semente refletida, externa ao domínio.

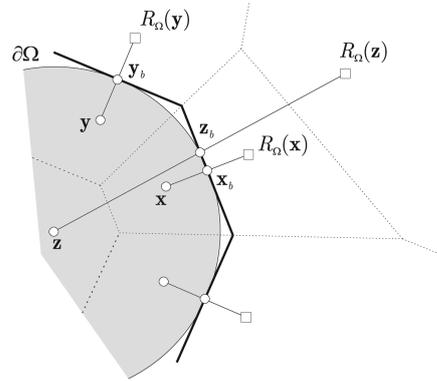


Figura 3.20: A reflexão de uma semente do interior do domínio Ω por meio do seu contorno $\partial\Omega$ gera sementes externas a Ω que, na construção do diagrama de Voronoi, traçam arestas tangentes definindo o contorno do domínio. Nota-se que sementes mais internas, como z , não precisam ser refletidas, pois não influenciam no contorno. Fonte: Talischi et al. (2012) (11).

Na Fig. 3.21, é possível verificar que para nós próximos aos vértices é necessária a reflexão em todos os contornos que definem o vértice.

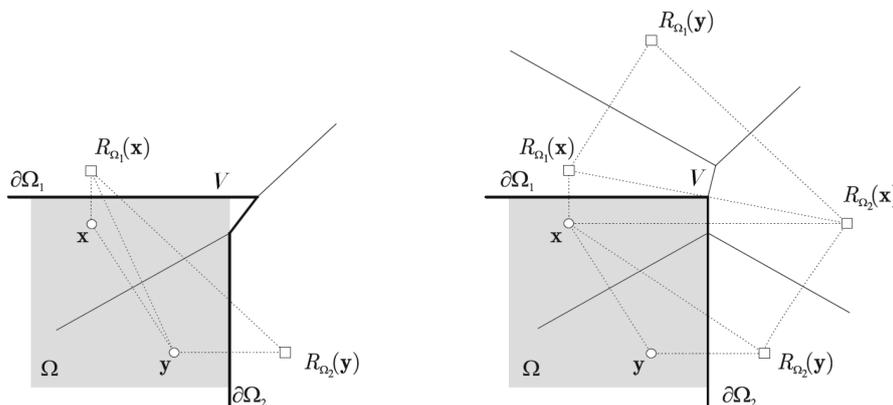


Figura 3.21: Para se obter o vértice (V) do domínio Ω , as sementes x e y não podem ser refletidas apenas no segmento do contorno mais próximo, mas devem ser refletidas em ambos os segmentos do contorno do domínio. Fonte: Talischi et al. (2012) (11), adaptado pelo autor.

Para se minimizar o custo computacional, deve-se reduzir a quantidade de reflexões de sementes de uma malha. Para isso, é desenhada uma banda paralela aos contornos do domínio onde apenas os elementos localizados no

interior dessa banda são refletidos, como mostra a Fig. 3.22. Porém, como o algoritmo gera uma malha para cada iteração de adaptação da malha, é necessário verificar o tamanho da banda para cada iteração.

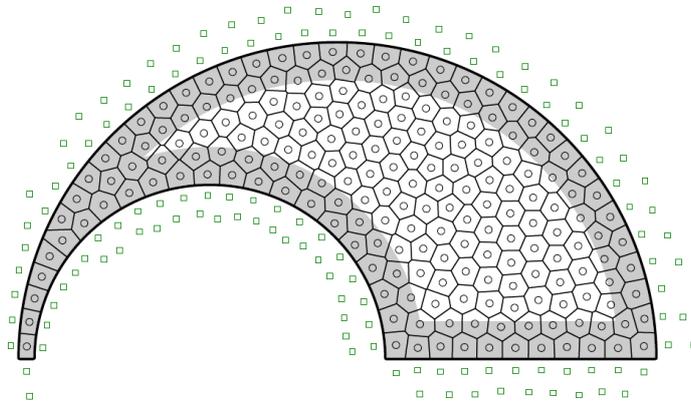


Figura 3.22: A banda (faixa cinza) determina quais elementos serão refletidos. Fonte: Talischi et al. (2012) (11).

Uma semente s pertencente ao domínio Ω é refletida caso sua distância a um contorno do domínio Ω_i seja menor que um valor α . Como, a cada adaptação da malha (iteração t), ocorre uma variação do tamanho dos elementos, α varia com a área média inicial dos elementos $|\Omega|/n_0$, a iteração t da adaptação da malha e a maior área A_{max} para que um elemento não seja mais candidato ao desrefinamento, onde n_0 é a quantidade de elementos iniciais da malha (antes da adaptação) e Ω é o domínio. Dessa forma, a seguinte expressão deve ser satisfeita:

$$|d_{\Omega_i}(s)| < \alpha \left(\frac{|\Omega|}{n_0}, A_{max}, t \right) \quad (3-2)$$

Considerando α como sendo uma distância proporcional ao comprimento máximo do elemento naquela iteração da adaptação da malha, pode-se escrever:

$$\alpha \left(\frac{|\Omega|}{n_0}, A_{max}, t \right) = c \left[\min \left(A_{max}, 2^t \times \frac{|\Omega|}{n_0} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3-3)$$

onde, c é uma constante e $|\Omega|$ é a área do domínio Ω . Recomenda-se $c \geq 1$ e, neste trabalho, foi utilizado $c = 1,5$.

3.2 Otimização Topológica

O procedimento de refinamento adaptativo da malha, implementado neste trabalho, é realizado em cada iteração da estratégia de continuação,

comumente aplicada ao fator de penalidade na otimização topológica. Foi considerada uma variação de 1 a 3, com 7 incrementos de 0,333 no fator de penalidade (outros fatores de penalização podem ser vistos em Labanda et al. (2015) (21)).

Foi implementada uma alternativa utilizando o algoritmo de Lloyd (ver Talischi et al. (2010) (1)) ao remover sementes para desrefinamento. Esse algoritmo troca uma semente de um elemento da malha pelo seu centroide e reconstrói o diagrama. De forma a manter a estrutura da malha, foi aplicada apenas uma iteração de Lloyd nos elementos vizinhos aos elementos removidos por desrefinamento, de forma a evitar elementos muito irregulares, como mostram as Fig. 3.23 e 3.24.

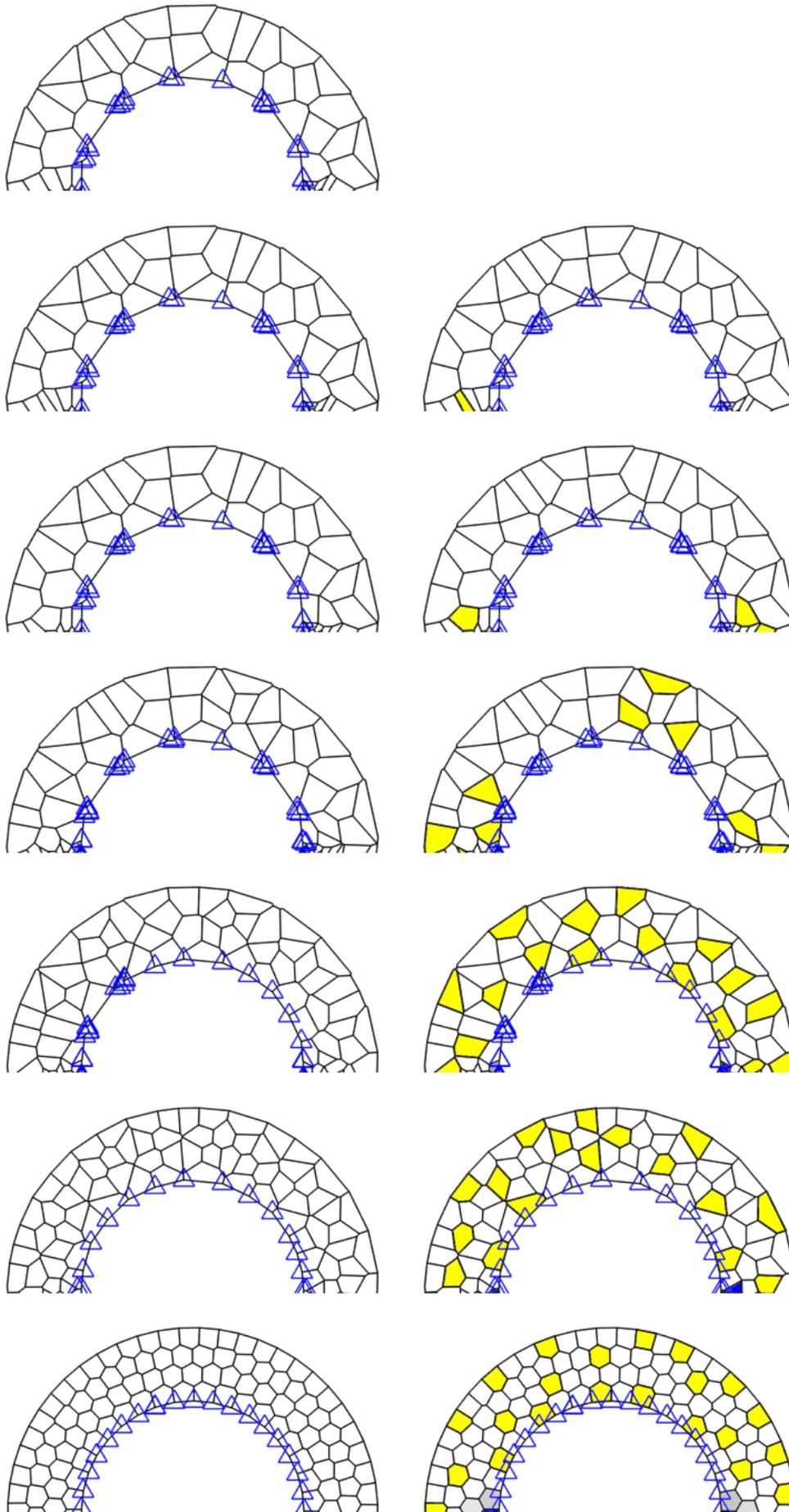


Figura 3.23: Os 6 passos de desrefinamento sem utilização de iterações de Lloyd são representados pela sequência das 7 malhas da parte superior, enquanto a parte inferior destaca os elementos em amarelo que são os elementos que estão sendo desrefinados.

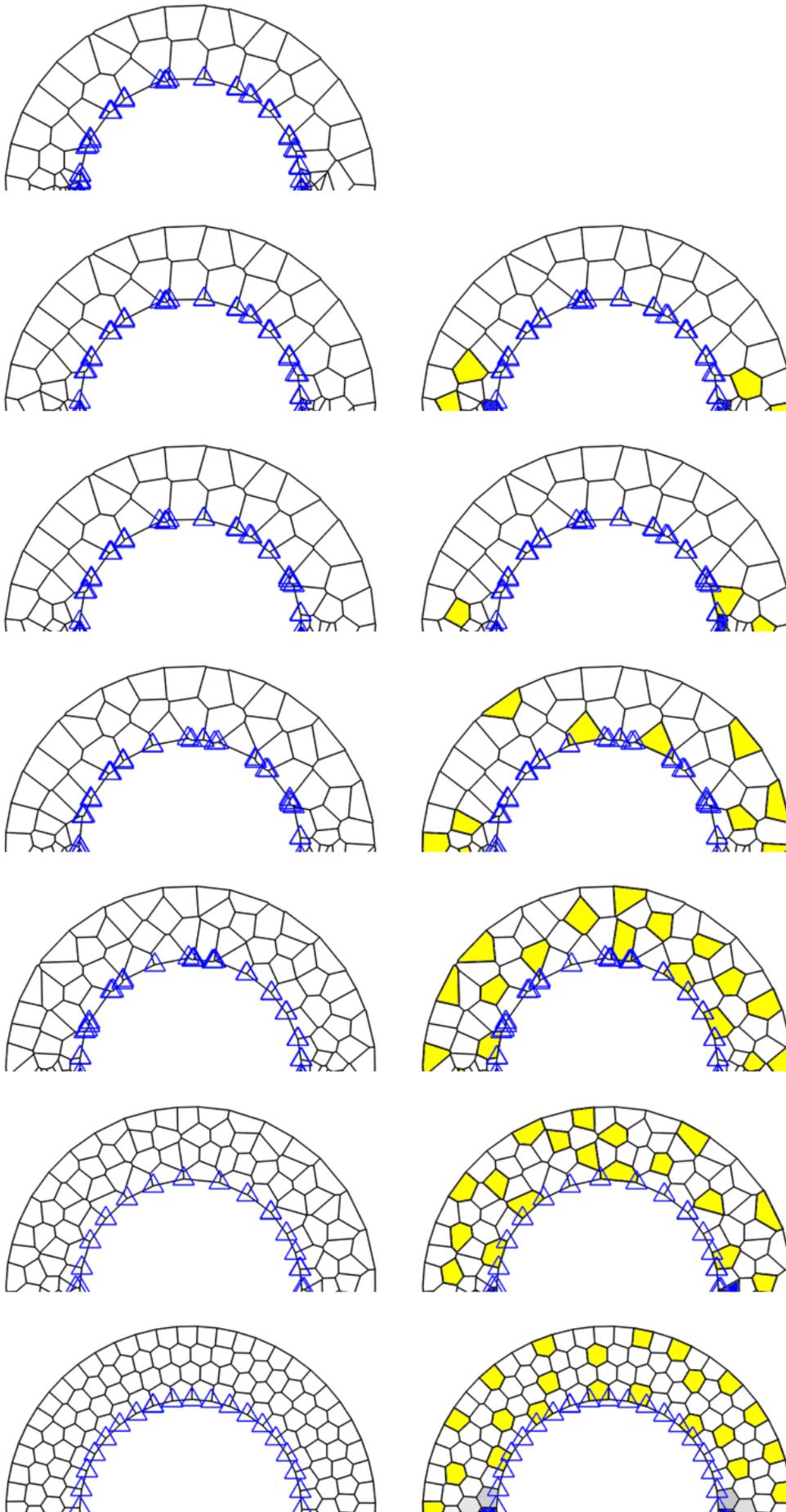


Figura 3.24: Os 6 passos de desrefinamento utilizando uma iteração de Lloyd são representados pela sequência das 7 malhas da parte superior, enquanto a parte inferior destaca os elementos que são os elementos que estão sendo desrefinados.

4 Resultados Numéricos

Nesse capítulo serão apresentados os resultados obtidos utilizando malhas adaptativas para os quatro exemplos apresentados a seguir: MBB, Wrench, Michell e Hook (Olhoff et al. (1991) (22) e Talischi et al. (2012) (23)), e suas comparações com malhas super-refinadas e mantidas constantes durante todo o processo de otimização topológica.

Os valores de densidade utilizados foram $\rho_s = 0,950$, $\rho_v = 0,050$, $\Delta\rho = 0,333$ e $\rho_p = 0,333$ que correspondem respectivamente a: limite inferior de densidade, limite superior de densidade, variação de densidade, valor de densidade mínimo para um elemento ser considerado preenchido. Para a área máxima para um elemento ser candidato a desrefinamento e para a área mínima para um elemento ser candidato a refinamento foram utilizados respectivamente $A_{max} = 2|\Omega|/n_0$ e $A_{min} = |\Omega|/8n_0$. Também foi utilizado um fator de penalização variando de 1 a 3 com passos de 0,5.

A quantidade de elementos iniciais da malha n_0 foi variada para estimativa de custo de processamento computacional. O valor A_{min} utilizado permite um refinamento 8 vezes maior da malha, exigindo uma comparação com malhas contendo 8 vezes mais elementos e mantidas constantes ao longo do processo de otimização.

4.1 Problemas Simulados

1. O primeiro exemplo corresponde à viga MBB (Olhoff et al. (1991) (22)), ilustrado na Fig. 4.1, de dimensões 12 por 4, biapoada e com um carregamento em seu centro. Devido às condições de simetria do problema, pode-se analisar a viga usando apenas metade do seu domínio.

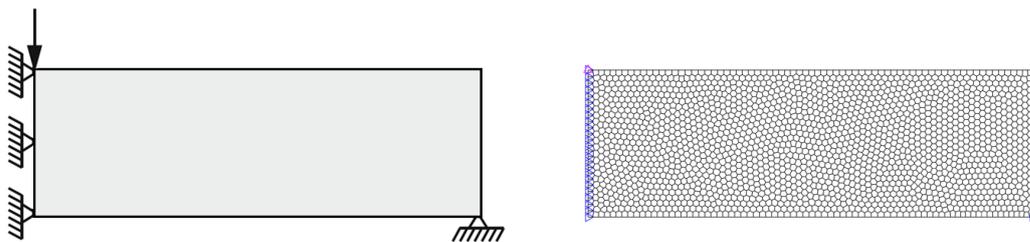


Figura 4.1: Viga MBB (Olhoff et al. (1991) (22)).

2. O segundo exemplo corresponde ao domínio Wrench (Talischi et al. (2012) (23)), ilustrado na Fig. 4.2

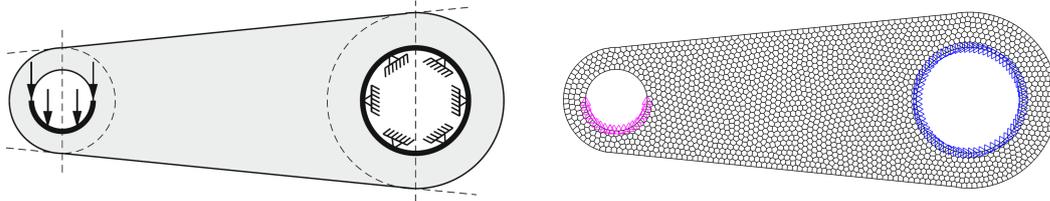


Figura 4.2: Domínio Wrench (Talischi et al. (2012) (23)).

3. O terceiro exemplo corresponde à viga de Michell (Talischi et al. (2012) (23)), ilustrado na Fig. 4.3, uma viga de dimensões 5 por 4 em balanço com carga no ponto médio da extremidade direita e engaste do lado esquerdo da estrutura ao longo do contorno curvo.

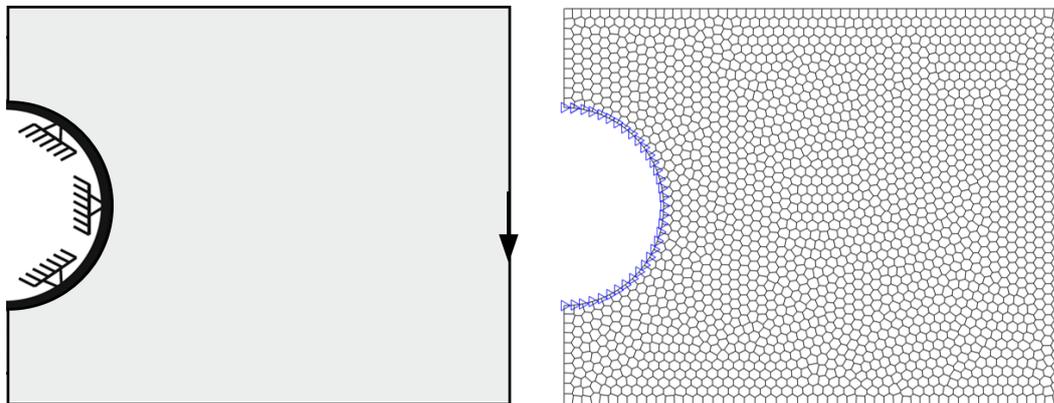


Figura 4.3: Viga de Michell (Talischi et al. (2012) (23)).

4. O quarto exemplo corresponde ao modelo Hook, ilustrado na Fig. 4.4.

4.2 Refinamento Adaptativo

Nesta seção serão ilustrados os resultados obtidos do refinamento adaptativo dos exemplos simulados, mostrando comparações entre topologias com malha adaptativa e malha refinada e mantida constante durante todo processo de otimização e entre topologias ótimas com e sem o uso de iteração de Lloyd e finalmente apresentando o quantitativo de elementos e nós em cada simulação.

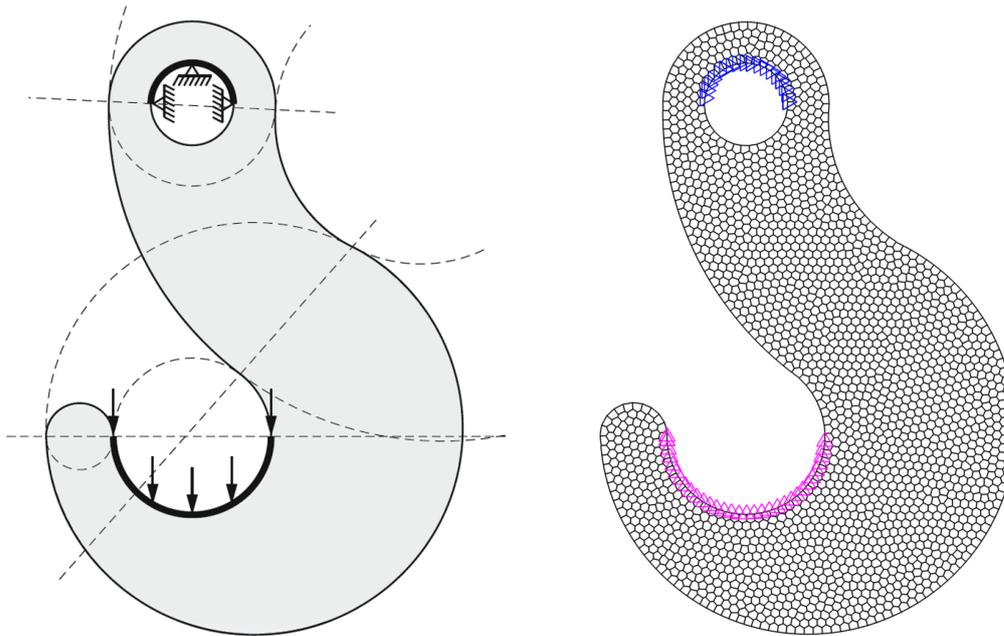


Figura 4.4: Modelo Hook (Talischi et al. (2012) (23)).

4.2.1 Domínio MBB

O primeiro exemplo mostra o processo completo de otimização topológica com adaptatividade da malha no domínio MBB (Olhoff et al. (1991) (22)), utilizando uma malha inicial de 625 elementos poligonais ($n_0 = 625$), um filtro de raio $R = 0,04$ e fração de volume $\tilde{v} = 0,5$.

A Fig. 4.5 ilustra todas as etapas do processo de otimização topológica com adaptatividade. As linhas horizontais representam cada passo de penalização, que inclui: (a) a adaptatividade de malha, (b) a transferência de atributo, (c) o processo de otimização e (d) a seleção dos nós para adaptatividade da malha. Dessa forma, é possível visualizar na coluna (a) como a malha varia durante todo processo de otimização topológica, refinando os contornos e desrefinando os interiores. O mesmo pode ser visto na coluna (d) onde um número menor de elementos está sendo refinado à medida em que o processo de otimização evolui. A transferência de atributos pode ser observada comparando-se uma dada figura da coluna (c) com a figura da linha seguinte na coluna (b) ao transferir para a nova malha.

As malhas inicial e final estão representadas na Fig. 4.6 e as respectivas topologias ótimas na Fig. 4.7.

Para comparação da utilização da iteração de Lloyd na adaptatividade da malha, as topologias ótimas e suas malhas estão representadas na Fig. 4.8. É possível verificar que os resultados são próximos, porém, ao observar as malhas geradas em cada problema, é perceptível que a utilização de ao menos uma

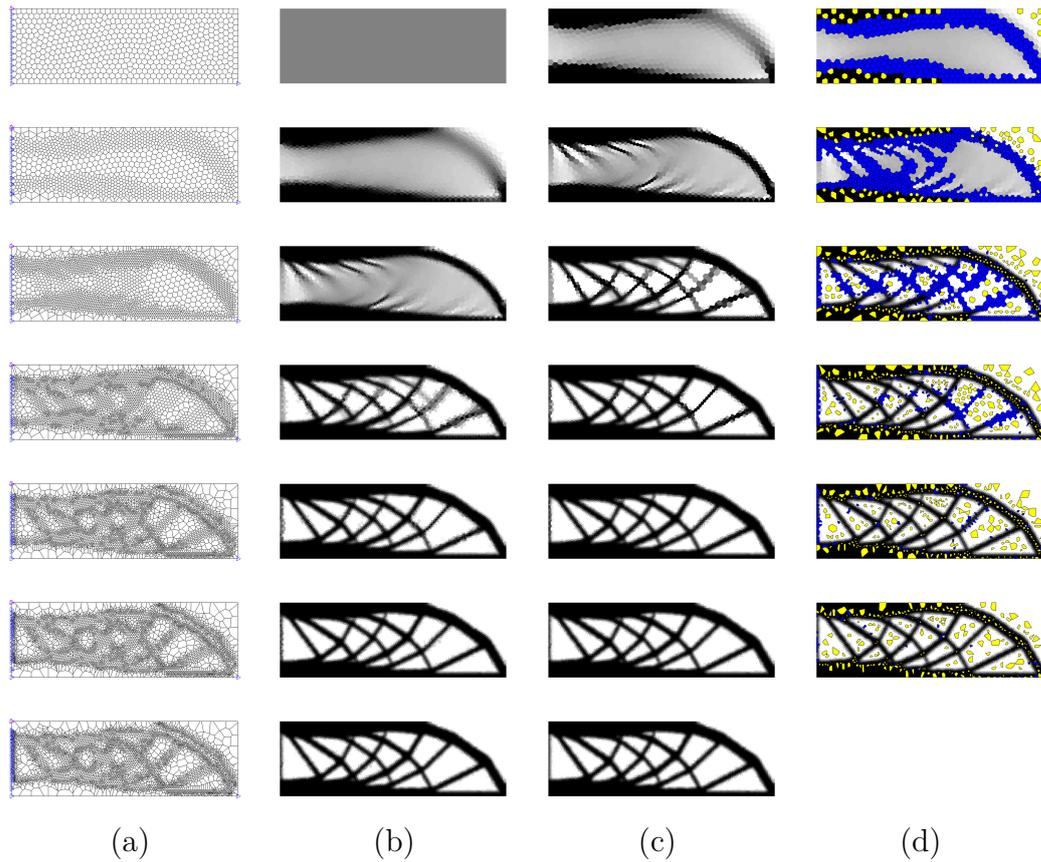


Figura 4.5: Processo de otimização topológica com adaptatividade da malha no domínio MBB com $n_0 = 625$, $R = 0,04$ e $\tilde{\nu} = 0,5$.

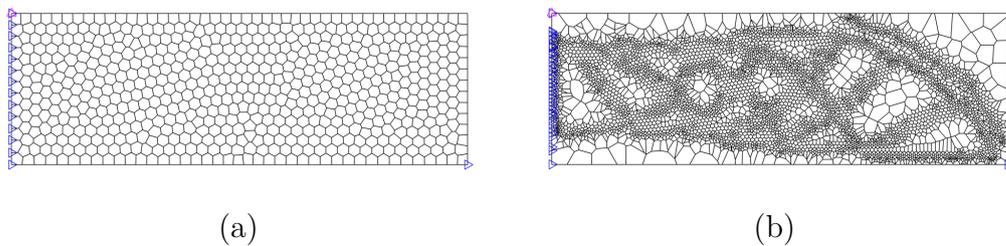


Figura 4.6: (a) Malha inicial do processo de otimização topológica do domínio MBB com 625 elementos poligonais, $R = 0,04$ e $\tilde{\nu} = 0,5$; (b) Malha final com 5398 elementos poligonais.

iteração de Lloyd em cada etapa de adaptatividade permite construir uma malha mais regular.

A Tab. 4.1 mostra a quantidade de elementos e nós em cada passo do processo de adaptatividade da malha no domínio MBB, utilizando $R = 0,04$ e $\tilde{\nu} = 0,5$. A primeira coluna apresenta essas quantidades para uma malha mantida constante durante todo processo de otimização, a segunda coluna se refere à malha adaptativa sem iteração de Lloyd, e a terceira coluna se refere à malha adaptativa com uma iteração de Lloyd.



Figura 4.7: Topologia ótima do domínio MBB (Olhoff et al. (1991) (22)) com $R = 0,04$ e $\tilde{v} = 0,5$: (a) com malha adaptativa partindo de 625 elementos e chegando a 5398 elementos; e (b) com malha refinada com 5000 elementos e mantida constante durante todo o processo de otimização topológica.

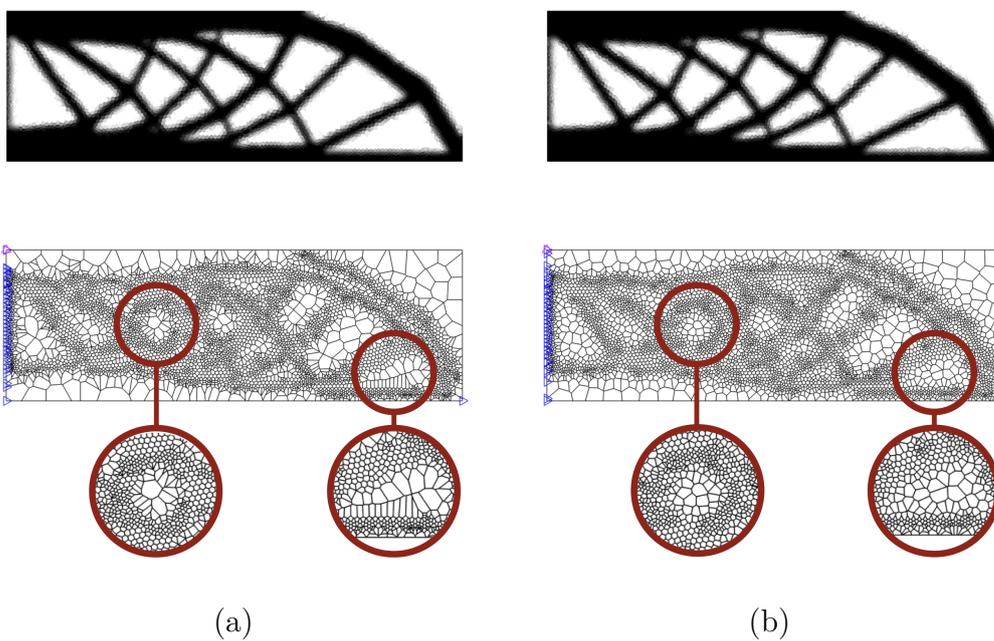


Figura 4.8: Topologias ótimas e suas respectivas malhas adaptativas do domínio MBB (Olhoff et al. (1991) (22)) com $n_0 = 625$, $R = 0,04$ e $\tilde{v} = 0,5$: (a) sem iteração de Lloyd; e (b) com uma iteração de Lloyd.

Observar-se que o crescimento da quantidade de elementos fica limitado aos critérios de áreas mínima e máxima para a adaptatividade da malha.

4.2.2 Domínio Wrench

O segundo exemplo mostra o processo completo de otimização topológica com adaptatividade da malha no domínio Wrench (Talischi et al. (2012) (23)) utilizando uma malha inicial de 625 elementos poligonais ($n_0 = 625$), um filtro de raio $R = 0,03$ e fração de volume $\tilde{v} = 0,4$.

De maneira semelhantemente ao exemplo anterior, a Fig. 4.9 ilustra todas as etapas do processo de otimização topológica com adaptatividade.

Tabela 4.1: Quantidade de elementos e nós em cada passo do processo de adaptatividade referente ao domínio MBB, com $R = 0,04$ e $\tilde{\nu} = 0,5$.

Passo	Malha Constante		Malha Adaptativa		Malha Adaptativa + Lloyd	
	Elementos	Nós	Elementos	Nós	Elementos	Nós
1			625	1310	625	1310
2			1191	2455	1191	2457
3			2720	5549	2711	5539
4	5000	10000	4236	8577	4318	8752
5			5180	10460	5358	10836
6			5408	10914	5468	11043
7			5398	10904	5556	11218

As linhas horizontais representam cada passo de penalização, que inclui: (a) a adaptatividade de malha, (b) a transferência de atributo, (c) o processo de otimização e (d) a seleção dos nós para adaptatividade da malha. Dessa forma, é possível visualizar na coluna (a) como a malha varia durante todo processo de otimização topológica, refinando os contornos e desrefinando os interiores. O mesmo pode ser visto na coluna (d) onde um número menor de elementos está sendo refinado à medida em que o processo de otimização evolui. A transferência de atributos pode ser observada comparando-se uma dada figura da coluna (c) com a figura da linha seguinte na coluna (b) ao transferir para a nova malha.

As malhas inicial e final estão representadas na Fig. 4.10 e as respectivas topologias ótimas na Fig. 4.11.

Novamente observa-se aqui uma malha mais regular no domínio Wrench ao utilizar uma iteração de Lloyd no processo de adaptatividade. As topologias ótimas e suas malhas estão representadas na Fig. 4.12. Neste caso, além de verificar essa maior regularidade, foi observada uma melhor resolução do contorno vazio (furos) da malha. Porém, esse contorno vazio pode ser solucionado ao se trabalhar com uma malha inicial com maior quantidade de elementos, conforme ilustrado na Fig. 4.13.

A Tab. 4.2 mostra a quantidade de elementos e nós em cada passo do processo de adaptatividade da malha no domínio Wrench, utilizando $R = 0,03$ e $\tilde{\nu} = 0,4$. A primeira coluna apresenta essas quantidades para uma malha mantida constante durante todo processo de otimização, a segunda coluna se refere à malha adaptativa sem iteração de Lloyd, e a terceira coluna se refere à malha adaptativa com uma iteração de Lloyd.

Pode-se observar novamente que o crescimento da quantidade de elementos fica limitado aos critérios de áreas mínima e máxima para a adaptatividade da malha.

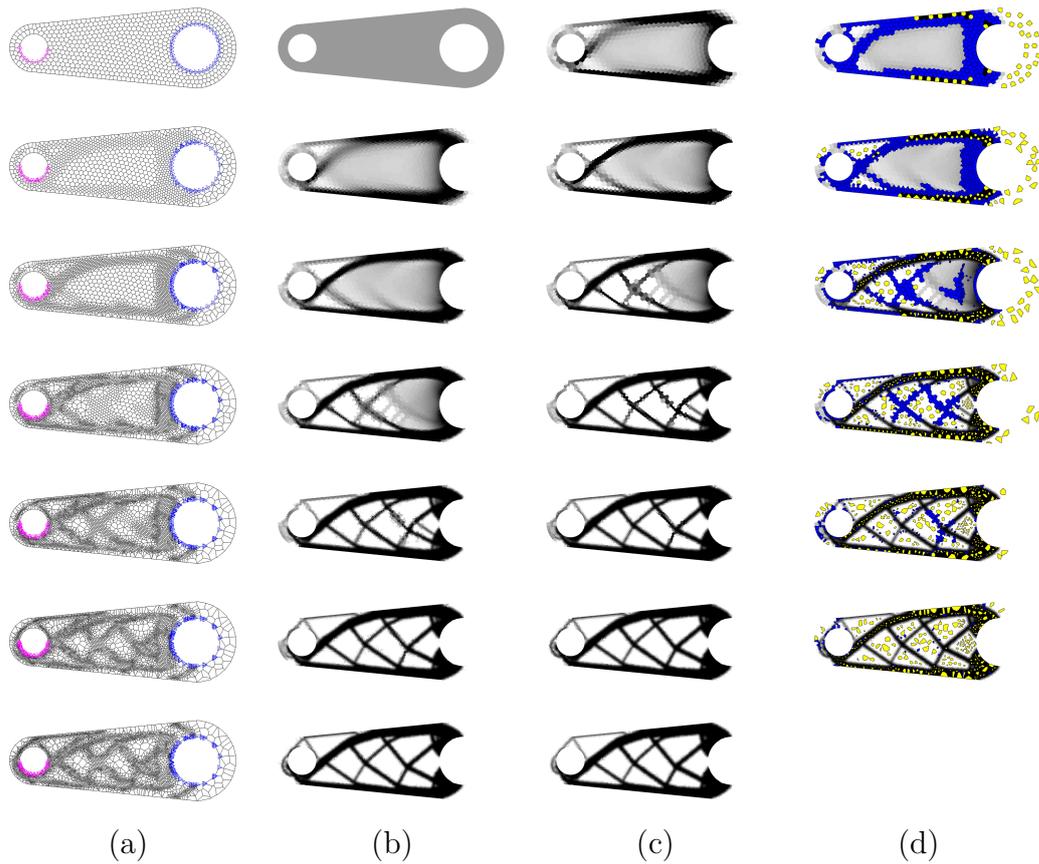


Figura 4.9: Processo de otimização topológica com adaptatividade da malha no domínio Wrench com $n_0 = 625$, $R = 0,03$ e $\tilde{v} = 0,4$.

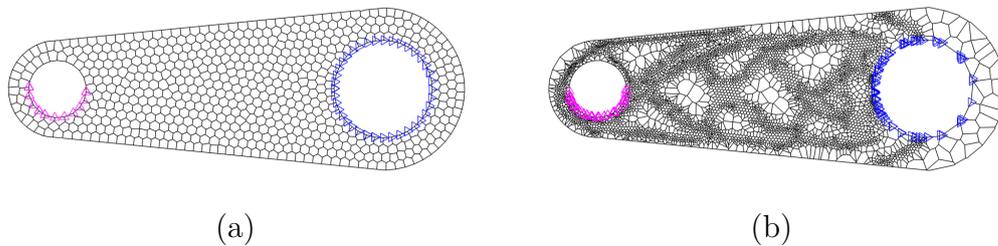


Figura 4.10: (a) Malha inicial do processo de otimização topológica do domínio Wrench com 625 elementos poligonais, $R = 0,03$ e $\tilde{v} = 0,4$; (b) Malha final com 5133 elementos poligonais.

4.2.3 Domínio Michell

A Fig. 4.14 apresenta as malhas inicial e final e as respectivas topologias ótimas referentes ao domínio Michell (Talischi et al. (2012) (23)) utilizando uma malha adaptativa de 2000 elementos poligonais ($n_0 = 2000$) e uma malha refinada com 16000 elementos e mantida constante durante todo o processo de otimização topológica. Foram utilizados um filtro de raio $R = 0,04$ e fração de volume $\tilde{v} = 0,4$.

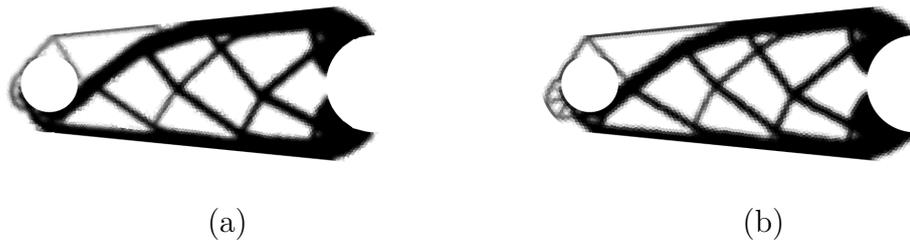


Figura 4.11: Topologia ótima do domínio Wrench (Talischi et al. (2012) (23)) com $R = 0,03$ e $\tilde{\nu} = 0,4$: (a) com malha adaptativa partindo de 625 elementos e chegando a 5133 elementos; e (b) com malha refinada com 5000 elementos e mantida constante durante todo o processo de otimização topológica.

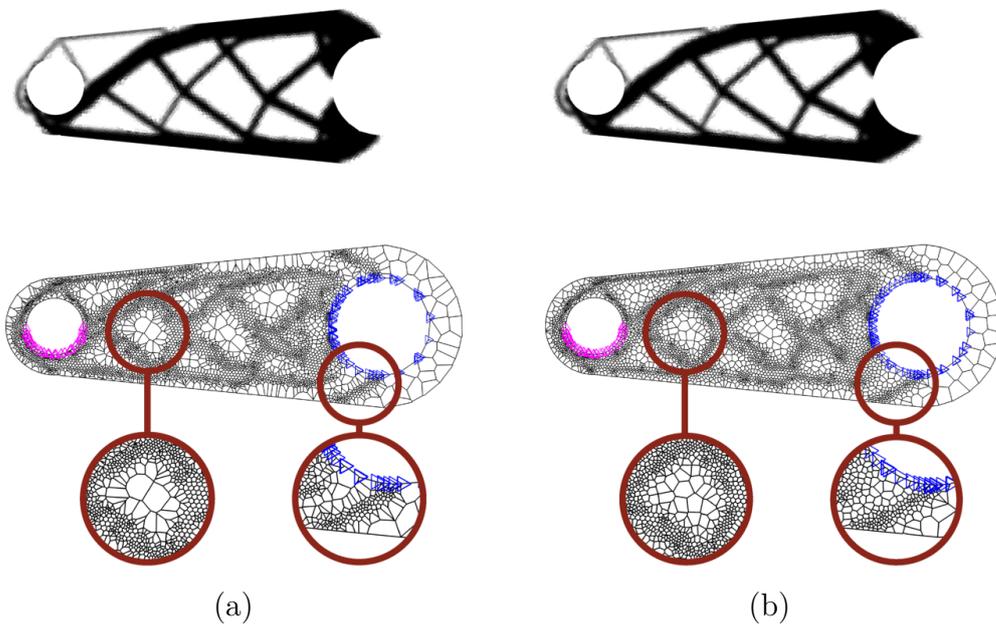


Figura 4.12: Topologias ótimas e suas respectivas malhas adaptativas do domínio Wrench (Talischi et al. (2012) (23)) com $n_0 = 625$, $R = 0,03$ e $\tilde{\nu} = 0,4$: (a) sem iteração de Lloyd; e (b) com uma iteração de Lloyd.

Tabela 4.2: Quantidade de elementos e nós em cada passo do processo de adaptatividade referente ao domínio Wrench, com $R = 0,03$ e $\tilde{\nu} = 0,4$.

Passo	Malha Constante		Malha Adaptativa		Malha Adaptativa + Lloyd	
	Elementos	Nós	Elementos	Nós	Elementos	Nós
1			625	1435	625	1435
2			1119	2426	1119	2423
3			2323	4900	2325	4905
4	5000	10000	3594	7457	3648	7575
5			4561	9382	4582	9452
6			5107	10486	5070	10443
7			5133	10558	5102	10514

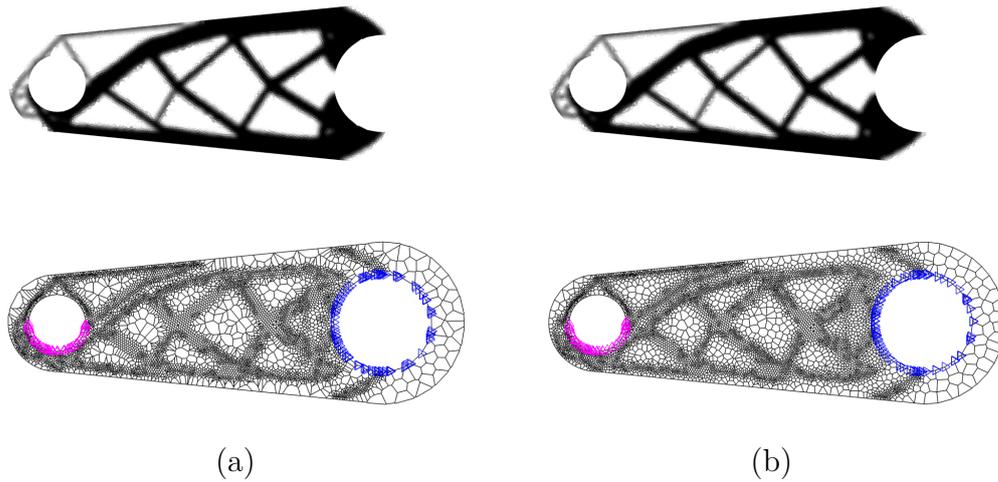


Figura 4.13: Topologias ótimas e suas respectivas malhas adaptativas do domínio Wrench (Talischi et al. (2012) (23)) com $n_0 = 1000$, $R = 0,03$ e $\tilde{\nu} = 0,4$: (a) sem iteração de Lloyd; e (b) com uma iteração de Lloyd.

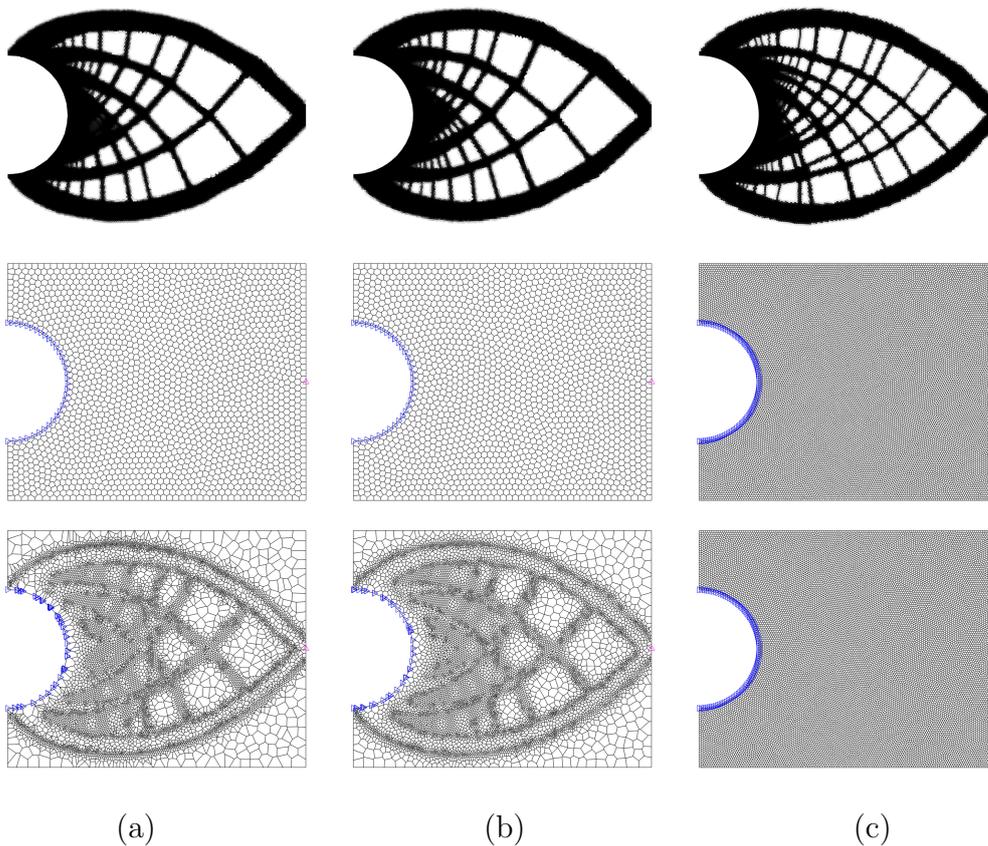


Figura 4.14: Topologias ótimas e suas respectivas malhas inicial e final do domínio Michell $R = 0,04$ e $\tilde{\nu} = 0,4$: (a) malha adaptativa com $n_0 = 2000$ e malha final com 10309 elementos, sem iteração de Lloyd; (b) malha adaptativa com $n_0 = 2000$ e malha final com 10630 elementos, com uma iteração de Lloyd; e (c) mantida constante com 16000 elementos durante todo o processo de otimização topológica.

4.2.4 Domínio Hook

A Fig. 4.15 ilustra as malhas inicial e final e as respectivas topologias ótimas referentes ao domínio Hook (Talischi et al. (2012) (23)) utilizando uma malha adaptativa de 2000 elementos poligonais ($n_0 = 2000$) e uma malha refinada com 16000 elementos e mantida constante durante todo o processo de otimização topológica. Foram utilizados um filtro de raio $R = 2,00$ e fração de volume $\tilde{v} = 0,4$.

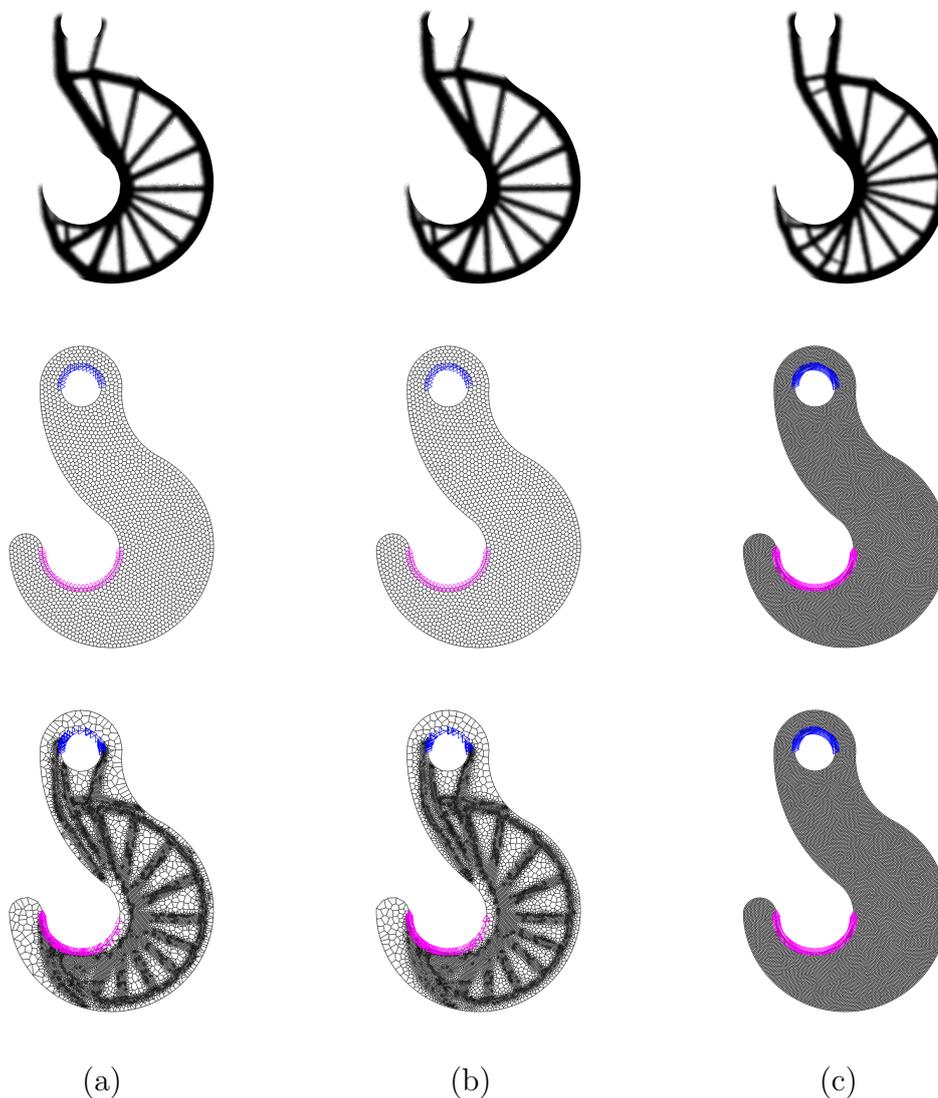


Figura 4.15: Topologias ótimas e suas respectivas malhas inicial e final do domínio Hook $R = 2,00$ e $\tilde{v} = 0,4$: (a) malha adaptativa com $n_0 = 2000$ e malha final com 15249 elementos, sem iteração de Lloyd; (b) malha adaptativa com $n_0 = 2000$ e malha final com 15147 elementos, com uma iteração de Lloyd; e (c) mantida constante com 16000 elementos durante todo o processo de otimização topológica.

4.3

Tempo de Processamento

Para o estudo do desempenho computacional, foram utilizados o programa MATLAB R2014b e uma máquina com Windows 10 Pro 64-bit, processador 3rd gen Intel® Core™ i7-3537U (2.00GHz / 3.10GHz with Turbo Boost) e memória RAM de 8GB (4GB fixed onboard + 4GB removable) DDR3-1600MHz. Todos os resultados a seguir consideram fator de penalização variando de 1 a 3 com passos de 0,5 e para avaliação do tempo de processamento, é verificado o tempo após a criação da malha inicial até a geração do layout final.

A Tab. 4.3 mostra o tempo de execução para cada solução de otimização topológica do domínio MBB considerando um filtro de raio $R = 0,04$ e fração de volume $\tilde{v} = 0,5$. São consideradas malhas iniciais com diferentes quantidade de elementos. A primeira coluna mostra a quantidade de elementos utilizados na malha adaptativa inicial e as demais colunas mostram o tempo total de processamento e a quantidade de elementos na malha final.

Tabela 4.3: Tempo de processamento (segundos) e quantidade inicial e final de elementos na malha no domínio MBB com $R = 0,04$ e $\tilde{v} = 0,5$.

# Inicial de Elementos	Tempo de Processamento [# Final de Elementos]		
	Malha Constante	Malha Adaptativa	Malha Adaptativa + Lloyd
625	209,2 s [5000]	183,2 s [5389]	201,7 s [5468]
1250	501,6 s [10000]	396,6 s [9675]	404,4 s [9700]
2500	1157,9 s [20000]	774,7 s [18064]	771,3 s [17956]

A Tab. 4.4 mostra o tempo de execução para cada solução de otimização topológica do domínio Wrench considerando um filtro de raio $R = 0,03$ e fração de volume $\tilde{v} = 0,4$. São consideradas malhas iniciais com diferentes quantidade de elementos. A primeira coluna mostra a quantidade de elementos utilizados na malha adaptativa inicial e as demais colunas mostram o tempo total de processamento e a quantidade de elementos na malha final.

Tabela 4.4: Tempo de processamento (segundos) e quantidade inicial e final de elementos na malha no domínio Wrench com $R = 0,03$ e $\tilde{v} = 0,4$.

# Inicial de Elementos	Tempo de Processamento [# Final de Elementos]		
	Malha Constante	Malha Adaptativa	Malha Adaptativa + Lloyd
625	184,8 s [5000]	171,2 s [5140]	172,4 s [5104]
1250	509,3 s [10000]	333,6 s [8903]	338,9 s [8849]
2500	1147,9 s [20000]	645,7 s [15453]	657,0 s [15499]

A Tab. 4.5 mostra o tempo de execução para cada solução de otimização topológica do domínio Michell considerando um filtro de raio $R = 0,04$ e fração de volume $\tilde{v} = 0,4$. São consideradas malhas iniciais com diferentes quantidade de elementos. A primeira coluna mostra a quantidade de elementos utilizados na malha adaptativa inicial e as demais colunas mostram o tempo total de processamento e a quantidade de elementos na malha final.

Tabela 4.5: Tempo de processamento (segundos) e quantidade inicial e final de elementos na malha no domínio Michell com $R = 0,04$ e $\tilde{v} = 0,4$.

# Inicial de Elementos	Tempo de Processamento [# Final de Elementos]		
	Malha Constante	Malha Adaptativa	Malha Adaptativa + Lloyd
1000	251,1 s [8000]	255,8 s [6602]	247,1 s [6345]
2000	861,7 s [16000]	570,6 s [11513]	581,5 s [11696]
4000	1944,8 s [32000]	1128,3 s [21275]	1141,9 s [21699]

A Tab. 4.6 mostra o tempo de execução para cada solução de otimização topológica do domínio Hook considerando um filtro de raio $R = 2,00$ e fração de volume $\tilde{v} = 0,4$. São consideradas malhas iniciais com diferentes quantidade de elementos. A primeira coluna mostra a quantidade de elementos utilizados na malha adaptativa inicial e as demais colunas mostram o tempo total de processamento e a quantidade de elementos na malha final.

Tabela 4.6: Tempo de processamento (segundos) e quantidade inicial e final de elementos na malha no domínio Hook com $R = 2,00$ e $\tilde{v} = 0,4$.

# Inicial de Elementos	Tempo de Processamento [# Final de Elementos]		
	Malha Constante	Malha Adaptativa	Malha Adaptativa + Lloyd
1000	364,8 s [8000]	355,8 s [8907]	360,4 s [8727]
2000	848,5 s [16000]	664,7 s [15260]	666,6 s [15147]
4000	1868,6 s [32000]	1292,6 s [28355]	1305,0 s [28521]

Na versão atual da implementação, apesar do processo de refinamento/desrefinamento ser local, a geração da malha é feita para todo o domínio. Uma implementação eficiente do diagrama de Voronoi local reduziria ainda mais o tempo de processamento.

O processo de adaptatividade requer a geração de uma nova malha, implicando assim em uma nova lista de nós e incidência de elementos, alterando a esparsidade da matriz de rigidez. É interessante notar que, apesar do alto custo de se refazer o sistema de equações, o mesmo é feito apenas no processo de adaptatividade. Desta forma, como são realizadas várias iterações do processo de otimização, esse custo representa uma pequena parcela do total.

5 Conclusões

Neste trabalho foi desenvolvida uma nova estratégia para refinamento adaptativo local de malhas poligonais, com objetivo de melhorar a representação dos contornos, por meio de topologias ótimas de alta resolução e baixo custo computacional. Inicialmente, a malha poligonal é construída a partir de um conjunto de sementes dispostas aleatoriamente no domínio, dando origem aos elementos poligonais a partir da construção do diagrama de Voronoi. Em seguida, iterações de Lloyd são realizadas para tornar os elementos mais regulares. Esses elementos são preenchidos com uma densidade definida previamente, obtendo um domínio inicial acinzentado. Em seguida, são realizados passos de otimização topológica com um fator de penalização variando linearmente de modo a evitar uma convergência prematura em mínimos locais. Ao final de cada passo de penalização, a malha é refinada e/ou desrefinada de acordo com o critérios de refinamento e desrefinamento apresentados e que correspondem à adição e/ou remoção de sementes do diagrama de Voronoi. Essa implementação permitiu obter estruturas com contornos mais bem definidos, o que simplifica o processo de interpretação dos resultados prévios a etapa de fabricação.

Os resultados obtidos demonstraram boa nitidez, clara disposição de material e contornos bem definidos. Os exemplos apresentados foram validados a partir da comparação com modelos obtidos na literatura. Além disso, a resposta final e a qualidade da definição da topologia têm relação direta com o custo computacional e foi verificada uma redução de tempo computacional comparado ao uso de malhas super-refinadas e mantidas constantes durante todo processo de otimização.

5.1 Trabalhos Futuros

Para desenvolvimentos futuros sobre este assunto, são sugeridos as seguintes tarefas:

- Reciclagem para malha adaptativa: com a inserção e a remoção de apenas algumas sementes do diagrama de Voronoi em cada etapa de penalização, torna-se desnecessária a geração de um diagrama de Voronoi utilizando

todas as sementes. A ideia seria armazenar as células não alteradas na malha antiga e criar diagramas de Voronoi locais no entorno das regiões que possuem sementes alteradas na malha nova;

- Estudar novas estratégias de adaptatividade baseadas na separação do campo de densidades do campo de deslocamento associado à malha de elementos finitos;
- Estender as ideias de refinamento adaptativo, aplicadas aqui em malhas poligonais, para modelos tridimensionais: com o advento e popularidade das impressoras 3D, a modelagem de objetos 3D tem se tornado uma prática mais divulgada e necessária. O diagrama de Voronoi permite a criação de malhas tridimensionais poliédricas.

Referências bibliográficas

- [1] TALISCHI, C.; PAULINO, G. H.; PEREIRA, A.; MENEZES, I. F. M.. **Polygonal finite elements for topology optimization: a unifying paradigm.** *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 82:671–698, 2010.
- [2] LOTTI, R.; MACHADO, A.; MAZZIEIRO, Ê.; JÚNIOR, J.. **Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos.** *R Dental Press Ortodon Ortop Facial*, 11:35–43, 2006.
- [3] BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O.. **Topology optimization: theory, methods and applications.** Springer, Berlin, 2nd edition, 2002.
- [4] SILVA, E. C. N.. **Técnicas de otimização aplicadas no projeto de peças mecânicas.** Disponível em: <<http://sites.poli.usp.br/d/pmr5215/otimizacao.pdf>>.
- [5] SAXENA, A.. **A material–mask overlay strategy for continuum topology optimization of compliant mechanisms using honeycomb discretization.** *Journal of Mechanical Design*, 130, 2008.
- [6] TALISCHI, C.; PAULINO, G. H.; LE, C. H.. **Honeycomb wachspress finite elements for structural topology optimization.** *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 37:569–583, 2009.
- [7] BATISTA, V. H. F.. **Geração de malhas não estruturadas tetraédricas utilizando um método de avanço de fronteira.** Dissertação de mestrado, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.
- [8] TALISCHI, C.; PAULINO, G. H.; PEREIRA, A.; MENEZES, I. F. M.. **Topology optimization with wachspress and voronoi finite elements.** *EngOpt 2008 – International Conference on Engineering Optimization*, 2008.
- [9] ZHOU, H.; PATIL, R. B. . **The discrete topology optimization of structures using the improved hybrid discretization model.** *J. Mech. Des*, 134, 2013.
- [10] KIYONO, C. Y.. **Método de otimização topológica aplicado ao projeto de sonotrodos para transdutores piezelétricos.** Dissertação

- de mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – USP, São Paulo, 2008.
- [11] TALISCHI, C.; PAULINO, G. H.; PEREIRA, A.; MENEZES, I. F. M.. **Poly-mesher: A general-purpose mesh generator for polygonal elements written in matlab**. *Struct. Multidiscip. Optim.*, 45:309–328, 2012.
- [12] HJELLE, Ø.; DÆHLEN, M.. **Triangulations and Applications**. Springer, Berlin, 2006.
- [13] DELAUNAY TRIANGULATION.. **Wikipédia: Delaunay triangulation**. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Delaunay_triangulation>, 2016. Acesso em: Janeiro de 2016.
- [14] VORONOI DIAGRAM.. **Wikipédia: Voronoi diagram**. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Voronoi_diagram>, 2016. Acesso em: Janeiro de 2016.
- [15] WANG, Y.; HE, J.; KANG, Z.. **An adaptive method for high-resolution topology design**. *Acta Mechanica Sinica*, 29:840–850, 2013.
- [16] WANG, S.. **Krylov subspace methods for topology optimization on adaptive meshes**. 4th World Congress in Computational Mechanics – IACM, 2002.
- [17] RAMM, E.; MAUTE, K.; SCHWARZ, S.. **Adaptive topology and shape optimization**. 4th World Congress in Computational Mechanics – IACM, 1998.
- [18] BENDSØE, M. P.; DÍAZ, A. R.; LIPTON R.; TAYLOR, J. E.. **Optimal design of material properties and material distribution for multiple loading conditions**. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 35:1449–1470, 1995.
- [19] BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O.. **Material interpolation schemes in topology optimization**. *Archive of Applied Mechanics*, 69:635–654, 1999.
- [20] CARDOSO, E. L.. **Controle de complexidade na otimização topológica de estruturas contínuas**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, Rio Grande do Sul, 2000.
- [21] LABANDA, S.; STOLPE, M.. **Automatic penalty continuation in structural topology optimization**. *Struct Multidisc Optim*, 52:1205–1221, 2015.

- [22] OLHOFF, N.; BENDSØE, M. P.; RASMUSSEN, J.. **On cad-integrated structural topology and design optimization.** *Comput Methods Appl Mech Eng*, 89:259–279, 1991.
- [23] TALISCHI, C.; PAULINO, G. H.; PEREIRA, A.; MENEZES, I. F. M.. **Polytop: A matlab implementation of a general topology optimization framework using unstructured polygonal finite element meshes.** *Struct. Multidiscip. Optim.*, 45:329–357, 2012.