

3 Equações de movimentos

A formulação das equações governantes e das condições de contorno, mesmo que para um caso geral, é usualmente muito direta. Contudo, a solução analítica do problema, em muitos casos é impossível ou muito difícil de se obter (Humar, 2001).

3.1. Axiais

Em vibrações axiais em uma estaca, a estaca pode ser vista como uma barra embutida em uma base elástica.

A Figura 3(a) mostra uma barra que possui uma seção transversal $A(x)$ e massa por unidade de comprimento $m(x)$ engastada em uma extremidade e livre em outra. A barra está sujeita a uma força $p(x,t)$ paralela ao eixo longitudinal. O deslocamento longitudinal de um ponto a uma distância x do engastamento é denotado por $u(x,t)$. As forças atuando em um elemento infinitesimal de comprimento dx são mostradas na Figura 3(b). Ela inclui as forças axiais atuando em duas seções, a força de inércia, e a carga aplicada.

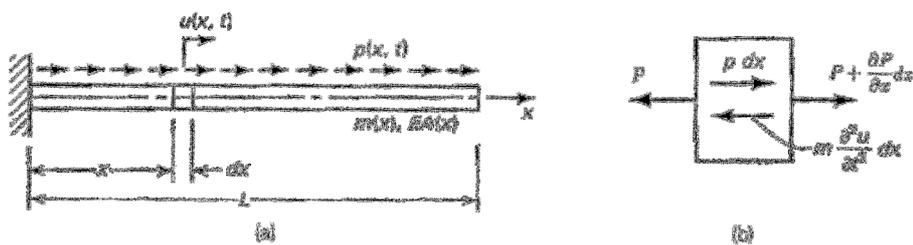


Figura 3 - (a) Vibrações axiais em uma barra; (b) forças atuando no elemento

Para o equilíbrio do elemento na direção horizontal, pelo princípio d'Alembert, tem-se:

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + p dx = 0 \quad (3-1)$$

Ou:

$$\frac{\partial P}{\partial x} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p = 0 \quad (3-2)$$

A força axial P e o deslocamento u são relacionados como segue:

$$P = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3-3)$$

Substituindo a equação (3-3) na equação (3-2) obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p = 0 \quad (3-4)$$

A equação (3-4) governa o movimento axial da barra. A solução da equação (3-4) deve, em adição, satisfazer as condições de contorno geométricas nas duas extremidades da barra.

No caso de uma barra em base elástica, conforme a Figura 4, assume-se que a estaca provê resistência de ponta e resistência ao atrito lateral (Chowdhury, 2009).

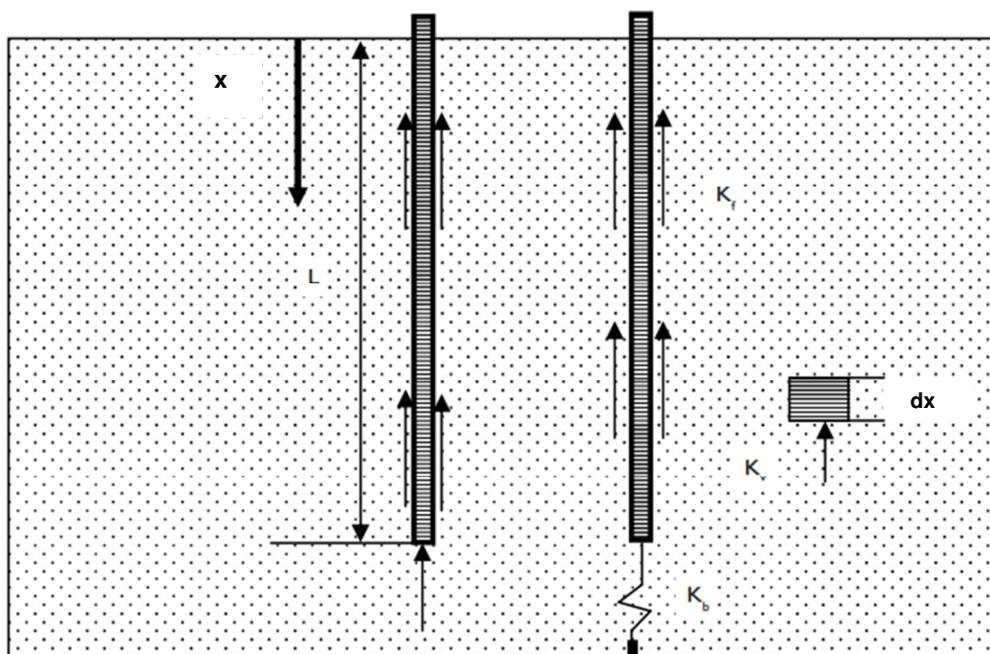


Figura 4 - Estaca embutida em solo em um comprimento L

Considerando que K_f representa a rigidez de fricção do solo ao redor da estaca e que na ponta da estaca há uma rigidez tomada como K_b . Considerando $p=0$ a equação (3-4) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + K_f u = 0 \quad (3-5)$$

Na Figura 4 a estaca tem a cabeça livre de modo que $(x=0, EA \frac{du}{dx} = 0)$. Na ponta da estaca a condição de contorno é $(x=L, EA \frac{du}{dx} = -K_b u(x)_{x=L})$. A natureza da constante K_f é discutida no item 5.

A equação (3-5) não apresenta os efeitos do amortecimento do solo. Caso este seja considerado a equação governante deve ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + K_f u + c \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (3-6)$$

3.1.1. Frequências de vibrações longitudinais em barras

A equação de vibrações axiais livres de uma barra é obtida pela substituição de $p=0$ na equação (3-4):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3-7)$$

Para o caso especial de uma barra uniforme, a equação (3-4) se reduz a:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3-8)$$

Assumindo-se que u é da forma:

$$u = f(x)g(t) \quad (3-9)$$

Substituindo a equação (3-9) na equação (3-8), obtém-se:

$$\frac{EA}{m} \frac{1}{f(x)} \left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right) = \frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} \quad (3-10)$$

Desde que a expressão do lado esquerdo da equação (3-10) seja uma função apenas de x , enquanto que o lado direito seja apenas função de t , elas podem ser

igualados a uma constante. Escolhendo esta constante de separação como igual $-\omega^2$. A equação (3-10) pode então ser escrita como:

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \omega^2 g(t) = 0 \quad (3-11)$$

$$-\frac{EA}{m} \left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right) = -\omega^2 f(x) \quad (3-12)$$

A equação (3-12) representa uma equação de autovalor para a vibração axial de uma barra, esta equação pode ser escrita como:

$$\left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right) + \beta^2 f(x) = 0 \quad (3-13)$$

$$\text{Onde } \beta^2 = \omega^2 m / EA.$$

A equação (3-13) possui uma solução da forma:

$$f(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x \quad (3-14)$$

Onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias para serem determinadas das condições de contorno e condições iniciais.

As condições de contorno para uma barra com uma extremidade fixa e outra livre, uma estaca de ponta, são dadas por:

$$f(x) = 0 \quad x = 0 \quad (3-15)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad x = L$$

Substituindo as condições (3-15) na equação (3-14) obtêm-se as seguintes expressões:

$$C_1 = 0 \quad (3-16)$$

$$C_2 \cos \beta L = 0 \quad (3-17)$$

A equação (3-17) é uma equação de frequências que levará a um número infinito de valores β e então para as frequências ω .

As condições de contorno para uma barra com ambas as extremidades livres são dadas por:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = L \quad (3-18)$$

Substituindo as condições (3-18) na equação (3-14) obtêm-se as seguintes expressões:

$$C_1 = 0 \quad (3-19)$$

$$C_2 \text{sen} \beta L = 0 \quad (3-20)$$

A equação (3-20) é uma equação de frequências que levará a um número infinito de valores β e então para as frequências ω .

No caso de barras em base elástica a equação (3-7) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -K_f u \quad (3-21)$$

Resolver a equação (3-21) para vibrações torna-se um problema mais complexo, especialmente quando as condições de contorno se tornam complicadas nos casos de estacas parcialmente embutidas, e nas condições em as propriedades do solo são variáveis. Chowdhury (2009) apresenta a solução da equação (3-21) para algumas condições de contorno específicas.

3.2. Transversais

Em vibrações transversais em uma estaca, a estaca pode ser modelada como uma viga embutida em uma base elástica.

A Figura 5 mostra uma viga com rigidez à flexão $EI(x)$ e massa $m(x)$ por unidade de comprimento, ambas funções da coordenada espacial x coaxial com a estaca. Para objetivo de ilustração, a viga está simplesmente apoiada, mas outras condições de suporte são igualmente admissíveis. A viga é submetida a uma vibração transversal no plano do papel sob a ação de uma força distribuída $p(x,t)$. O deslocamento transversal em qualquer ponto ao longo da viga é aqui também representado por $u(x,t)$, que é uma função das coordenadas espacial x e do tempo t .

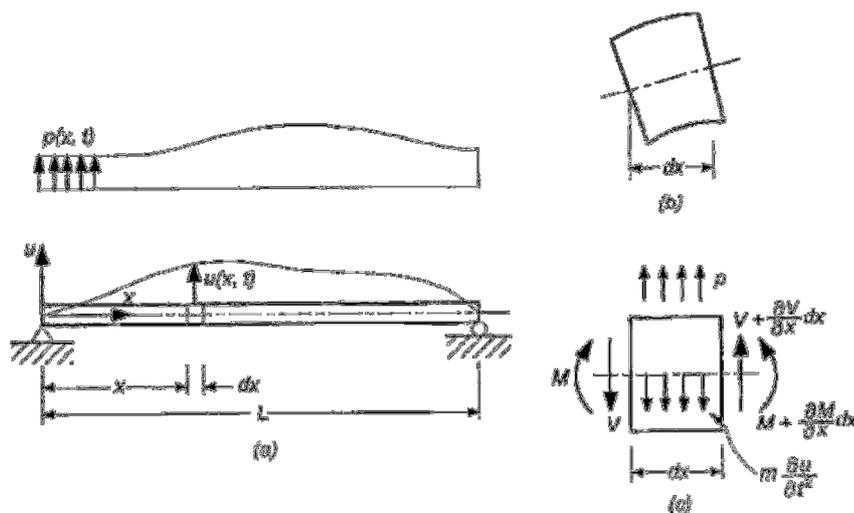


Figura 5 - Vibrações transversais de uma viga: (a) elevação da viga; (b) elemento infinitesimal e sua posição em deslocamento; (c) forças atuando em um pequeno elemento

Um elemento infinitesimal da viga de comprimento dx é mostrado na Figura 5(b) numa posição deformada e as forças atuando no elemento são identificadas na Figura 5(c). Como indicado, essas forças consistem em uma força externa $p dx$ na direção positiva de u , que é para cima; a força de inércia $m(\partial^2 u / \partial t^2) dx$ na direção para baixo; a força de cisalhamento $V + (\partial V / \partial x) dx$ e o momento $M + (\partial M / \partial x) dx$ na face da mão direita. É negligenciado o momento de inércia causado pela aceleração angular do elemento infinitesimal.

O elemento infinitesimal está em equilíbrio à ação das forças e momentos identificados na Figura 5(c). Para o equilíbrio do elemento na direção vertical, tem-se:

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + p dx = 0 \quad (3-22)$$

Ou:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p = 0 \quad (3-23)$$

Igualando-se a soma dos momentos, sobre à mão esquerda, a zero, obtém-se:

$$\left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) dx + p dx \frac{dx}{2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \frac{dx}{2} + M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M = 0 \quad (3-24)$$

Negligenciando as quantidades de alta ordem, a equação (3-24) se torna:

$$V + \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad (3-25)$$

Se a rotação de flexão é denotada por θ , então negligenciando as deformações de cisalhamento, tem-se:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3-26)$$

Também, da teoria elementar da viga:

$$M = EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3-27)$$

$$M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Substituindo a equação (3-27) na equação (3-25) obtém-se:

$$V = -\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (3-28)$$

Substituindo a equação (3-28) na equação (3-23), obtém-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p \quad (3-29)$$

A equação (3-29) é a equação que governa a vibração transversal em uma viga. Para obter uma solução particular para esta equação, devem-se especificar quatro condições de contorno e duas condições iniciais.

3.2.1. Vibrações amortecidas

Na seção 3.2 foi apresentada a vibração transversal de uma viga livre não amortecida.

Dois tipos de resistências de amortecimento podem ser identificados: o amortecimento causado por forças externas opostas às vibrações e o amortecimento da resistência interna de deformação do material. Ambas as forças de resistência são dissipativas na natureza e causam perda de energia no sistema. A energia perdida é convertida em outras formas, tais como calor e som.

O amortecimento externo pode ser representado por um mecanismo de amortecimento viscoso distribuído ou amortecedores com uma constante de amortecimento $c(x)$ por unidade de comprimento, como mostra a Figura 6(a). A

força de amortecimento resultante atuando em um elemento infinitesimal é identificada na Figura 6(b). Quando essa força é incluída no balanço da força vertical, a equação (3-23) é modificada para:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} + p = 0 \quad (3-30)$$

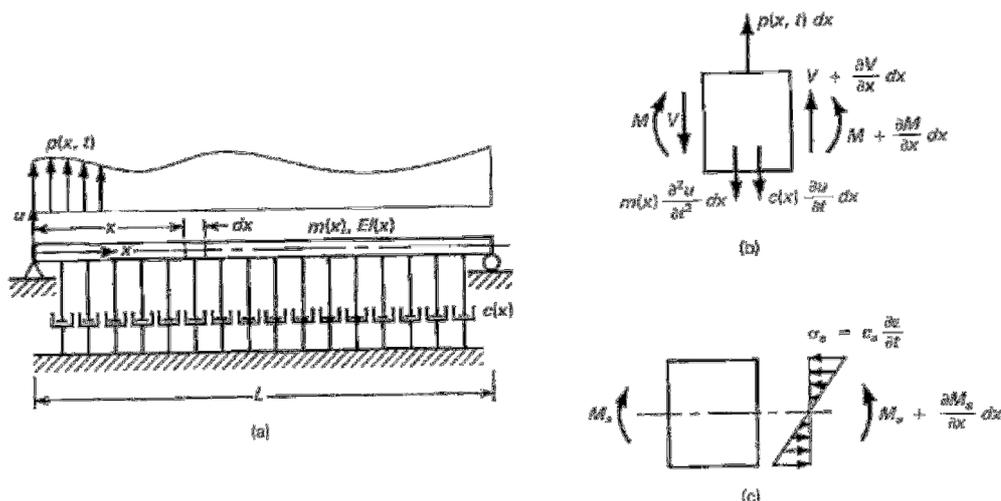


Figura 6 - (a) Vibrações transversais em uma viga, incluindo efeito de amortecimento; (b) forças atuando em um elemento, incluindo amortecimento externo; (c) forças de amortecimento interno e momento resultante

A resistência à deformação interna irá depender da taxa de deformação $\frac{\partial \epsilon}{\partial t}$. Definindo-se um coeficiente de amortecimento c_s que converte a taxa de deformação em tensão σ_s , então:

$$\sigma_s = c_s \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \quad (3-31)$$

A distribuição dessa tensão através da seção é mostrada na Figura 6(c). De acordo com a teoria elementar de vigas, a deformação varia linearmente com a distância da linha neutra, a taxa de deformação e então a tensão de amortecimento também são linearmente distribuídas na altura da viga. A resultante das tensões atuando na seção pode ser representada em termos de um momento M_s , que é derivado de uma maneira similar ao momento fletor.

$$M_s = \int_A \sigma_s y dA \quad (a)$$

$$M_s = \int_A c_s \frac{\partial}{\partial t} (y \kappa) y dA \quad (b) \quad (3-32)$$

$$M_s = \int_A c_s \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) y^2 dA \quad (c)$$

$$M_s = c_s I \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (d)$$

Onde $\varepsilon = y\kappa$, onde κ é a curvatura dada por $\kappa = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, uma hipótese da resistência dos materiais.

Na determinação do sinal da tensão σ_s e do momento M_s , deve-se reconhecer que, como uma tensão de flexão, as tensões de amortecimento mostradas são exercidas no elemento de viga pelas seções adjacentes da viga.

Os momentos causados pela resistência de amortecimento são mostrados na Figura 6(c). Quando inserido na equação do balanço dos momentos (3-24) e (3-25), obtém-se:

$$V + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M_s}{\partial x} = 0 \quad (3-33)$$

Substituindo M da equação (3-27) e M_s da equação (3-32) na equação (3-33) e diferenciando em relação a x , obtém-se:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(c_s I \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right) = 0 \quad (3-34)$$

Substituindo $\frac{\partial V}{\partial x}$ da equação (3-34) na equação (3-30) obtém-se a seguinte equação de movimento:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(c_s I \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} = p \quad (3-35)$$

3.2.2.

Efeito de uma força axial

Nas seções anteriores, considerou-se apenas o caso de vibração axial, sem a presença de vibrações de flexão. Em geral, combinações de vibrações de flexão e axiais podem existir. As equações governantes para o movimento em tais casos são acopladas e a solução é bastante complexa.

A presença de uma carga axial irá influenciar na vibração transversal de uma viga. Nesse caso é razoável ignorar a presença de vibrações axiais, desde que

a rigidez axial seja grande se comparada à rigidez de flexão, de modo que as deformações axiais são comparativamente pequenas. A seguir será derivada a equação de movimento para vibrações transversais de uma viga na presença de uma carga axial, mas assumindo que as deformações axiais são negligenciáveis. Para efeitos de simplificação, o efeito das deformações de cisalhamento e a inércia rotacional serão negligenciados.

A Figura 7 mostra um elemento infinitesimal de uma viga sob vibração transversal com as forças atuantes nele. Quando comparado ao caso elementar de vibrações de flexão, as únicas novas forças são a força axial $S(x)$ no lado esquerdo e a força $S + \left[\frac{\partial S(x)}{\partial x} \right] dx$ no lado direito da seção, ambos assumidos positivos quando eles produzem uma compressão na seção. O balanço das forças verticais é ainda representado pela equação (3-23). Contudo, escrevendo a equação de equilíbrio dos momentos, deve-se notar o momento adicional anti-horário contribuído pelas forças axiais. Também notando que a linha de ação da força axial no lado direito da seção é deslocada uma distância $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx$ em relação à seção do lado esquerdo, a equação do balanço dos momentos se torna:

$$V + \frac{\partial M}{\partial x} + S(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3-36)$$

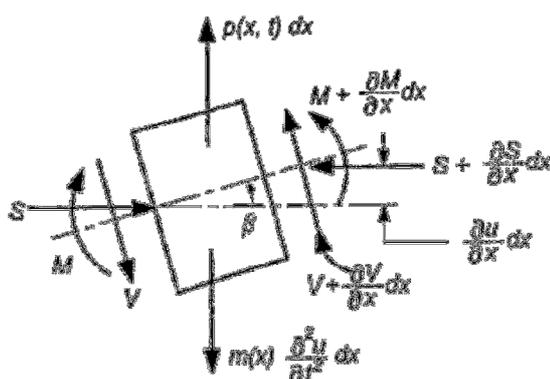


Figura 7 - Forças atuando em um pequeno elemento de uma viga submetido a vibrações transversais sob a presença de uma força axial

Substituindo a equação (3-27) na equação (3-36) obtém-se:

$$V = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - S(x) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3-37)$$

Observa-se que a força vertical V agora tem duas componentes: um cisalhamento da viga $-\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ e uma componente que se desperta da presença da força axial. Substituindo a equação (3-37) na equação (3-30), obtém-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(c_s I \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(S(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} = p \quad (3-38)$$

3.2.3. Frequências de vibrações transversais

Negligenciando deformações de cisalhamento e inércia rotacional, a equação de vibração transversal não amortecida de uma viga é obtida da equação (3-29) tomando $p = 0$.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3-39)$$

A equação (3-39) é uma equação diferencial parcial homogênea de quarta ordem. Uma solução da equação (3-39) pode ser dada pela forma

$$u = f(x)g(t) \quad (3-40)$$

Onde $f(x)$ é uma função de x somente e $g(t)$ é uma função apenas de t . Substituindo a equação (3-40) na equação (3-39) obtém-se:

$$g(t) \frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right\} + mf(x) \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = 0 \quad (3-41)$$

Ou

$$\frac{1}{mf(x)} \frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right\} = \frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} \quad (3-42)$$

Os termos do lado esquerdo da equação (3-42), incluindo m e EI , são todos funções de x somente, enquanto os termos do lado direito são funções de t somente. A igualdade pode então ser mantida, desde que cada um dos dois lados da equação seja igual a uma constante, normalmente referida como constante de separação. Fazendo esta constante ser igual a ω^2 . A equação (3-42) conduz a duas equações separadas, como segue:

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \omega^2 g(t) = 0 \quad (3-43)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right\} = \omega^2 m f(x) \quad (3-44)$$

A equação (3-44) define um problema de autovalores para vibrações laterais de uma viga, esta equação pode ser reescrita como:

$$EI \frac{d^4 f(x)}{dx^4} = \omega^2 m f(x) \quad (3-45)$$

Chamando $\omega^2 m / EI = \beta^4$, pode-se escrever a equação (3-45) de uma maneira alternativa:

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} - \beta^4 f(x) = 0 \quad (3-46)$$

Para a equação (3-46), uma solução pode ser representada por:

$$f(x) = Ae^{\alpha x} \quad (3-47)$$

Onde A é uma constante arbitrária.

Substituindo $f(x)$ e sua derivada de quarta ordem na equação (3-46) obtém-se a seguinte equação característica:

$$\alpha^4 - \beta^4 = 0 \quad (3-48)$$

Ou:

$$(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) = 0 \quad (3-49)$$

A solução da equação (3-49) é dada por $\alpha = \pm\beta$ e $\alpha = \pm i\beta$, e a solução geral da equação (3-46) é dada por:

$$f(x) = D_1 e^{\beta x} + D_2 e^{-\beta x} + D_3 e^{i\beta x} + D_4 e^{-i\beta x} \quad (3-50)$$

$$f(x) = C_1 \cosh \beta x + C_2 \sinh \beta x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x$$

Onde D_i e C_i são constantes arbitrárias para serem determinadas pelas condições de contorno e iniciais.

Para uma viga simplesmente apoiada, as condições de contorno são:

$$f(x) = 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = L \quad (3-51)$$

$$EI \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = L$$

Substituindo as condições de (3-51) na equação (3-50) obtêm-se quatro equações:

$$C_1 + C_3 = 0 \quad (3-52)$$

$$C_1 - C_3 = 0$$

$$C_1 \cosh \beta L + C_2 \sinh \beta L + C_3 \cos \beta L + C_4 \sin \beta L = 0$$

$$C_1 \cosh \beta L + C_2 \sinh \beta L - C_3 \cos \beta L - C_4 \sin \beta L = 0$$

As equações em (3-60) podem ser reescritas como:

$$C_1 = C_3 = 0 \quad (3-53)$$

$$C_2 \sinh \beta L + C_4 \sin \beta L = 0$$

$$C_2 \sinh \beta L - C_4 \sin \beta L = 0$$

As equações em (3-53) por sua vez fornecem as seguintes relações:

$$C_2 \sinh \beta L = 0 \quad (3-54)$$

$$C_4 \sin \beta L = 0 \quad (3-55)$$

Desde que $\sinh \beta L$ não possa ser nulo, C_2 deve ser zero. A equação (3-55) pode ser satisfeita selecionando $C_4 = 0$. Isto irá, contudo, levar a solução trivial $f(x) = 0$, implicando uma condição estática. Uma solução não trivial é possível somente se

$$\sin \beta L = 0 \quad (3-56)$$

A equação (3-56) é uma equação de frequências que levará a um número infinito de valores β e então para as frequências ω .

Neste caso:

$$\beta L = n\pi \quad (a)$$

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (b) \quad (3-57)$$

Para uma viga engastada no seu lado esquerdo e livre no seu lado direito. As condições de contorno são neste caso:

$$f(x) = 0 \text{ em } x = 0 \quad (3-58)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \text{ em } x = 0$$

$$EI \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0 \text{ em } x = L \quad (3-59)$$

$$EI \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = 0 \text{ em } x = L$$

Substituindo as condições (3-58) e (3-23) na equação (3-50) obtêm-se quatro equações:

$$C_1 + C_3 = 0 \quad (3-60)$$

$$C_2 + C_4 = 0$$

$$C_1 \cosh \beta L + C_2 \sinh \beta L - C_3 \cos \beta L - C_4 \sin \beta L = 0$$

$$C_1 \sinh \beta L + C_2 \cosh \beta L - C_3 \sin \beta L - C_4 \cos \beta L = 0$$

As equações em (3-60) podem ser representadas na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh \beta L & \sinh \beta L & -\cos \beta L & -\sin \beta L \\ \sinh \beta L & \cosh \beta L & \sin \beta L & -\cos \beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (3-61)$$

As equações homogêneas em (3-61) podem apresentar valores não nulos para os coeficientes desconhecidos C_i somente se o determinante da matriz do lado esquerdo é zero. Isto leva à seguinte condição:

$$1 + \cosh \beta L \cos \beta L = 0 \quad (3-62)$$

A equação (3-62) é uma equação de frequências em que a solução pode ser obtida por métodos numéricos. Isso levará a um número infinito de valores β e então para as frequências ω .

Para uma viga sem suporte algum as condições de contorno neste caso são

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = L \quad (3-63)$$

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = L$$

As quatro equações de coeficientes desconhecidos C_1 à C_4 , obtidas pela aplicação das condições (3-63) na equação (3-50) podem ser representadas como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \cosh \beta L & \sinh \beta L & -\cos \beta L & -\sin \beta L \\ \sinh \beta L & \cosh \beta L & \sin \beta L & -\cos \beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (3-64)$$

Tornando o determinante da matriz do lado esquerdo da equação (3-64) nulo, obtém-se a seguinte equação de frequências:

$$1 - \cosh \beta L \cos \beta L = 0 \quad (3-65)$$

A equação (3-65) também é uma equação de frequências em que a solução pode ser obtida por métodos numéricos. Isso levará a um número infinito de valores β e então para as frequências ω .

Na análise de vibrações em estacas, o amortecimento do material da estaca é bem menor do que o amortecimento causado pelo solo que circunda a estaca. O amortecimento do solo faz parte do sistema de vibração, contudo é observado que para vibrações translacionais este não é muito significativo, nestes casos o amortecimento pode ser desconsiderado sem maiores efeitos (Chowdhury, 2009).

No caso de uma viga em base elástica, ou uma estaca embutida em um meio homogêneo e elástico, desconsiderando-se efeitos de amortecimento e considerando carregamentos nulos $p=0$, a equação (3-35) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -k_s u \quad (3-66)$$

A natureza da constante k_s será discutida no item 5.

Resolver a equação (3-66) para vibrações torna-se um problema mais complexo, especialmente quando as condições de contorno se tornam complicadas nos casos de estacas parcialmente embutidas, e nas condições em as propriedades do solo são variáveis. Hetenyi (1979) apresenta soluções da equação (3-66) na condição estática para vigas em base elástica em diversas condições de apoio.