



**Maiquel dos Santos Canabarro**

**Aplicação do Método de Casamentos de Modos com  
B-splines de Múltiplos Nós ao Estudo de Perfilagem de  
Poços Petrolíferos**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. José Ricardo Bergmann  
Co-orientador: Prof. Fernando Lisboa Teixeira

Rio de Janeiro  
Abril de 2016



## **Maiquel dos Santos Canabarro**

### **Aplicação do Método de Casamentos de Modos com B-splines de Múltiplos Nós ao Estudo de Perfilagem de Poços Petrolíferos**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. José Ricardo Bergmann**

Orientador

Centro de Estudos em Telecomunicações - PUC-Rio

**Prof. Fernando Lisboa Teixeira**

Co-Orientador

The Ohio State University - OSU

**Prof. Fernando José da Silva Moreira**

Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG

**Prof. Mauricio Henrique Costa Dias**

Instituto Militar de Engenharia – IME

**Prof. Sandro Rogério Zang**

Universidade Federal de São João del-Rei - FSJ

**Prof. Flávio José Vieira Hasselmann**

Centro de Estudos em Telecomunicações - PUC-Rio

**Prof. Márcio da Silveira Carvalho**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 04 de Abril de 2016

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Maiquel dos Santos Canabarro**

Graduado em Engenharia Elétrica na Universidade Federal de Santa Maria – UFSM em 2006, mestre em Engenharia Elétrica na área de Eletromagnetismo Aplicado na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em 2009. Atualmente é aluno de doutorado na área de Eletromagnetismo Aplicado na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro onde integra o grupo de métodos computacionais em teoria eletromagnética.

#### Ficha Catalográfica

Canabarro, Maiquel dos Santos

Aplicação do método de casamentos de modos com B-splines de múltiplos nós ao estudo de perfilagem de poços petrolíferos / Maiquel dos Santos Canabarro; orientador: José Ricardo Bergmann; co-orientador: Fernando Lisboa Teixeira. – 2016.

175 f. : il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica, 2016.

Inclui bibliografia

1. Engenharia elétrica – Teses. 2. Método de casamento de modos. 3. Exploração petrolífera. 4. Perfilagem de poços de petróleo. 5. Funções B-spline cúbica. 6. Multiplicidade de nós. I. Bergmann, José Ricardo. II. Teixeira, Fernando Lisboa. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. IV. Título.

Dedico este trabalho a minha esposa Camila:

“Se houver amor em sua vida, isso pode compensar muitas coisas que lhe fazem falta. Caso contrário, não importa o quanto tiver, nunca será o suficiente.”

— Friedrich Nietzsche —

## Agradecimentos

Ao meu Orientador Prof. José Ricardo Bergmann pelas inúmeras orientações, pela generosidade ao longo destes anos de parceria, e principalmente, pelos ensinamentos tanto no campo acadêmico quanto no campo pessoal, fundamentais para vencer os obstáculos que encontramos ao longo deste trabalho.

Ao meu Co-Orientador Prof. Fernando Lisboa Teixeira da The Ohio State University, pelo convite para realizar meu doutorado-sanduiche junto ao ElectroScience Laboratory. Pelas orientações e, principalmente, pela disponibilidade de imensa importância para a condução deste trabalho.

À minha esposa, Camila, esta pessoa mais que especial, por além de caminhar ao meu lado ao longo deste percurso. Por me mostrar sua generosidade, seu companheirismo, seu carinho, seu Amor ao me apoiar a enfrentar os obstáculos com fé e alegria. Obrigado Amor.

À minha Família: meus irmãos Rita e Moisés e, em especial, aos meus pais Miriam e Verci pelo carinho e pela educação recebida.

À família Pereira: Wilson, Ana, Matheus e Roberta pelo carinho e pelas visitas que ao longo dos anos nos alimentaram com a presença familiar.

Aos meus sogros Dalva e Aldenir, aos meus cunhados Gilson e Francisco pelo apoio e carinho.

Aos amigos Marcos, Raquel e a Carolzinha, pelos revigorantes encontros de trocas de experiências, pelo carinho, pelo apoio e receptividade e, principalmente, pelas celebrações que a vida nos proporciona quando conhecemos pessoas especiais como vocês.

Aos amigos Diego e Patrícia pela amizade, pelos encontros e conversas que traziam conforto e descontração ao dia a dia.

Aos amigos Rafael, Guilherme e Sandro pelas infinitas trocas e apoio ao longo deste trabalho e, principalmente, pela relação de amizade.

Aos colegas do CETUC/PAA, Daniele, Keyla, Marco Aurélio, Fabrício, André pela amizade e companheirismo no dia a dia do trabalho.

Aos funcionários da PUC-Rio, em especial, às Anas Sergio, à Célia e à Alcina.

Ao CNPq, pelos auxílios concedidos a este trabalho.

À CAPES, pelos auxílios concedidos, oportunizando meu doutorado-sanduiche junto a The Ohio State University.

Ao ElectroScience Laboratory of The Ohio State University pelo aceite e pela acolhida durante meu doutorado-sanduiche em Columbus, OH-EUA.

À PUC-Rio, pelas isenções, sem as quais esse trabalho não poderia ter sido realizado.

À energia do Universo que nos alimenta e nos ensina a viver a vida com sabedoria.

## Resumo

Canabarro, Maiquel dos Santos; Bergmann, José Ricardo; Teixeira, Fernando Lisboa. **Aplicação do Método de Casamentos de Modos com B-splines de Múltiplos Nós ao Estudo de Perfilagem de Poços Petrólíferos.** Rio de Janeiro, 2016. 175p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

No processo de perfilagem de poços de petróleo e gás, as propriedades entre duas camadas axiais podem apresentar diferenças. Estas descontinuidades das propriedades algumas vezes trazem dificuldades na representação do comportamento dos campos electromagnéticos. Nas análises eletromagnéticas de perfilagem de poço de petróleo, o Método de Casamento de Modos (NMM) vem sendo utilizado a partir da combinação de técnicas numéricas com analíticas e da resolução das equações de Maxwell em meios heterogêneos, cujos campos electromagnéticos, na direção axial, são representados via decomposição espectral, e, na direção radial, por meio de solução das equações diferenciais ordinárias. Assim, com o objetivo de explorar a representação dos campos electromagnéticos sobre as interfaces axiais via NMM, este trabalho propõe a utilização de funções B-Splines cúbicas na expansão dos campos, na direção axial, bem como a incorporação da multiplicidade de nós, que permitem uma melhor representação do comportamento dos campos nas interfaces axiais. O algoritmo implementado foi validado nas suas diversas etapas ao comparar os autovalores da representação modal com os obtidos analiticamente em problemas canônicos, e os resultados finais comparados com exemplos apresentados na literatura e calculados com o Método de Diferenças Finitas no Tempo (FDTD). O método NMM, combinado às funções B-Splines cúbicas, foi aplicado a vários perfis de poços de petróleo que serviram de exemplo neste estudo. Um estudo comparativo mostrou que o uso das funções B-Splines cúbicas com multiplicidade dos nós sobre as descontinuidades permitiu uma redução no número total de nós nas expansões dos campos electromagnéticos.

## Palavras-chave

Método de casamento de modos; exploração petrolífera; perfilagem de poços de petróleo; funções B-Spline cúbica; multiplicidade dos nós.

## Abstract

Canabarro, Maiquel dos Santos; Bergmann, José Ricardo (Advisor); Teixeira, Fernando Lisboa (Co-advisor). **Application of Numerical Mode-Matching Method in the study of well logging oil with multiple knots.** Rio de Janeiro, 2016. 175p. PhD. Dissertation - Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In the logging process of gas and oil wells, differences in the properties between two axial layers can usually be found. These property discontinuities can bring difficulties for the representation of electromagnetic fields behavior. For electromagnetic analysis of well logging, the Numerical Mode-Matching - NMM method has been used. It combines numerical and analytical techniques, by solving equations Maxwell's in a heterogeneous media. There, the electromagnetic fields in the axial direction are represented by spectral decomposition and in the radial direction are represented by the solution of Ordinary Differential Equations (ODE). With the objective of explorer the representation of the electromagnetic fields on axial interfaces in the Numerical Mode Matched Method, this work explores the use of B-Splines cubic functions to expand the fields in the axial direction, as well as the incorporation of the multiple knots fetching to become the representation of fields behavior most optimized and realistic on axial interfaces. The NMM algorithm was implemented and it was validated by comparing the final results with those obtained by using Finite Difference Time-Domain – FDTD to analyse examples shown in the literature. To validate the results obtained for the eigenvalues, they were compared with the analytical solutions obtained for canonical configurations. The use of NMM Method combined with B-Spline cubic has been applied to several well profiles shown in the literature. The comparative study showed that the use B-Spline cubic with multiple knots near the discontinuities allows a reduction in the overall number of knots employed in the field expansion.

## Keywords

Numerical Mode Matching; oilfield exploration; resistivity; well-logging tools; LWD; B-spline Cubic; Mulitple Knots.

## Sumário

1	Introdução	18
1.1	Contextualização do Problema	18
1.2	Organização da Tese	23
2	Cenário presente na perfilagem de poços de petróleo	25
2.1	Introdução	25
2.2	Formações na perfilagem	26
2.3	Ferramentas de perfilagem	28
3	Métodos de Casamento de Modos com multiplicidades de nós	31
3.1	Introdução	31
3.2	Formulação do NMM	34
3.2.1	Multicamadas cilíndricas	45
3.2.2	Cálculo da Transimpedância nos receptores	49
3.2.3	Autofunções – B-splines cúbicas	53
3.2.4	Formulação do NMM para o caso de bobinas transversais ao eixo axial	56
3.3	Perfectly Matched Layer – PML	58
3.3.1	Análise de alguns parâmetros da PML	62
3.4	Validação do algoritmo de análise via autovalores	67
3.4.1	Caso equivalente com meios isotrópicos sem perdas	69
3.4.2	Caso equivalente com meios isotrópicos com perdas	73
3.4.3	Caso equivalente com meios anisotrópicos com perdas	77
3.5	Validação do algoritmo de análise NMM em perfilagem de poços de petróleo	81
3.5.1	Escolha da grade de discretização nas análises de perfilagem	81
3.5.2	Validação em meio com alto contraste entre as camadas	82

4 Perfilagens analisadas via NMM com funções B-Splines cúbicas e multiplicidade dos nós	86
4.1 Introdução	86
4.2 NMM com B-Spline cúbica em ferramenta LWD – 100 kHz	87
4.3 NMM com B-Spline cúbica em ferramenta LWD – 500 kHz	90
4.4 NMM com B-Spline cúbica em ferramenta LWD – 2 MHz	93
4.5 NMM com B-Spline cúbica em ferramenta LWD – 25 MHz	95
4.6 NMM com múltiplos nós em ferramenta LWD – 100 kHz	98
4.7 NMM com múltiplos nós em ferramenta LWD – 500 kHz	105
4.8 NMM com múltiplos nós em ferramenta LWD – 2 MHz	111
5 NMM com multiplicidade de nós com a ferramenta CDR	117
5.1 Introdução	117
5.2 Obtenção das Resistividades Aparentes	119
5.3 Efeito da Rugosidade em poço analisado pela CDR/NMM com múltiplos nós	121
5.4 Resolução vertical da CDR/NMM com múltiplos nós	126
6 Considerações Finais	134
6.1 Conclusões	134
6.2 Trabalhos Futuros	136
Referências Bibliográficas	137
Anexo A Representação matemática de bobinas inclinadas (TCA: tilted coil antennas)	141
Anexo B Componente z da equação de onda	143
Anexo C Condições de radiação da fonte na direção radial	156
Anexo D Algébrica para achar a componente transversal do campo	160

Anexo E Integral de Radiação para uma bobina	166
Anexo F Campos Modais para o caso equivalente	167
F.1 Solução da Equação da Onda para o Modo TM	169
F.2 Solução da Equação de Onda para o Modo TE	171
F.3 Solução Modal para guia de placas paralelas (PEC ou PMC) não homogêneo com anisotropia uniaxial	171
F.4 Autovalores para o Modo $TM^z$	173
F.5 Autovalores para o Modo $TE^z$	175

## Lista de figuras

Figura 1.1 – Ilustração dos possíveis geodirecionamentos durante a perfilagem dos poços petrolíferos. (a) perfilagem vertical, (b) perfilagem horizontal (c) perfilagem oblíqua. ....	20
Figura 1.2 – Ilustração qualitativa de possíveis discretizações na direção axial necessárias para representação dos campos eletromagnéticos pelas funções B-splines sem a multiplicidade dos nós (a) e com a multiplicidade dos nós (b).....	23
Figura 2.1 – Ilustração da configuração convencional da ferramenta LWD (a) e configuração da ferramenta LWD com TCAs (b). ....	30
Figura 3.1 – Ilustração coeficiente recursivo em casos de multi-camadas na direção radial, sentido direita. ....	48
Figura 3.2 – Ilustração coeficiente recursivo em casos de multi-camadas na direção radial, sentido esquerda. ....	48
Figura 3.3 – Ilustração coeficiente recursivo na camada das fontes. ....	50
Figura 3.4 – B-spline cúbica composta de seus quatro polinômios base espaçados uniformemente. ....	55
Figura 3.5– Os quatro polinômios base que constituem a B-spline cúbica. ....	55
Figura 3.6 – Efeito da multiplicidade na B-spline cúbica. ....	56
Figura 3.7 – Função erro da tensão da análise de desempenho da PML para diferentes configurações de parâmetros em 100KHz. Legenda n° de camadas da PML, fator multiplicativo, $a_z$ , $\Omega_z$ , m). ....	63
Figura 3.8 – Função erro da fase da análise de desempenho da PML para diferentes configurações de parâmetros em 100 KHz. Legenda n° de camadas da PML, fator multiplicativo, $a_z$ , $\Omega_z$ , m). ....	64
Figura 3.9 – Função erro da tensão da análise de desempenho da PML para diferentes configurações de parâmetros em 2MHz. Legenda n° de camadas da PML, fator multiplicativo, $a_z$ , $\Omega_z$ , m). ....	64

Figura 3.10 – Função erro da fase da análise de desempenho da PML para diferentes configurações de parâmetros em 2MHz. Legenda (nº de camadas da PML, fator multiplicativo, $a_z$ , $\Omega_z$ , m). .....	65
Figura 3.11 – Função erro da tensão da análise de desempenho da PML para diferentes configurações de parâmetros em 25 MHz. Legenda nº de camadas da PML, fator multiplicativo, $a_z$ , $\Omega_z$ , m). .....	65
Figura 3.12 – Função erro da fase da análise de desempenho da PML para diferentes configurações de parâmetros em 25 MHz. Legenda (nº de camadas da PML, fator multiplicativo, $a_z$ , $\Omega_z$ , m). .....	66
Figura 3.13 – Perfil do problema equivalente de duas placas com duas camadas distintas.....	68
Figura 3.14 – Problema equivalente de duas placas com duas camadas distintas com $d=1000m$ , e $a=500m$ .....	70
Figura 3.15 – Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TM, comparação com e sem multiplicidade dos nós para caso isotrópico sem perdas. ....	71
Figura 3.16 – Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TE, comparação com e sem multiplicidade dos nós para caso isotrópico sem perdas. ....	71
Figura 3.17 – Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TM, comparação com diferentes grades de discretização dos meios com multiplicidade dos nós para caso isotrópico sem perdas. ....	72
Figura 3.18– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TE, comparação com diferentes grades de discretização dos meios com multiplicidade dos nós para caso isotrópico sem perdas.	73
Figura 3.19– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TM, comparação da resposta das autofunções com (MK) ou sem (SK) multiplicidade dos nós em sua formulação, para o caso equivalente de meios isotrópicos com perdas. ....	75
Figura 3.20– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TE, comparação da resposta das autofunções com (MK) ou sem (SK) multiplicidade dos nós em sua formulação, para o caso equivalente de meios isotrópicos com perdas. ....	75

Figura 3.21– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TM, comparação com diferentes grades de discretização dos meios com multiplicidade dos nós para caso isotrópico com perdas.	76
Figura 3.22– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TE, comparação com diferentes grades de discretização dos meios com multiplicidade dos nós para caso isotrópico com perdas. ....	77
Figura 3.23– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TM, comparação da resposta das autofunções com (MK) ou sem (SK) multiplicidade dos nós em sua formulação, para o caso equivalente de meios anisotrópicos com perdas.....	78
Figura 3.24– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TE, comparação da resposta das autofunções com (MK) ou sem (SK) multiplicidade dos nós em sua formulação, para o caso equivalente de meios anisotrópicos com perdas.....	79
Figura 3.25– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TM, comparação com diferentes grades de discretização dos meios com multiplicidade dos nós para caso anisotrópico com perdas. ..	80
Figura 3.26– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TE, comparação com diferentes grades de discretização dos meios com multiplicidade dos nós para caso anisotrópico com perdas. ..	80
Figura 3.27– Layout do perfil apresentando alto contraste de condutividades. ....	83
Figura 3.29– Diferença de fase entre os receptores imersos na formação com alto contraste de condutividade. ....	85
Figura 4.1– Layout do perfil analisado com a ferramenta operando na frequência de 100 kHz. ....	88
Figura 4.2– Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 100 kHz.....	89
Figura 4.3– Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 100 kHz.....	90
Figura 4.4– Layout do perfil analisado com a ferramenta operando na frequência de 500kHz. ....	91

Figura 4.5– Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 500 kHz.....	92
Figura 4.6– Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 500 kHz.....	92
Figura 4.7– Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 2 MHz.....	94
Figura 4.8– Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 2 MHz.....	95
Figura 4.9– Layout do perfil analisado com a ferramenta operando na frequência de 25 MHz. ....	96
Figura 4.10– Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 25 MHz.....	97
Figura 4.11– Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 25 MHz.....	98
Figura 4.12– Layout do perfil analisado com a ferramenta operando na frequência de 100 kHz. ....	100
Figura 4.13– Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 100 kHz para grade 1.....	101
Figura 4.14– Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 100 kHz para grade 1.....	101
Figura 4.15– Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 100 kHz para grade 2.....	102
Figura 4.16– Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 100 kHz para grade 2.....	103
Figura 4.17– Razão das amplitudes dos receptores para SK-G1 e MK-G2 em 100 kHz.....	104
Figura 4.18– Diferença de fase entre os receptores para SK-G1 e MK-G2 em 100 kHz.....	104
Figura 4.19 – Layout do perfil analisado com a ferramenta operando na frequência de 500 kHz. ....	106
Figura 4.20 – Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 500 kHz para grade 1.....	107

Figura 4.21 – Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 500 kHz para grade 1.....	107
Figura 4.22 – Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 500 kHz para grade 2.....	108
Figura 4.23 – Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 500 kHz para grade 2.....	109
Figura 4.24 – Razão das amplitudes dos receptores para SK-G1 e MK-G2 em 500 kHz.....	110
Figura 4.25 – Diferença de fase entre os receptores para SK-G1 e MK-G2 em 500 kHz.....	110
Figura 4.26 – Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 2 MHz para grade 1. ....	112
Figura 4.27 – Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 2 MHz para grade 1. ....	112
Figura 4.28 – Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 2 MHz para grade 2. ....	113
Figura 4.29 – Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 2 MHz para grade 2. ....	114
Figura 4.30 – Razão das amplitudes dos receptores para SK-G1 e MK-G2 em 2 MHz.....	115
Figura 4.31 – Diferença de fase entre os receptores para SK-G1 e MK-G2 em 2 MHz.....	115
Figura 5.1 – Ferramenta LWD CDR. ....	118
Figura 5.2 – Gráfico de transformação de diferença de fase para resistividade $R_{ps}$ , [9]. ....	120
Figura 5.3 – Gráfico de transformação de atenuação (razão) para resistividade $R_{da}$ , [9]. ....	121
Figura 5.4 – Perfil com presença de rugosidade de 0,0635 m. ....	123
Figura 5.5 – Resposta a análise da rugosidade observada somente pelo transmissor 2 (similar ao comportamento de uma ferramenta clássica). ....	124
Figura 5.6 – Resposta a análise da rugosidade observada pelos transmissores 1 e 2. ....	125

Figura 5.7 – Resposta à análise da rugosidade observada pelos transmissores 1 e 2 via NMM com multiplicidade de nós.....	125
Figura 5.8 – Perfil com presença de uma camada de espessura igual a 0,1524 m. ....	128
Figura 5.9 – Resposta à análise da camada de espessura de 0,1524 m com (MK) e sem (SK) multiplicidade de nós com $R_t=0.3 \Omega.m.$ .....	129
Figura 5.10 – Perfil com presença de camadas de espessuras igual a 0,3048 m e 1,2192 m com $R_t=0,3 \Omega.m.$ .....	130
Figura 5.11 – Resposta à análise das camadas com espessuras de 0,3048 m e 1,2192 m com (MK) e sem (SK) multiplicidade de nós com $R_t=0,3 \Omega.m.$ .....	131
Figura 5.12 – Perfil com presença de camadas de espessuras igual a 0,3048 m e 1,2192 m com $R_t=10 \Omega.m.$ .....	132
Figura 5.13 – Resposta à análise das camadas com espessuras de 0,3048 m e 1,2192 m com (MK) e sem (SK) multiplicidade de nós com $R_t=10 \Omega.m.$ .....	133
Figura A.1– A densidade de corrente ao longo da TCA e suas relações trigonométricas com seus eixos de simetria. ....	141
Figura F.0.1 – Guia de placas paralelas.....	172

# 1

## Introdução

### 1.1

#### Contextualização do Problema

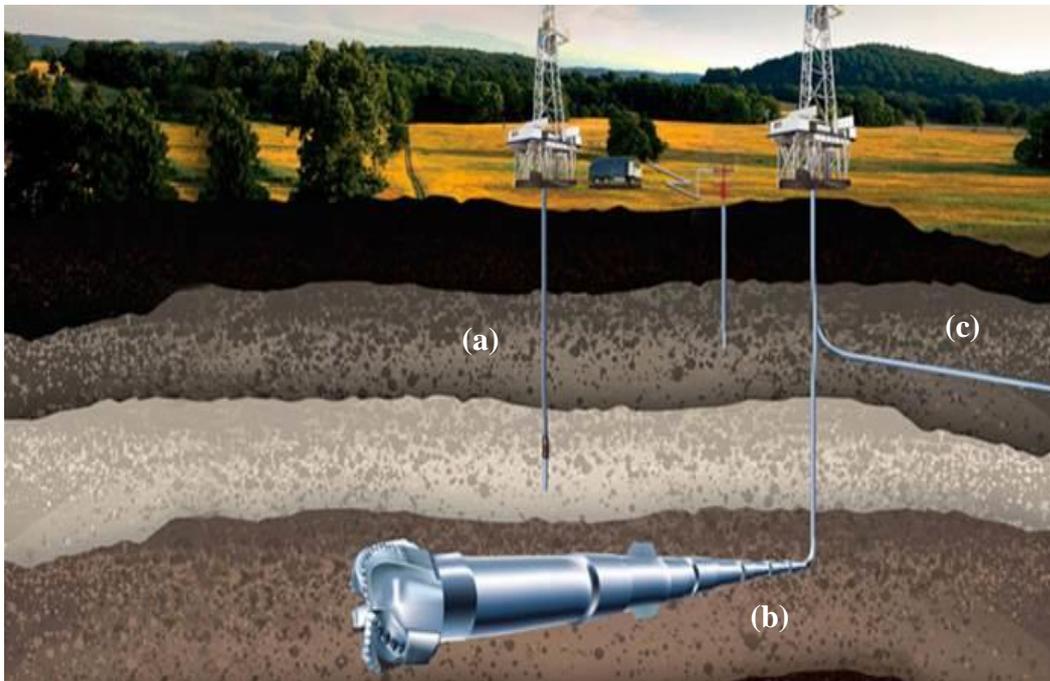
A indústria petrolífera, ao longo dos anos, vem apresentando um contínuo desenvolvimento de ferramentas que buscam, de forma eficaz, informar e/ou representar os perfis dos poços de exploração de petróleo e gás, especialmente as propriedades físicas da formação. As informações acerca de tais propriedades, dependendo das características da ferramenta, podem resultar em parâmetros elétricos, magnéticos e geológicos da formação. As ferramentas de perfilagem eletromagnética (EM) apresentam como fator determinante de utilização, no processo de perfilagem, a capacidade de analisar a resistividade da formação. Este parâmetro permite indicar, de forma simples, a presença ou ausência de hidrocarbonetos, em função destes serem caracterizados por propriedades elétricas isolantes.

O mecanismo de funcionamento das ferramentas EM pode ser explicado de forma simplificada como um par de antenas espirais devidamente espaçadas dentro do poço de exploração, onde a antena transmissora é excitada por uma corrente alternada (AC), a qual induz um campo eletromagnético que se propaga através da formação, induzindo uma corrente elétrica na antena receptora. Assim,

a taxa de corrente recebida é diretamente proporcional à condutividade da formação, o que permite estimar a resistividade da formação.

As análises dos perfis dos poços de exploração de petróleo são norteadas pela correlação entre as propriedades da formação, obtidas pela ferramenta de perfilagem, e as propriedades dos materiais, conhecidas previamente e obtidas em laboratório. Isso permite aos especialistas tomar decisões sobre a formação explorada. Para obter essas propriedades, as técnicas de perfilagem estão em constante evolução. Tradicionalmente, utilizava-se a técnica conhecida como *wireline*, a qual obtia os perfis dos poços pelo deslocamento ascensional da ferramenta pelo poço de exploração, realizando as medidas que seriam analisadas posteriormente. Recentemente, pesquisadores e a própria indústria petrolífera vêm utilizando as técnicas denominadas *Logging-While-Drilling/Masurement-While-Drilling* (LWD/MWD) que, em tradução livre, podem ser interpretadas como Realização, Simultaneamente de Medidas e Gravações Durante o Processo de Perfilagem, o que indica que as medidas podem ser obtidas em tempo real. Isso a tornou uma das técnicas mais utilizadas atualmente, pois, na exploração de poços, sejam eles verticais, horizontais ou inclinados, Figura 1.1, a tomada de decisões online pode traduzir-se em consideráveis reduções de custos operacionais. Embora os sensores, nas técnicas LWD/MWD, sejam incorporados na mesma ferramenta, os parâmetros entre eles apresentam uma diferença: enquanto os sensores LWD são responsáveis por medir as propriedades físicas da formação, os MWD ficam imbuídos de medir os parâmetros geométricos do poço e as propriedades mecânicas de sua perfuração. Os dados coletados pelos sensores LWD são armazenados

na memória de seu sistema e recuperados quando a ferramenta retorna para a superfície. Entretanto, os dados dos sensores MWD são transmitidos através do fluido de perfuração, por meio de uma onda de pressão modulada - *mud pulsing*, e monitorados em tempo real [1].



**Figura 1.1 – Ilustração dos possíveis geodirecionamentos durante a perfuração dos poços petrolíferos. (a) perfuração vertical, (b) perfuração horizontal (c) perfuração oblíqua.**

De forma sucinta pode-se dizer que as ferramentas EM apresentam características pertinentes ao processo de perfuração petrolífera, pois, a partir da condutividade relativa da formação que envolve a região de perfuração dos poços de petróleo, podem-se realizar estudos mais complexos da formação. Dentre eles estão, por exemplo, estudos acerca da heterogeneidade e da anisotropia do meio e análises de regiões de invasões de fluido de perfuração. Além disso, pode-se analisar o efeito causado pelo deslocamento da ferramenta em relação ao eixo do poço, conhecido como *eccentricity borehole*. Assim, percebe-se que estas ferramentas podem fornecer uma gama de características que se aproximam de casos reais encontrados pela indústria petrolífera em ambiente de exploração.

Com os avanços do poder computacional, os métodos numéricos, como o Método de Diferenças Finitas no Tempo (FDTD) [2], [3], e o Método de Volumes Finitos (FVM) [4], [5], puderam ser aplicados em ambientes com maior complexidade geológica, o que resultou em ótimos desempenhos. Tais métodos possibilitam, inclusive, análises de casos com perfuração de poços verticais, horizontais e oblíquos.

Embora estes avanços computacionais venham colaborando com o processo de análise, o alto tempo computacional envolvido ainda é um fator negativo relevante. Tal fato tem levado pesquisadores a desenvolver métodos tanto analíticos quanto numéricos, que contribuam para a agilidade do processo mantendo uma boa concordância com métodos mais robustos.

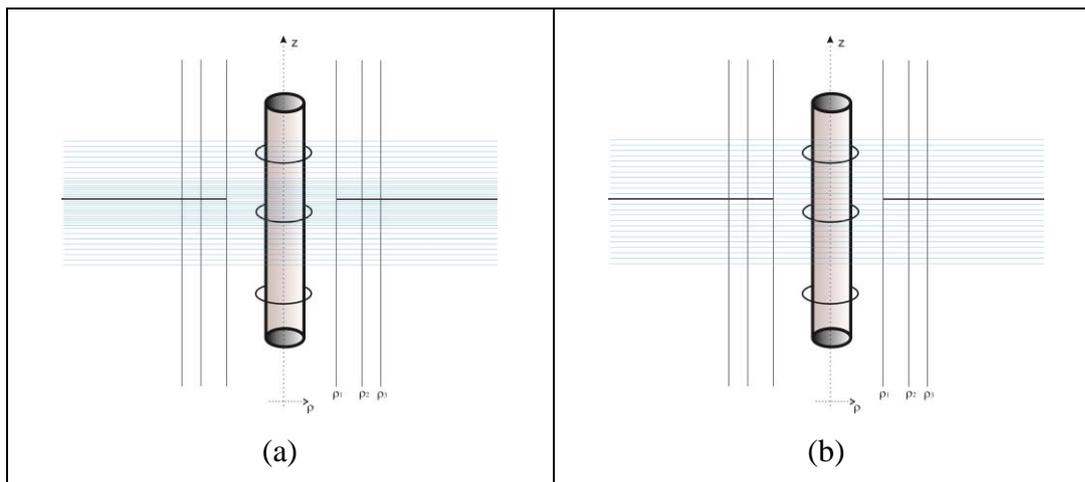
Estes métodos são constituídos por transmissores/receptores que, atualmente, caracterizam-se, na literatura, como antenas em forma de bobinas espirais, as quais são dispostas de diferentes formas à ferramenta, proporcionando variadas leituras das especificidades da formação ao redor do poço. As antenas mais utilizadas são as transversais ao eixo axial da ferramenta, que, por sua orientação espacial, irradiam os modos Transversais Elétricos (TE). Outra classe de antenas são as espirais inclinadas, chamadas de *Tilted-Coil-Antennas* (TCAs), as quais acrescentam aos métodos a sensibilidade de azimute, que, por conseguinte, irradia os modos Transversais Elétricos (TE) e Transversais Magnéticos (TM).

Nesta tese, busca-se desenvolver e aperfeiçoar o Método de Casamento de Modos (NMM), que se encaixa na classe dos métodos que buscam agilidade ao processo de análises de perfilagem de poços de petróleo, mantendo seus resultados similares, em certos casos, aos métodos mais robustos. A formulação

inicial deste método é encontrada em autores como Pai, Chew e Hue, [6], [7], [8]. Esta combina técnicas numéricas com analíticas, resolvendo/satisfazendo as equações de Maxwell na heterogeneidade de uma das direções (transversal/longitudinal, após a decomposição espectral) via sistema linear de autovetores e autovalores, e na direção remanescente pelo uso de modos propagantes que descrevem os campos por meio da solução de Equações Diferenciais Ordinárias (ODE), respectivamente.

O uso das técnicas numéricas para representação dos campos explicitamente acarreta truncamentos na representação destes campos; logo, um fator a ser considerado são as funções que serão utilizadas para esta representação: triangulares, senoidais, Polinômios de Laguerre ou B-splines; já que todas podem ser utilizadas para este fim.

Por esse motivo, as contribuições deste trabalho perpassam a escolha das funções B-splines cúbicas como autofunções a serem utilizadas na representação da decomposição espectral, bem como a sua característica de multiplicidade dos nós que, incorporada ao método de casamentos de modos permite representar o comportamento dos campos nas interfaces axiais de forma mais otimizada e realística, conforme ilustra a Figura 1.2. Este assunto será desenvolvido e exemplificado no decorrer do texto.



**Figura 1.2 – Ilustração qualitativa de possíveis discretizações na direção axial necessárias para representação dos campos eletromagnéticos pelas funções B-splines sem a multiplicidade dos nós (a) e com a multiplicidade dos nós (b).**

## 1.2

### Organização da Tese

O texto desta tese está dividido em seis capítulos que indicam, do ponto de vista metodológico, a tentativa de sistematização e articulação de diferentes aspectos relacionados à implementação das contribuições ao método de casamento de modos aplicado às análises de perfilagem de poços de petróleo.

O Capítulo 1 dedica-se à introdução da temática desta tese, assim como apresenta um breve resumo da organização do texto.

No Capítulo 2, é apresentado o cenário no qual esta tese se inclui: as particularidades dos meios geológicos e das ferramentas utilizadas no processo de perfilagem para o processo de coleta de dados.

O Capítulo 3 aborda o método de casamento de modos propriamente dito, em que, inicialmente, é apresentada uma revisão bibliográfica da evolução do método até chegar à formulação aplicada neste trabalho. No decorrer do capítulo, é abordada a formulação das autofunções do tipo B-splines cúbicas, cujas

características são explanadas de forma mais detalhada, bem como sua principal contribuição, a multiplicidade de nós, que torna esta uma função mais atrativa para representar os campos eletromagnéticos sobre as interfaces. Por fim, é apresentada uma coleção de resultados, a qual ilustra a convergência do algoritmo implementado comparado à literatura. São mostrados, também, resultados de alguns casos que buscam ilustrar o desempenho das contribuições incluídas ao método de casamento de modos.

O Capítulo 4 desta tese exhibe resultados de estudos comparativos. São exploradas as potencialidades das contribuições com a inclusão das funções B-splines cúbicas à formulação do método de casamento de modos. Além disso, são evidenciadas as contribuições agregadas ao método quanto à utilização da multiplicidade dos nós em diferentes cenários que podem ser encontrados durante o processo de perfilagem de poços de petróleo.

O Capítulo 5 apresenta estudos de desempenho das contribuições incorporadas ao método de casamento de modos. Como exemplo destas, estão as funções B-splines cúbicas e multiplicidade dos nós, associadas à ferramenta de múltiplos transmissores, denominada *Compensated Dual Resistivity* (CDR), [9]. Esta ferramenta permite obter melhores análises na detecção de efeitos devidos a rugosidades nas paredes de poços petróleo, assim como a detecção de finas camadas axiais durante o processo de perfilagem de poços de petróleo.

O Capítulo 6 dedica-se a apresentar as considerações finais do trabalho. São revisitados os resultados dos casos abordados ao longo do texto. Também, é feito um fechamento em torno das continuações e dos trabalhos futuros que esta pesquisa pode proporcionar à área que se destina.

## 2

### Cenário presente na perfilagem de poços de petróleo

#### 2.1

##### Introdução

Na indústria petrolífera, da descoberta de um poço de petróleo à extração de seus produtos, há uma gama de processos complexos. Em linhas gerais, estes se iniciam pelos estudos geológicos preliminares da formação a ser perfilada, passam pela escolha da ferramenta mais adequada a ser empregada até chegar às análises de dados oriundos da perfilagem propriamente dita.

Com o aumento do poder computacional das últimas décadas, a indústria petrolífera, juntamente com pesquisadores, busca desenvolver técnicas/métodos de forma a aperfeiçoar e melhorar o custo/benefício destes processos. Tal aperfeiçoamento tem passado principalmente pela otimização das ferramentas de perfilagem, a fim de que elas proporcionem melhores análises das propriedades elétricas, magnéticas e acústicas das vizinhanças do poço de petróleo (subentende-se “vizinhança” como formação), [1]. Cabe ressaltar que, nesta tese, somente serão abordadas análises das propriedades eletromagnéticas.

A literatura especializada utiliza o termo *well-logging* para referir-se à perfilagem de poços de petróleo. Tal vocábulo pode ser traduzido como coleta/aquisição das propriedades da formação que está sendo perfilada. Este processo relaciona características como permeabilidade, permissividade e

condutividade versus a profundidade. Este processo de avaliação da formação por perfilagem pode ser subdividido em duas técnicas: A primeira refere-se à coleta dos dados posteriormente à perfuração do poço e é denominada *wireline logging*. Ela transmite dados coletados durante a perfuração somente após a conclusão do processo. Esta técnica, até algumas décadas atrás, era a predominante. Refere-se basicamente à metodologia de comparação entre tabelas/fórmulas das propriedades da formação que, previamente, foram adquiridas via ensaios laboratoriais, por exemplo, para a interpretação dos dados coletados, e, assim, traça os perfis da formação que engloba o poço recém-perfilado pela ferramenta.

Com o aumento do poder computacional, uma segunda técnica chamada de *measurement-while-drilling* (MWD) ou ainda *logging-while-drilling* (LWD) foi desenvolvida, sendo esta ultimamente utilizada em larga escala por consistir na leitura e transmissão simultânea de dados, aspecto que agregou a possibilidade de geoprocessamento às ferramentas.

As próximas seções apresentarão uma breve revisão das características que envolvem a análise das propriedades eletromagnéticas no processo de perfilagem de um poço de petróleo, no que tange à formação que engloba o poço, assim como às ferramentas utilizadas neste processo.

## 2.2

### Formações na perfilagem

Com o intuito de analisar as respostas que as ferramentas de perfilagem encontram durante o processo de perfuração, pode-se categorizar a formação terrestre através de suas propriedades elétricas, como a permissividade, a

permeabilidade e a condutividade, as quais podem apresentar variações em diferentes direções no interior de uma mesma camada.

Alguns cenários encontrados nas formações geológicas podem ser destacados: os homogêneos, cujas propriedades constitutivas são homogêneas; e os heterogêneos, que se apresentam estratificados em camadas com espessuras variadas, podendo diferenciar aleatoriamente, assim como suas propriedades constitutivas.

Outro cenário encontrado é o fenômeno de invasão de fluído, que pode ocorrer durante o processo de perfilagem devido à porosidade das rochas e, assim, permite que o fluído utilizado infiltre no processo de perfuração – chamado de *mud*, ou em tradução livre, de lama. Usualmente, este fluído é constituído de água ou óleo, os quais apresentam alta ou baixa condutividade, respectivamente. Assim, com a infiltração do fluído na formação, caracteriza-se uma região entre o poço e a formação que apresenta uma condutividade intermediária entre a condutividade da lama e da formação, [1].

Dentre os cenários apresentados, um dos mais complexos é o que apresenta anisotropia elétrica em sua formação. Esse cenário pode ser originado por diferentes fatores, como, por exemplo, infiltração do fluído de perfuração em fraturas na formação. Estas fraturas podem ser preexistentes ou causadas pela ferramenta durante a perfilagem. Como estas fraturas normalmente ocorrem na direção perpendicular de perfuração, as condutividades paralelas a esse plano sofrerão uma maior alteração, [1], [10]. Estes mesmos autores destacam que a busca por uma melhor representação do comportamento da anisotropia elétrica nas formações tem mobilizado diferentes pesquisadores, pois este efeito

representa uma fonte significativa de erros na análise numérica da resposta das ferramentas eletromagnéticas no processo de perfilagem de poços petrolíferos.

Conforme citado em [1], a resistividade do meio pode ser considerada o mais importante entre os parâmetros medidos pelos sensores eletromagnéticos LWD/MWD, devido ao fato de estar ligada à determinação da quantidade relativa de hidrocarbonetos presente na formação. Altas resistividades indicam a possível presença de óleo e gás nos poros das rochas, uma vez que hidrocarbonetos são isolantes. Por outro lado, resistividades baixas indicam que outros fluídos podem estar presentes nas formações.

## 2.3

### Ferramentas de perfilagem

Com a contínua evolução da indústria petrolífera, as ferramentas aplicadas à perfilagem dos poços de petróleo podem apresentar diferentes características e configurações, dentre as quais a frequência de operação que pode variar de kHz a MHz, influenciada pela necessidade de penetração ou não dos sinais na formação. Tratam-se de diferentes configurações, como diferentes números de antenas transmissoras e receptoras, conforme apresentado em trabalhos e patentes americanas, [3], [9], [11], [12]. Como explanado em [1], o princípio de funcionamento destas ferramentas de perfilagem pode ser resumido pela configuração de duas espiras circulares operando em uma determinada frequência no interior de um poço de petróleo. Nesse contexto, se existir uma corrente alternada circulante na espira transmissora, induz-se um campo eletromagnético na formação, que se propaga por esta até a espira receptora, induzindo nesta uma

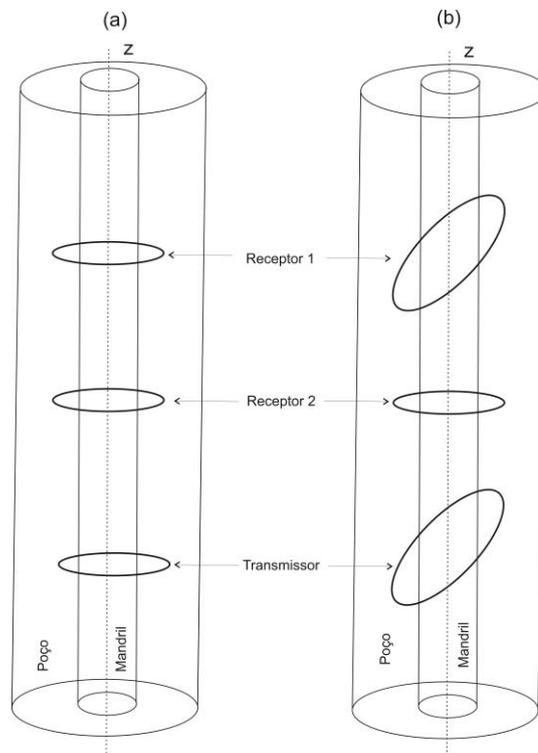
corrente elétrica, na qual a amplitude da corrente é proporcional à condutividade da formação.

As ferramentas de perfilagem aplicadas na atualidade são normalmente as *Logging-While-Drilling/Masurement-While-Drilling* (LWD/MWD), que apresentam melhor relação custo/benefício, pois permitem a leitura *online* do processo, possibilitando a tomada de decisões sobre o geodirecionamento de poços que não sejam verticais; e minimizando o deslocamento das plataformas da superfície durante o processo de perfilagem, o que resulta na redução dos custos e dos riscos ambientais.

Embora se encontre na literatura somente a LWD como ferramenta que efetua as leituras *online*, cabe ressaltar que os sensores medidores das propriedades físicas da formação não são transmitidos exatamente *online*, este termo se refere, na realidade, às medidas realizadas pelos sensores do MWD, que medem as propriedades geométricas e mecânicas da ferramenta e, assim, permitem o geodirecionamento, por exemplo. Estas informações são transmitidas *online*, através de uma onda pulsada, chamada de *mud pulsing*, que utiliza o fluido de perfuração como meio propagador para a transmissão dos sinais até a superfície.

Entre as diversas configurações de transmissores/receptores encontradas na indústria petrolífera exploratória, a configuração composta de um transmissor e dois receptores pode ser considerada como clássica, pois os sensores eletromagnéticos (antenas espirais) são dispostos entorno do mandril de perfuração, conforme ilustrado na Figura 2.1. A literatura denomina as antenas dispostas transversalmente ao eixo de simetria da ferramenta como convencionais, já que foram inicialmente utilizadas em larga escala nas ferramentas, conforme

Figura 2.1a. Outra configuração das antenas são as chamadas espiras inclinadas – *tilted coil antennas*, conforme Figura 2.1b, as quais possibilitam uma sensibilidade azimutal aos dados.



**Figura 2.1 – Ilustração da configuração convencional da ferramenta LWD (a) e configuração da ferramenta LWD com TCAs (b).**

### 3

## Métodos de Casamento de Modos com multiplicidades de nós

### 3.1

#### Introdução

Ao longo dos anos, as pesquisas na área de eletromagnetismo foram direcionadas para a busca de modelos numéricos que permitissem a predição do comportamento eletromagnético de diferentes cenários encontrados na perfilagem de poços de petróleo. De forma geral, pode-se afirmar que diferentes métodos eletromagnéticos aplicados no processo da perfilagem apresentam objetivos definidos ao buscar a eficiência seja pela robustez, seja pela rapidez.

Dentre os diversos métodos o Método de Casamento de Modos – NMM (*Numerical Mode Match*) – apresenta-se como uma solução interessante em função de sua rapidez que é favorecida pela geometria presente nos cenários de exploração destes poços. Nestes últimos as condições de contorno apresentam camadas cilíndricas, assim como camadas transversais assumindo uma geometria que descreve uma simetria axial resultando em um problema de 2 dimensões nas direções radial e axial, [13], de fácil aplicabilidade do Método de Casamento de Modos.

Métodos que utilizam elementos finitos (FEM), diferenças finitas no tempo (FDTD) e volumes finitos (MVF) são métodos difundidos no estudo de

perfilagem de poços de petróleo, como apresentados em [2], [4], [5]. Estes métodos são conhecidos por suas ótimas precisões, porém devido as suas formulações, requerem grande espaço de memória e muito tempo de processamento computacional.

Autores como Chew et al, [14], Pai et al, [15], propuseram métodos que se utilizam de coeficientes de reflexão e transmissão conjuntamente com o método de casamento de modos (NMM) e associado a uma expansão de autovetores na direção radial. Durante alguns anos Chew e seus pares foram aperfeiçoando o método para tratar o campo em meios que poderiam conter duas camadas cilíndricas e N descontinuidades na direção axial com fontes circularmente simétricas, como descritas em [16], [17], [18] e [19]. De forma resumida, pode-se definir o método que se utiliza de modos radiais pela heterogeneidade de suas camadas na direção axial, onde em cada camada existe um conjunto de modos na coordenada radial, sendo suas respostas obtidas através do casamento dos campos nas fronteiras na direção axial (eixo z).

Pai, [20], apresentou uma nova versão para o NMM, na qual a expansão de autovetores foi utilizada para expressar os campos na direção axial (eixo z) e assim o casamento dos modos fosse realizado nas fronteiras na direção radial da ferramenta.

Estas duas abordagens que utilizam o NMM para a análise do processo de perfilagem de poços de petróleo apresentam conceitos similares, porém a direção em que a expansão em autovetores é aplicada as distingue formalmente. Como já abordado na dinâmica do processo de perfilagem, as ferramentas de análise – constituídas por conjuntos de transmissor(es) e receptor(es) os quais são deslocados ao longo do eixo de simetria do poço durante o processo – podem

influenciar tanto positivamente como negativamente no desempenho do método adotado. Um exemplo de influência negativa das ferramentas de análise é quando se utiliza os modos radiais. Em função dos conjuntos de modos serem casados nas fronteiras das camadas na direção axial para cada camada descendente a nova posição do transmissor irá requerer uma nova solução das amplitudes dos modos em função da nova posição no eixo  $z$ . Isso torna o emprego desta versão do NMM com modos radiais na análise de perfilagem de poços de petróleo mais complexa, [14], [19]. Este fator complicador pode ser analisado de outra forma, via a análise da formulação do método NMM, onde apresenta a obtenção dos modos radiais através do casamento dos campos nas fronteiras axiais, o que torna necessário que as matrizes de reflexão e transmissão sejam obtidas em cada camada axial. Portanto constata-se que esta versão do NMM não é a melhor opção para a análise de poços com geometrias que contam com  $N$  camadas axiais, pois sua principal vantagem, a rapidez, fica reduzida em comparação aos métodos mais robustos.

Por outro lado, o método que utiliza os modos axiais em sua formulação requer o casamento de modos na direção radial. Assim pode-se observar que os coeficientes de reflexão e transmissão obtidos via casamento de modos, necessitam ser calculados somente uma única vez, ao passo que na direção axial os campos são representados pela expansão de autovetores representados por autofunções dependentes do eixo axial. Dessa forma, as posições dos transmissores/receptores ficam somente a cargo de um processo iterativo que perpassa cada autofunção para obter a resposta para cada posição do receptor ao longo do eixo  $z$ . Resumidamente, a conveniência desse método refere-se a escolha pela expansão dos campos na direção axial que se dá por meio das autofunções dependentes da coordenada  $z$ .

Como nesta Tese se objetiva analisar poços cujas geometrias contemplem  $N$  camadas na direção axial, a versão axial apresentada em [3] será adotada para implementar as contribuições com a adoção de autofunções sendo representadas por B-splines cúbicas, que além de apresentarem características relevantes na representação de campos possibilitam a utilização da multiplicidade de nós; o que visa tornar a versão do NMM com modos axiais mais eficiente.

### 3.2

#### Formulação do NMM

Uma forma de se representar um ambiente anisotrópico como a formação terrestre – com a permissividade e a permeabilidade variável em cada direção – é utilizando a representação via tensores, [2], [3].

$$\bar{\bar{\epsilon}}(z) = \begin{pmatrix} \epsilon_h & & \\ & \epsilon_h & \\ & & \epsilon_v \end{pmatrix} \quad \bar{\bar{\mu}}(z) = \begin{pmatrix} \mu_h & & \\ & \mu_h & \\ & & \mu_v \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

onde, as componentes radiais e axiais são dadas por:

$$\begin{aligned} \epsilon_h &= [\epsilon_h - (\sigma_h / i\omega)] & \epsilon_v &= [\epsilon_v - (\sigma_v / i\omega)] \\ \mu_h &= \mu_h & \mu_v &= \mu_v \end{aligned} \quad (3.2)$$

Os subscritos “ $h$ ” e “ $v$ ” nas permissividades e nas permeabilidades representam a direção de propagação, radial e axial, respectivamente.

Das equações de Maxwell, a equação de onda em função do campo elétrico pode ser descrita como na equação (3.3), a qual se adotará como convenção da dependência harmônica dada por  $e^{-i\omega t}$ .

$$\mu_h \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \vec{E}) - \omega^2 \mu_h \bar{\bar{\epsilon}} \vec{E} = i\omega \mu_h \vec{J} \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_h \nabla \times (\bar{\varepsilon}^{-1} \nabla \times \vec{H}) - \omega^2 \varepsilon_h \bar{\mu} \vec{H} = \varepsilon_h \nabla \times \bar{\varepsilon}^{-1} \vec{J} \quad (3.4)$$

Como neste momento a formulação será desenvolvida de forma mais genérica, a fonte de corrente apresentará uma representação 3D dada pela densidade de corrente de uma TCA (*Tilted-coil Antenna*):

$$\vec{J} = I_T \delta(\rho - \rho_T) \delta(z - \zeta_T) (\hat{\phi} - \hat{z} \xi_T) \quad (3.5)$$

sendo,

$$\zeta_T = z_T + \rho_T \tan \theta_T \cos(\phi - \phi_T) \quad \xi_T = \tan \theta_T \sin(\phi - \phi_T) \quad (3.6)$$

onde,  $\theta_T$  e  $\phi_T$  representam ângulos de inclinação axial e azimutal da fonte TCA,  $\rho_T$  é o raio de projeção da bobina para o plano transversal e  $Z_T$  é a posição axial no centro da bobina, conforme o Anexo A.

Conforme descrito em [21], observa-se que  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ , pois embora a magnitude da densidade de corrente  $\vec{J}$  varie de acordo com  $\phi$ , este fluxo de  $\vec{J}$  sobre qualquer (seção) infinitesimal transversal da bobina tem uma corrente total constante e igual a  $I_T$ .

Para facilitar a extração das componentes z das equações (3.3) e (3.4), o segundo termo do lado esquerdo e do lado direito da equação (3.7) são incluídos nesta equação com intuito de facilitar algebricamente a extração da componente z do campo, assegurando, assim, que a igualdade da equação seja preservada com a inclusão dos termos.

Através do teorema da dualidade chega-se a equação (3.8).

$$\mu_h \nabla \times (\bar{\mu}^{-1} \nabla \times \vec{E}) - \nabla (\bar{\varepsilon}_h^{-1} \nabla \cdot \bar{\varepsilon}^{-1} \vec{E}) - \omega^2 \mu_h \bar{\varepsilon} \vec{E} = i\omega \mu_h \vec{J} - \nabla \frac{\rho}{\varepsilon_h} \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_h \nabla \times (\bar{\varepsilon}^{-1} \nabla \times \vec{H}) - \nabla (\mu_h^{-1} \nabla \cdot \bar{\mu}^{-1} \vec{H}) - \omega^2 \varepsilon_h \bar{\mu} \vec{H} = \varepsilon_h (\nabla \times \bar{\varepsilon}^{-1} \vec{J}) - \nabla \frac{\rho_m}{\mu_h} \quad (3.8)$$

onde a equação (3.7) representa os modos TM, assim como a equação (3.8) representa os modos TE.

Como mencionado, no NMM aplicado à análise de perfilagem de poços de petróleo, os campos eletromagnéticos na direção axial são representados via expansão de autofunções e representação analítica na direção radial. Para esta representação dos campos pode-se adotar a decomposição espectral dos campos dada pela equação (3.9) onde  $f_v(\rho, z)$  é representado pela transformada de Bessel na equação (3.10), [22]:

$$F(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{iv\phi} f_v(\rho, z) \quad (3.9)$$

$$f_v(\rho, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_v(k_\rho, z) J_v(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (3.10)$$

onde  $J_v(k_\rho \rho)$  pode representar funções Bessel ( $J_v(k_\rho \rho)$ ) ou Hankel ( $H_v(k_\rho \rho)$ ) de primeiro tipo e de ordem  $v$ , enquanto  $\tilde{f}_v(k_\rho, z)$  representa a transformada de Bessel da função  $f_v(\rho, z)$ .

Da representação vetorial da equação da onda, dada pela equação (3.7) e com o auxílio da expansão dada pela equação (3.9) e da transformada de Bessel descrita na equação (3.10), chega-se à componente  $z$  do campo elétrico para região sem fontes:

$$\left( -\frac{1}{\varepsilon_v} k_\rho^2 + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon_v} \frac{\partial}{\partial z} + w^2 \mu_h \right) \tilde{d}_{zv}(k_\rho, z) = 0 \quad (3.11)$$

onde,  $\tilde{d}_z = \varepsilon_v \tilde{e}_z$  representa a densidade do fluxo do campo elétrico; que por sua vez, pode ser expandida através de um conjunto de funções bases, chamadas de autofunções:

$$\tilde{d}_{zv}(k_\rho, z) \rightarrow \tilde{d}_z(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n(z) \quad (3.12)$$

onde  $\tilde{d}_z(z)$  é aproximado por um somatório de autofunções  $S_n(z)$ , em seu domínio  $z$ , sendo que  $S_n(z)$  pode ser representado por funções como, por exemplo, serie de Fourier, funções triangulares, ou B-spline.

Assim, substituindo (3.12) em (3.11) tem-se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon_v} \frac{\partial}{\partial z} + w^2 \mu_h \right] S_n(z) = k_\rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\varepsilon_v} S_n(z) \quad (3.13)$$

Como desenvolvido em [6] a equação (3.13) é testada via a própria função ortogonal dada pela função teste  $S_m(z)$  e lembrando-se da definição de produto interno,

$$\langle a, b \rangle = \int_{-z_{\min}}^{z_{\max}} a(z)b(z)dz \quad (3.14)$$

onde os limites são dados pelo domínio de  $\tilde{d}_z(z)$ , ou seja,  $-z_{\min} < z < z_{\max}$  tem-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \left\langle S_m(z), \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon_v} \frac{\partial}{\partial z} S_n(z) \right\rangle \right] + \langle S_m(z), w^2 \mu_h S_n(z) \rangle = k_\rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\langle S_m(z), \frac{1}{\varepsilon_v} S_n(z) \right\rangle, \quad m=1 \dots N \quad (3.15)$$

A integração do primeiro termo do lado esquerdo da equação (3.15) é resolvida aplicando-se a integração por partes. Então se chega a:

$$\begin{aligned} \left\langle S_m(z), \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon_v} \frac{\partial}{\partial z} S_n(z) \right\rangle &= \int_{-z_{\min}}^{z_{\max}} S_m(z) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon_v} \frac{\partial}{\partial z} S_n(z) dz \\ &= S_m(z) \frac{1}{\varepsilon_v} \frac{\partial}{\partial z} S_n(z) \Big|_{-z_{\min}}^{z_{\max}} - \int_{-z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{\partial}{\partial z} (S_m(z)) \frac{1}{\varepsilon_v} \left( \frac{\partial}{\partial z} S_n(z) \right) dz \end{aligned} \quad (3.16)$$

Entretanto, se as funções de base  $S_n(z)$  forem escolhidas de forma que

$S_m(z)$  ou  $\frac{\partial}{\partial z} S_n(z)$  sejam iguais a zero nos extremos do domínio,  $z = -z_{\min}$  e  $z_{\max}$ , o

primeiro termo do lado direito da equação (3.16) desaparece, e tem-se:

$$\left\langle S_m(z), \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon_v} \frac{\partial}{\partial z} S_n(z) \right\rangle = \left\langle S'_m(z), \frac{1}{\varepsilon_v} S'_n(z) \right\rangle \quad (3.17)$$

Neste caso, se a escolha for  $S'_m(z)=0$  nos pontos  $-z_{\min}$  e  $z_{\max}$ , tem-se a condição de borda homogênea de Neumann, a qual corresponde a paredes magnéticas e elétricas para ondas TE e TM, respectivamente.

Como consequência da equação (3.17) pode-se reescrever a equação (3.15):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ - \left\langle S'_m(z), \frac{1}{\varepsilon_v} S'_n(z) \right\rangle \right] + \langle S_m(z), w^2 \mu_h S_n(z) \rangle = \\ = k_{\rho}^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\langle S_m(z), \frac{1}{\varepsilon_v} S_n(z) \right\rangle, \quad m=1 \dots N \end{aligned} \quad (3.18)$$

A equação (3.18) pode ainda ser reescrita em forma matricial, tornando-a compacta:

$$\sum_{n=1}^N \bar{L}_{mn} a_n = k_{\rho}^2 \sum_{n=1}^N \bar{p}_{mn} a_n \quad m=1 \dots, N \quad (3.19)$$

ou ainda,

$$\bar{L}_{\varepsilon} \cdot \bar{a}_{\varepsilon n} = k_{\rho}^2 \bar{p}_{\varepsilon} \cdot \bar{a}_{\varepsilon n} \quad (3.20)$$

sabendo que,

$$\begin{aligned} (\bar{L}_{\varepsilon})_{mn} &= - \left\langle S'_m(z), \varepsilon_v^{-1} S'_n(z) \right\rangle + \langle S_m(z), w^2 \mu_h S_n(z) \rangle \\ (\bar{p}_{\varepsilon})_{mn} &= \left\langle S_m(z), \varepsilon_v^{-1} S_n(z) \right\rangle \end{aligned} \quad (3.21)$$

A equação (3.20) representa um sistema linear de autovalores, onde  $k_{\rho}^2$  são os autovalores e  $\bar{a}$  os autovetores do sistema. As matrizes  $\bar{L}_{\varepsilon}$  e  $\bar{p}_{\varepsilon}$  são matrizes simétricas devido à reciprocidade, assim como a matriz  $\bar{L}_{mn}$  representa o operador

$\left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon_v} \frac{\partial}{\partial z} + w^2 \mu_h \right)$  no espaço definido por  $S_n(z)$ ,  $\bar{\bar{p}}_{mn}$  representa a matriz dos fatores dados por  $\left( \frac{1}{\varepsilon_v} \right)$ .

Utilizando o princípio da dualidade, obtém-se as expressões para os modos TE, dadas por:

$$\bar{\bar{L}}_\mu \cdot \bar{a}_{\mu m} = k_\rho^2 \bar{\bar{p}}_\mu \cdot \bar{a}_{\mu m} \quad (3.22)$$

onde,

$$\begin{aligned} \left( \bar{\bar{L}}_\mu \right)_{mn} &= - \left\langle S'_m(z), \varepsilon_v^{-1} S'_n(z) \right\rangle + \left\langle S_m(z), w^2 \mu_h S_n(z) \right\rangle \\ \left( \bar{\bar{p}}_\mu \right)_{mn} &= \left\langle S_m(z), \varepsilon_v^{-1} S_n(z) \right\rangle \end{aligned} \quad (3.23)$$

lembrando que os sobrescritos  $\bar{\bar{\cdot}}$ ,  $\bar{\cdot}$  e  $\bar{\cdot}$  representam derivadas, vetores e matrizes, respectivamente.

Os autovalores  $k_\rho$  das equações (3.20) e (3.22), são associados a seus respectivos autovetores, sendo representados por  $k_{\rho q}$ , onde  $q=1 \dots Q$ , sendo  $Q=N$ .

Tendo em vista a ortogonalidade dos autovetores encontrados pela solução dos sistemas lineares descritos pelas equações (3.20) e (3.22) e a simetria das matrizes L e P, pode-se afirmar que:

$$\bar{a}_p^t \cdot \bar{\bar{p}} \cdot \bar{a}_q = \delta_{pq} C_q \quad (3.24)$$

onde  $C_q$  é constante para seu respectivo conjunto de autovetores. Portanto usando estas características a normalização destes modos pode ser definida como:

$$\bar{a}_q = \frac{1}{\sqrt{C_q}} \bar{a}_q \quad (3.25)$$

Isso permite representar a fonte via uma expansão dos modos calculados.

O desenvolvimento algébrico que ilustra a separação da componente  $z$  dada pela equação (3.11) é apresentado no Anexo B. Porém para regiões com fontes a componente  $z$  do campo pode ser reescrita como:

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{v^2}{\rho^2} + \epsilon_v \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_v^{-1} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \mu_v \epsilon_v \right) d_z(\rho, z) = i\omega \mu_h \epsilon_v j_z(\rho, z) \quad (3.26)$$

onde a densidade de fluxo elétrico da equação pode ser reescrita se utilizar os modos encontrados anteriormente chega-se em:

$$\psi_q = \sum_{n=1}^N (\bar{a}_q)_n S_n(z) \quad (3.27)$$

assim,

$$d_z(\rho, z) = \sum_{q=1}^N b_q(\rho) \psi_q(z) \quad (3.28)$$

A equação (3.28) pode representar tanto a densidade do fluxo elétrico como a densidade do fluxo magnético. Assim, para se obter a representação para os modos TM, faz-se:

$$b_q(\rho) = b_{\epsilon q}(\rho) \quad (3.29)$$

sendo a função que representa a dependência em  $\rho$  para cada modo TM. De modo similar tem-se:

$$\psi_q(z) = \psi_{\epsilon q}(z) \quad (3.30)$$

Logo, a equação (3.26) pode ser reorganizada substituindo as expressões (3.28)-(3.30) na equação (3.26), multiplicando pela função  $\psi_{\epsilon p}(z) \epsilon_v^{-1}$  e depois aplicando o produto interno definido no domínio da função  $z$ . Assim, chega-se em:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} b_{\varepsilon q}(\rho) - \frac{\nu^2}{\rho^2} b_{\varepsilon q}(\rho) \\ & + \sum_{q=1}^N \left\langle \psi_{\varepsilon q}(z), \left( \varepsilon_v \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon_v^{-1} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \mu_v \varepsilon_v \right) \psi_{\varepsilon q}(z) \right\rangle b_{\varepsilon q}(\rho) = -i\omega \mu_h \varepsilon_v j_{T\varepsilon v q} \delta(\rho - \rho_T) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Tratando do fator  $j_{T\varepsilon v q}$ , que representa a contribuição da componente espectral da fonte para os modos TM, encontrados na equação (3.27).

$$j_{T\varepsilon v q} = \frac{I_T}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-z_{\min}}^{z_{\max}} dz \delta(z - \zeta(\phi)) \xi_T(\phi) \psi_{\varepsilon q}(z) e^{i\nu\phi} \quad (3.32)$$

onde,  $\zeta(\phi)$  e  $\xi_T(\phi)$  são descritas no anexo A. Considerando que a fonte só existe sobre a antena pode-se escrever a equação (3.32) como:

$$\begin{aligned} j_{T\varepsilon v q} &= \frac{I_T}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \xi_T(\phi) \psi_{\varepsilon q}(\zeta(\phi)) e^{-i\nu\phi} dz \\ &= \frac{I_T}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \xi_T(\phi) \sum_{n=1}^N \bar{a}_{\varepsilon q n} S_n(\zeta(\phi)) e^{-i\nu\phi} d\phi \\ &= \frac{I_T}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^N \bar{a}_{\varepsilon q n} \int_{-\pi}^{\pi} \xi_T(\phi) S_n(\zeta(\phi)) e^{-i\nu\phi} d\phi \end{aligned} \quad (3.33)$$

Para resolver o terceiro termo da equação (3.31), que apresenta um produto interno, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left\langle \psi_{\varepsilon q}(z), \left( \varepsilon_v \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon_v^{-1} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \mu_v \varepsilon_v \right) \psi_{\varepsilon q}(z) \right\rangle \\ &= \bar{a}_q^t \cdot \bar{L}_\varepsilon \cdot \bar{a}_p = \bar{a}_q^t (k_{\rho q}^2 \bar{p}_\varepsilon \cdot \bar{a}_p) = k_{\rho q}^2 \delta_{qp} \end{aligned} \quad (3.34)$$

assim, a equação (3.31) pode ser reescrita como:

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\nu^2}{\rho^2} + k_{\rho q}^2 \right) b_{\varepsilon q}(\rho) = -i\omega \mu_h \varepsilon_v j_{T\varepsilon v q} \delta(\rho - \rho_T) \quad (3.35)$$

De modo análogo pode-se derivar a equação para os modos TE:

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\nu^2}{\rho^2} + k_{\rho q}^2 \right) b_{\mu q}(\rho) = -j_{T\mu v q} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \delta(\rho - \rho_T)) \quad (3.36)$$

onde o fator  $j_{T\mu\nu q}$ , dados os modos encontrados na equação (3.22), representa a contribuição da componente espectral da fonte para os modos TE.

$$\begin{aligned}
 j_{T\mu\nu q} &= \frac{I_T}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-z_{\min}}^{z_{\max}} \psi_{\mu q}(\zeta(\phi)) e^{-i\nu\phi} dz \\
 &= \frac{I_T}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^N \bar{a}_{\mu q n} S_n(\zeta(\phi)) e^{-i\nu\phi} d\phi \\
 &= \frac{I_T}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^N \bar{a}_{\mu q n} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(\zeta(\phi)) e^{-i\nu\phi} d\phi
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Segundo [3], os fatores  $b_{xq}(\rho)$  das equações (3.35) e (3.36), representam os modos propagantes em  $\rho$ , mostrados na formulação formal das condições de radiação da fonte. Ela é representada por funções Bessel e Hankel de primeiro tipo e de ordem  $\nu$ .

Para esta formulação é considerado um meio homogêneo, na direção radial, como segue:

$$b_{\varepsilon q}(\rho) = \begin{cases} J_{\nu}(k_{\rho\varepsilon q}\rho) c_{T\nu\varepsilon q}^- & \rho \leq \rho_T \\ H_{\nu}(k_{\rho\varepsilon q}\rho) c_{T\nu\varepsilon q}^+ & \rho \leq \rho_T \end{cases} \tag{3.38}$$

$$b_{\mu q}(\rho) = \begin{cases} J_{\nu}(k_{\rho\mu q}\rho) c_{T\nu\mu q}^- & \rho \leq \rho_T \\ H_{\nu}(k_{\rho\mu q}\rho) c_{T\nu\mu q}^+ & \rho \leq \rho_T \end{cases} \tag{3.39}$$

onde os fatores  $c_T^{\pm}$  representam os coeficientes de amplitudes dos campos propagantes na direção radial – os quais são melhor detalhados no anexo B – têm-se:

$$c_{T\varepsilon\nu q}^{\pm} = -\frac{\pi}{2} j_{T\varepsilon\nu q} \omega \mu_h \rho_T C_{\nu}^{\mp} (k_{\varepsilon\rho q} \rho_T) \tag{3.40}$$

$$c_{T\mu\nu q}^{\pm} = -\frac{i\pi}{2} j_{T\mu\nu q} k_{\rho\mu q} \rho_T C_{\nu}^{\mp} (k_{\rho\mu q} \rho_T) \tag{3.41}$$

com os fatores  $C^-/C^{-'}$  e  $C^+/C^{+'}$  representando as funções de Hankel e de Bessel com suas derivadas, respectivamente – os quais são apresentados de forma mais explicativa no Anexo C – bem como a álgebra implícita nas equações (3.40) e (3.41).

Portanto, pode-se representar a componente z do campo da seguinte forma:

$$\bar{A}_z = \begin{bmatrix} d_z(\rho, z) \\ b_z(\rho, z) \end{bmatrix} = \sum_{q=1}^N \begin{cases} \begin{bmatrix} J_\nu(k_{\varepsilon\rho q}\rho) c_{T\varepsilon\nu q}^- \psi_{\varepsilon q}(z) \\ J_\nu(k_{\mu\rho q}\rho) c_{T\mu\nu q}^- \psi_{\mu q}(z) \end{bmatrix} & \rho \leq \rho_T \\ \begin{bmatrix} H_\nu(k_{\varepsilon\rho q}\rho) c_{T\varepsilon\nu q}^+ \psi_{\varepsilon q}(z) \\ H_\nu(k_{\mu\rho q}\rho) c_{T\mu\nu q}^+ \psi_{\mu q}(z) \end{bmatrix} & \rho \geq \rho_T \end{cases} \quad (3.42)$$

ou ainda, em forma matricial, [3]:

$$\bar{A}_z = \begin{bmatrix} d_z(\rho, z) \\ b_z(\rho, z) \end{bmatrix} = \bar{S}^t(z) \cdot \bar{a} \cdot \bar{C}^\pm(\rho) \cdot \bar{c}_T^\pm \quad (3.43)$$

onde,

$$\bar{S}(z) = \begin{pmatrix} \bar{S}(z) & 0 \\ 0 & \bar{S}(z) \end{pmatrix}_{2N \times 2} \quad (3.44)$$

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} \bar{a}_\varepsilon & 0 \\ 0 & \bar{a}_\mu \end{pmatrix}_{2N \times 2N} \quad (3.45)$$

$$\bar{C}^\pm(\rho) = \begin{pmatrix} \bar{C}_\varepsilon^\pm(k_{\rho\varepsilon q}\rho) & 0 \\ 0 & \bar{C}_\mu^\pm(k_{\rho\mu q}\rho) \end{pmatrix}_{2N \times 2N} \quad (3.46)$$

$$\bar{c}_T^\pm(\rho) = \begin{bmatrix} c_{T\varepsilon\nu q}^\pm \\ c_{T\mu\nu q}^\pm \end{bmatrix}_{2N \times 1} \quad (3.47)$$

Encontrada a componente z do campo, equação (3.43), a componente  $\phi$  será encontrada através da adição de uma camada cilíndrica ao problema, e das condições de contorno na interface axial do cilindro, pela imposição da continuidade da componente transversal do campo na interface.

Assim, pelas equações de Maxwell, pode ser demonstrada a relação entre as componentes  $z$  e  $\phi$ , esta demonstração algébrica se encontra no Anexo D de forma expandida, onde ao final da demonstração chega-se em:

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_h} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \varepsilon_h \right) e_\phi = \frac{i\omega}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_h \varepsilon_h} d_z - i\omega \frac{1}{\mu_h} \frac{\partial}{\partial \rho} b_z \quad (3.48)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon_h} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \mu_h \right) h_\phi = i\omega \frac{1}{\varepsilon_v} \frac{\partial}{\partial \rho} d_z + \frac{i\omega}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_v \varepsilon_h} b_z \quad (3.49)$$

ou ainda pode-se representar a componente transversal  $\phi$  em forma matricial, [3]:

$$\bar{A}_\phi = \begin{bmatrix} e_\phi \\ h_\phi \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{L}_\mu^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{L}_\varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_h \varepsilon_h} & -i\omega \frac{1}{\mu_h} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ i\omega \frac{1}{\varepsilon_v} \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{i\omega}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_v \varepsilon_h} \end{pmatrix} \cdot \bar{S}^t(z) \cdot \bar{a} \cdot \bar{C}^\pm(\rho) \cdot \bar{c}_T^\pm \quad (3.50)$$

Conforme [3] se utilizou da propriedade do operador da projeção  $\wp \bar{S}^t(z) \approx \bar{S}^t(z) \langle \bar{S}^t(z), \wp \bar{S}^t(z) \rangle$ , retirado de [23], para reescrever a equação (3.50) de forma a ficar mais compacta:

$$\bar{A}_\phi = \bar{S}^t(z) \cdot \bar{Y}^\pm(\rho) \cdot \bar{C}^\pm(\rho) \cdot \bar{c}_T^\pm \quad (3.51)$$

onde:

$$\bar{Y}^\pm(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\rho} \bar{L}_\mu^{-1} \cdot \bar{D}_\mu \cdot \bar{a}_\varepsilon & -i\omega \bar{a}_\mu \cdot \bar{C}_\mu^\pm \cdot \bar{K}_\mu^{-1} \cdot \bar{C}_\mu^{\pm-1} \\ i\omega \bar{a}_\varepsilon \cdot \bar{C}_\varepsilon^\pm \cdot \bar{K}_\varepsilon^{-1} \cdot \bar{C}_\varepsilon^{\pm-1} & \frac{i\omega}{\rho} \bar{L}_\varepsilon^{-1} \cdot \bar{D}_\varepsilon \cdot \bar{a}_\mu \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \bar{D}_\mu &= \left\langle \bar{S}(z), \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon_v \mu_h} \bar{S}(z) \right\rangle \\ \bar{D}_\varepsilon &= \left\langle \bar{S}(z), \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon_h \mu_v} \bar{S}(z) \right\rangle \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}\bar{\bar{K}}_{\varepsilon} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\bar{k}_{\varepsilon\rho}} & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \\ \bar{\bar{K}}_{\mu} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\bar{k}_{\mu\rho}} & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.54)$$

### 3.2.1

#### Multicamadas cilíndricas

Para incluírem as multicamadas cilíndricas, ou seja, na direção  $\rho$ , conforme a Figura 3.1 e 3.2, as equações (3.43) e (3.51) devem ser reescritas com os novos termos que representarão os efeitos das multi-reflexões sofridas pelos sinais  $T_x$  até chegar aos receptores na região das fontes, assim tem-se:

$$\bar{A}_{nz}(\rho, z) = \bar{S}(z) \cdot \bar{a} \cdot \begin{cases} \left[ \bar{H}_n(\rho) \cdot \bar{\bar{R}}_{n,n-1}^+ + \bar{J}_n(\rho) \right] \cdot \bar{d}_{Tn}^- & \rho_{n-1} < \rho \leq \rho_T \\ \left[ \bar{H}_b(\rho) + \bar{J}_b(\rho) \cdot \bar{\bar{R}}_{n,n+1}^- \right] \cdot \bar{d}_{Tn}^+ & \rho_T < \rho \leq \rho_n \end{cases} \quad (3.55)$$

$$\bar{A}_{n\phi}(\rho, z) = \bar{S}(z) \cdot \begin{cases} \left[ \bar{Y}_n^+ \cdot \bar{H}_n(\rho) \cdot \bar{\bar{R}}_{n,n-1}^+ + \bar{Y}_n^- \cdot \bar{J}_n(\rho) \right] \cdot \bar{d}_{Tn}^- & \rho_{n-1} < \rho \leq \rho_T \\ \left[ \bar{Y}_n^+ \cdot \bar{H}_n(\rho) + \bar{Y}_n^- \cdot \bar{J}_n(\rho) \cdot \bar{\bar{R}}_{n,n+1}^- \right] \cdot \bar{d}_{Tn}^+ & \rho_T < \rho \leq \rho_n \end{cases} \quad (3.56)$$

onde os coeficientes de reflexão em suas formas recursivas  $\bar{\bar{R}}_{n,n+1}^-$  e  $\bar{\bar{R}}_{n,n-1}^+$ , são termos que carregam as informações das camadas externas à camada das fontes, em forma de expressões recursivas como mostrado em [6] e [24]. Tais expressões por conterem matrizes identidades em suas formulações, podem gerar mal condicionamento devido à presença de inversões. Partindo desse problema de mal condicionamento [3] em seu trabalho reformulou as expressões eliminando as matrizes identidades e incluindo matrizes da função Hankel. Essas últimas devido

a sua representação matricial ser em diagonal tornam o cálculo das inversas nas expressões dos coeficientes de reflexão melhor condicionado:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{R}}_{n,n+1}^- &= \bar{R}_{n,n+1}^- + \bar{T}_{n+1,n}^- \cdot \bar{\bar{R}}_{n+1,n+2}^- \cdot \bar{H}_{n+1}^{-1}(\rho_{n+1}) \cdot \\ &\left( \bar{H}_{n+1}(\rho_n) \cdot \bar{H}_{n+1}^{-1}(\rho_{n+1}) - \bar{H}_{n+1}(\rho_n) \cdot \bar{R}_{n+1,n}^+ \cdot \bar{\bar{R}}_{n+1,n+2}^- \cdot \bar{H}_{n+1}^{-1}(\rho_{n+1}) \right)^{-1} \cdot \\ &\bar{H}_{n+1}(\rho_n) \cdot \bar{T}_{n,n+1}^+ \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{R}}_{n,n-1}^+ &= \bar{R}_{n,n-1}^+ + \bar{T}_{n-1,n}^+ \cdot \bar{\bar{R}}_{n-1,n-2}^+ \cdot \bar{H}_{n-1}^{-1}(\rho_{n-2}) \cdot \\ &\left( \bar{H}_{n-1}(\rho_{n-1}) \cdot \bar{H}_{n-1}^{-1}(\rho_{n-2}) - \bar{H}_{n-1}(\rho_{n-1}) \cdot \bar{R}_{n-1,n}^- \cdot \bar{\bar{R}}_{n-1,n-2}^+ \cdot \bar{H}_{n-1}^{-1}(\rho_{n-2}) \right)^{-1} \cdot \\ &\bar{H}_{n-1}(\rho_{n-1}) \cdot \bar{T}_{n,n-1}^- \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde,

$$\begin{aligned} R_{n,n+1}^- &= J_n^{-1}(\rho_n) \cdot \left( \bar{I} - \Psi_{n,n+1} \cdot \left( Y_{n+1}^+(\rho_n) \right)^{-1} \cdot Y_n^-(\rho_n) \right)^{-1} \cdot \\ &\left( \Psi_{n,n+1} \cdot \left( Y_{n+1}^+(\rho_n) \right)^{-1} \cdot Y_n^+(\rho_n) - \bar{I} \right) \cdot H_n(\rho_n) \\ T_{n+1,n}^- &= J_n^{-1}(\rho_n) \cdot \left( Y_n^-(\rho_n) \right)^{-1} \cdot \left[ Y_{n+1}^+(\rho_n) \cdot H_{n+1}(\rho_n) \cdot R_{n+1,n}^+(\rho_n) + Y_{n+1}^-(\rho_n) \cdot J_{n+1}(\rho_n) \right] \\ R_{n+1,n}^+ &= H_{n+1}^{-1}(\rho_n) \cdot \left( \Psi_{n,n+1} - \left( Y_n^-(\rho_n) \right)^{-1} \cdot Y_{n+1}^+(\rho_n) \right)^{-1} \cdot \\ &\left( \left( Y_n^-(\rho_n) \right)^{-1} \cdot Y_{n+1}^-(\rho_n) - \Psi_{n,n+1} \right) \cdot J_{n+1}(\rho_n) \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} T_{n,n+1}^+ &= H_{n+1}^{-1}(\rho_n) \cdot \left( Y_{n+1}^+(\rho_n) \right)^{-1} \cdot \left[ Y_n^+(\rho_n) \cdot H_n(\rho_n) + Y_n^-(\rho_n) \cdot J_n(\rho_n) \cdot R_{n,n+1}^-(\rho_n) \right] \\ R_{n,n-1}^+ &= H_n^{-1}(\rho_n) \cdot \left( \Psi_{n-1,n} - \left( Y_{n-1}^-(\rho_n) \right)^{-1} \cdot Y_n^+(\rho_n) \right)^{-1} \cdot \\ &\left( \left( Y_{n-1}^-(\rho_n) \right)^{-1} \cdot Y_n^-(\rho_n) - \Psi_{n-1,n} \right) \cdot J_n(\rho_n) \\ T_{n-1,n}^+ &= H_n^{-1}(\rho_n) \cdot \left( Y_n^+(\rho_n) \right)^{-1} \cdot \left[ Y_{n-1}^+(\rho_n) \cdot H_{n-1}(\rho_n) + Y_{n-1}^-(\rho_n) \cdot J_{n-1}(\rho_n) \cdot R_{n-1,n}^-(\rho_n) \right] \\ R_{n-1,n}^- &= J_{n-1}^{-1}(\rho_n) \cdot \left( \bar{I} - \Psi_{n-1,n} \cdot \left( Y_n^+(\rho_n) \right)^{-1} \cdot Y_{n-1}^-(\rho_n) \right)^{-1} \cdot \\ &\left( \Psi_{n-1,n} \cdot \left( Y_n^+(\rho_n) \right)^{-1} \cdot Y_{n-1}^+(\rho_n) - \bar{I} \right) \cdot H_{n-1}(\rho_n) \\ T_{n-1,n}^- &= J_{n-1}^{-1}(\rho_n) \cdot \left( Y_{n-1}^-(\rho_n) \right)^{-1} \cdot \left[ Y_n^+(\rho_n) \cdot H_n(\rho_n) \cdot R_{n,n-1}^+(\rho_n) + Y_n^-(\rho_n) \cdot J_n(\rho_n) \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

sendo,

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\Psi}}_{n,n+1} &= \bar{\bar{a}}_n' \cdot \bar{\bar{p}}_{n+1} \cdot \bar{\bar{a}}_{n+1} \\ \bar{\bar{\Psi}}_{n-1,n} &= \bar{\bar{a}}_{n-1}' \cdot \bar{\bar{p}}_n \cdot \bar{\bar{a}}_n\end{aligned}\quad (3.61)$$

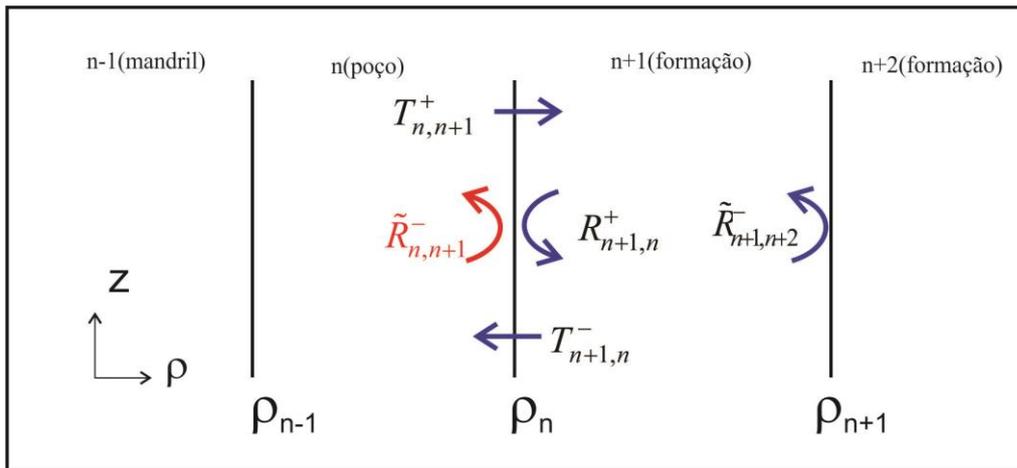
onde as matrizes  $\bar{\bar{a}}$  são matrizes compostas pelos autovetores de cada camada cilíndrica, dadas pela equação (3.45), já a matriz  $\bar{\bar{p}}$  é dada pela equações (3.21) e (3.23) sendo composta como:

$$\bar{\bar{p}} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{p}}_\varepsilon & 0 \\ 0 & \bar{\bar{p}}_\mu \end{pmatrix}_{2N \times 2N} \quad (3.62)$$

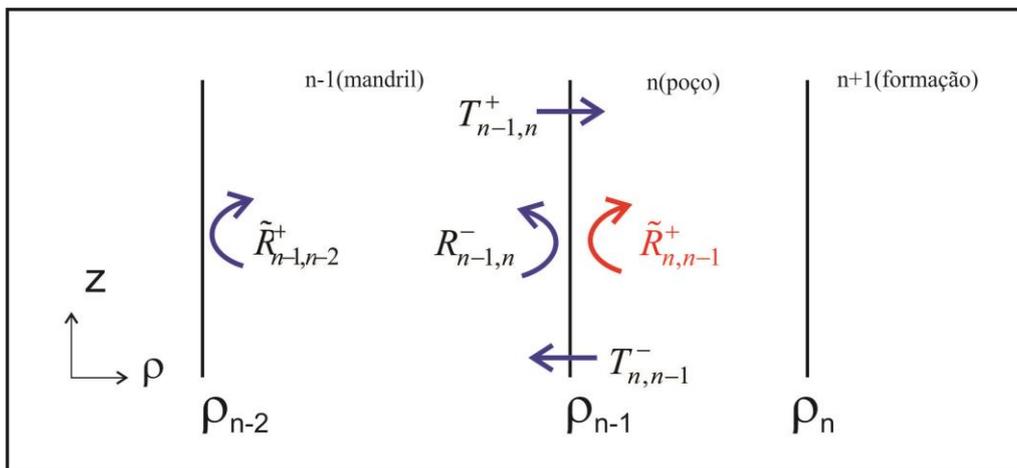
O fator  $\bar{\bar{\Psi}}$  representa o casamento dos modos na direção radial propriamente dito, onde os sinais de +/- são utilizados nos índices e servem para informar qual o sentido de propagação das ondas dentro de uma determinada camada, conforme ilustrado nas Figuras 3.1 e 3.2.

Em outras palavras, o termo  $\bar{\bar{R}}_{n,n+1}^-$  recursivo dado pela equação (3.57) fornece as multi-reflexões oriundas das formações à direita da região das fontes, conforme ilustra a Figura 3.1.

Já o termo  $\bar{\bar{R}}_{n,n-1}^+$  recursivo dado pela equação (3.58) fornece as informações das multi-reflexões oriundas das formações à esquerda da região das fontes, que no caso da Figura 3.2 informará como os sinais irão interagir nas paredes do mandril.



**Figura 3.1 – Ilustração coeficiente recursivo em casos de multi-camadas na direção radial, sentido direita.**



**Figura 3.2 – Ilustração coeficiente recursivo em casos de multi-camadas na direção radial, sentido esquerda.**

Os fatores  $\bar{d}_{T_n}^-$  e  $\bar{d}_{T_n}^+$  das equações (3.55) e (3.56) representam as amplitudes dos coeficientes da fonte calculados a partir da imposição das condições de radiação na fonte em  $\rho = \rho_T$ , dados pelas equações (3.63) e (3.64):

$$\bar{d}_{T_n}^- = \bar{J}_n^{-1}(\rho_{n-1}) \cdot \left( \bar{J}_n(\rho_n) \cdot \bar{J}_n^{-1}(\rho_{n-1}) - \bar{J}_n(\rho_n) \cdot \tilde{\tilde{R}}_{n,n+1}^-(\rho_n) \cdot \tilde{\tilde{R}}_{n,n-1}^+(\rho_n) \cdot \bar{J}_n^{-1}(\rho_{n-1}) \right)^{-1} \cdot \bar{J}_n(\rho_n) \cdot \left( \bar{c}_T^- + \tilde{\tilde{R}}_{n,n+1}^-(\rho_n) \cdot \bar{c}_T^+ \right) \quad (3.63)$$

$$\bar{d}_{T_n}^+ = \tilde{\tilde{R}}_{n,n-1}^+ \cdot \bar{d}_{T_n}^- + \bar{c}_T^+ \quad (3.64)$$

onde os fatores  $\bar{c}_r^-$  e  $\bar{c}_r^+$  são determinados no Anexo C. Os subíndices “n” representam a camada para qual se deseja calcular os coeficientes, seguindo a mesma lógica das camadas ilustradas nas Figuras 3.1 e 3.2. O desenvolvimento recursivo para esses coeficientes é encontrado em [6]. No decorrer do texto é usado  $n=1$  para se apresentar a camada interna ao poço onde se encontram as fontes; por exemplo, os fatores são dados por:  $\bar{d}_{T1}^-$  e  $\bar{d}_{T1}^+$ .

Outro aspecto a ser considerado nas formulações dos coeficientes de reflexão recursivos trata-se de quando, por definição, o mandril é representado por um PEC (condutor elétrico perfeito), onde conforme [6] o coeficiente de reflexão  $\bar{R}_{n,n-1}^+$  dado pela equação (3.58) passa a ser expresso em forma matricial como:

$$\bar{R}_{n,n-1}^+ = \begin{pmatrix} -\frac{J_v(k_\rho \rho_{n-1})}{H_v^{(1)}(k_\rho \rho_{n-1})} & 0 \\ 0 & -\frac{J_v'(k_\rho \rho_{n-1})}{H_v^{(1)'}(k_\rho \rho_{n-1})} \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

### 3.2.2

#### Cálculo da Transimpedância nos receptores

De posse das expressões para componentes  $z$  e  $\phi$  do campo na camada das fontes que foram determinadas no decorrer deste capítulo, pode-se obter os valores das tensões induzidas nas bobinas receptoras devido a uma corrente na bobina transmissora, conforme ilustração da Figura 3.3.

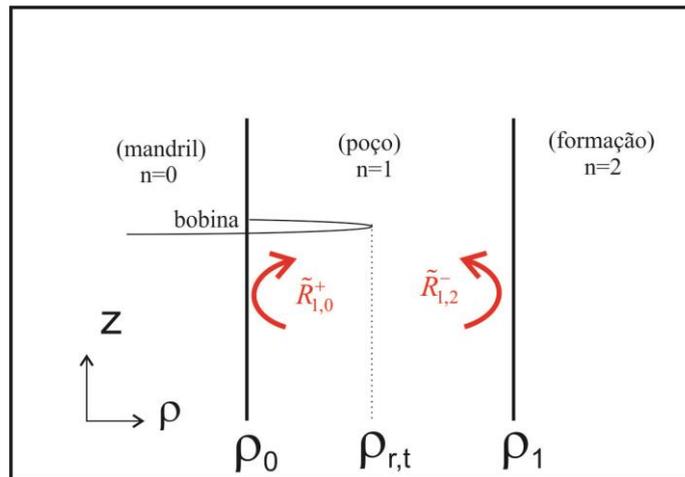


Figura 3.3 – Ilustração coeficiente recursivo na camada das fontes.

O cálculo da transimpedância nas bobinas receptoras dada pela lei de Ohm, onde segundo as equações de Maxwell, a diferença de potencial é obtida da integral de linha do campo elétrico ao longo da posição da bobina receptora, como:

$$Z_{RT} = \frac{V_R}{I_T} = \frac{-1}{I_T} \oint \vec{E} d\vec{l}_R \quad (3.66)$$

com a posição da bobina receptora representada por:

$$d\vec{l}_R = \delta_R(\rho, \phi, z) = \delta(\rho - \rho_R) \delta(z - \zeta_R) (\hat{\phi} - \hat{z} \zeta_R) \quad (3.67)$$

e considerando as componentes do campo, logo, pode-se reescrever a equação (3.66) como:

$$Z_{RT} = \frac{V_R}{I_T} = \frac{-1}{I_T} \iiint_v (\delta_R \cdot (\vec{E}_{Rz} + \vec{E}_{R\phi})) \rho d\rho d\phi dz \quad (3.68)$$

Como mencionado anteriormente, o campo é representado pelas componentes  $z$  e  $\phi$  descritas nas equações (3.55) e (3.56), respectivamente. Tais componentes podem ser reescritas tornando o cálculo da transimpedância por operações matriciais, [3]:

$$\vec{E}_{Rz}(\rho, z) = \vec{S}^t(z) \cdot \vec{a}_1 \cdot \vec{\Gamma}_{Rz}(\rho) \quad (3.69)$$

$$\bar{E}_{R\phi}(\rho, z) = \bar{S}^t(z) \cdot \bar{\Gamma}_{R\phi}(\rho) \quad (3.70)$$

onde,

$$\bar{\Gamma}_{Rz} = \begin{cases} \left[ \bar{H}_1(\rho) \cdot \bar{R}_{1,0}^+ + \bar{J}_1(\rho) \right] \cdot \bar{d}_{T1}^- & \rho \leq \rho_T \\ \left[ \bar{H}_1(\rho) + \bar{J}_1(\rho) \cdot \bar{R}_{1,2}^- \right] \cdot \bar{d}_{T1}^+ & \rho \geq \rho_T \end{cases} \quad (3.71)$$

$$\bar{\Gamma}_{R\phi} = \begin{cases} \left[ \bar{Y}_1^+ \cdot \bar{H}_1(\rho) \cdot \bar{R}_{1,0}^+ + \bar{Y}_1^- \cdot \bar{J}_1(\rho) \right] \cdot \bar{d}_{T1}^- & \rho \leq \rho_T \\ \left[ \bar{Y}_1^+ \cdot \bar{H}_1(\rho) + \bar{Y}_1^- \cdot \bar{J}_1(\rho) \cdot \bar{R}_{1,2}^- \right] \cdot \bar{d}_{T1}^+ & \rho \geq \rho_T \end{cases} \quad (3.72)$$

logo pode-se afirmar que,

$$Z_{RT} = Z_{RTz} + Z_{RT\phi} \quad (3.73)$$

Sendo que as expressões para cada uma das componentes da transimpedância podem ser representadas considerando o somatório espectral dado pela equação (3.9):

Para  $Z_{RTz}$  substituem-se as parcelas correspondentes da componente z das equações (3.67) e (3.69) na equação (3.68), chegando-se em:

$$\begin{aligned} Z_{RTz} &= \frac{V_R}{I_T} = \frac{-1}{I_T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \delta(\rho - \rho_R) \delta(z - \zeta_R(\phi)) \xi_R(\phi) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_v e^{iv\phi} E_{Rz} \right) \right) \rho d\rho d\phi dz \\ &= \frac{-\rho_R}{I_T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \delta(z - \zeta_R(\phi)) \xi_R(\phi) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_v e^{iv\phi} \left( \bar{S}^t(z) * \bar{p}_R \cdot \bar{a}_1 \cdot \bar{\Gamma}_{Rz}(\rho) \right) \right) \right) d\phi dz \\ &= \frac{-\rho_R}{I_T} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \xi_R(\phi) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_v e^{iv\phi} \left( \bar{S}^t(\zeta_R(\phi)) * \bar{p}_1 \cdot \bar{a}_1 \cdot \bar{\Gamma}_{Rz}(\rho) \right) \right) \right) d\phi \\ &= \frac{-\rho_R}{I_T} \sum_v \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{S}^t(\zeta_R(\phi)) \xi_R(\phi) e^{iv\phi} d\phi * \bar{p}_1 \cdot \bar{a}_1 \cdot \bar{\Gamma}_{Rz}(\rho) \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde a integral em  $\phi$  pode ser representada por:

$$\bar{J}_{Rev} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{S}^t(\zeta_R(\phi)) \xi_R(\phi) e^{iv\phi} d\phi \quad (3.75)$$

assim, a componente z da transimpedância na forma matricial pode ser dada por:

$$Z_{RTz} = -\frac{\rho_R}{I_T} \sum_{\nu} \bar{J}_{Rz\nu}^t * \bar{p}_1 \cdot \bar{a}_1 \cdot \bar{\Gamma}_{Rz} \quad (3.76)$$

Para  $Z_{RT\phi}$  usa-se álgebra similar com a substituição das parcelas  $\phi$  das equações (3.67) e (3.69) na (3.68), resultando em:

$$\begin{aligned} Z_{RT\phi} &= \frac{V_R}{I_T} = \frac{-1}{I_T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \left( \delta(\rho - \rho_R) \delta(z - \zeta_R(\phi)) \xi_R(\phi) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu} e^{i\nu\phi} E_{R\phi} \right) \right) \rho d\rho d\phi dz \\ &= \frac{-\rho_R}{I_T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \delta(z - \zeta_R(\phi)) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu} e^{i\nu\phi} \left( \bar{S}^t(z) * \bar{\Gamma}_{R\phi}(\rho) \right) \right) \right) d\phi dz \\ &= \frac{-\rho_R}{I_T} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu} e^{i\nu\phi} \left( \bar{S}^t(\zeta_R(\phi)) * \bar{\Gamma}_{R\phi}(\rho) \right) \right) \right) d\phi \\ &= \frac{-\rho_R}{I_T} \sum_{\nu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu\phi} \bar{S}^t(\zeta_R(\phi)) d\phi * \bar{\Gamma}_{R\phi}(\rho) \end{aligned} \quad (3.77)$$

onde a integral em  $\phi$  pode ser representada como:

$$\bar{J}_{R\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{S}(\zeta(\phi)) e^{i\nu\phi} d\phi \quad (3.78)$$

logo, a componente  $\phi$  da transimpedância na forma matricial pode ser dada por:

$$Z_{RT\phi} = -\frac{\rho_R}{I_T} \sum_{\nu} \bar{J}_{R\mu\nu}^t * \bar{\Gamma}_{R\phi} \quad (3.79)$$

\*: Define que a multiplicação vetorial realizada entre o vetor da esquerda do operador com somente a primeira metade do vetor da direita objetiva contabilizar somente a contribuição do campo elétrico no cálculo da transimpedância conforme a equação (3.66). Esta operação se faz necessária, pois conforme a formulação descrita, onde as expressões são transformadas em forma matricial as contribuições referentes ao campo elétrico estão posicionadas sempre na parte superior das matrizes.

### 3.2.3

#### Autofunções – B-splines cúbicas

A representação adequada dos comportamentos dos campos eletromagnéticos em meios anisotrópicos pode determinar a eficácia ou não da análise destes campos. Assim, no caso do NMM a escolha da função a ser utilizada na representação dos campos na direção axial via expansão de autofunções, por exemplo, é de grande importância. Em trabalhos como [3] e [7] as formulações do NMM se utilizam de funções triangulares, senoidais chegando a B-splines quadráticas como autofunções em suas formulações. Com intuito de apresentar uma contribuição não verificada ainda na formulação do NMM, esta tese utilizará como funções base as funções B-splines cúbicas, as quais além de proporcionarem uma melhor aproximação na representação dos campos devido a sua maior ordem, contará com a implementação de uma de suas propriedades: a multiplicidade de nós. Esta propriedade será explorada para representar de forma mais realista os campos em regiões onde esperam comportamentos abruptos, como por exemplo, nas interfaces entre meios na direção axial.

A função B-spline cúbica é composta por cinco nós, os quais quando espaçados uniformemente a B-spline é dita uniforme, conforme ilustrada na Figura 3.4. Em cada elemento da grade de discretização coexistem quatro polinômios base dados pelas equações (3.80) a (3.83), [25], as quais graficamente são ilustrados na Figura 3.5.

$$Seg\_1(z) = \frac{z_{10}^2}{z_{30}z_{20}}u^3 \quad (3.80)$$

$$Seg\_2(z) = \frac{z_{10}^2}{z_{30}z_{20}} + 3\left(\frac{z_{21}z_{10}}{z_{30}z_{20}}\right)u + 3\left(\frac{z_{21}^2}{z_{30}z_{20}}\right)u^2 - \left(\frac{z_{21}^2}{z_{30}z_{20}} + \frac{z_{21}^2}{z_{30}z_{31}} + \frac{z_{21}^2}{z_{41}z_{31}}\right)u^3 \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned}
 Seg\_3(z) = & \left( \frac{z_{32}z_{20}}{z_{30}z_{31}} + \frac{z_{42}z_{21}}{z_{41}z_{31}} \right) + 3 \left( \frac{z_{32}^2}{z_{30}z_{31}} - \frac{z_{21}z_{32}}{z_{41}z_{31}} \right) u - \\
 & 3 \left( \frac{z_{32}^2}{z_{30}z_{31}} + \frac{z_{32}^2}{z_{41}z_{31}} \right) u^2 + \left( \frac{z_{32}^2}{z_{30}z_{31}} + \frac{z_{32}^2}{z_{41}z_{31}} + \frac{z_{32}^2}{z_{41}z_{42}} \right) u^3
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

$$Seg\_4(z) = \frac{z_{43}^2}{z_{41}z_{42}} (1-u)^3 \tag{3.83}$$

onde,

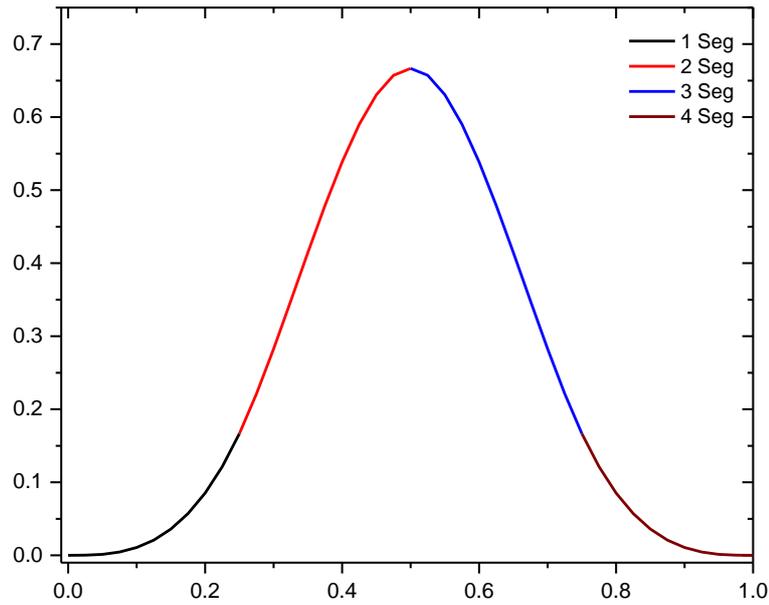
$$\begin{aligned}
 z_{10} &= z_1 - z_0 \dots z_{40} = z_4 - z_0 \\
 z_{21} &= z_2 - z_1 \dots z_{41} = z_4 - z_1
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

$$u = \frac{z - z_{i+1}}{z_{i+2} - z_{i+1}} \tag{3.85}$$

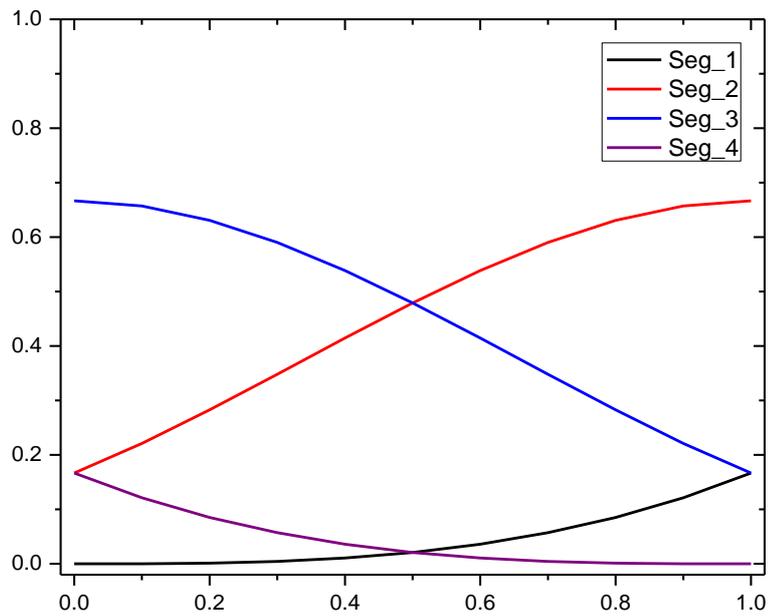
Neste trabalho a autofunção  $S_n(z)$  introduzida na equação (3.12) será representada pela função B-spline cúbica descrita como:

$$S_n(z) = Seg\_1(z) + Seg\_2(z) + Seg\_3(z) + Seg\_4(z) \tag{4.86}$$

Outra característica dessa função é a multiplicidade de seus nós, *multi-knots*, que podem ser utilizados para representar alguma perturbação no comportamento desta quando se fizer necessário, conforme a Figura 3.6. No contexto desta tese esta característica representará fisicamente o comportamento dos campos nas regiões de fronteiras, onde se sabe que os campos podem sofrer variações abruptas.



**Figura 3.4 – B-spline cúbica composta de seus quatro polinômios base espaçados uniformemente.**



**Figura 3.5– Os quatro polinômios base que constituem a B-spline cúbica.**

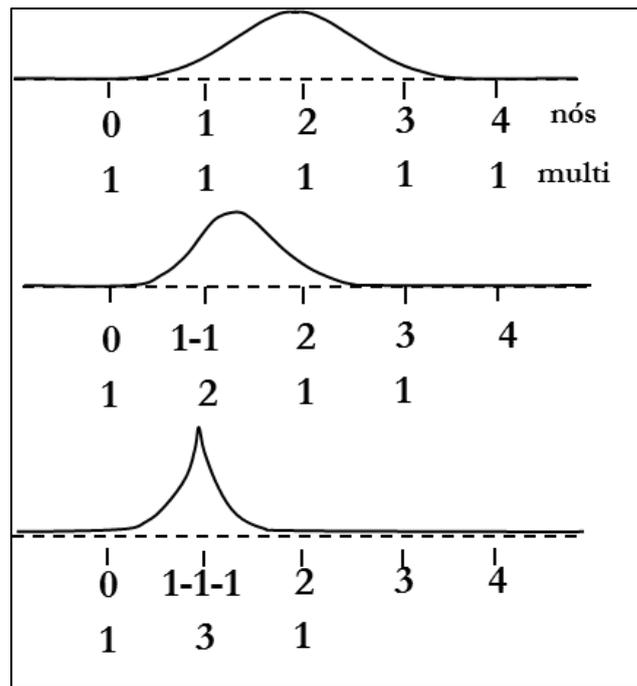


Figura 3.6 – Efeito da multiplicidade na B-spline cúbica.

### 3.2.4

#### Formulação do NMM para o caso de bobinas transversais ao eixo axial

O equacionamento do NMM desenvolvido nas seções iniciais deste capítulo contempla em sua formulação a possibilidade de contabilizar as contribuições tanto dos modos TE como dos modos TM. Para isso utiliza-se das antenas TCA, pois agregam a possibilidade da contribuição azimutal das fontes. Porém, quando se deseja realizar análises com antenas convencionais (bobinas convencionais) a formulação do NMM pode ser simplificada, pois essa configuração de antenas por sua geometria espacial não excitará as componentes azimutais, assim excitando somente os modos TE.

Assim no decorrer desta subseção são apresentados tais simplificações que, quando utilizadas, reduzem o esforço computacional para os cálculos dos campos eletromagnéticos.

A primeira implicação de quando se trabalha com as bobinas convencionais é a simplificação das equações que representam as fontes, agora com ângulo axial dado por  $\theta_T=0^\circ$ (graus), assim as equações (3.5) e (3.6) podem ser reescritas como:

$$\vec{J} = I_T \delta(\rho - \rho_T) \delta(z - z_T) (\hat{\phi} - \hat{z} \xi_T) \quad (3.87)$$

onde,

$$\begin{aligned} z_T &= z_T + \rho_T \tan(0^0) \cos(\phi - \phi_T) = z_T \\ \xi_T &= \tan(0^0) \sin(\phi - \phi_T) = 0 \end{aligned} \quad (3.88)$$

Portanto essa simplificação na expressão da fonte recai principalmente sobre o cálculo do fator  $j_{T\varepsilon\nu q}$ , a equação (3.33), que representa a contribuição da componente espectral da fonte para os modos TM. Tal fator a partir desse ponto é igual a zero, pois no interior de sua integral existe a dependência direta do termo  $\theta_T$  via o fator  $\xi_T$  da equação (3.88).

Por outro lado o fator  $j_{T\mu\nu q}$ , equação (3.37), que representa a contribuição da componente espectral da fonte para os modos TE é simplificado, pois o fator  $\zeta_T$  da equação (3.88) se torna constante e com a ausência da dependência azimutal, ou seja,  $\nu=0$ , pode-se reescrever a equação (3.37) como:

$$\begin{aligned} j_{T\mu\nu q} &= \frac{I_T}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^N \bar{a}_{\mu q n} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(\zeta(\phi)) e^{-i\nu\phi} d\phi \\ &= \frac{I_T}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^N \bar{a}_{\mu q n} S_n(z_T) \end{aligned} \quad (3.89)$$

As simplificações realizadas nas equações referentes à fonte transmissora servem similarmente para as equações que representam as bobinas receptoras,

dadas originalmente pelas equações (3.75) e (3.78). Onde o fator  $\bar{j}_{R\varepsilon\nu}$  da equação (3.75) com a simplificação é igual a zero, entretanto o fator  $\bar{j}_{R\mu\nu}$  da equação (3.78) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}\bar{j}_{R\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{S}_n(\zeta(\phi)) e^{i\nu\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{S}_n(z_R)\end{aligned}\quad (3.90)$$

Assim, analisando as expressões resultantes da simplificação imposta pela geometria das antenas (bobinas) convencionais no cálculo da transimpedância pelas equações (3.76) e (3.79). Tendo isso em vista, pode-se observar explicitamente que somente a parcela correspondente à componente  $\phi$  do campo é excitada por essa geometria. Esta simplificação será adotada no decorrer do texto.

### 3.3

#### Perfectly Matched Layer – PML

Em casos onde os campos eletromagnéticos são representados por expansões numéricas o truncamento computacional se faz necessário. Porém este truncamento acarreta indesejáveis perturbações aos resultados. Existem diferentes opções para tentar diminuir e até eliminar essas perturbações. A mais conhecida é a utilização de camada absorvedora denominada na literatura de camada perfeitamente casada - *Perfectly Matched Layer* – PML, [2], [26].

A elaboração de um projeto de PML segue diferentes parâmetros que envolvem a propagação de ondas eletromagnéticas. Porém como o objetivo principal deste trabalho não é abordar as especificidades da implementação das PML, será apresentado um roteiro de implementação de uma PML utilizada para

truncamento dos campos eletromagnéticos que se propagam ao longo da direção axial e seguem as diversas etapas descritas em [26]. Embora nessa referência sejam apresentadas técnicas para o truncamento nas direções radial e axial, no NMM será utilizada somente a PML axial, visto que serão utilizadas funções Hankel de primeiro tipo para representar a expansão radial dos campos, o que satisfaz as condições de propagação de Sommerfield nessa direção.

Um aspecto importante da formulação apresentada em [2] é que a inclusão da PML na formulação do NMM mantém as formas habituais dos operadores espaciais nas equações de Maxwell, onde as relações constitutivas são modificadas somente no interior das camadas da PML. Dessa forma, os campos eletromagnéticos no interior da PML passam a ser associados a características constitutivas elétricas e magnéticas de um meio anisotrópico. Tais características são representadas em forma de tensores. A existência dessa formulação de PML anisotrópica decorre da invariância métrica das equações de Maxwell, como discutido em [27] - [28].

Em coordenadas cilíndricas, os tensores das características constitutivas para meios homogêneos e não dispersivos podem ser encontrados em [26], como:

$$\bar{\bar{\epsilon}}_{PML} = \bar{\bar{\epsilon}}_{[\rho, \phi, z]}(\rho, \phi, \omega) \quad (3.91)$$

$$\bar{\bar{\mu}}_{PML} = \bar{\bar{\mu}}_{[\rho, \phi, z]}(\rho, \phi, \omega) \quad (3.92)$$

sendo

$$\bar{\bar{\gamma}}_{[\rho, \phi, z]}(\rho, \phi, \omega) = \hat{\phi}\hat{\phi} \frac{\rho s_z s_\rho}{\tilde{\rho} s_\rho} + \hat{\rho}\hat{\rho} \frac{\tilde{\rho} s_z}{\rho s_\rho} + \hat{z}\hat{z} \frac{\tilde{\rho} s_\rho}{\rho s_z} \quad (3.93)$$

Onde  $\tilde{\rho}$  é a continuação analítica da coordenada  $\rho$  no domínio das variáveis complexas. Já  $s_z$  e  $s_\rho$ , são variáveis complexas dependentes da frequência, que são dadas por:

$$\tilde{\rho} = \int_0^{\rho} s_{\rho}(\rho') d\rho' = \int_0^{\rho} \left( a_{\rho}(\rho') + i \frac{\Omega_{\rho}(\rho')}{\omega} \right) d\rho' = b_{\rho}(\rho) + i \frac{\Delta_{\rho}(\rho)}{\omega} \quad (3.94)$$

$$s_{\rho} = a_{\rho}(\rho) + i \frac{\Omega_{\rho}(\rho)}{\omega} \quad (3.95)$$

$$s_z = a_z(z) + i \frac{\Omega_z(z)}{\omega} \quad (3.96)$$

onde  $a_z$  e  $a_{\rho}$  são as partes reais dos parâmetros complexos que representam a PML e  $\Omega_{\rho}, \Omega_z$  são as parcelas imaginárias que representam a condutividade no interior da PML, que são dependentes somente da posição. O objetivo dessas variáveis é acrescentar atenuações aos campos eletromagnéticos no interior da PML, de modo a reduzir as possíveis reflexões no domínio de interesse do problema. A taxa de decaimento do campo no interior da PML é controlada pela parte imaginária de  $s_z$ . A absorção das ondas que se propagam é atingida através da escolha de  $\Omega_{\rho}, \Omega_z > 0$ .

Além disso, a deterioração mais rápida dos modos evanescentes (se existirem) no interior do PML pode também ser atingida pelo controle de  $a_z$ , e  $a_{\rho} > 0$ . Portanto o resultado global é uma absorção com menos reflexões das ondas eletromagnéticas nas direções  $z$  e  $\rho$  e para todas as frequências e ângulos de incidência, conforme [2].

A variação dos parâmetros  $\Omega_z$  e  $a_z$  no interior da PML adotada neste trabalho foram os polinômios apresentados em [29], e descritos na eq. (3.97):

$$\begin{aligned} a_z(z_d) &= a_{z,\max} \left( \frac{z_d}{l} \right)^m \\ \Omega_z(z_d) &= \Omega_{z,\max} \left( \frac{z_d}{l} \right)^m \end{aligned} \quad (3.97)$$

onde,

-  $Z_d$  é a distância entre o valor do parâmetro em dado  $z$  dentro das camadas PML e a interface com o domínio de interesse;

-  $l$ : é a dimensão total das camadas da PML;

-  $m$ : ordem do polinômio de atenuação da PML;

-  $a_{z,\max}$  e  $\Omega_{z,\max}$ : valores máximos assumidos para este parâmetro dentro da PML;

O mecanismo para esta formulação de PML interagir de forma direta com as Equações de Maxwell sem alterar seus aspectos constitutivos no domínio de interesse é através da escolha de  $\Omega_{\rho,z} = 0$  e  $a_{\rho,z} = 1$ , o que resulta no retorno ao problema inicial, onde não há influência da PML.

Conforme [3], a escolha dos valores para  $\Omega_{\rho,z}$  e  $a_{\rho,z}$  passa pela análise das características do caso a ser analisado, como por exemplo, da frequência de excitação da ferramenta, da condutividade e da permeabilidade do meio.

Para a formulação do NMM as mudanças se deram pela incorporação da PML em  $z$  que pode ser explicitada através das eq. (3.1) e eq. (3.2):

$$\bar{\bar{\epsilon}}^s(z) = \begin{pmatrix} \epsilon_h^s & & \\ & \epsilon_h^s & \\ & & \epsilon_v^s \end{pmatrix} \quad \bar{\bar{\mu}}^s(z) = \begin{pmatrix} \mu_h^s & & \\ & \mu_h^s & \\ & & \mu_v^s \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

com,

$$\begin{aligned} \epsilon_h^s &= [\epsilon_h - (\sigma_h / i\omega)] s_z & \epsilon_v^s &= [\epsilon_v - (\sigma_v / i\omega)] s_z \\ \mu_h^s &= \mu_h s_z & \mu_v^s &= \mu_v / s_z \end{aligned} \quad (3.99)$$

onde o sobrescrito "s" indica a inclusão da PML na formulação.

### 3.3.1

#### Análise de alguns parâmetros da PML

A análise dos parâmetros que envolvem a implementação da *Perfect Matched Layer* – PML – é encontrada em diferentes trabalhos que abordam estudos de propagação de ondas eletromagnéticas [26], [27] e [28]. Entre os parâmetros considerados, cita-se as características do meio, a frequência de operação e o dimensionamento da discretização do domínio. Esses últimos são aspectos que devem ser levados em consideração ao se criar a configuração – *Setup* de uma PML.

Nesta seção será descrito o dimensionamento da PML adotado na implementação NMM utilizado neste trabalho [26], [27] e [28], onde serão considerados os seguintes parâmetros: o número de células da PML, o tamanho destas, o ajuste dos parâmetros  $a_{z,\max}$  e  $\Omega_{z,\max}$ , dados na equação (3.97). O desempenho de tais parâmetros foi explorado via cálculo das equações de erro da amplitude e da fase, equações (3.100) e (3.101). Tais equações são utilizadas para calcular o erro entre a tensão induzida na bobina receptora calculada pelo NMM e a tensão induzida na bobina receptora calculada pela integral de radiação, usada como referência, a qual é melhor detalhada no Anexo E .

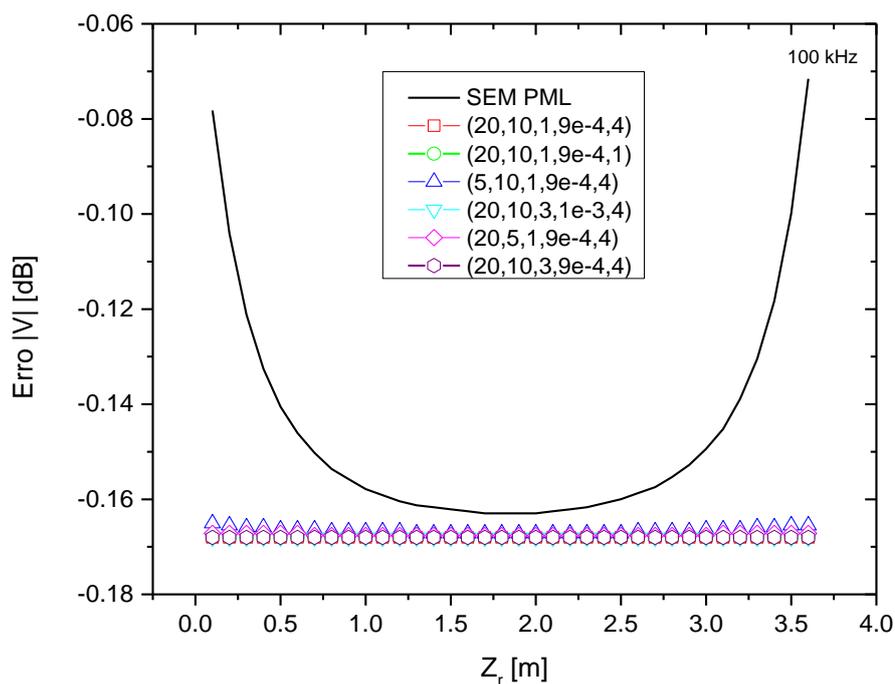
$$Erro_{amplitude} = 10 \log \left( \frac{\left| |V_{NMM}| - |V_{IntRad}| \right|}{|V_{IntRad}|} \right) \quad (3.100)$$

$$Erro_{fase} = 10 \log \left( \frac{\left| \left| \theta(V_{NMM}) \right| - \left| \theta(V_{IntRad}) \right| \right|}{\pi} \right) \quad (3.101)$$

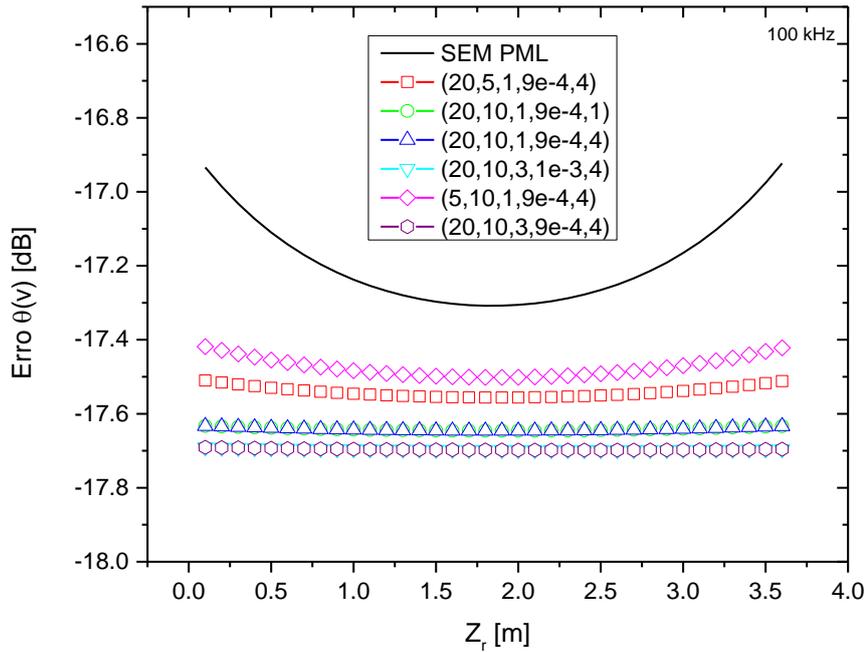
Para estes testes de desempenho da PML foi considerado um meio homogêneo com baixa condutividade, de 0.0005S/m ao longo de um domínio de

5m, sendo que o transmissor está afastado do receptor de 30 polegadas, [3]. Nestes testes foram considerados sistemas operando nas frequências de operação de 100 kHz, 2 MHz, e 25 MHz, os parâmetros citados no paragrafo anterior, além do parâmetro da ordem “m” do polinômio utilizado da equação (3.97), que fornece o decaimento destes parâmetros dentro da PML.

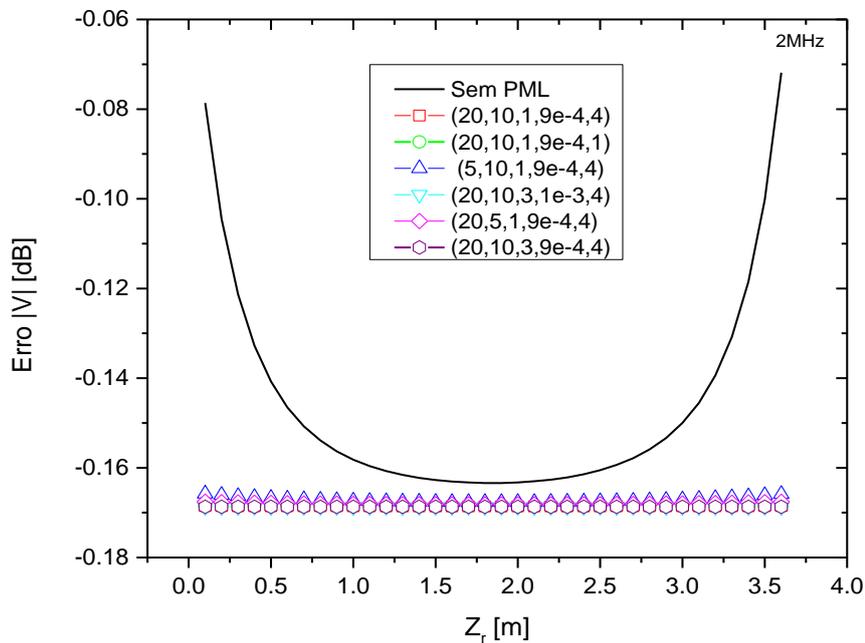
Para diversos conjuntos de parâmetros, as Figuras 3.7 e 3.8 ilustram o comportamento do erro encontrado na amplitude entre a tensão gerada pela integral de radiação e a tensão gerada pelo NMM implementado na frequência de operação de 100 KHz. As Figuras 3.9 e 3.10 ilustram o comportamento do erro para a operação em 2 MHz e as Figuras 3.11 e 3.12, descrevem o comportamento para a frequência de 25 MHz.



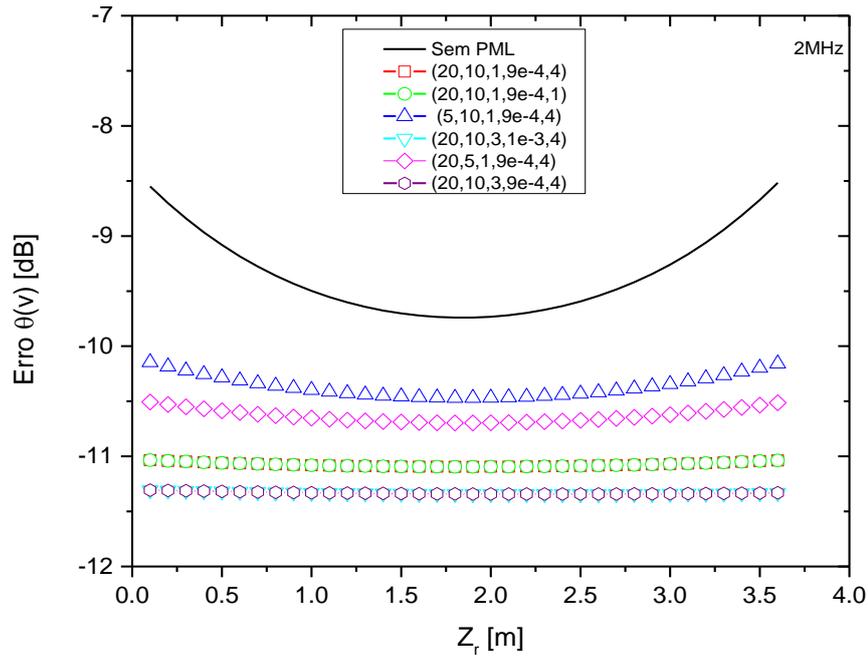
**Figura 3.7 –Função erro da tensão da análise de desempenho da PML para diferentes configurações de parâmetros em 100KHz. Legenda n° de camadas da PML, fator multiplicativo,  $a_z$ ,  $\Omega_z$ , m).**



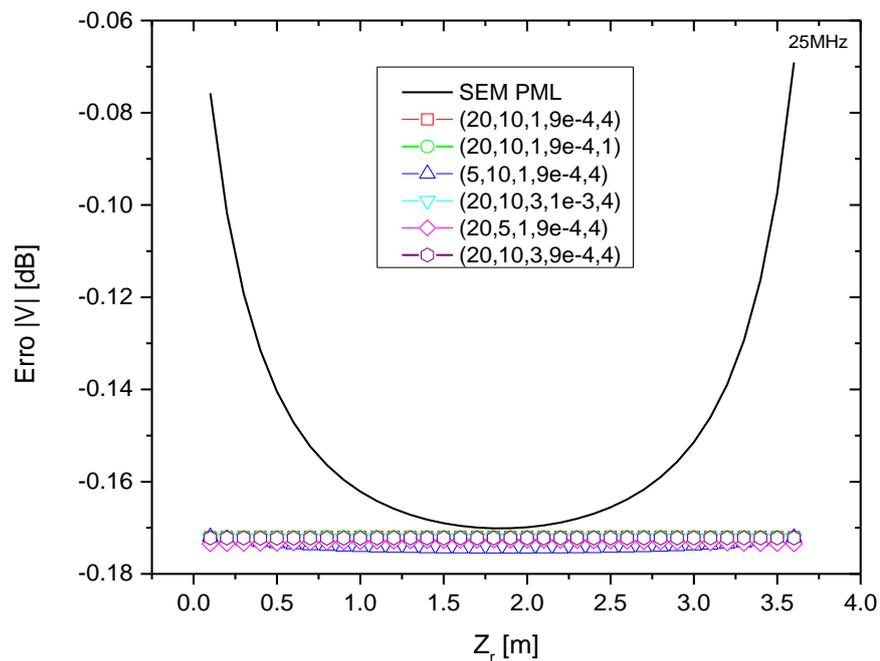
**Figura 3.8 – Função erro da fase da análise de desempenho da PML para diferentes configurações de parâmetros em 100 KHz. Legenda n° de camadas da PML, fator multiplicativo,  $a_z$ ,  $\Omega_z$ , m).**



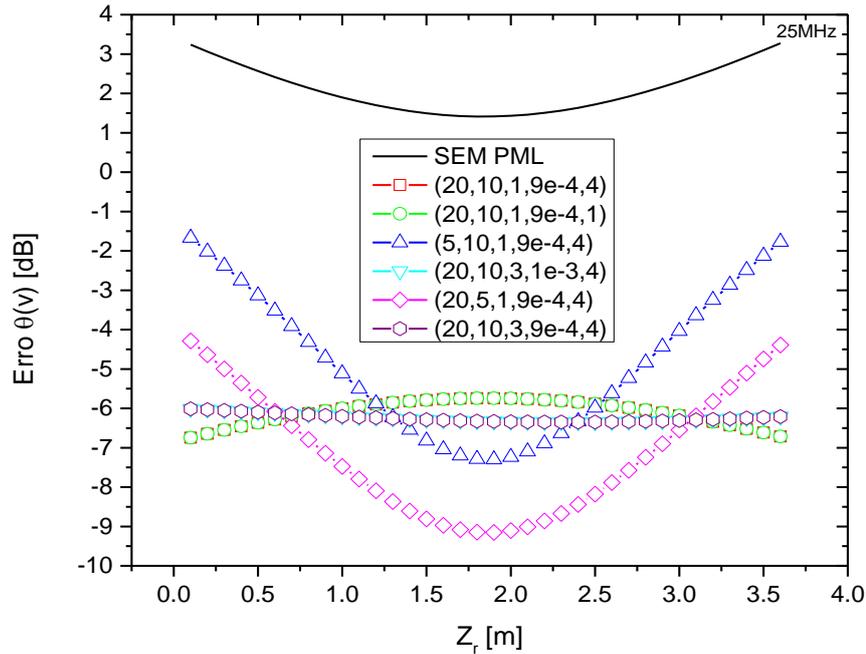
**Figura 3.9 – Função erro da tensão da análise de desempenho da PML para diferentes configurações de parâmetros em 2MHz. Legenda n° de camadas da PML, fator multiplicativo,  $a_z$ ,  $\Omega_z$ , m).**



**Figura 3.10 – Função erro da fase da análise de desempenho da PML para diferentes configurações de parâmetros em 2MHz. Legenda (n° de camadas da PML, fator multiplicativo,  $a_z$ ,  $\Omega_z$ , m).**



**Figura 3.11 – Função erro da tensão da análise de desempenho da PML para diferentes configurações de parâmetros em 25 MHz. Legenda n° de camadas da PML, fator multiplicativo,  $a_z$ ,  $\Omega_z$ , m).**



**Figura 3.12 – Função erro da fase da análise de desempenho da PML para diferentes configurações de parâmetros em 25 MHz. Legenda (nº de camadas da PML, fator multiplicativo,  $a_z$ ,  $\Omega_z$ , m).**

Observa-se que os erros gerados entre as diferentes composições de parâmetros são menores que no caso sem PML. Enquanto estes conjuntos fornecem erros relativos similares para a amplitude, diferenças significativas são encontradas para a fase, que cresce em direção as bordas do domínio. Este mesmo comportamento é observado com o aumento da frequência.

Enquanto nos gráficos que apresentam os erros relativos das tensões para as diferentes frequências analisadas os comportamentos são similares, nos gráficos que ilustram os erros relativos das fases existem pequenas diferenças, principalmente entre as regiões de borda e a região central do domínio analisado. Por exemplo, nos casos com frequências de 100kHz e 2MHz as linhas que representam as combinações com o valor de  $a_{z,\max}$  igual a 3 foram as que apresentaram menores erros relativos.

No caso que utilizou a frequência de operação de 25MHz pode-se observar dois tipos de comportamentos na análise dos erros relativos nas fases. O primeiro comportamento refere-se à uniformidade ao longo de todo domínio, indicado pelas linhas que apresentavam  $\alpha_{z,\max}$  igual a 3. O segundo comportamento foi a configuração que utilizou 20 camadas, com fator multiplicativo igual a 5,  $\Omega_{z,\max}$  igual a 1 e ordem do polinômio igual a 4, representado pela linha dada por hexágonos na Figura 3.11. Tal linha apresentou o menor erro relativo na região central, porém com quase 2dB nas bordas. Assim, estes resultados possibilitam realizar uma escolha mais adequada da configuração a ser utilizadas na PML para cada frequência de operação.

Após observar os resultados dos estudos comparativos da inclusão da PML com suas variadas configurações observou-se que a inclusão da PML se faz necessária.

Embora o ambiente de testes ter utilizado um meio homogêneo e com baixa condutividade deve-se destacar que as configurações encontradas nos meios envolvidos apresentam resistências mais elevadas, evidenciando a aplicabilidade do estudo entorno da escolha entre as diferentes configurações de PML apresentadas no decorrer dessas últimas seções.

### 3.4

#### **Validação do algoritmo de análise via autovalores**

Com o objetivo de validar a parte inicial do algoritmo implementado, abordarmos inicialmente casos com meios formados por camadas isotrópicas e

não condutivas, meios com camadas isotrópicas e condutivas e meios com camadas anisotrópicas e condutivas.

Para referência, utilizou-se o problema de placas paralelas preenchidas por dois meios diferentes na direção  $z$ , conforme a Figura 3.13, cuja solução analítica para os autovalores está descrita em [30]. A formulação analítica descrita em [30] se encontra no Apêndice F, bem como sua adaptação para problemas onde os meios podem ser isotrópicos ou anisotrópicos. A validação desta etapa se dará pela comparação entre os valores encontrados pela formulação do NMM e os valores de referência encontrados para os autovalores pela formulação analítica apresentada em [30].

Nos casos que serão apresentados, os limites  $z_{\max}$  e  $z_{\min}$  seguirão as condições de contorno de Neumann, que segundo [6] se originam pela imposição onde a derivada das autofunções sobre tais limites seja igual a zero. Tais condições indicam a presença, nos limites, de uma parede perfeitamente elétrica – PEC para ondas TM, bem como uma parede perfeitamente magnética – PMC para ondas TE.

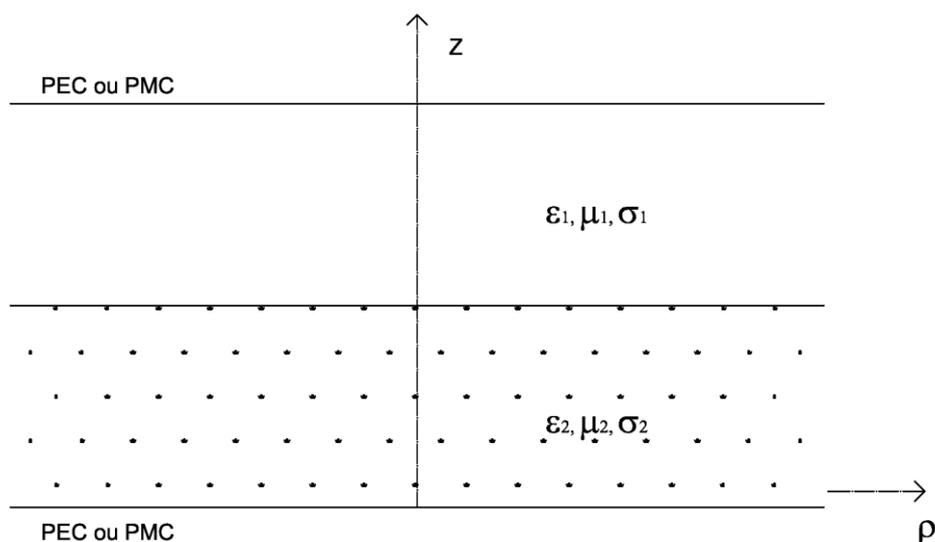


Figura 3.13 – Perfil do problema equivalente de duas placas com duas camadas distintas.

### 3.4.1

#### Caso equivalente com meios isotrópicos sem perdas

Neste primeiro caso o perfil das camadas trata da formulação presente no Anexo F, sendo a formulação derivada das formulações encontradas em [30]. O caso é composto de duas camadas na direção axial (eixo  $z$ ) heterogêneas isotrópicas e sem perdas.

As funções características analíticas do problema para obtenção dos autovalores para ondas TM e TE são dadas pelas equações (3.102) e (3.103) respectivamente.

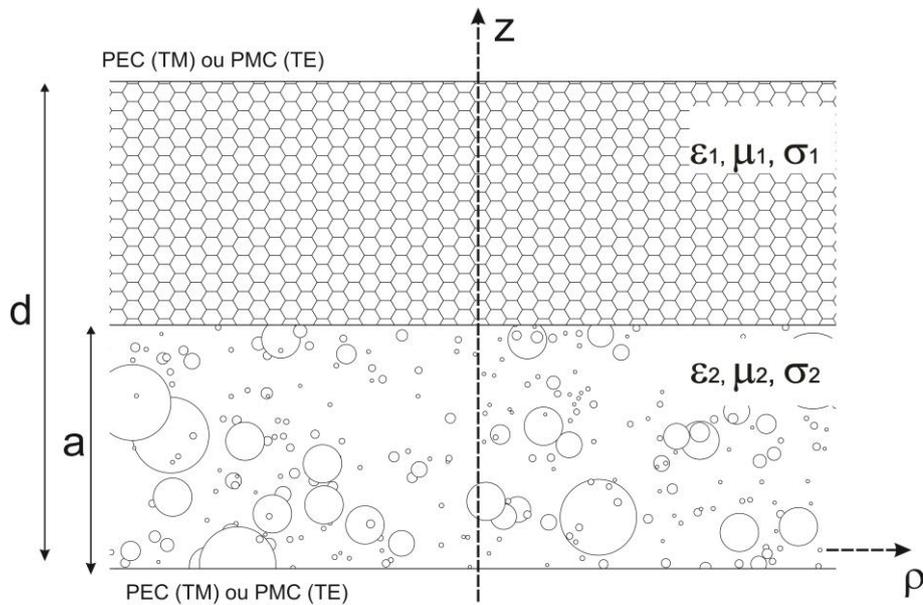
$$\frac{k_{z1}}{\varepsilon_1} \tan(k_{z1}d) = -\frac{k_{z2}}{\varepsilon_2} \tan(k_{z2}(a-d)) \quad (3.102)$$

$$k_{z1} \tan(k_{z1}d) = -k_{z2} \tan(k_{z2}(a-d)) \quad (3.103)$$

sendo os termos das permissividades dados pela equação (3.2), que para o caso sem perdas não apresenta o segundo termo em função da condutividade. Dessa forma, pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{h,1,2} = \varepsilon_{v,1,2} = \varepsilon_{1,2} \quad (3.104)$$

A distância entre as placas foi de  $d=1000\text{m}$ , com a interface localizada em  $a=500\text{m}$ , conforme ilustrado na Figura 3.14. A heterogeneidade das camadas é representada pelos aspectos constitutivos da camada superior com permissividade  $\varepsilon_1 = 1\varepsilon_0$  e permeabilidade  $\mu_1 = 1\mu_0$  e para a camada inferior a permissividade de  $\varepsilon_2 = 2,55\varepsilon_0$ .



**Figura 3.14 – Problema equivalente de duas placas com duas camadas distintas com  $d=1000m$ , e  $a=500m$ .**

Como indicado anteriormente, a escolha da função B-spline cúbica como autofunção na formulação do NMM permite a utilização da multiplicidade dos nós – *multiple-knots*. Isso possibilita representar a perturbação que os campos sofrem ao interagir sobre a fronteira entre os dois meios para casos como este que apresenta heterogeneidade (da permissividade) entre eles.

Para melhor demonstrar o efeito da inclusão da multiplicidade de nós na formulação das B-splines foram calculados os erros relativos entre os autovalores encontrados pelo método NMM referenciados pelos calculados das formulações analíticas das equações (3.102) e (3.103). Seguindo a formulação do NMM, primeiramente, utilizou-se as B-splines sem a repetição dos nós (sem multiplicidade de nós - *Single Knots* - SK), e posteriormente com a repetição dos nós (com multiplicidade de nós - *Multiple-knots* - MK), para as ondas TM e TE, respectivamente, conforme os gráficos das Figura 3.15 e 3.16.

Como se pode notar nas Figuras 3.15 e 3.16, os erros relativos encontrados para os autovalores tanto das ondas TM quanto das ondas TE, apresentam

menores erros quando se utiliza da multiplicidade dos nós em referência a solução analítica.

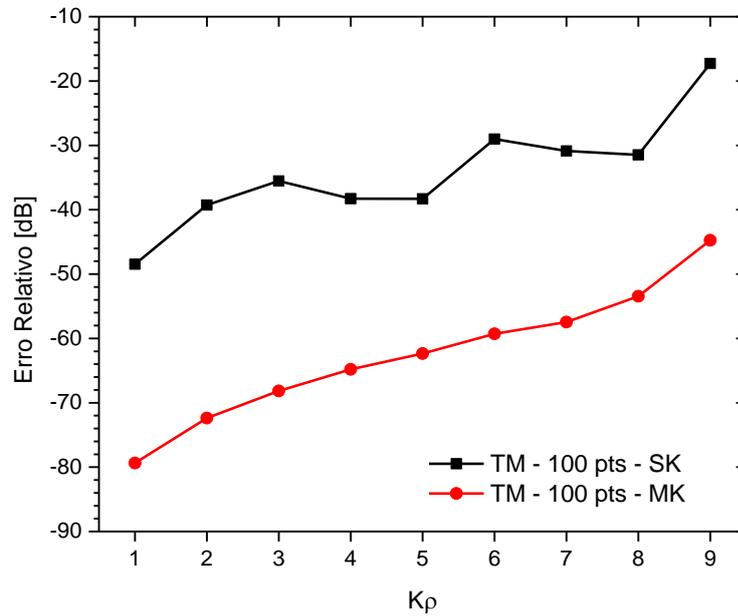


Figura 3.15 – Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TM, comparação com e sem multiplicidade dos nós para caso isotrópico sem perdas.

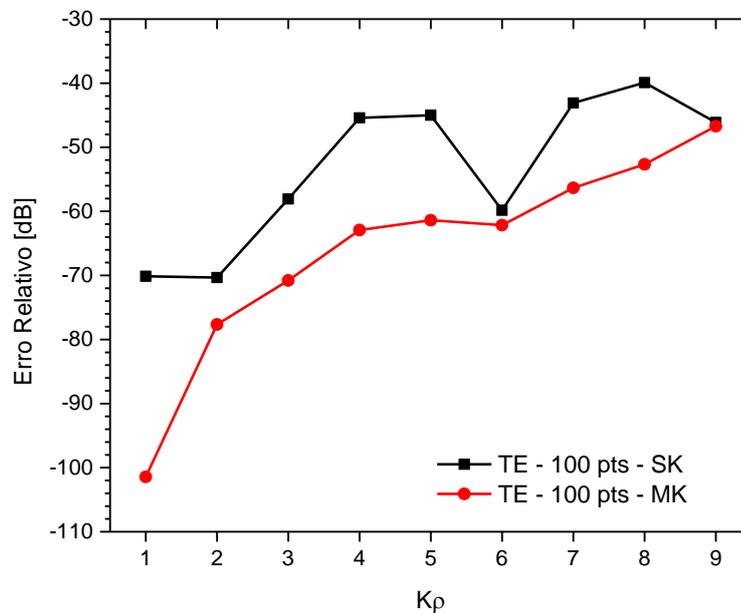
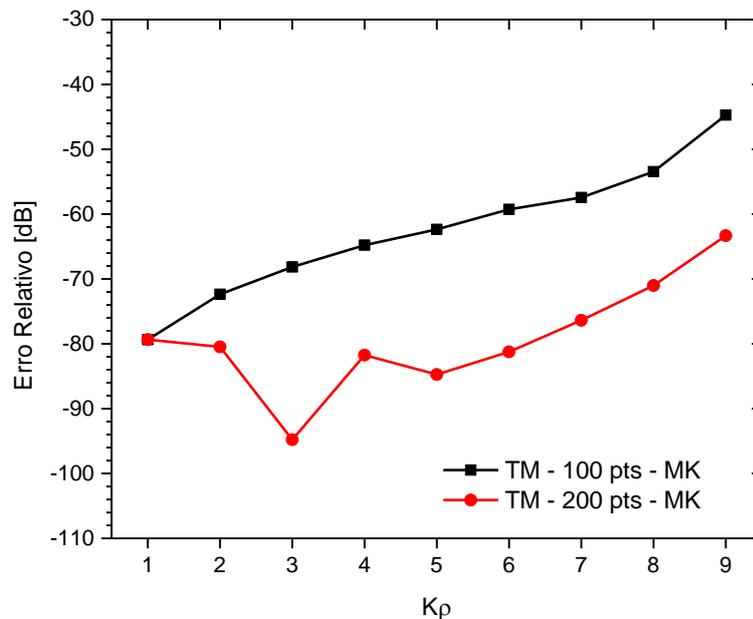


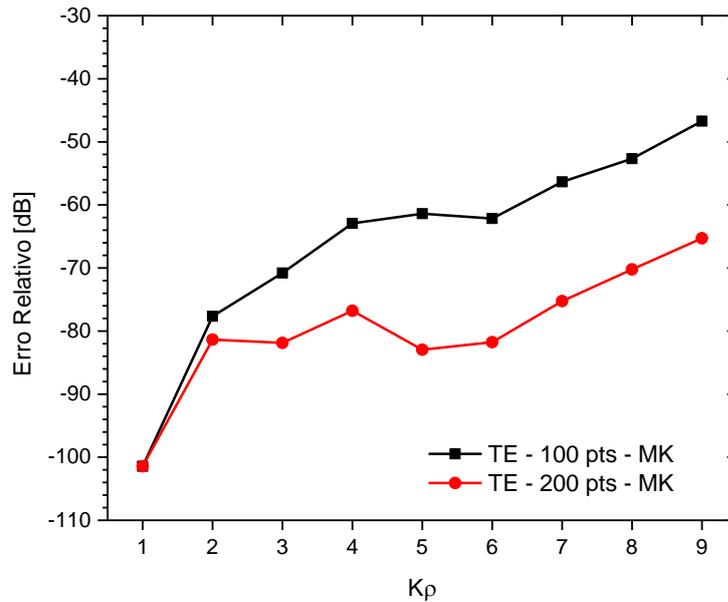
Figura 3.16 – Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TE, comparação com e sem multiplicidade dos nós para caso isotrópico sem perdas.

Em uma análise mais detalhada pode-se notar que para o modo TM a diferença entre as linhas com multiplicidade dos nós e sem multiplicidade dos nós se manteve mais acentuada que o modo TE. Uma possível explicação para esse fenômeno poderia ser através da avaliação da equação (3.13), na qual o primeiro termo dentro dos colchetes apresenta uma derivada dupla em  $z$ , sendo que entre elas existe um termo da permissividade dependente de  $z$ , que neste caso varia de uma camada para outra. Assim o erro acumulado por essa operação matemática é reduzido quando se utiliza o mecanismo da multiplicidade dos nós para representar o comportamento do campo na interface entre as duas camadas.

Outra análise realizada foi com relação ao comportamento dos resultados em função do número de nós, ou seja, a densidade da grade gerada. Como se pode observar nas Figuras 3.17 e 3.18 uma melhor discretização do domínio resultou em um menor erro, para ondas TM e para as ondas TE, respectivamente.



**Figura 3.17 – Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TM, comparação com diferentes grades de discretização dos meios com multiplicidade dos nós para caso isotrópico sem perdas.**



**Figura 3.18– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TE, comparação com diferentes grades de discretização dos meios com multiplicidade dos nós para caso isotrópico sem perdas.**

### 3.4.2

#### Caso equivalente com meios isotrópicos com perdas

Após a validação do caso onde se abordou camadas heterogêneas isotrópicas sem perdas na direção axial (eixo  $z$ ), foram abordados meios heterogêneos isotrópicos com perdas. Nesta validação consideram-se meios condutivos, por conseguinte meios com perdas; entretanto ainda se manteve as características isotrópicas dos meios, assim as expressões da equação (3.2) em termos das permissividades dos meios sofrem algumas alterações que podem ser representadas reescrevendo-a conforme a equação (3.105) e (3.106).

$$\begin{aligned}
 \sigma_{h,1} &= 1 S / m \\
 \sigma_{v,1} &= 1 S / m \\
 \varepsilon_{h,1} &= \varepsilon_{v,1} = 1 \varepsilon_0 \\
 \mu_{h,1} &= \mu_{v,1} = 1 \mu_0
 \end{aligned}
 \tag{3.105}$$

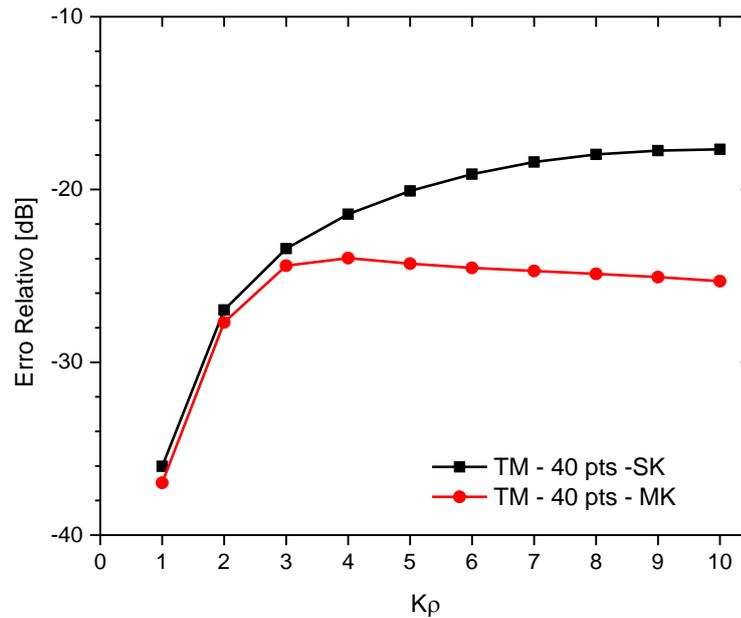
e,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{h,2} &= 100 \text{ S / m} \\
 \sigma_{v,2} &= 100 \text{ S / m} \\
 \varepsilon_{h,2} &= \varepsilon_{v,1} = 1 \varepsilon_0 \\
 \mu_{h,2} &= \mu_{v,1} = 1 \mu_0
 \end{aligned}
 \tag{3.106}$$

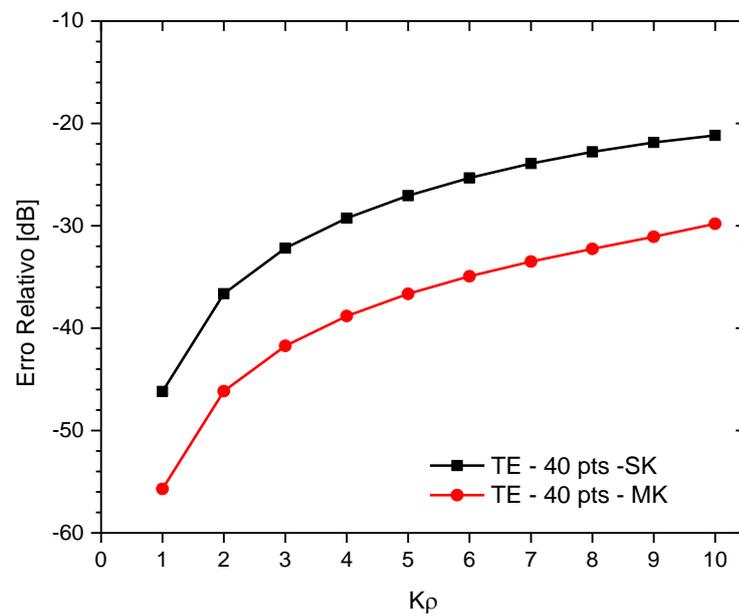
onde se pode observar que a anisotropia da equação (3.2), foi transformada em isotropia.

Similarmente ao caso sem perdas, foi montado um perfil para um caso equivalente fazendo uso do conceito de placas paralelas, porém em consequência dos meios serem condutivos há atenuação dos sinais propagados nestes meios. Assim, optou-se por reduzir a distância entre as placas na direção do eixo z para  $d=20\text{m}$ , pois a influência das ondas refletidas geradas nas fronteiras é significativamente reduzida em função da atenuação dos meios.

Como na seção anterior, primeiramente buscou-se o cálculo do erro relativo da formulação das autofunções com a presença ou não da multiplicidade dos nós em sua formulação em referência a formulação analítica do Anexo F. Os resultados podem ser observados nas Figuras 3.19 e 3.20 para as ondas TM e TE, respectivamente.



**Figura 3.19**– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TM, comparação da resposta das autofunções com (MK) ou sem (SK) multiplicidade dos nós em sua formulação, para o caso equivalente de meios isotrópicos com perdas.



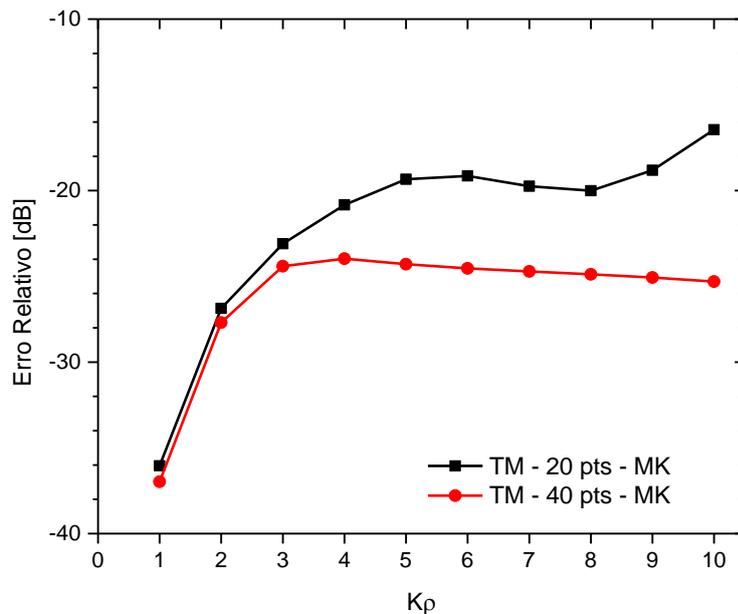
**Figura 3.20**– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TE, comparação da resposta das autofunções com (MK) ou sem (SK) multiplicidade dos nós em sua formulação, para o caso equivalente de meios isotrópicos com perdas.

Como observado no caso isotrópico sem perdas, os resultados para os casos que se utilizaram da multiplicidade dos nós resultaram em um menor erro

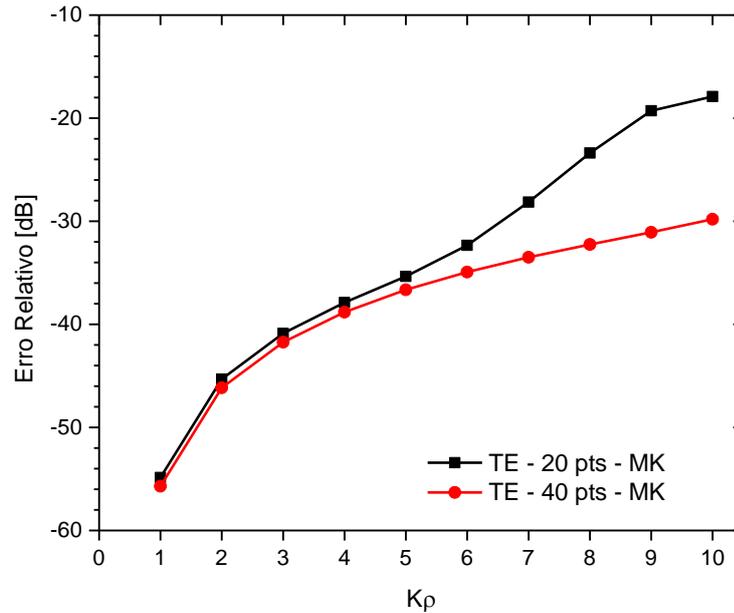
relativo em referência à formulação analítica tanto para ondas TE como para as ondas TM.

Para ilustrar o comportamento do erro relativo com o incremento na discretização ao longo do eixo z foram realizados testes com grades de 20 nós e 40 nós, para as ondas TM e TE, conforme ilustrado nas Figuras 3.21 e 3.22, respectivamente.

Nas Figuras 3.21 e 3.22, observa-se o comportamento esperado: com uma grade maior o erro relativo diminui, tanto para ondas TM como para ondas TE, respectivamente.



**Figura 3.21**– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TM, comparação com diferentes grades de discretização dos meios com multiplicidade dos nós para caso isotrópico com perdas.



**Figura 3.22– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TE, comparação com diferentes grades de discretização dos meios com multiplicidade dos nós para caso isotrópico com perdas.**

### 3.4.3

#### Caso equivalente com meios anisotrópicos com perdas

Neste terceiro caso busca-se uma validação através do cálculo do erro relativo em referência à formulação analítica, mostrada no anexo F. Neste caso a anisotropia uniaxial em meios condutivos é considerada. O domínio considerado em  $z$  é de  $d=20\text{m}$ , o qual se deve, novamente, pelas mesmas razões apresentadas na subseção anterior.

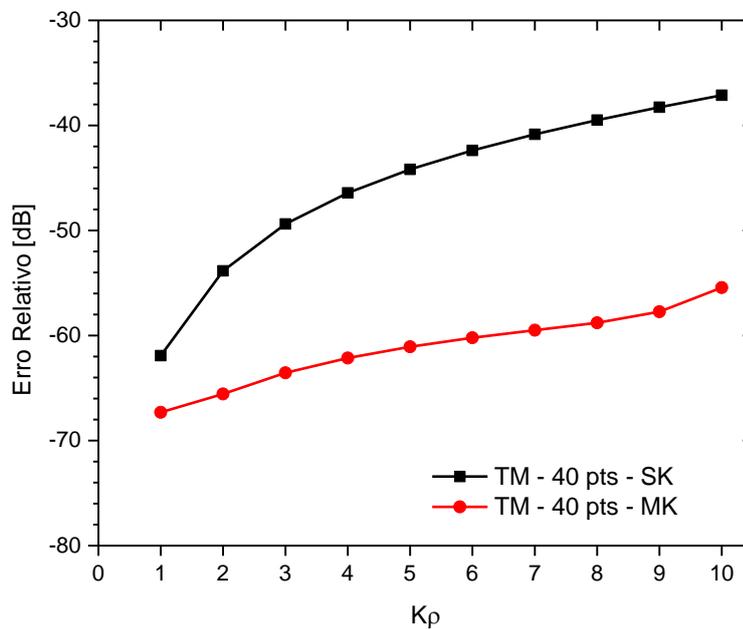
Os valores das características do meio superior foram:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{h,1} &= 100 \text{ S / m} \\
 \sigma_{v,1} &= 1 \text{ S / m} \\
 \varepsilon_{h,1} &= \varepsilon_{v,1} = 1 \varepsilon_0 \\
 \mu_{h,1} &= \mu_{v,1} = 1 \mu_0
 \end{aligned}
 \tag{3.107}$$

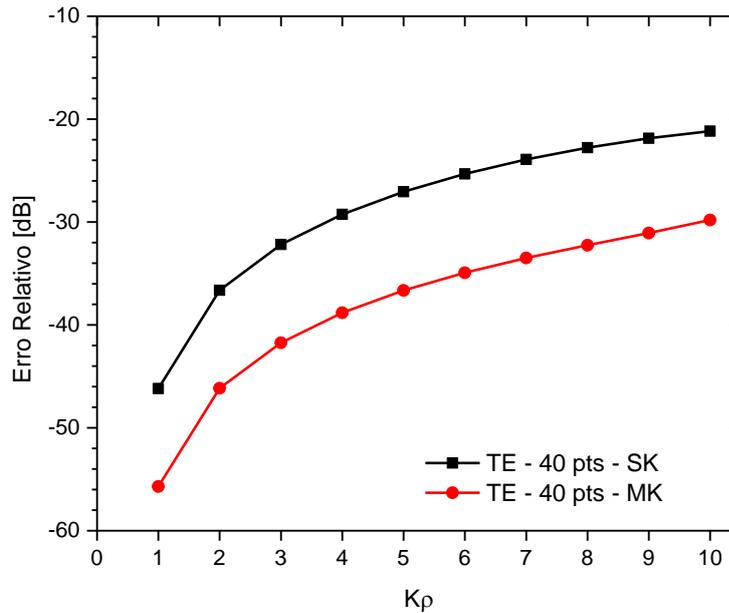
Como para a camada inferior:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{h,2} &= 1 S / m \\
 \sigma_{v,2} &= 100 S / m \\
 \varepsilon_{h,2} &= \varepsilon_{v,2} = 1 \varepsilon_0 \\
 \mu_{h,2} &= \mu_{v,2} = 1 \mu_0
 \end{aligned}
 \tag{3.108}$$

Assim como nos casos anteriores, primeiramente, foi realizada uma análise dos erros relativos obtidos pela comparação da formulação analítica com as formulações das autofunções com e sem multiplicidade de nós, conforme ilustrado nas Figuras 3.23 e 3.24 para os modos TM e TE, respectivamente.



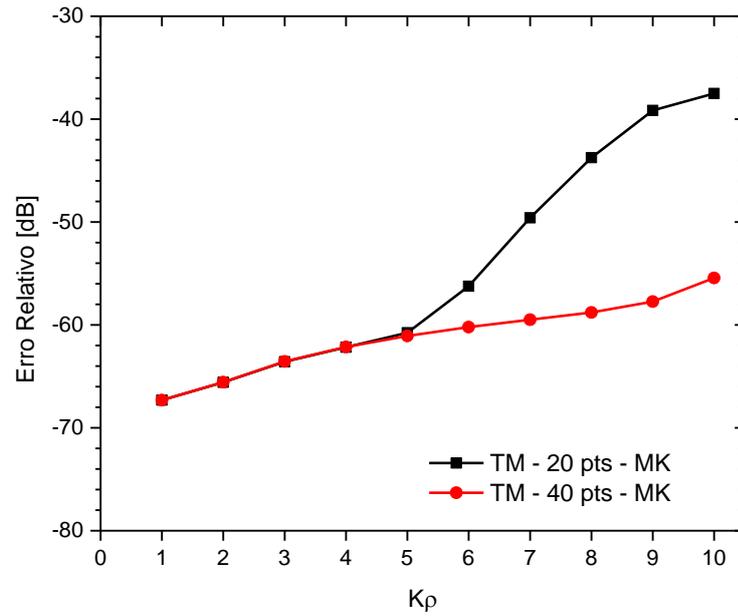
**Figura 3.23– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TM, comparação da resposta das autofunções com (MK) ou sem (SK) multiplicidade dos nós em sua formulação, para o caso equivalente de meios anisotrópicos com perdas.**



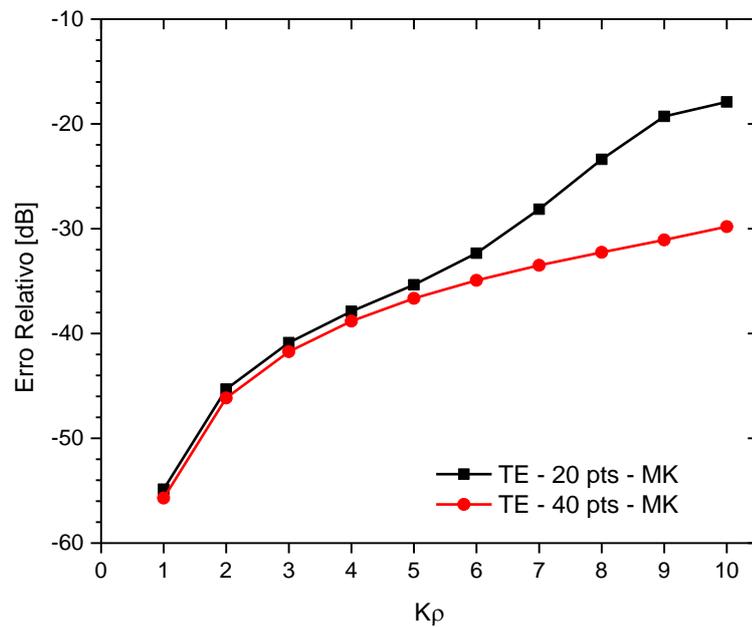
**Figura 3.24– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TE, comparação da resposta das autofunções com (MK) ou sem (SK) multiplicidade dos nós em sua formulação, para o caso equivalente de meios anisotrópicos com perdas.**

Como se pode observar nas Figuras 3.23 e 3.24, os resultados foram como o esperado: na medida em que se acrescenta a multiplicidade dos nós na interface o erro cai consideravelmente tanto para ondas TM quanto para as ondas TE, sendo mais evidente para as ondas TM. Isso ocorre também no caso sem perdas. Nota-se que para os autovalores de mais alta ordem o efeito é melhor percebido, o que parece indicar que nos casos onde os autovalores de alta ordem carregam uma porção do campo considerável o efeito causado pela inclusão da multiplicidade dos nós se justifica.

Para concluir apresenta-se os resultados das comparações entre diferentes discretizações para os casos TM e TE, Figuras 3.25 e 3.26, respectivamente. Tais resultados evidenciam que para os autovalores de mais alta ordem a maior discretização contribui chegando a uma diferença de 1.75 dB no caso das ondas TM, conforme a Figura 3.25.



**Figura 3.25**– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TM, comparação com diferentes grades de discretização dos meios com multiplicidade dos nós para caso anisotrópico com perdas.



**Figura 3.26**– Gráfico do erro relativo dos autovalores para caso de ondas TE, comparação com diferentes grades de discretização dos meios com multiplicidade dos nós para caso anisotrópico com perdas.

### 3.5

#### **Validação do algoritmo de análise NMM em perfilagem de poços de petróleo**

Nesta subseção é apresentada a validação do algoritmo implementado nesta Tese via casos encontrados durante a revisão de literatura realizada ao longo da pesquisa, [8]. O caso de perfilagem de poços de petróleo abordado foi escolhido de forma que apresentasse o desempenho do algoritmo implementado com NMM utilizando as funções B-splines cúbicas como autofunções da expansão modal axial comparado a um resultado obtido via um dos métodos que fornecesse resultados robustos no que tange a realidade dos perfis. Assim, o caso escolhido ilustra os resultados gerados via FDTD para um perfil que apresenta um alto contraste entre as camadas.

##### 3.5.1

#### **Escolha da grade de discretização nas análises de perfilagem**

As ferramentas LWD normalmente apresentam frequências na faixa dos quilohertz (kHz) até os mega-hertz (MHz), resultando comprimentos de onda ( $\lambda$ ) na faixa de dezenas a centenas de metros, porém esses valores correspondem à propagação da onda no vácuo. Tendo isso em vista, em perfilagem de poços de petróleo onde as formações terrestres apresentam diferentes valores de condutividade ( $\sigma$ ), permissividade ( $\epsilon$ ) e permeabilidade ( $\mu$ ) deve ser considerado a constante de penetração da onda eletromagnética nos respectivos meios, que devido as suas propriedades, apresentam valores consideravelmente menores para o comprimento de onda do sinal. Isso indica a necessidade do cálculo da constante

de penetração, equação (3.109), o que auxilia no processo de definição de uma grade eficiente na discretização do meio a ser analisado, [1]:

$$\delta = \frac{1}{\omega \sqrt{\varepsilon \mu} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} - 1 \right] \right\}^{1/2}} \quad (3.109)$$

onde  $\omega$  representa a frequência angular do sinal.

Portanto, para os casos analisados pelo NMM desenvolvido neste capítulo a discretização na direção axial adotaram deltas  $\Delta_{z,\max} = \delta/5$ . Com ressalvas quando informado explicitamente valores para os  $\Delta_z$ .

### 3.5.2

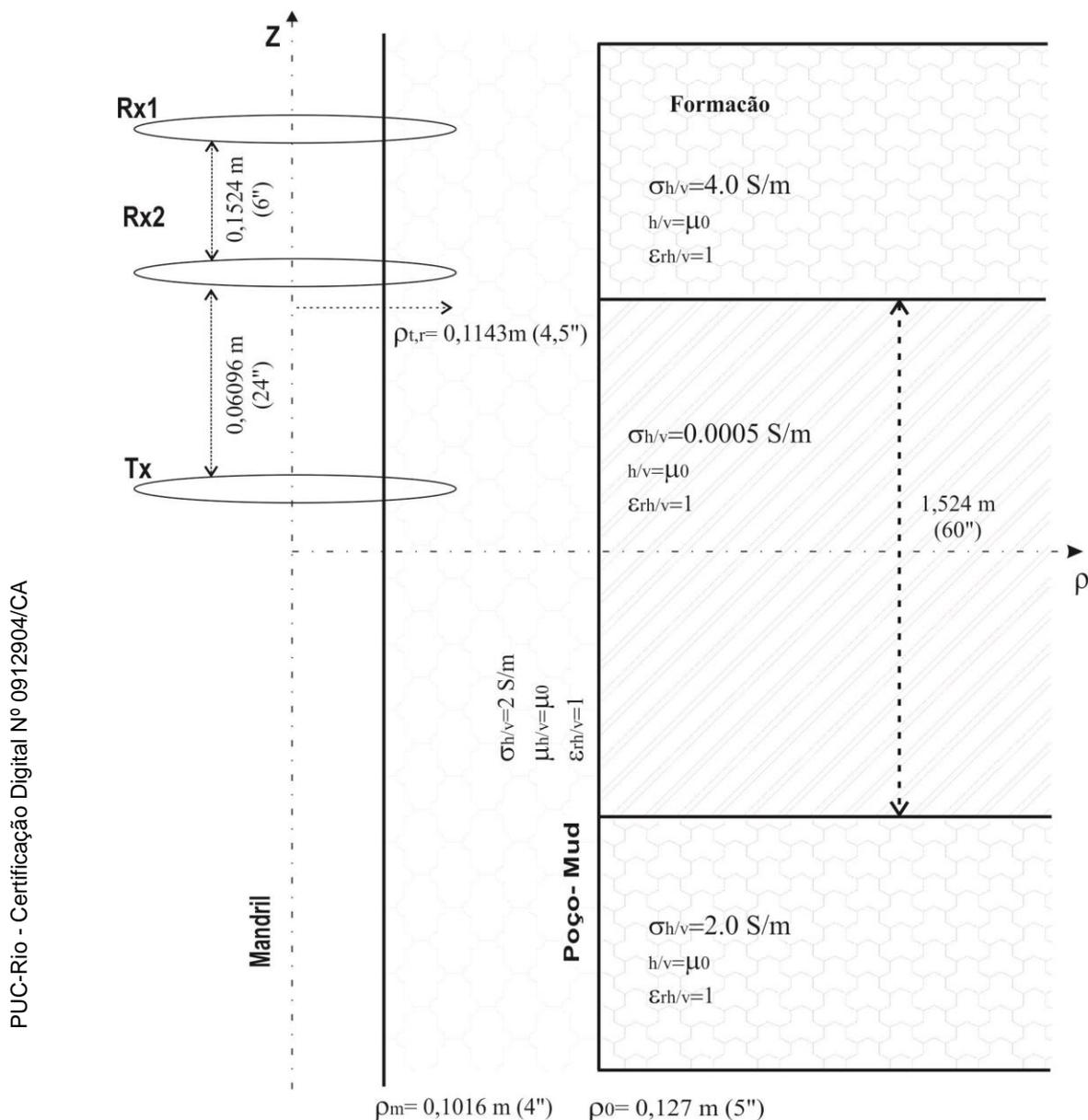
#### Validação em meio com alto contraste entre as camadas

O caso escolhido para a validação do algoritmo implementado via NMM para análises de perfis de poços de petróleo com alto contraste de condutividade entre as camadas foi um caso apresentado em [8].

Este trabalho adota a unidade metro (m) como unidade padrão mas nos casos em referência utilizar como unidade a polegada (in) será adicionado o valor correspondente em polegadas entre parênteses para facilitar a comparação dos resultados.

O caso apresentado em [8] a ferramenta opera na frequência de 2 MHz e o perfil analisado é composto de 3 camadas na direção axial, conforme ilustrado na Figura 3.27. A camada central da formação apresenta espessura de 1,524 m (60 in), com condutividade de 0.0005 S/m, já a camada superior apresenta uma condutividade de 4 S/m e a camada inferior de 2 S/m. Isso indica um contraste da ordem de 8000 vezes entre a camada superior e a central e de 4000 vezes entre a

central e a inferior; bem como uma condutividade da lama de 2 S/m no interior do poço.

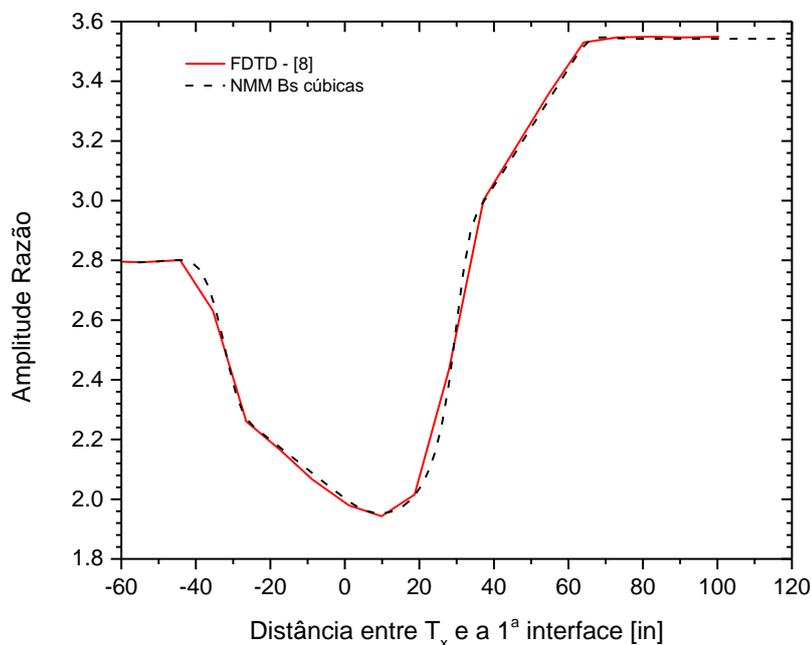


**Figura 3.27– Layout do perfil apresentando alto contraste de condutividades.**

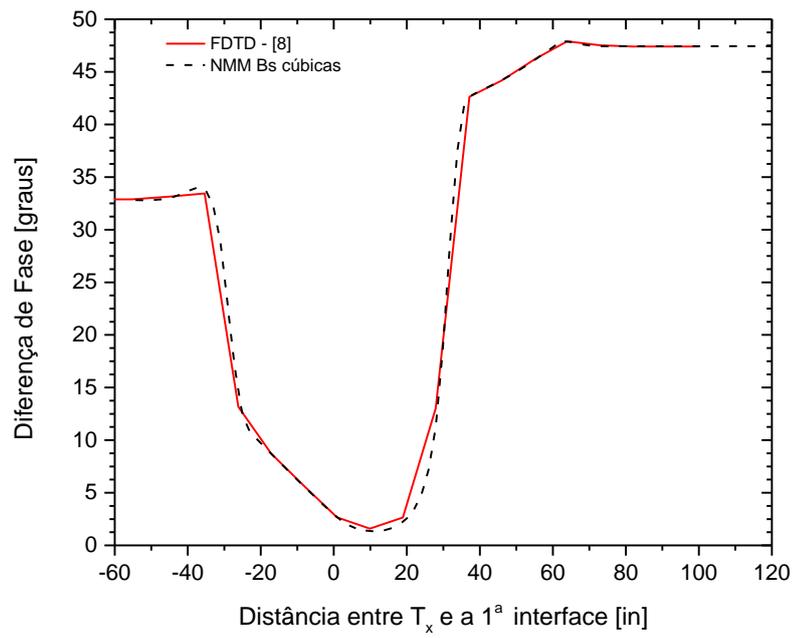
As configurações das bobinas transmissoras e receptoras correspondem à configuração convencional, ou seja, orientadas transversalmente ao eixo de simetria da ferramenta, os espaçamentos são de  $0,762$  m (30 in) entre o transmissor e o primeiro receptor e de  $0,6096$  m (24 in) entre o transmissor e o segundo receptor. A grade utilizada no domínio de interesse foi uniforme com

células de 0,025 m. Para fins de comparação a PML implementada segue os parâmetros utilizados em [8] com 20 células em cada extremo (ou seja, somam-se 40 nós a mais à grade total), porém o espaçamento destes nós são 10 vezes o tamanho da célula do domínio, onde os parâmetros  $a_z$  e  $\Omega_z$  foram de 1 e  $9e-4$ , respectivamente e a ordem do polinômio igual 4.

As Figuras 3.28 e 3.29 ilustram os resultados obtidos via NMM (com a grade uniforme) da razão entre amplitudes dos receptores e a diferença de fase entre eles, respectivamente. Tais resultados são comparados com os resultados gerados via FDTD de [8], método mais robusto na análise de perfilagem de poços de petróleo. Assim pode-se observar nas figuras que os resultados gerados com algoritmo apresentaram ótima concordância com o FDTD. Portanto, pode-se concluir que a análise via NMM implementada no algoritmo se mostrou eficaz em perfis com alto contraste de condutividade.



**Figura 3.28 – Razão das amplitudes dos receptores imersos na formação com alto contraste de condutividade.**



**Figura 3.29– Diferença de fase entre os receptores imersos na formação com alto contraste de condutividade.**

## 4

### **Perfilagens analisadas via NMM com funções B-Splines cúbicas e multiplicidade dos nós**

#### 4.1

##### **Introdução**

A inclusão das funções B-splines cúbicas como autofunções na representação dos campos axiais pela expansão de autovetores na formulação do NMM, além de agregar maior flexibilidade à representação dos campos, possibilita a utilização da multiplicidade dos nós, que foi apresentada no capítulo anterior.

No decorrer deste capítulo são apresentados casos de perfis encontrados na literatura, como em [8], [14], [31], [32], [33] com intuito de efetuar um estudo comparativo das contribuições acrescentadas ao método de casamento de modos com expansão modal axial. Tais contribuições foram o uso das funções B-Splines cúbicas como função de expansão e o uso da multiplicidade dos nós em sua grade, desenvolvido no capítulo anterior.

Os primeiros casos explorados se referem aos casos onde são apresentados os estudos comparativos com o desempenho do NMM com as funções B-splines cúbicas como autofunções. Os cenários utilizados são perfis presentes nas referências acima citadas. Assim, busca-se ilustrar o desempenho das funções B-Splines cúbicas via estudo comparativo frente a funções B-Spline quadráticas.

No segundo momento é apresentado um caso no qual se busca analisar os resultados gerados pelas B-Splines cúbicas em um cenário onde tanto a condutividade quanto a permissividade das camadas variam com a ferramenta operando em 25 MHz.

Após analisados os resultados com a inclusão das funções B-splines cúbicas ao NMM, outro aspecto apresentado é a possibilidade da utilização da multiplicidade dos nós. Isso visa comparar os possíveis benefícios que a inclusão da multiplicidade dos nós pode trazer ao NMM.

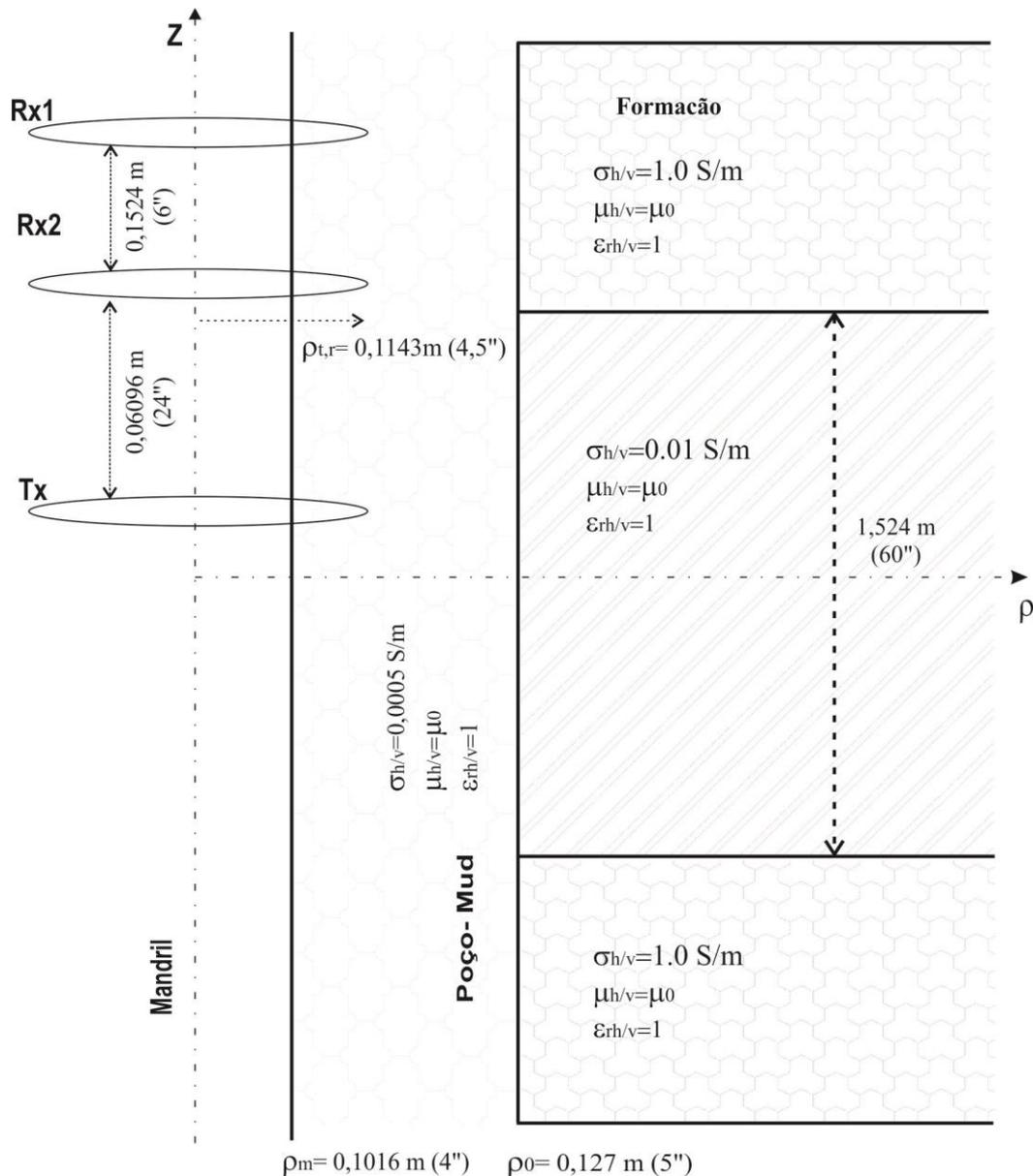
## 4.2

### **NMM com B-Spline cúbica em ferramenta LWD – 100 kHz**

Em baixas frequências o efeito conhecido como *skin depth* – capacidade de penetração de uma onda eletromagnética em meios condutivos – tende a crescer. Isso pode ser facilmente percebido pela relação entre a frequência e a condutividade do meio, pois em linhas gerais, pode-se definir *skin depth* como a distância em que a onda decai para  $1/\epsilon$  (inverso da permissividade do meio). Portanto, por essa característica o estudo comparativo em baixas frequências se faz necessário para analisar o desempenho do NMM proposto neste trabalho.

O caso escolhido para o estudo é descrito em [31], onde o sistema de perfilagem opera em 100 kHz. O layout deste caso é composto de 3 camadas horizontais, sendo a central com espessura de 1,524 m (60 in), com condutividade 0.01 S/m e as camadas superior e inferior com condutividade de 1 S/m, além da lama com condutividade de 0.0005 S/m dentro do poço de raio de 0,127 m (5 in), como ilustrado na Figura 4.1.

As configurações das bobinas seguem o padrão convencional com o transmissor espaçado do primeiro receptor de 0,762 m (30 in) e 0,6096 m (24 in) do segundo, com raio de 0,1143 m (4,5 in), o mandril com um raio de 0,1016 m (4 in).

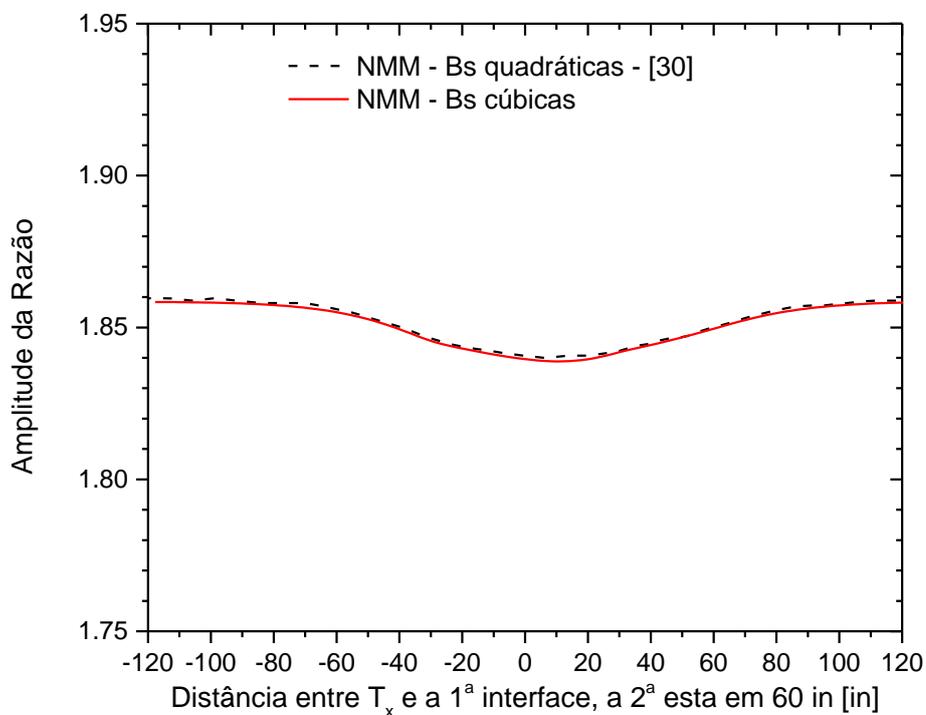


**Figura 4.1**– Layout do perfil analisado com a ferramenta operando na frequência de **100 kHz**.

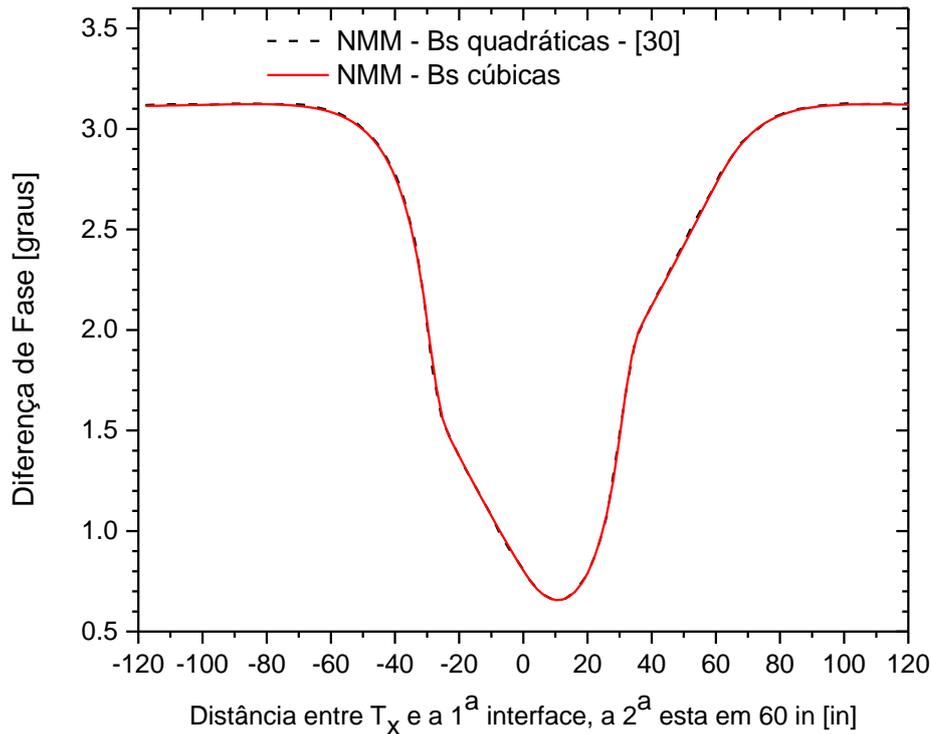
A grade utilizada no domínio de interesse é uniforme, com células de 0,025 m. Para fins de comparação a PML implementada utiliza os parâmetros descritos em [31] composta de 20 células em cada extremo (ou seja, inclusão de 40 nós à

grade total), com tamanho de 10 vezes o tamanho da célula do domínio, onde os parâmetros  $a_z$  e  $\Omega_z$  foram de 1 e  $9e-4$ , respectivamente, e a ordem do polinômio é igual 3.

As Figuras 4.2 e 4.3 ilustram os resultados obtidos da análise do perfil apresentado na Figura 4.1, os quais são comparados com dados retirados do trabalho referenciado acima, o qual utiliza o NMM com funções B-splines quadráticas. As Figuras representam a razão de amplitudes e a diferença de fase entre os receptores, respectivamente. Pode-se observar que na frequência de 100 kHz a razão apresenta um leve decaimento na região da camada central do perfil, porém a diferença de fase responde melhor evidenciando a alternância de condutividade no perfil. Observando os resultados, conclui-se que o NMM com as B-Splines cúbicas apresentou resultados similares aos resultados gerados via NMM com B-Splines quadráticas.



**Figura 4.2– Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 100 kHz.**



**Figura 4.3– Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 100 kHz.**

### 4.3

#### **NMM com B-Spline cúbica em ferramenta LWD – 500 kHz**

Dando continuidade ao estudo comparativo sobre os efeitos causados com a inclusão das funções B-Splines cúbicas ao NMM, nesta seção o estudo aborda um caso onde a frequência de operação da ferramenta é de 500 kHz, [31].

A configuração do caso é composta por 3 camadas na direção axial, onde a camada central tem espessura de 1,524 m (60 in) e condutividade 0.01 S/m, as camadas superior e inferior têm condutividade de 1 S/m, e o poço é preenchido com uma camada de lama que possui condutividade de 2 S/m e raio de 0,127 m (5 in), como ilustrado na Figura 4.4.

A configuração de bobinas segue o padrão deste trabalho com o transmissor espaçado do primeiro receptor de 0,762 m (30 in) e 0,6096 m (24 in) do segundo e raio de 0,1143 m (4,5 in), o mandril com raio de 0,1143 m (4 in).

A grade utilizada no domínio de interesse é uniforme, com células de 0.025m. A PML implementada é composta de 20 células em cada extremo (ou seja, somam-se 40 nós a grade da região de interesse), com tamanho de 10 vezes o tamanho da célula do domínio, onde os parâmetros  $a_z$  e  $\Omega_z$  são 1 e  $9e-4$ , respectivamente, e a ordem do polinômio igual 3.

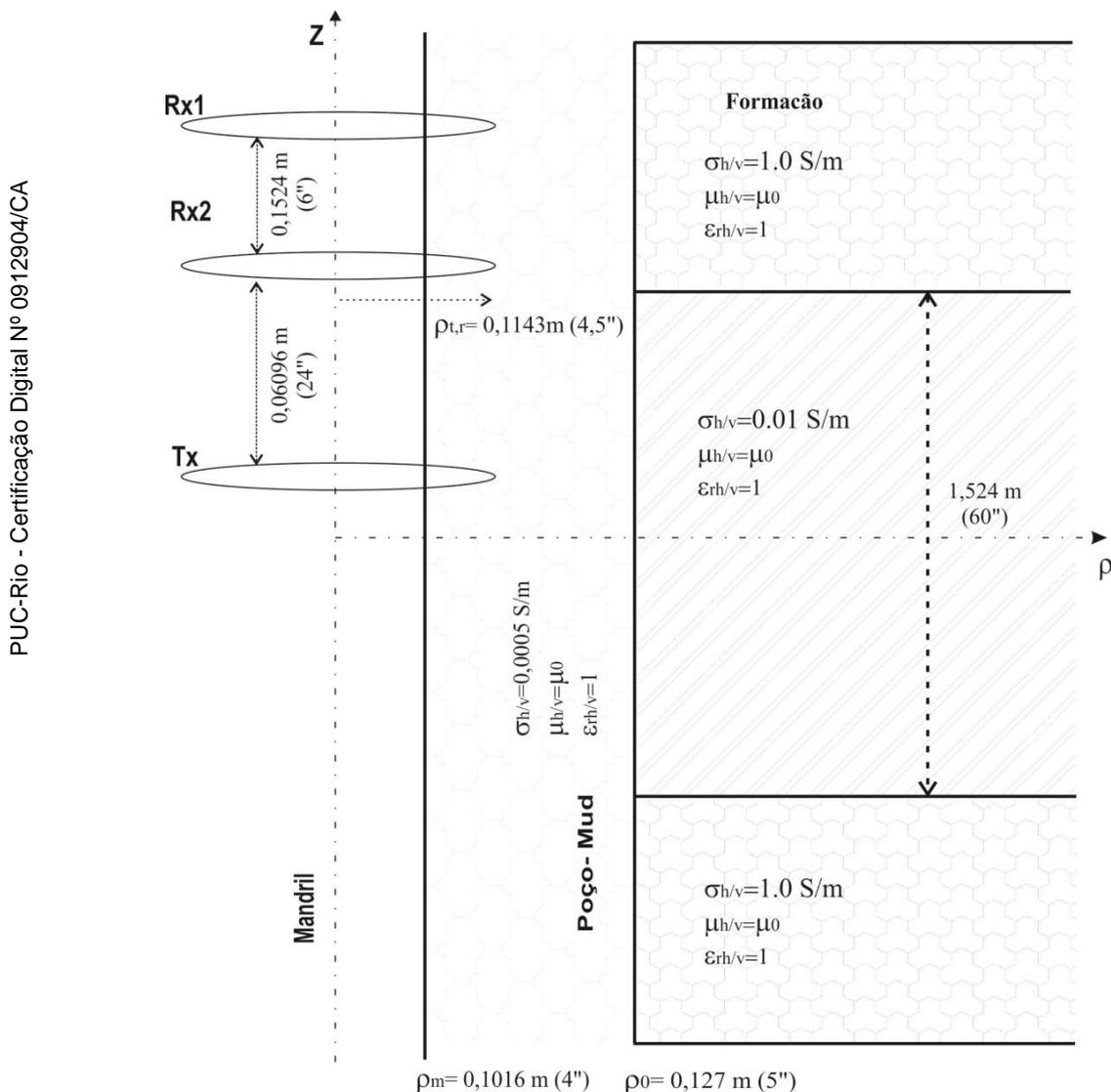
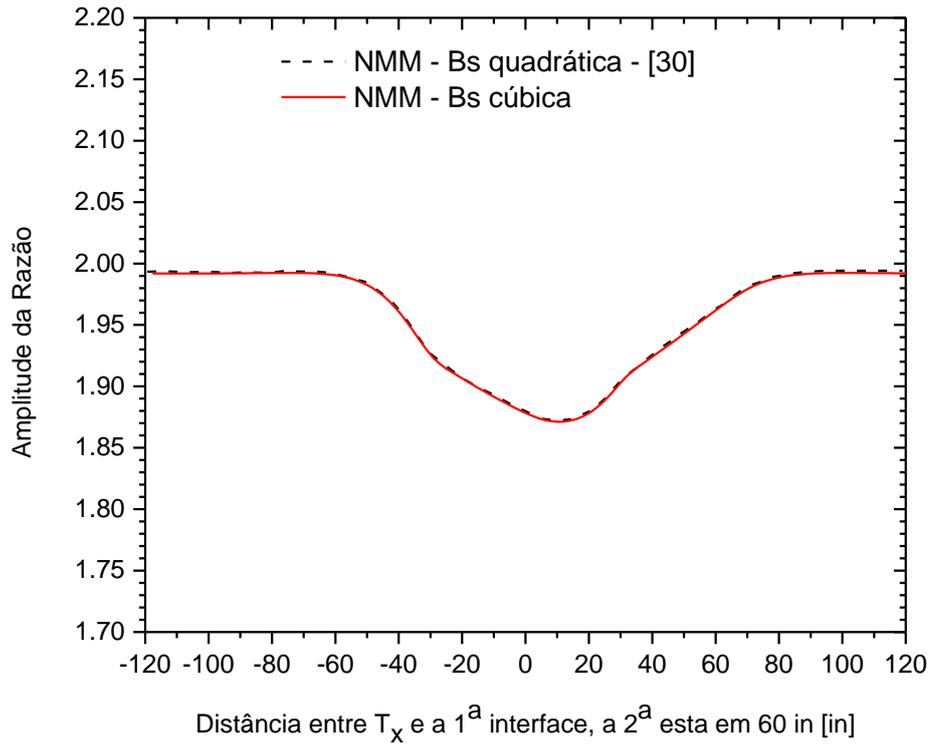
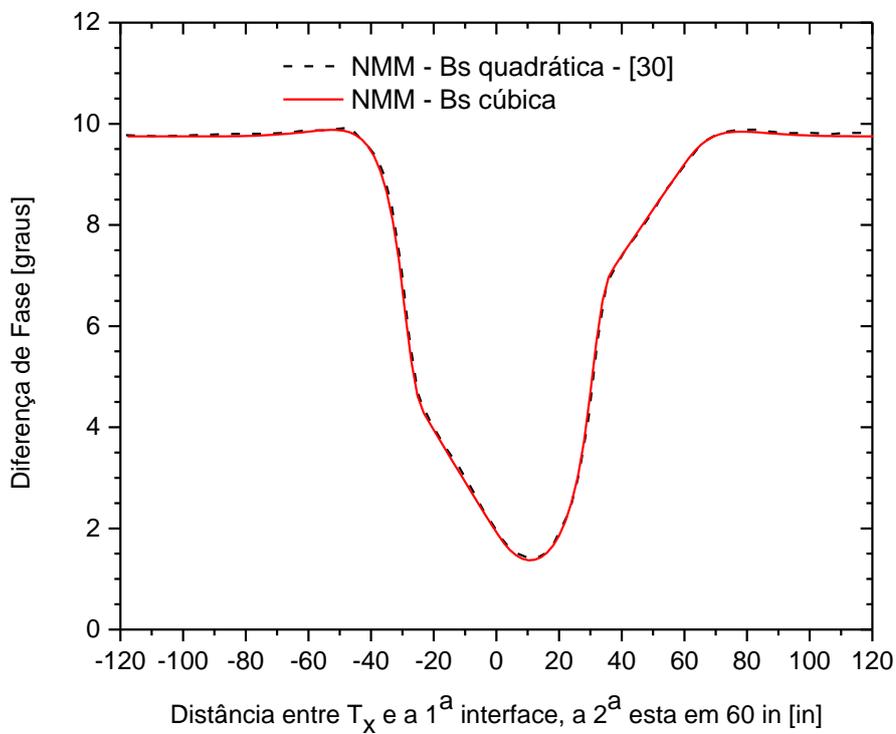


Figura 4.4– Layout do perfil analisado com a ferramenta operando na frequência de 500kHz.



**Figura 4.5– Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 500 kHz.**



**Figura 4.6– Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 500 kHz.**

Analisando os resultados mostrados nas Figuras 4.5 e 4.6, observa-se que para o caso com frequência de operação de 500 kHz os resultados gerados tanto com funções B-spline quadráticas quanto com funções B-Splines cúbicas se apresentam equivalentes.

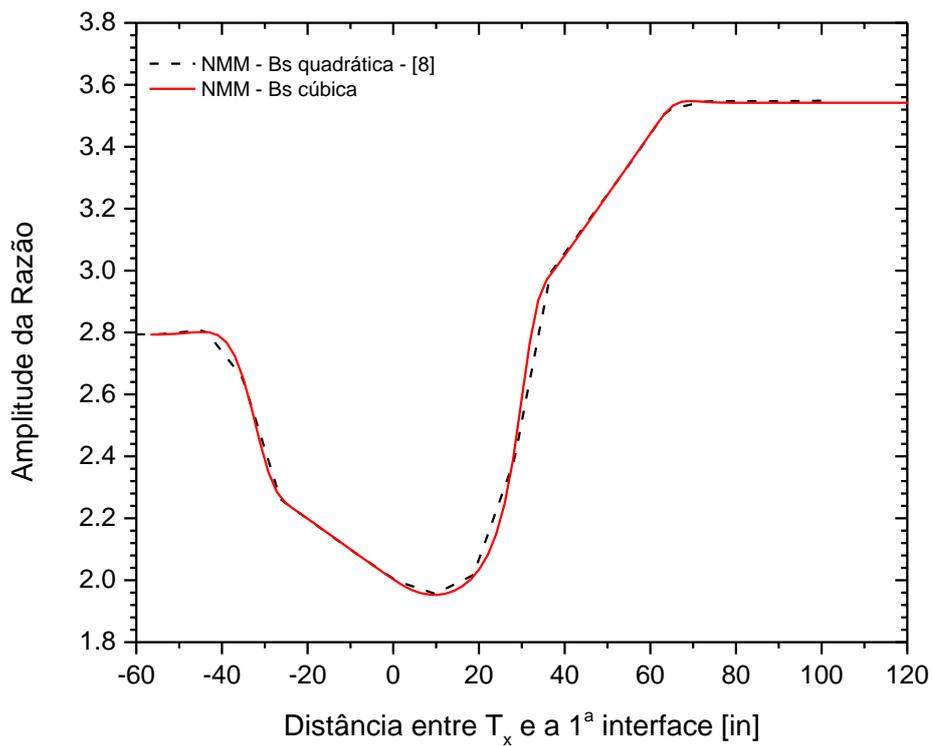
#### 4.4

#### **NMM com B-Spline cúbica em ferramenta LWD – 2 MHz**

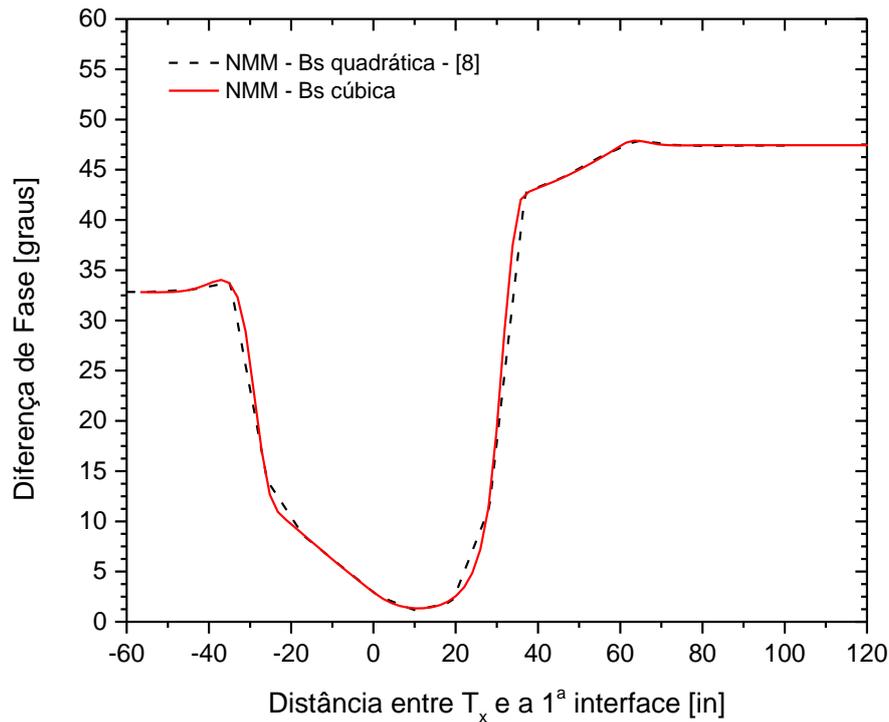
O caso escolhido para o estudo comparativo na frequência de 2 MHz entre as funções B-Splines quadráticas e cúbicas como autofunções do NMM, refere-se ao caso já apresentado nesta tese no capítulo anterior como validação do algoritmo implementado via NMM, [8]. Neste caso o perfil apresenta alto contraste de condutividades entre os meios, composto de 3 camadas na direção axial, conforme ilustrado na Figura 3.27.

Este alto contraste é justamente o que o torna interessante para o estudo comparativo, pois apresenta contrastes da ordem de 8000 vezes entre a camada superior e a central e de 4000 vezes entre a central e a inferior. Além de apresentar uma lama com alta condutividade de 2 S/m, o que na prática corresponde a uma lama a base de água. A configuração das bobinas transmissoras e receptoras corresponde ao padrão deste trabalho, e iguais ao caso de validação. A grade utilizada no domínio de interesse é uniforme com células de 0,025 m. A PML adotada tem 20 células em cada extremo (ou seja, somam-se 40 nós a mais à grade total), com tamanho de 10 vezes o tamanho da célula do domínio, onde os parâmetros  $a_z$  e  $\Omega_z$  foram de 1 e  $9e-4$ , respectivamente e a ordem do polinômio igual 4.

Os gráficos das Figuras 4.7 e 4.8 apresentam os resultados para a razão entre as amplitudes e a diferença de fase entre os receptores, respectivamente, gerados via NMM com autofunções representadas por B-splines quadráticas, [8], e cúbicas. Nestas figuras os resultados das B-splines quadráticas foram obtidos através de digitação dos gráficos apresentados em [8] e a comparação com os resultados das B-splines cúbicas mostram pequenas diferenças.



**Figura 4.7– Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 2 MHz.**

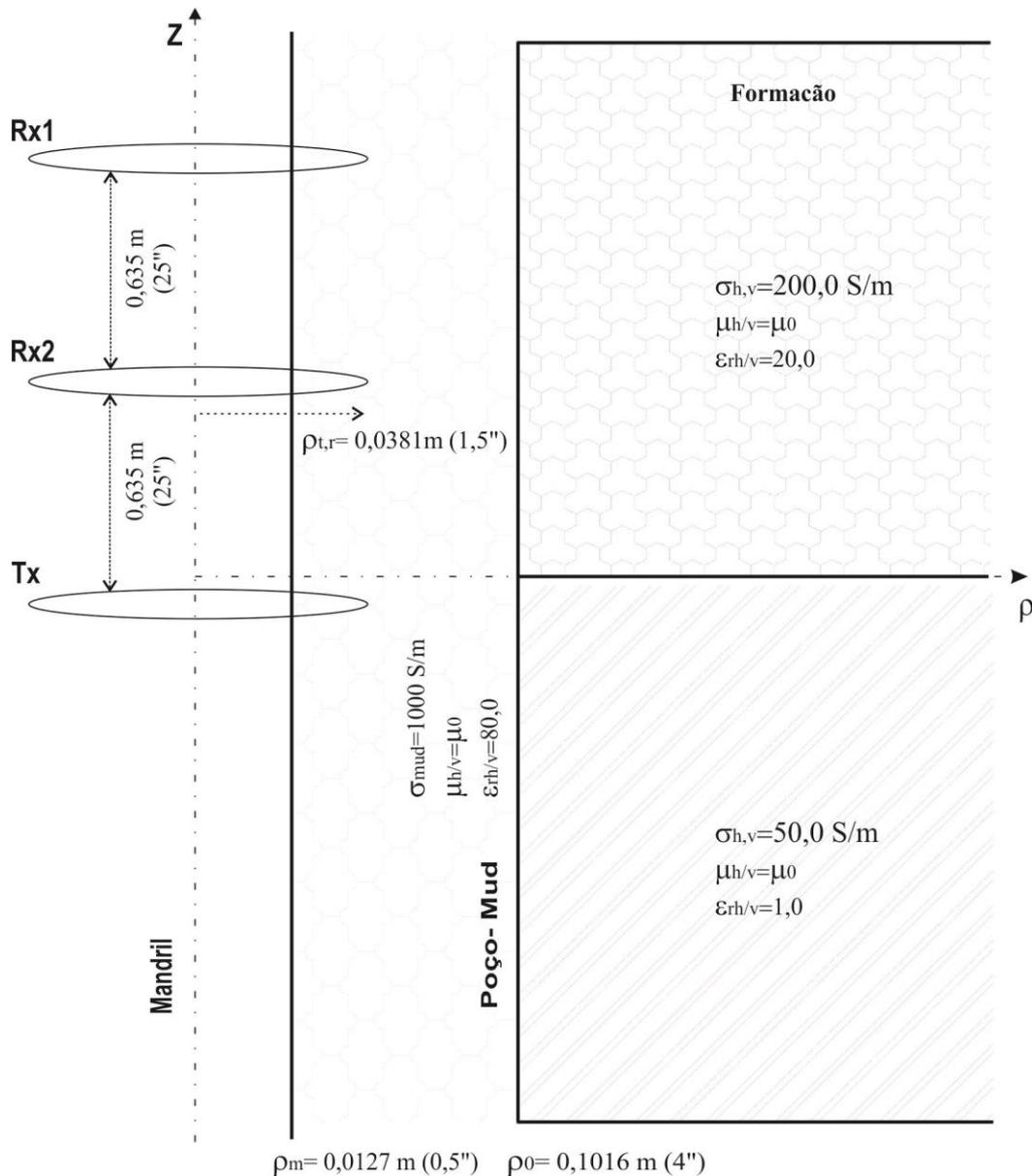


**Figura 4.8– Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 2 MHz.**

## 4.5

### NMM com B-Spline cúbica em ferramenta LWD – 25 MHz

Com o intuito de explorar o NMM com as autofunções B-splines cúbicas em casos com a frequência de operação mais alta, utiliza-se o caso apresentado em [14], [32], [33]. Tal caso explora a utilização de uma ferramenta operando em 25 MHz. O perfil estudado apresenta 2 camadas na direção axial, com variações da condutividade e da permissividade entre meios, além de uma lama interna ao poço, conforme ilustra a Figura 4.9, que inclui as dimensões do problema.



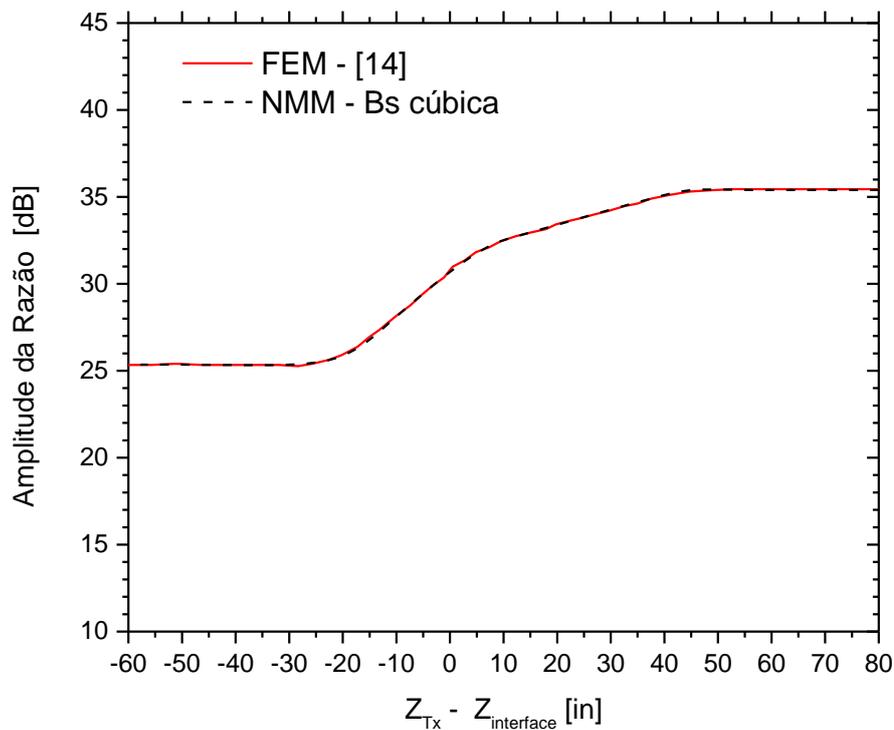
**Figura 4.9– Layout do perfil analisado com a ferramenta operando na frequência de 25 MHz.**

As configurações das bobinas seguem a orientação convencional com o transmissor espaçado do primeiro receptor de 1,27 m (50 in) e 0,635 m (25 in) do segundo, com raio de 0,0381 m (1,5 in), o mandril com raio de 0,0127 m (0,5 in), assim como a parede do poço esta sobre o raio de 0,1016 m (4 in).

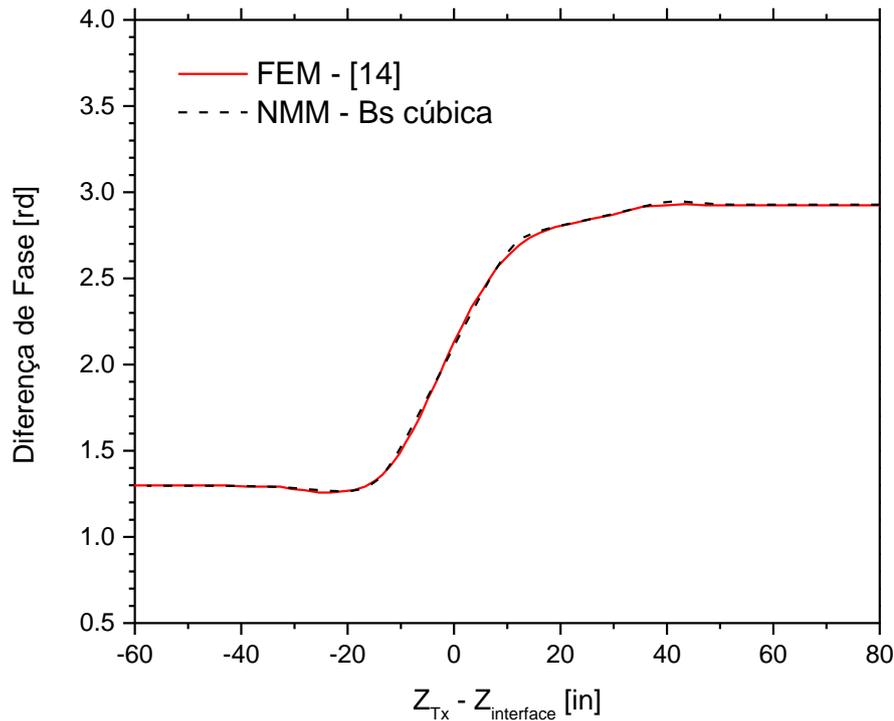
A grade utilizada no domínio de interesse é uniforme, com células de 0,025 m. A PML implementada tem 20 células em cada extremo (40 nós), com

tamanho de 10 vezes o tamanho da célula do domínio, onde os parâmetros  $a_z$  e  $\Omega_z$  são de 1 e  $9e-4$ , respectivamente e a ordem do polinômio igual 4.

Os resultados gerados pelo algoritmo via NMM para a razão entre as amplitudes e a diferença de fase entre os receptores estão ilustrados nas Figuras 4.10 e 4.11, respectivamente, e são comparados aos resultados apresentados em [14]. Esses últimos foram gerados por método dos elementos finitos – FEM. Nota-se que os resultados via NMM convergem perfeitamente para os dados obtidos via FEM. Assim, conclui-se que o algoritmo está apto para simular casos em frequências mais elevadas como a abordada neste caso.



**Figura 4.10– Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 25 MHz.**



**Figura 4.11– Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 25 MHz.**

Analisando os resultados apresentados no decorrer destas subseções de validação, onde foram abordados diferentes perfis e diferentes frequências de operação da ferramenta pode-se concluir que o método de casamento de modos – NMM implementado no algoritmo deste trabalho apresentou convergência aos casos propostos.

## 4.6

### NMM com múltiplos nós em ferramenta LWD – 100 kHz

A representação dos campos eletromagnéticos sobre uma determinada interface entre dois meios quaisquer requer uma maior atenção, pois devido as possíveis mudanças das propriedades constitutivas dos meios a representação dos campos pode apresentar variações mais intensas. Para representar este

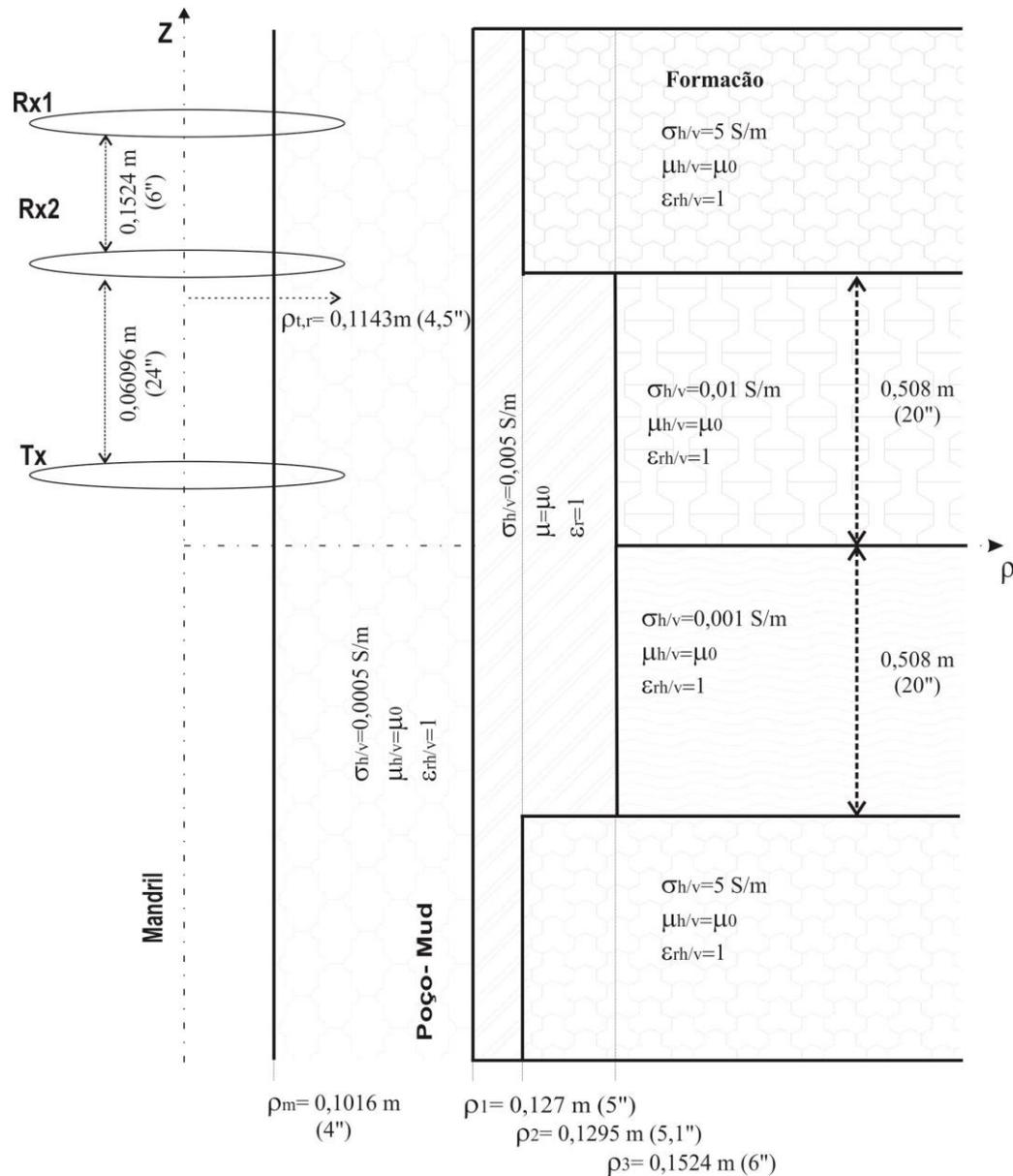
comportamento, [1] e [3] sugerem o refinamento da grade de discretização nas vizinhanças das interfaces, acarretando em um maior esforço computacional para que os campos nessas regiões sejam melhores representados.

Com o intuito de apresentar uma alternativa eficiente para a representação dos campos nestas regiões de interface e buscando a redução do esforço computacional na formulação do NMM esta seção visa explorar a propriedade da multiplicidade dos nós das funções B-Splines cúbicas descrita na Seção 3.2.3. A propriedade da multiplicidade dos nós das funções B-Splines cúbicas ilustrada na Figura 3.6, busca representar os saltos abruptos que os campos podem apresentar sobre as interfaces de uma forma mais realista.

No primeiro caso, onde se analisa a contribuição da multiplicidade dos nós, utiliza-se um perfil de poço de petróleo mais complexo que os anteriormente utilizados. Este perfil é composto por 4 camadas axiais, as centrais com espessura de 0.508m (20 in) cada, e 3 camadas radiais, onde a primeira representa o interior do poço com uma condutividade de 0.0005 S/m, conforme ilustrado na Figura 4.12.

As configurações das bobinas seguem a configuração convencional com o transmissor espaçado do primeiro receptor de 0,762 m (30 in) e 0,6096 m (24 in) do segundo, com raio de 0,1143 m (4,5 in), o raio do mandril é de 0,1016 m (4 in), conforme ilustrado na Figura 4.12.

A PML foi implementada com 10 células em cada extremo (ou seja, somam-se 20 nós a grade da região de interesse), com tamanho de 10 vezes o tamanho da célula do domínio, onde os parâmetros  $a_z$  e  $\Omega_z$  são de 1 e  $9e-4$ , respectivamente e a ordem do polinômio é igual 3.



**Figura 4.12– Layout do perfil analisado com a ferramenta operando na frequência de 100 kHz.**

Após um estudo comparativo as primeiras análises apresentam os resultados para uma grade uniforme com  $\Delta_z = 0,0254 \text{ m}$  ao longo do domínio de interesse. Primeiramente considera-se B-Splines sem a multiplicidade dos nós (SK-G1-Simples nós-grade 1) e posteriormente com a multiplicidade dos nós (MK-G1-Multiplos nós-grade 1). Os resultados para a razão entre amplitudes e a diferença de fase dos sinais nos receptores são ilustrados nas Figuras 4.13 e 4.14, respectivamente.

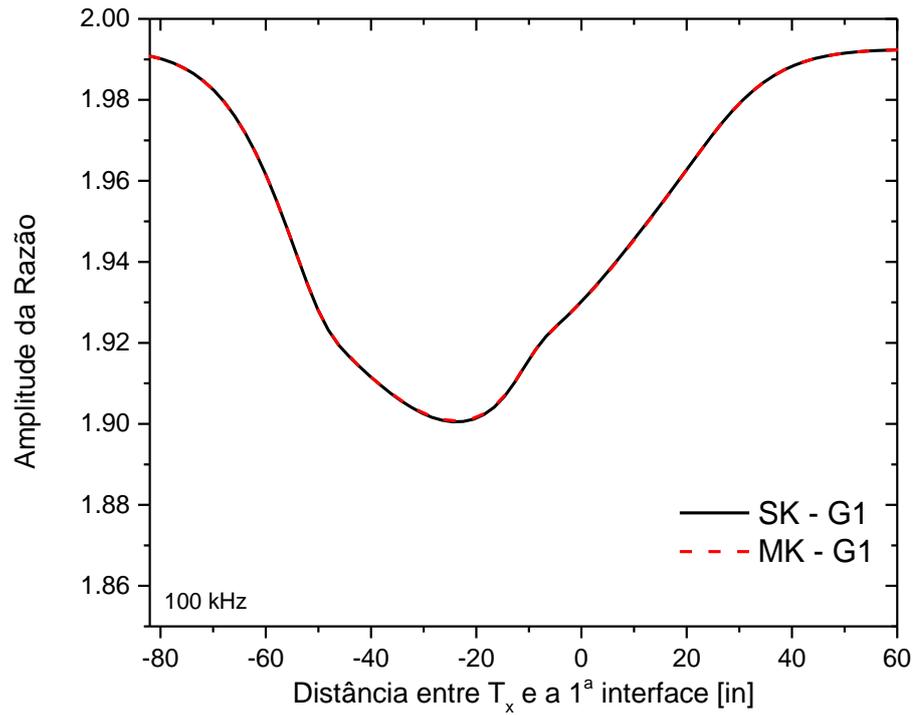


Figura 4.13– Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 100 kHz para grade 1.

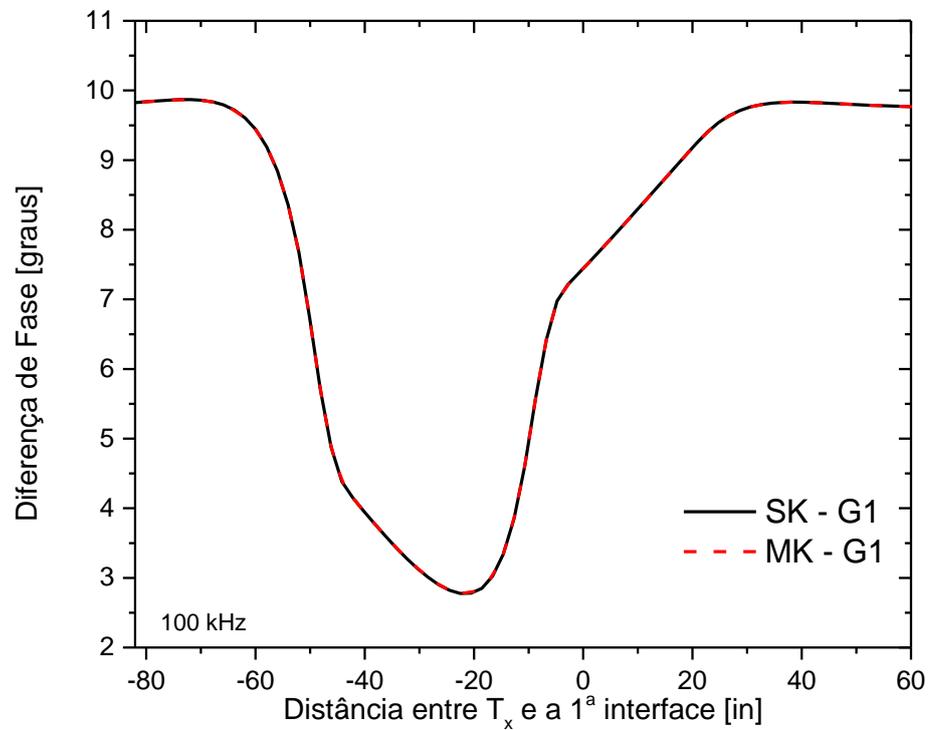
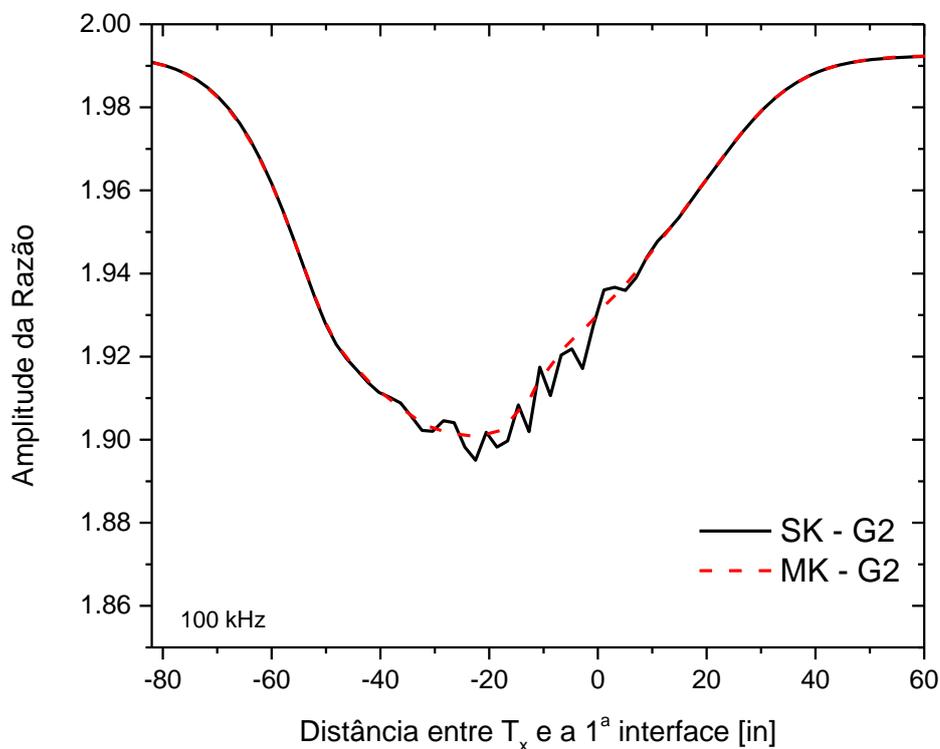


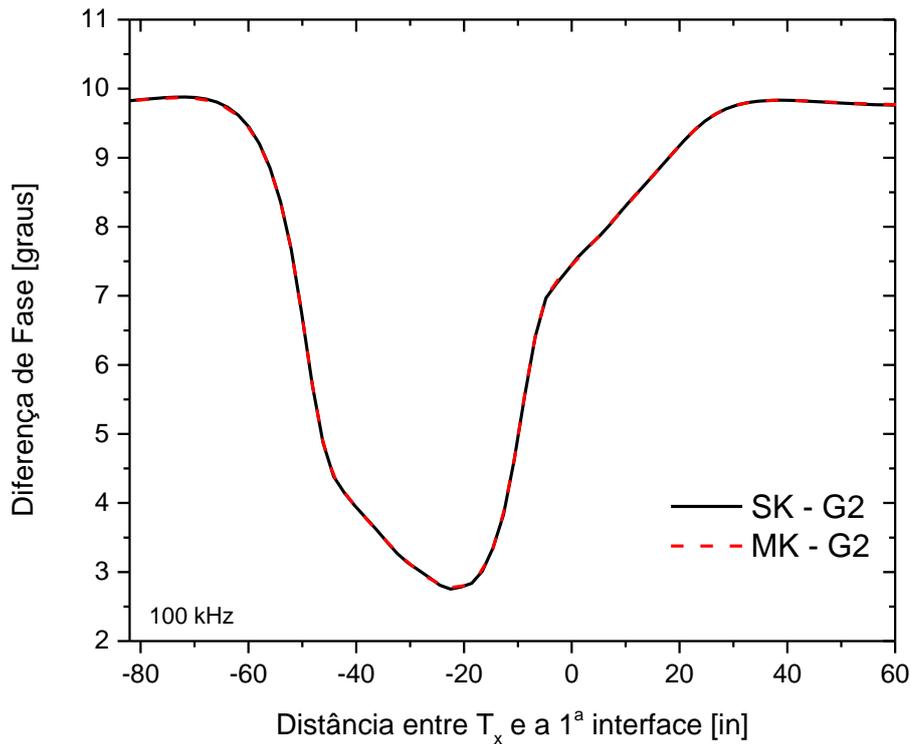
Figura 4.14– Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 100 kHz para grade 1.

Como se observa nas Figuras 4.13 e 4.14 os resultados tanto sem multiplicidade quanto com multiplicidade convergem. Isso nos conduz a concluir que a discretização utilizada na grade 1 é suficientemente refinada. Assim, com intuito de explorar as possibilidades da multiplicidade optou-se por uma grade não uniforme onde se reduziu o número de nós nas regiões centrais do perfil, definindo um  $\Delta_z=0,03175$  m nas regiões centrais e mantendo os  $\Delta_z=0,0254$  m nas regiões superior e inferior do domínio de interesse.

Nos resultados obtidos com essa nova grade, chamada grade 2, SK-G2 é utilizado para indicar o caso sem multiplicidade e MK-G2 indica o caso com multiplicidade de nós. A razão entre as amplitudes e a diferença de fase dos sinais nos receptores desses casos são apresentadas nas Figuras 4.15 e 4.16, respectivamente.



**Figura 4.15– Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 100 kHz para grade 2.**



**Figura 4.16– Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 100 kHz para grade 2.**

Os resultados apresentados para a grade não uniforme (grade 2) ilustram que esta grade quando analisada sem a multiplicidade dos nós evidencia a dificuldade de representar os campos na região das interfaces, o que fica perceptível através da razão das amplitudes, Figura 4.15. Porém, observa-se que quando considerada a multiplicidade dos nós os resultados para a razão de amplitudes e para a diferença de fase dos receptores convergem para os resultados obtidos com a grade uniforme, grade 1, como apresentado nas Figuras 4.17 e 4.18, respectivamente.

Portanto, pode-se concluir que com a inclusão da multiplicidade dos nós consegue-se uma redução no número de nós nas regiões centrais do perfil na ordem de 20% quando comparado com a grade uniforme sem a multiplicidade de nós.

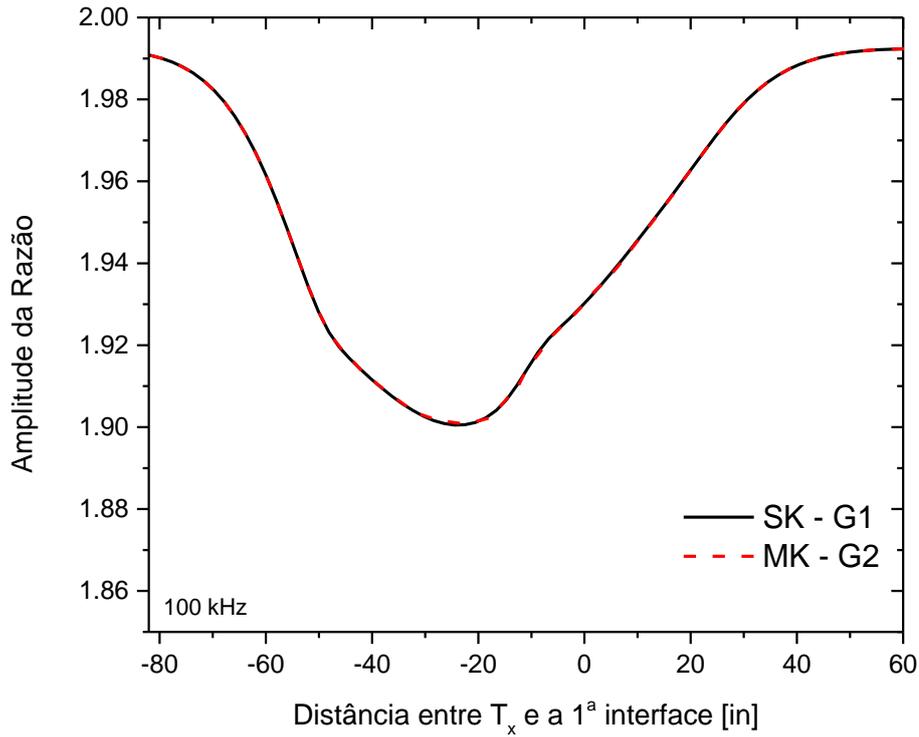


Figura 4.17– Razão das amplitudes dos receptores para SK-G1 e MK-G2 em 100 kHz.

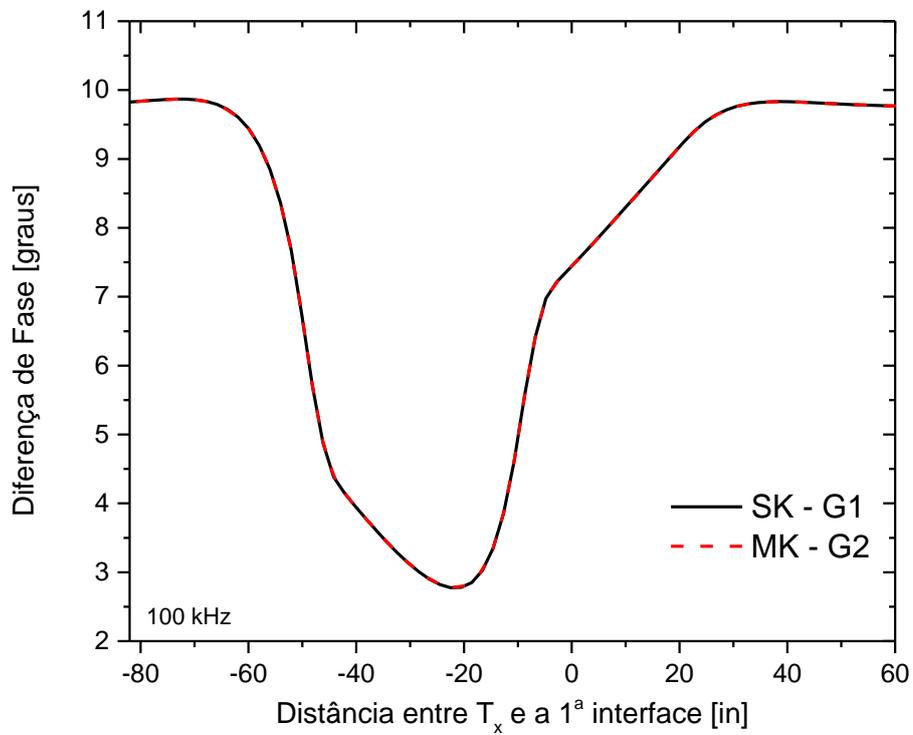


Figura 4.18– Diferença de fase entre os receptores para SK-G1 e MK-G2 em 100 kHz.

## 4.7

### NMM com múltiplos nós em ferramenta LWD – 500 kHz

Neste caso com a ferramenta operando na frequência de 500 kHz busca se analisar a contribuição da multiplicidade dos nós para o perfil apresentado na seção anterior: com 4 camadas axiais, sendo as centrais com espessura de 0,508 m (20 in) cada, e 3 camadas radiais, onde a primeira representa o interior do poço com uma condutividade de 0.0005S/m, conforme ilustrado na Figura 4.19.

As configurações das bobinas seguem a configuração convencional com o transmissor espaçado do primeiro receptor de 0,762 m (30 in) e 0,6096 m (24 in) do segundo, com raio de 0,1143 m (4,5 in), o raio do mandril é de 0,1016 m (4 in), conforme ilustrado na Figura 4.19.

A PML foi implementada com 10 células em cada extremo (ou seja, somam-se 20 nós a grade da região de interesse), com tamanho de 10 vezes o tamanho da célula do domínio, onde os parâmetros  $a_z$  e  $\Omega_z$  são de 1 e  $9e-4$ , respectivamente e a ordem do polinômio igual 3.

Após um estudo comparativo, as primeiras análises apresentam os resultados para uma grade uniforme com  $\Delta_z=0,0254$  m ao longo do domínio de interesse. Primeiramente considera-se sem a multiplicidade dos nós (SK-G1-*Simple nodes-grade 1*) e posteriormente com a multiplicidade dos nós (MK-G1-*Multiple nodes-grade 1*). Os resultados para a razão de amplitudes e para a diferença de fase entre os receptores são ilustrados nas Figuras 4.20 e 4.21, respectivamente.

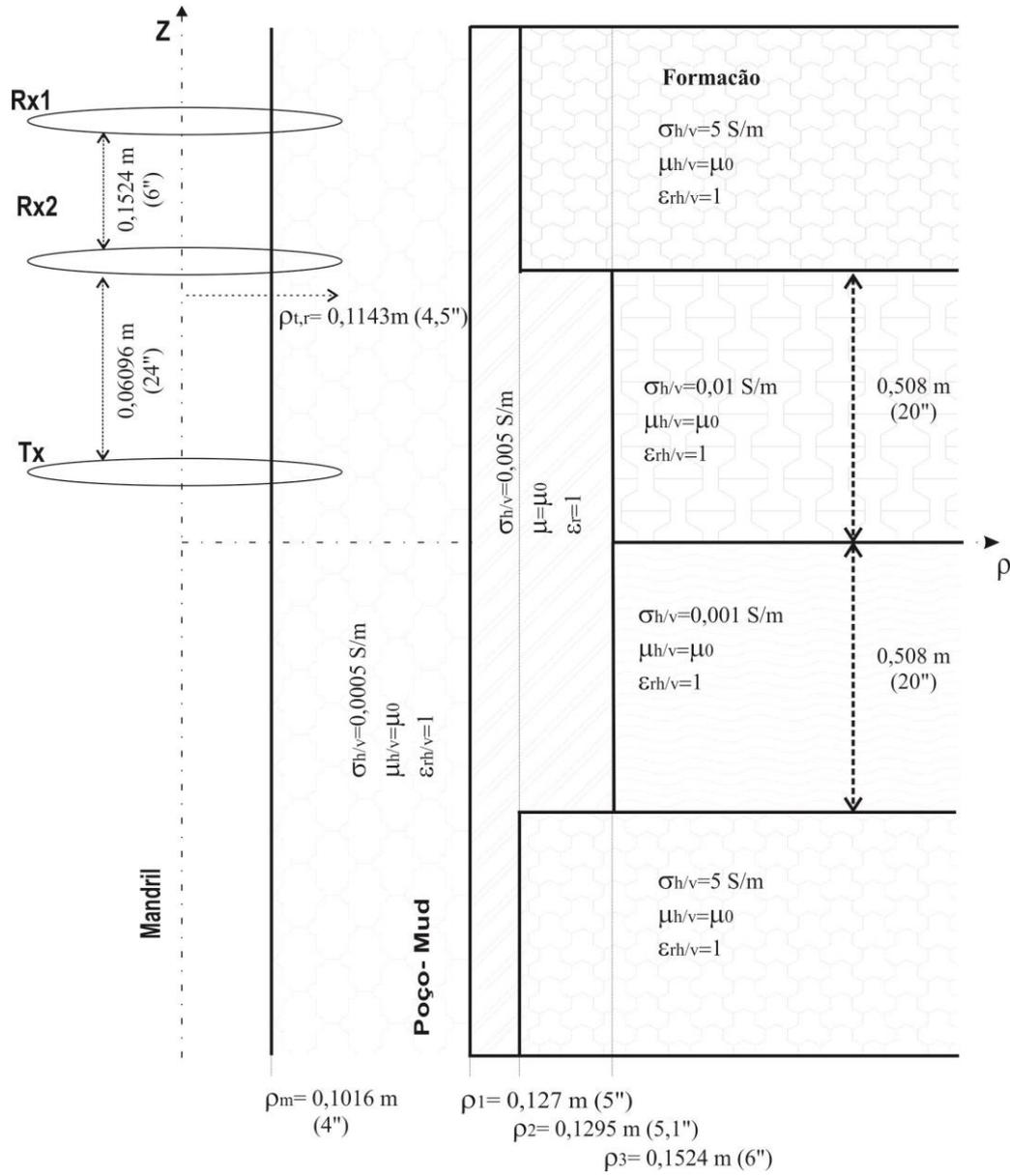
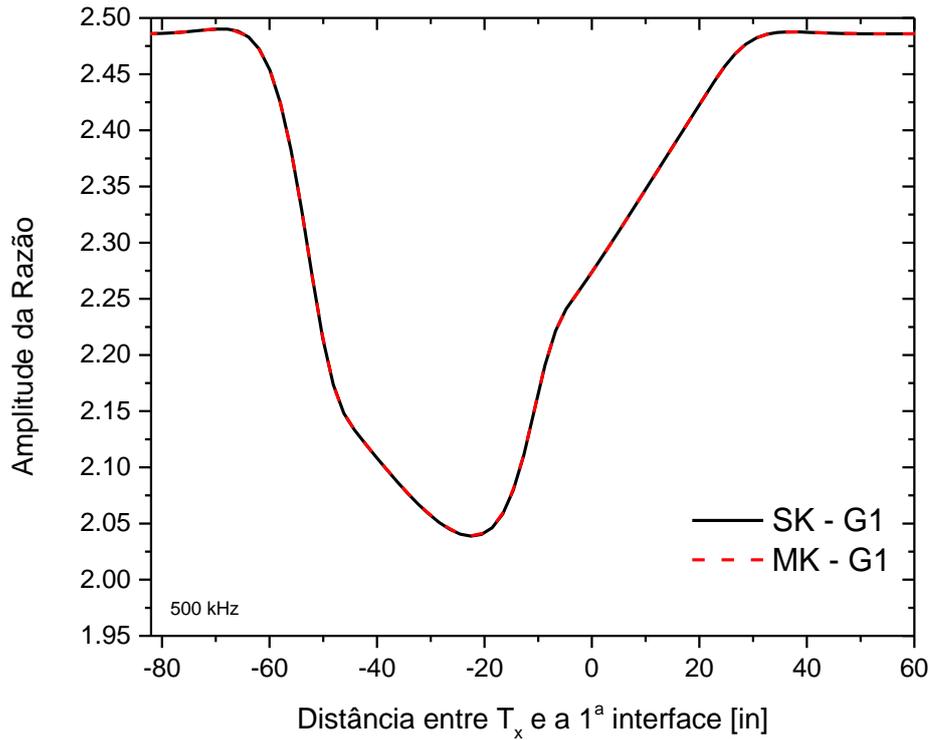
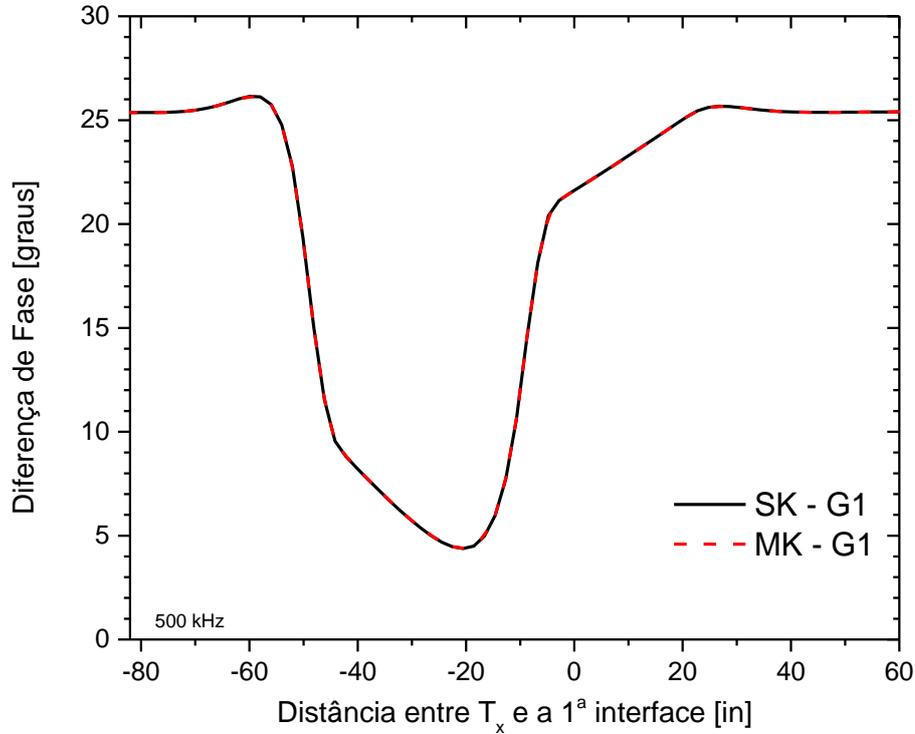


Figura 4.19 – Layout do perfil analisado com a ferramenta operando na frequência de 500 kHz.



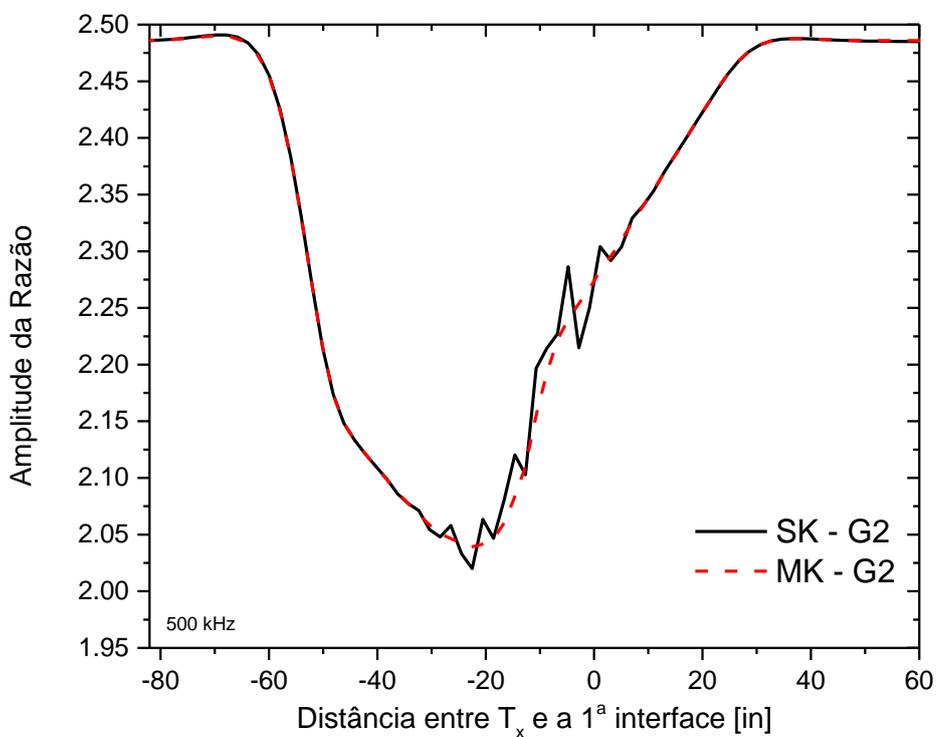
**Figura 4.20 – Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 500 kHz para grade 1.**



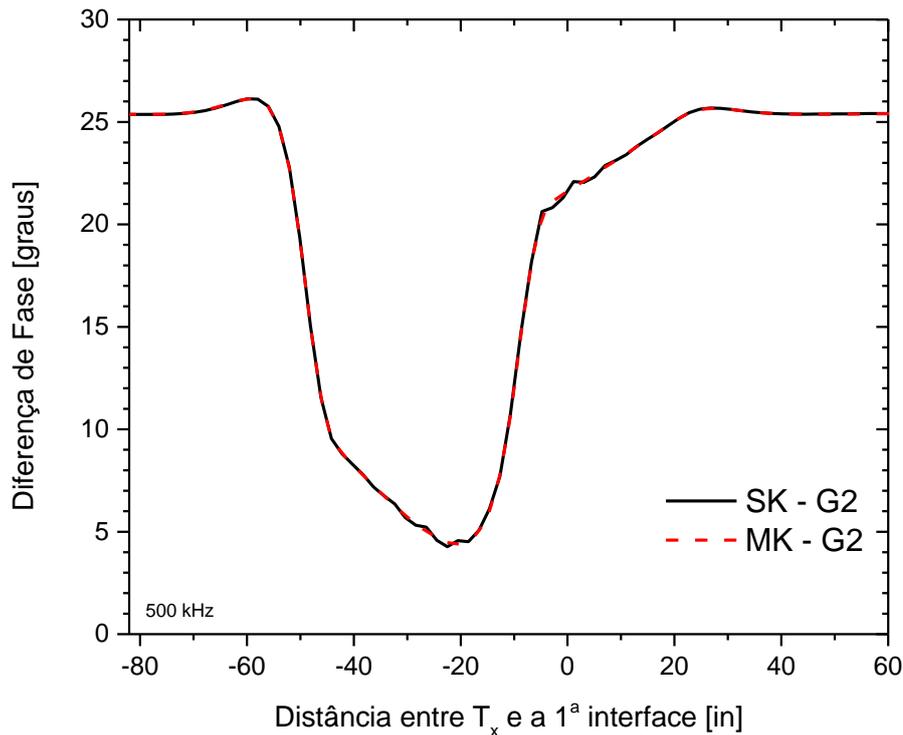
**Figura 4.21 – Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 500 kHz para grade 1.**

Como se observa nas Figuras 4.20 e 4.21 os resultados, tanto sem multiplicidade como com multiplicidade convergem, o que indica que a discretização utilizada na grade 1 é suficientemente refinada. Visando explorar as possibilidades da multiplicidade dos nós, assim como no caso anterior (100 kHz), para o caso atual (500 kHz) optou-se por uma grade não uniforme onde se reduziu os nós nas regiões centrais do perfil, definindo um  $\Delta_z=0,03628$  m nas regiões centrais e mantendo os  $\Delta_z=0,0254$  m nas regiões superior e inferior do domínio de interesse.

Nos resultados obtidos com essa nova grade, chamada grade 2, SK-G2 é utilizado para indicar o caso sem multiplicidade e MK-G2 indica o caso com multiplicidade de nós. A razão entre as amplitudes e a diferença de fase dos sinais nos receptores desses casos são apresentadas nas Figuras 4.22 e 4.23, respectivamente.



**Figura 4.22 – Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 500 kHz para grade 2.**



**Figura 4.23 – Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 500 kHz para grade 2.**

Os resultados apresentados para a grade não uniforme (grade 2) ilustram que esta grade quando analisada sem a multiplicidade dos nós evidencia a dificuldade de representar os campos na região das interfaces, o que fica perceptível através da razão das amplitudes, Figura 4.22 e na diferença de fase, Figura 4.23. Porém, observa-se que quando considerada a multiplicidade dos nós os resultados para a razão de amplitudes e para a diferença de fase dos receptores convergem para os resultados obtidos com a grade uniforme, grade 1, como apresentado nas Figuras 4.24 e 4.25, respectivamente.

Portanto, pode-se concluir que para a frequência de 500 kHz através da inclusão da multiplicidade dos nós consegue-se uma redução no número de nós nas regiões centrais do perfil na ordem de 30% quando comparado com a grade uniforme sem a multiplicidade de nós.

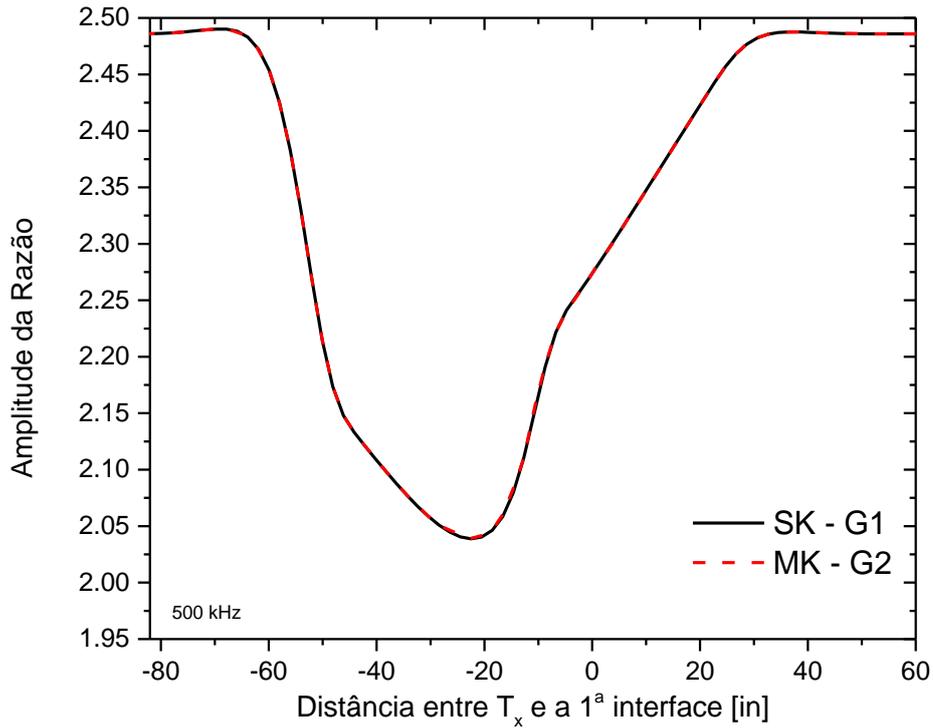


Figura 4.24 – Razão das amplitudes dos receptores para SK-G1 e MK-G2 em 500 kHz.

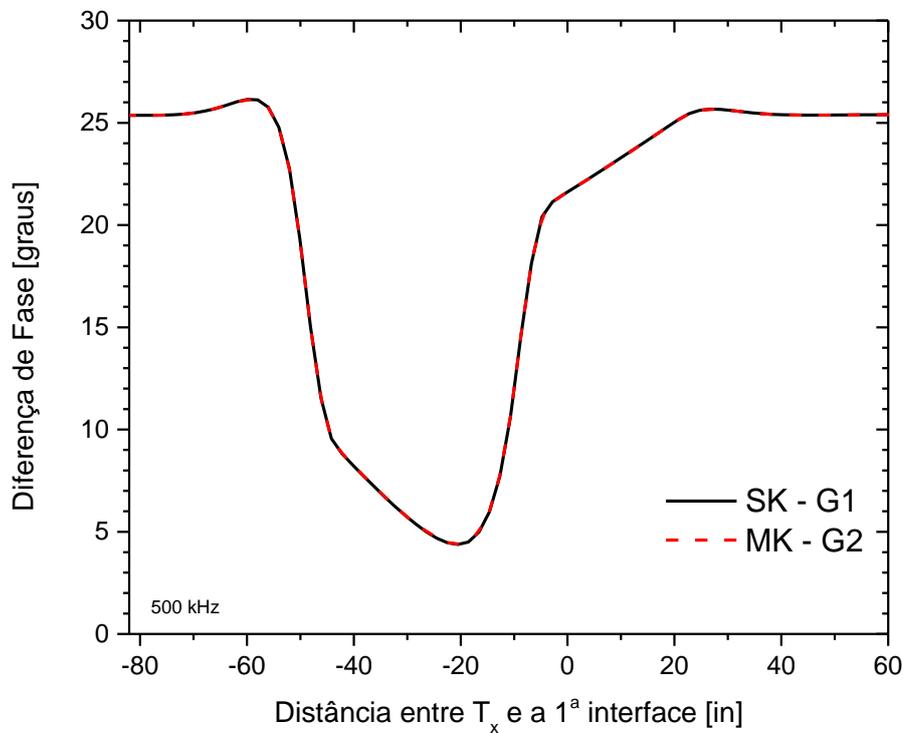


Figura 4.25 – Diferença de fase entre os receptores para SK-G1 e MK-G2 em 500 kHz.

## 4.8

### NMM com múltiplos nós em ferramenta LWD – 2 MHz

Para o caso com a ferramenta na frequência de 2 MHz busca-se analisar a contribuição da multiplicidade dos nós mantendo o perfil apresentado na seção anterior, com 4 camadas axiais, sendo as centrais com espessura de 0,508 m (20 in) cada, e 3 camadas radiais, onde a primeira representa o interior do poço com uma condutividade de 0.0005 S/m, conforme ilustrado na Figura 4.19.

As configurações das bobinas segue a configuração convencional com o transmissor espaçado do primeiro receptor de 0,762 m (30 in) e 0,6096 m (24 in) do segundo, com raio de 0,1143 m (4,5 in), o raio do mandril é de 0,1016 m (4 in), conforme ilustrado na Figura 4.19. A PML foi implementada com 10 células em cada extremo (ou seja, somam-se 20 nós a grade da região de interesse), com tamanho de 10 vezes o tamanho da célula do domínio, onde os parâmetros  $a_z$  e  $\Omega_z$  são de 1 e  $9e-4$ , respectivamente e a ordem do polinômio igual 3.

Assim como os outros casos, através de um estudo comparativo, as primeiras análises apresentam os resultados para uma grade uniforme com  $\Delta_z=0,0254$  m ao longo do domínio de interesse. Primeiramente considera-se a grade sem a multiplicidade dos nós (SK-G1- *Simple nodes-grade 1*) e posteriormente a grade com a multiplicidade dos nós (MK-G1- *Multiplos nodes-grade 1*). Os resultados para a razão das amplitudes e para a diferença de fase dos sinais nos receptores são ilustrados nas Figuras 4.26 e 4.27, respectivamente.

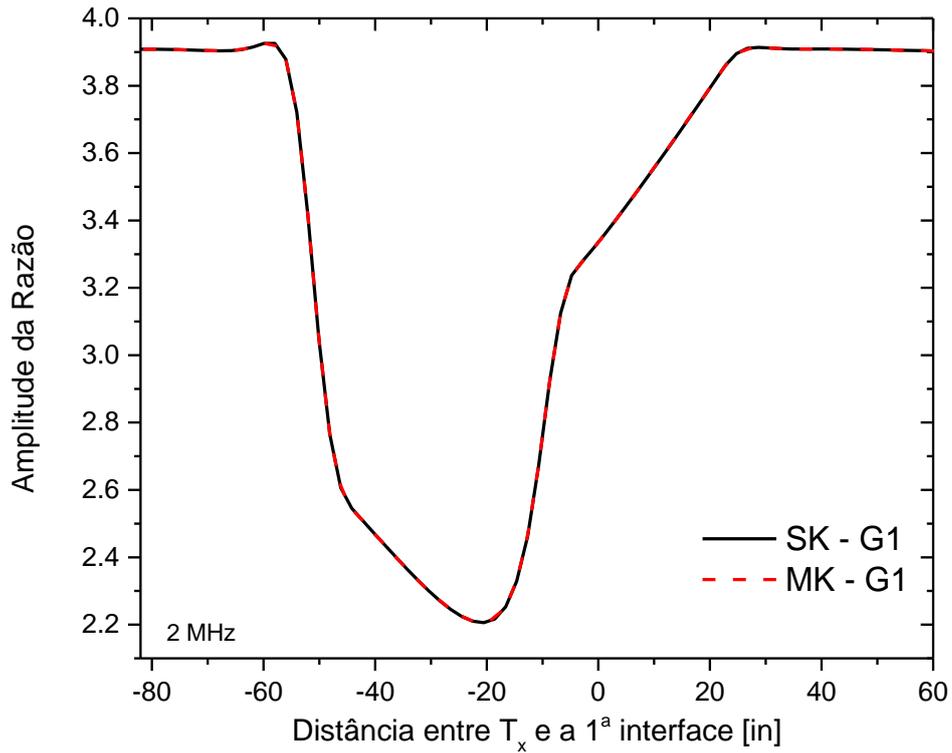


Figura 4.26 – Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 2 MHz para grade 1.

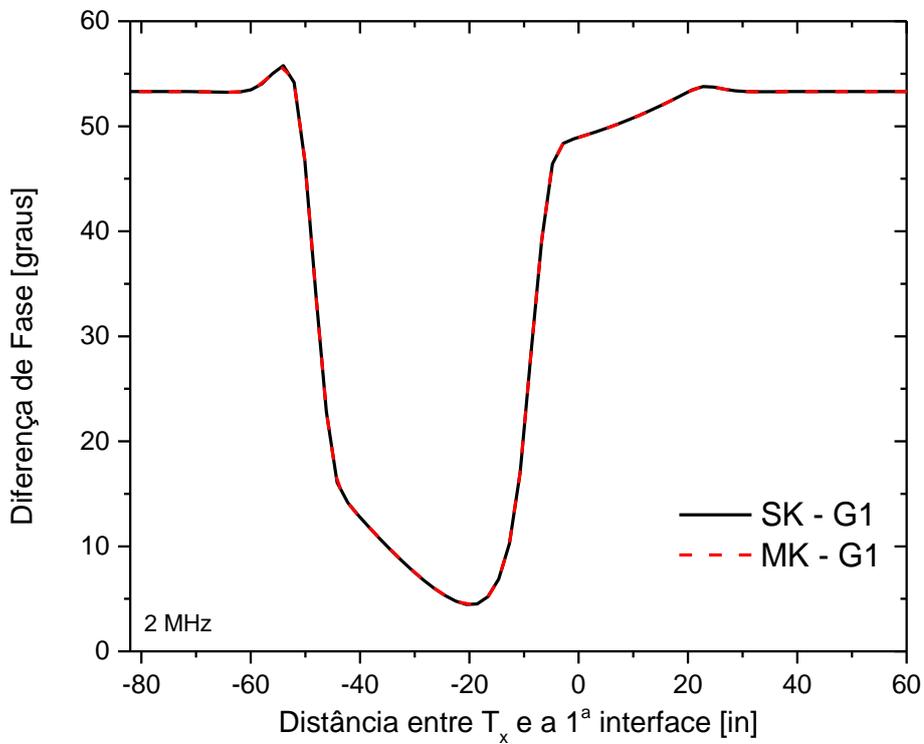
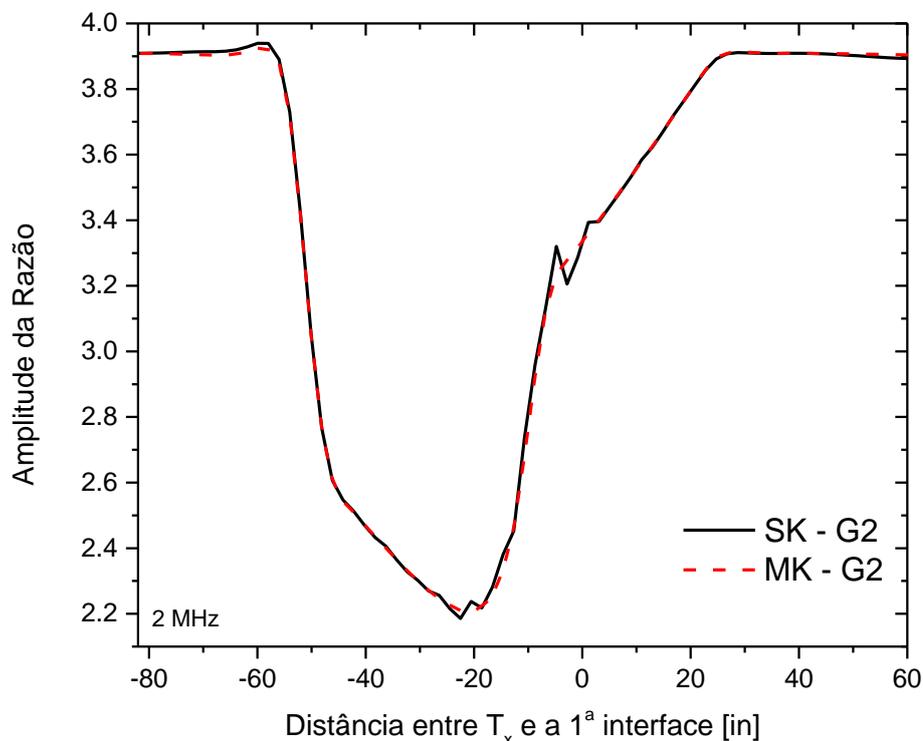


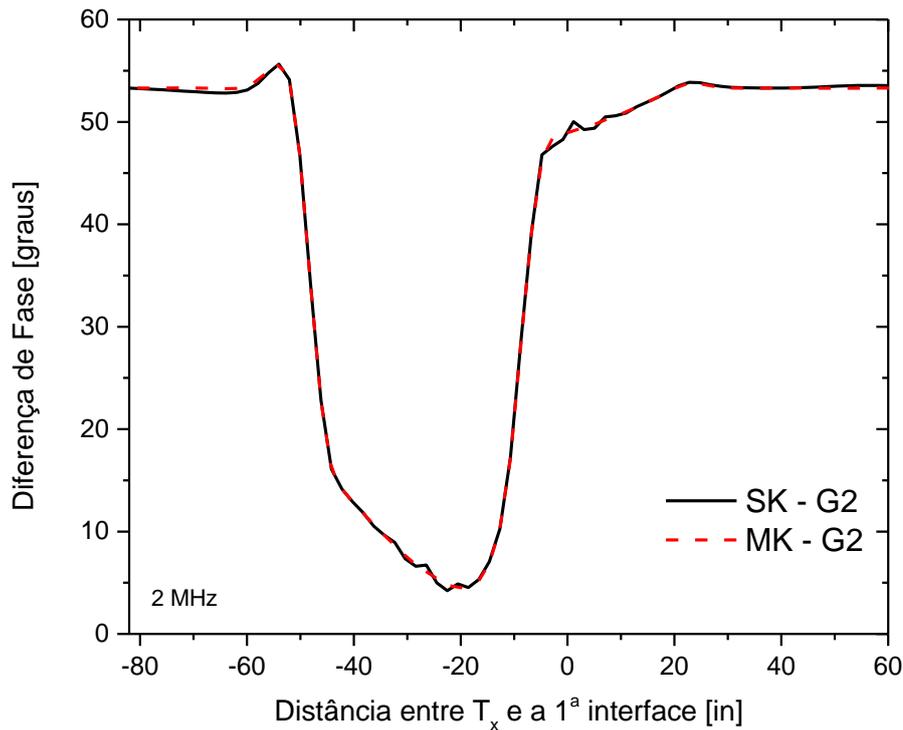
Figura 4.27 – Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 2 MHz para grade 1.

Como se pode observar nas Figuras 4.26 e 4.27 os resultados tanto sem multiplicidade como com multiplicidade convergem. O que indica novamente que a discretização utilizada na grade 1 é suficientemente refinada. Assim como para os casos com frequências de 100 kHz e 500 kHz optou-se por uma grade não uniforme onde se reduziu os nós nas regiões centrais do perfil, definindo um  $\Delta_z=0,03628\text{m}$  nas regiões centrais e mantendo os  $\Delta_z=0,0254\text{m}$  nas regiões superior e inferior do domínio de interesse.

Nos resultados obtidos com essa nova grade, chamada grade 2, SK-G2 é utilizado para indicar o caso sem multiplicidade e MK-G2 indica o caso com multiplicidade de nós. A razão entre as amplitudes e a diferença de fase dos sinais nos receptores desses casos são apresentadas nas Figuras 4.28 e 4.29, respectivamente.



**Figura 4.28 – Razão das amplitudes dos receptores analisados pela ferramenta operando em 2 MHz para grade 2.**



**Figura 4.29 – Diferença de fase entre os receptores analisados pela ferramenta operando em 2 MHz para grade 2.**

Os resultados apresentados para a grade não uniforme (grade 2) ilustram que esta grade quando analisada sem a multiplicidade dos nós evidencia a dificuldade de representar os campos na região das interfaces, o que fica perceptível através da razão das amplitudes, Figura 4.28 e na diferença de fase, Figura 4.29. Entretanto, como anteriormente, observa-se que quando considerada a multiplicidade dos nós os resultados para a razão de amplitudes e para a diferença de fase dos receptores convergem para os resultados obtidos com a grade uniforme, grade 1, como apresentado nas 4.30 e 4.31, respectivamente.

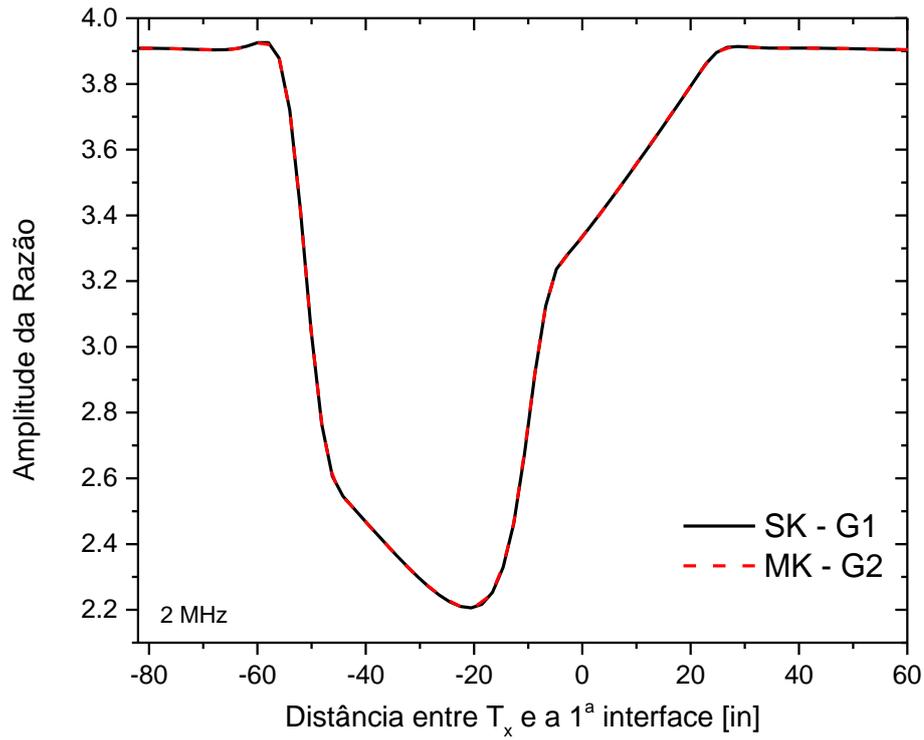


Figura 4.30 – Razão das amplitudes dos receptores para SK-G1 e MK-G2 em 2 MHz.

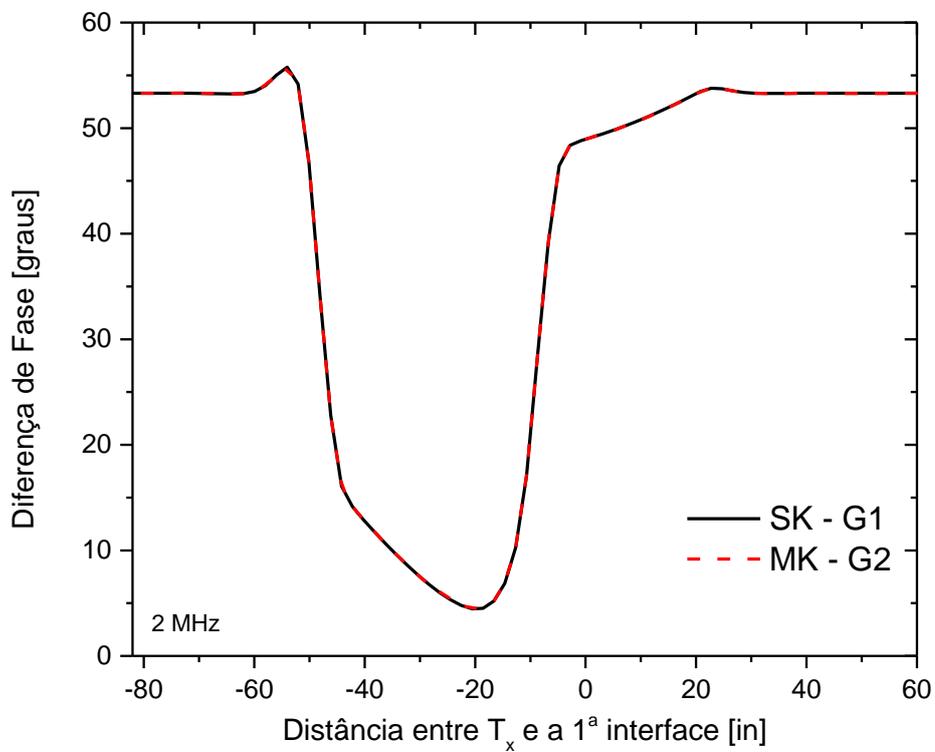


Figura 4.31 – Diferença de fase entre os receptores para SK-G1 e MK-G2 em 2 MHz.

Como já observado para o caso de frequência de 500 kHz, no caso com a frequência de 2 MHz e a inclusão da multiplicidade dos nós consegue-se uma redução no número de nós nas regiões centrais do perfil na ordem de 30% quando comparado com a grade uniforme sem a multiplicidade de nós.

Portanto, após a analisar a eficiência da inclusão da multiplicidade dos nós nas três frequências (100 kHz, 500 kHz e 2 MHz) pode-se concluir que a redução da grade de discretização em regiões de interfaces resultou em uma redução de 20% no número de nós no pior caso apresentado. Considera-se que isso justifica a sua inclusão na formulação do NMM apresentada neste trabalho, uma vez que resulta na redução do esforço computacional quando comparado as grades uniformes e mais densas.

## 5

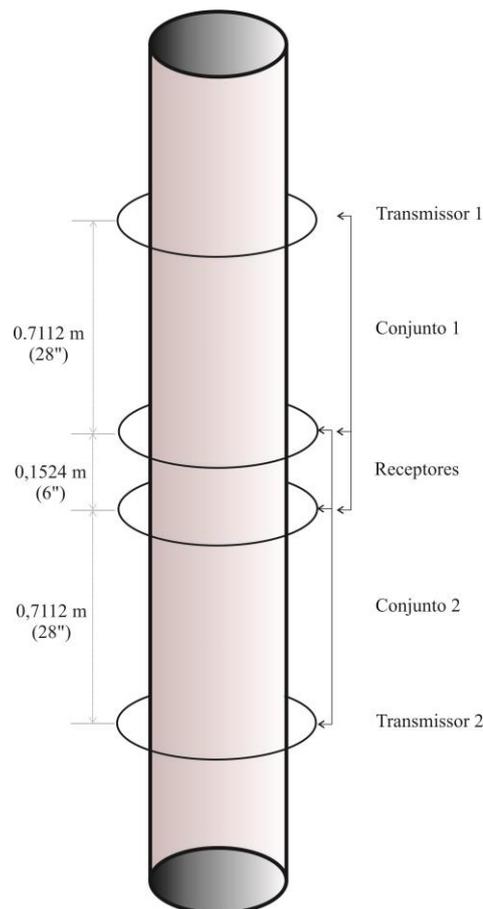
### NMM com multiplicidade de nós com a ferramenta CDR

#### 5.1

##### Introdução

No processo de perfilagem de poços petrolíferos a formação que envolve o poço é continuamente analisada pelos sensores eletromagnéticos das ferramentas de perfilagem. As formações podem apresentar diferentes variações em sua composição, no entanto, especialmente dois tipos de configurações são relevantes para as análises de perfilagem da indústria petrolífera. A primeira trata-se de possíveis rugosidades – *washout* encontradas nas paredes dos poços, regiões que podem ser confundidas como novas camadas na formação pelas ferramentas de perfilagem. A segunda particularidade relevante é a possibilidade de se detectar camadas finas na direção axial.

Buscando aperfeiçoar as análises de perfilagem, no que tange a detecção e tratamento destes dois tipos de configurações, a empresa Schlumberger e seus colaboradores apresentaram uma nova ferramenta de perfilagem. Nesse caso foi acrescentado um transmissor à configuração clássica (1 transmissor e 2 receptores), sendo denominada de análise via dupla resistividade compensada – *Compensated Dual Resistivity* (CDR) [9], [34]. Nesta ferramenta (CDR) os transmissores estão distribuídos simetricamente em relação aos receptores, conforme ilustrado na Figura 5.1.



**Figura 5.1 – Ferramenta LWD CDR.**

Esta ferramenta CDR opera na frequência de 2 MHz e apresenta como resposta duas resistividades aparentes independentes denominadas de  $R_{ps}$  e  $R_{da}$ . Estas resistividades aparentes são calculadas via transformação da diferença de fase e da razão das amplitudes nos receptores devidas ao sinal de cada transmissor. A resistividade  $R_{ps}$  fornece informações de regiões radiais mais próximas das antenas enquanto a resistividade  $R_{da}$  fornecer informações mais distantes das antenas. A CDR possibilita a detecção de camadas na ordem de 0.1524m (6 in) de espessura na direção axial, presentes principalmente em perfurações de poços verticais, [9].

Com intuito de observar o desempenho da ferramenta CDR via NMM com multiplicidade de nós, no decorrer deste capítulo, são apresentadas comparações

de casos gerados com o NMM com multiplicidade de nós de perfis com a presença de rugosidade nas paredes do poço. Além disso, são apresentadas análises da detecção de camadas com menor espessura.

## 5.2

### Obtenção das Resistividades Aparentes

No trabalho [9] é apresentado um banco de dados obtido através da coleta de dados durante campanhas de perfilagem de poços de petróleo que permite o estabelecimento de uma relação entre a resistividade e a permissividade dos meios que são normalmente encontrados nesse perfil de poços. Em tal perfil a diferença de fase entre os receptores apresenta uma forte relação com a resistividade do meio ( $R$ ) enquanto a razão das amplitudes é fracamente dependente da permissividade do meio. Porém, segundo [9] a desconsideração da relação resistividade/permissividade pode acarretar em erros de acurácia aos resultados. Assim, uma expressão empírica, equação (5.1), foi obtida, relacionando estas propriedades constitutivas do meio:

$$\varepsilon = 110R^{-0.35} \quad (5.1)$$

Como a ferramenta CDR trabalha analisando as resistividades aparentes do meio há a necessidade de uma transformação da diferença de fase e da razão das amplitudes entre os receptores em resistividades aparentes  $R_{ps}$  e  $R_{da}$  de cada transmissor, respectivamente. A resistividade aparente  $R_{ps}$  é obtida pela transformação da diferença de fase calculada via NMM se utilizando do gráfico de transformação dado na Figura 5.2, onde uma função interpoladora é necessária. Esta resistividade aparente apresenta como diferencial a sensibilidade para detectar variações na formação nas proximidades da parede do poço.

Para a transformação da razão de amplitudes em resistividade aparente  $R_{da}$  deve-se primeiro efetuar a conversão para decibéis (dB) utilizando-se da expressão dada pela equação (5.2):

$$20 \log \left( \frac{|V_{recep+proximo}|}{|V_{recep+distante}|} \right) - 5 \text{ dB} \quad (5.2)$$

Obtido o valor em decibéis deve-se aplicar a correção pelo fator geométrico devido a perda de espaço livre entre o transmissor e os receptores, que obtido segundo [9] é aproximadamente de 5 dB, sendo independente do meio. Após este passo, o valor encontrado deve ser aplicado ao gráfico de transformação, Figura 5.3, utilizando-se de uma função interpoladora para a obtenção de  $R_{da}$ . Ao passo que a resistividade  $R_{ps}$  apresenta sensibilidade em detectar as variações da formação nas proximidades do poço a  $R_{da}$  apresenta maior sensibilidade na detecção de variações da formação em regiões mais afastadas da parede do poço.

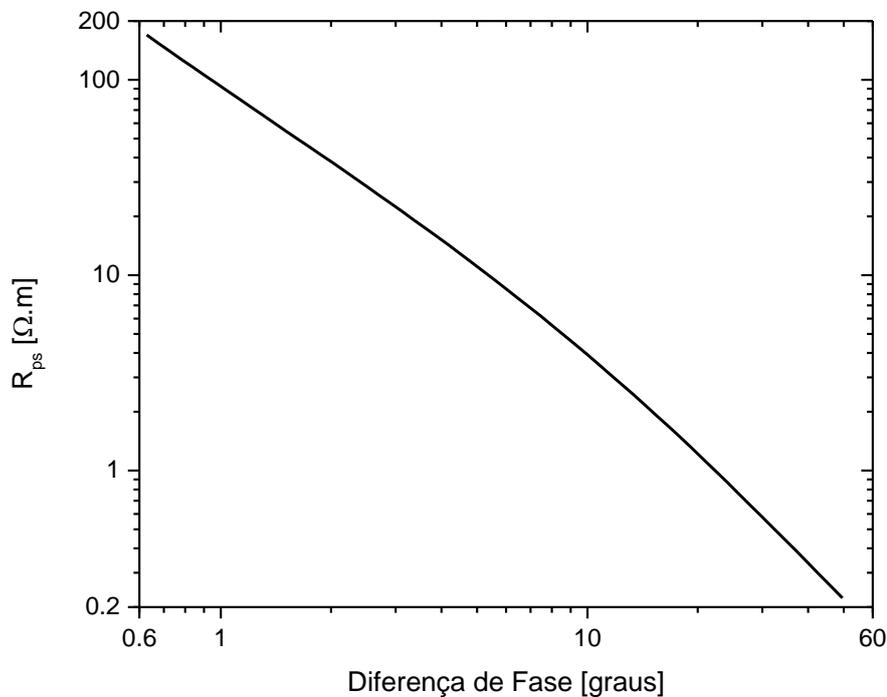


Figura 5.2 – Gráfico de transformação de diferença de fase para resistividade  $R_{ps}$ , [9].

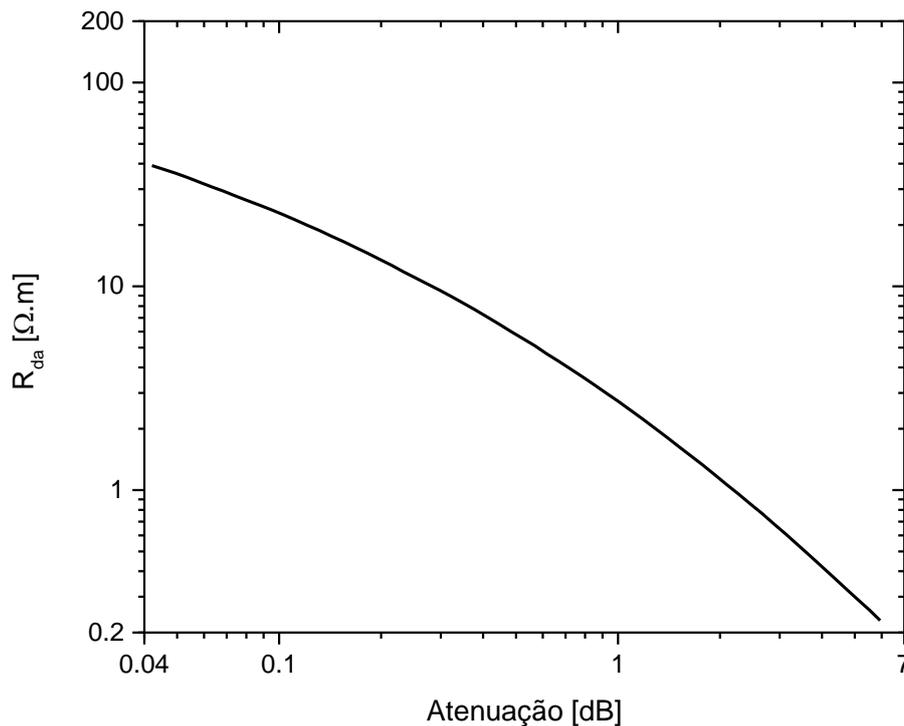


Figura 5.3 – Gráfico de transformação de atenuação (razão) para resistividade  $R_{da}$ , [9].

### 5.3

#### Efeito da Rugosidade em poço analisado pela CDR/NMM com múltiplos nós

Na perfilagem de poços com ferramentas sem a compensação de transmissores (por exemplo, se considerar a configuração clássica com apenas 1 transmissor) a leitura de rugosidades na parede do poço tende a ser interpretada como nova camada, o que indica o comprometimento da eficiência de tais ferramentas.

A solução apresentada em [9] para reduzir o efeito das rugosidades, como já mencionado, se dá através da inclusão de mais um transmissor distanciado simetricamente dos receptores. Isso permite aplicar expressões associativas para

as diferenças de fase e atenuações encontradas para cada transmissor, descritas pela equação (5.3):

$$\begin{aligned} & (DF_{T_1} + DF_{T_2}) / 2 \\ & (AT_{T_1} + AT_{T_2}) / 2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde,

$DF_{T_1, T_2}$ : Diferença de fase entre os receptores (1 e 2) referente ao sinal oriundo no transmissor 1 ou 2;

$AT_{T_1, T_2}$ : Atenuação calculada entre os receptores (1 e 2) referente ao sinal oriundo no transmissor 1 ou 2;

Para ilustrar o efeito da rugosidade a Figura 5.4 reproduz um perfil de perfilagem mostrado em [9], no qual existe uma rugosidade na parede do poço de raio 0,0635 m (2,5 in) e espessura de 0,6096 m (24 in) em uma formação com resistividade de  $R_t$  igual a 2  $\Omega.m$  e uma lama com resistividade de  $R_m$  igual a 0.1  $\Omega.m$ .

As configurações das bobinas seguem a configuração CDR descrita na Figura 5.1, onde o transmissor 1 e 2 estão espaçados dos receptores de 0,7112 m (28 in) e 0,8036 m (34 in), com raio de 0,0889 m (3,5 in), e o mandril com raio de 0,08255 m (3,25 in).

A PML foi implementada com 10 células em cada extremo (ou seja, somam-se 10 nós a grade da região de interesse), com tamanho de 10 vezes o tamanho da célula do domínio, onde os parâmetros  $a_z$  e  $\Omega_z$  são de 3 e  $9e-4$ , respectivamente e a ordem do polinômio igual 4. A grade adotada é uniforme, com  $\Delta_z=0,020$  m ao longo do domínio de interesse e sem a multiplicidade dos nós.

A Figura 5.5 ilustra o resultado oriundo do sinal do transmissor 2 sem compensação, onde o eixo x representa o sinal recebido sobre o ponto médio entre

os dois receptores ( $z_{r1}$  e  $z_{r2}$ ). Observa-se claramente o comportamento da resistividade  $R_{ps}$  que ao entrar na rugosidade apresenta um pico e ao sair apresenta uma oscilação menor. Isso pode confundir a percepção entre a existência de uma camada ou a presença de uma rugosidade. Nota-se também que a resistividade  $R_{da}$  é bem menos sensível a rugosidade comparada a resistividade  $R_{ps}$ .

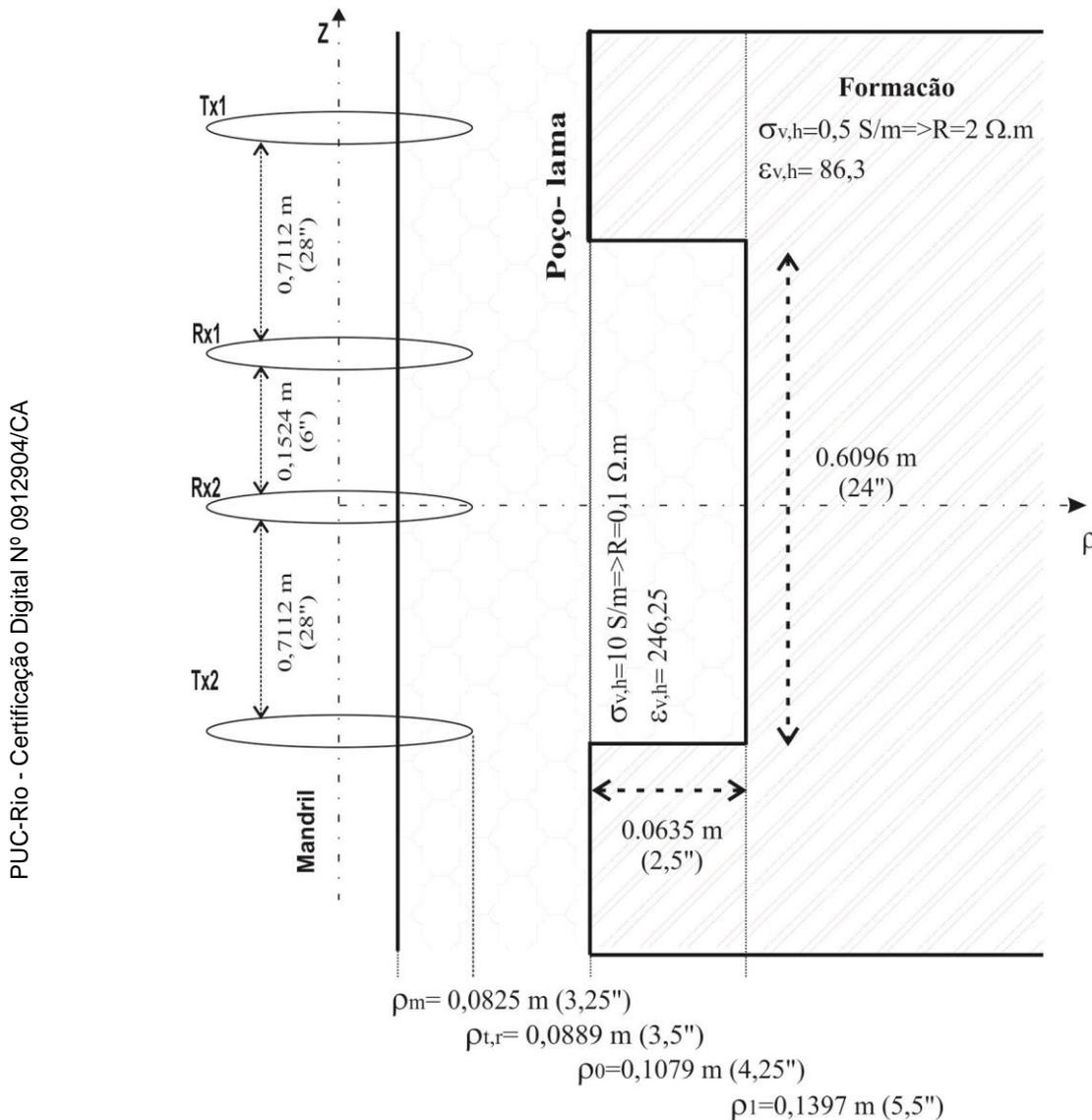
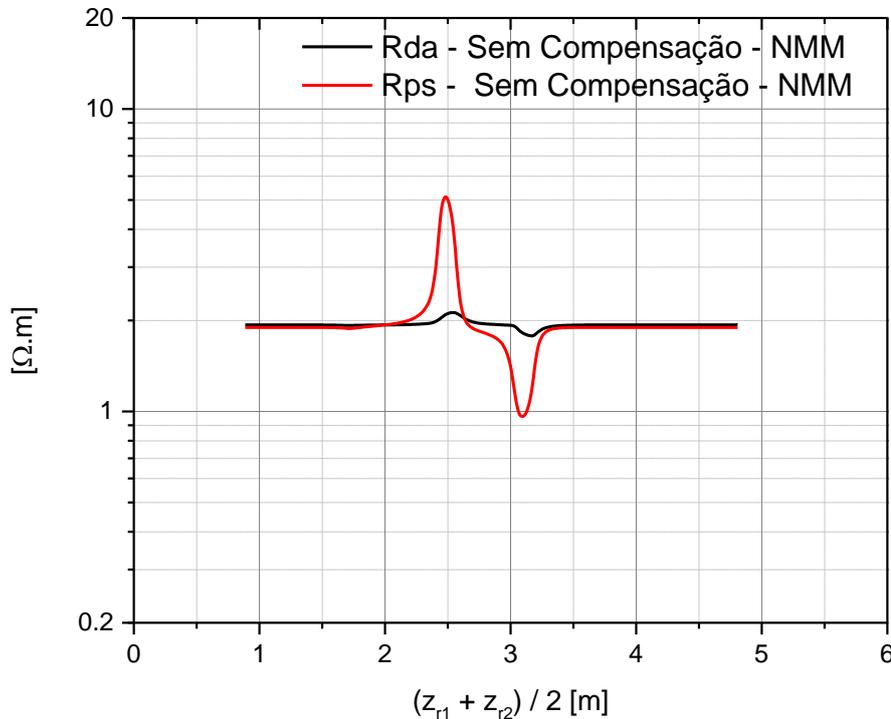


Figura 5.4 – Perfil com presença de rugosidade de 0,0635 m.

A Figura 5.6 ilustra a análise do caso da Figura 5.4 via CDR com compensação, mostrando que a estratégia de inclusão de um segundo transmissor simetricamente disposto na ferramenta CDR possibilita reduzir os equívocos que poderiam ser gerados na interpretação dos dados de alguma rugosidade; como por

exemplo, uma leitura errada que levaria a interpretação da existência de uma nova camada ao invés da detecção da rugosidade presente na parede do poço.



**Figura 5.5 – Resposta a análise da rugosidade observada somente pelo transmissor 2 (similar ao comportamento de uma ferramenta clássica).**

Utiliza-se o NMM para simular numericamente o comportamento da ferramenta CDR na análise das rugosidades com oscilações abruptas apresentada na Figura 5.4, para avaliar seu desempenho combinado com B-splines com multiplicidade de nós. Para essa análise com a presença da multiplicidade de nós adotou-se uma grade com  $\Delta_z=0,0217$  m nas regiões fora da rugosidade e  $\Delta_z=0,03048$  m na região interna a rugosidade, representando uma redução na ordem de 55% no número de pontos quando comparado com uma grade uniforme com  $\Delta_z=0,0217$  m sem multiplicidade de nós. Os resultados encontrados via NMM com múltiplos nós nas interfaces com a ferramenta CDR com compensação são apresentados na Figura 5.7.

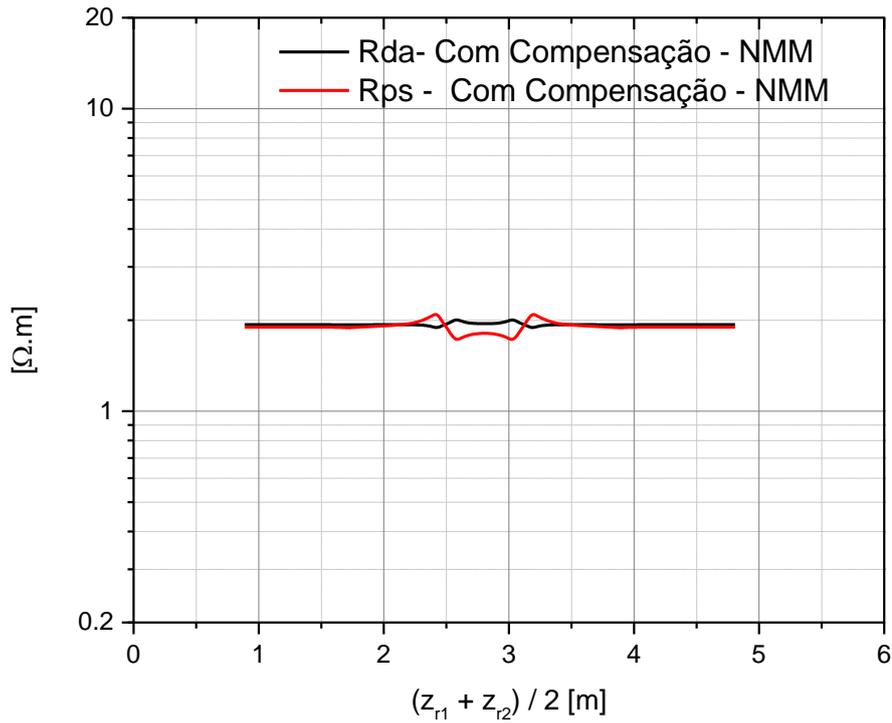


Figura 5.6 – Resposta a análise da rugosidade observada pelos transmissores 1 e 2.

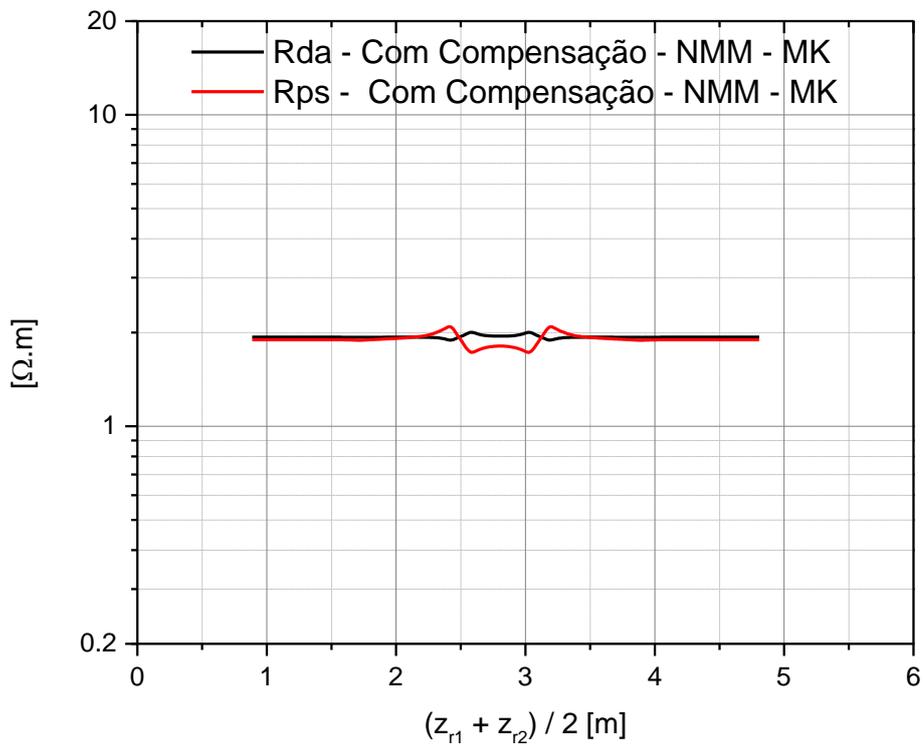


Figura 5.7 – Resposta à análise da rugosidade observada pelos transmissores 1 e 2 via NMM com multiplicidade de nós.

Tendo em vista a análise dos resultados evidenciados na Figura 5.7, observa-se que a utilização da multiplicidade de nós aplicada em perfis com

presença de rugosidade apresentou uma resposta similar ao caso sem multiplicidade de nós. Assim, pode-se observar para este caso, que a inclusão da multiplicidade de nós não apresentou grande desempenho para a análise do perfil com rugosidade, exceto, a pequena redução da grade na região da rugosidade.

## 5.4

### Resolução vertical da CDR/NMM com múltiplos nós

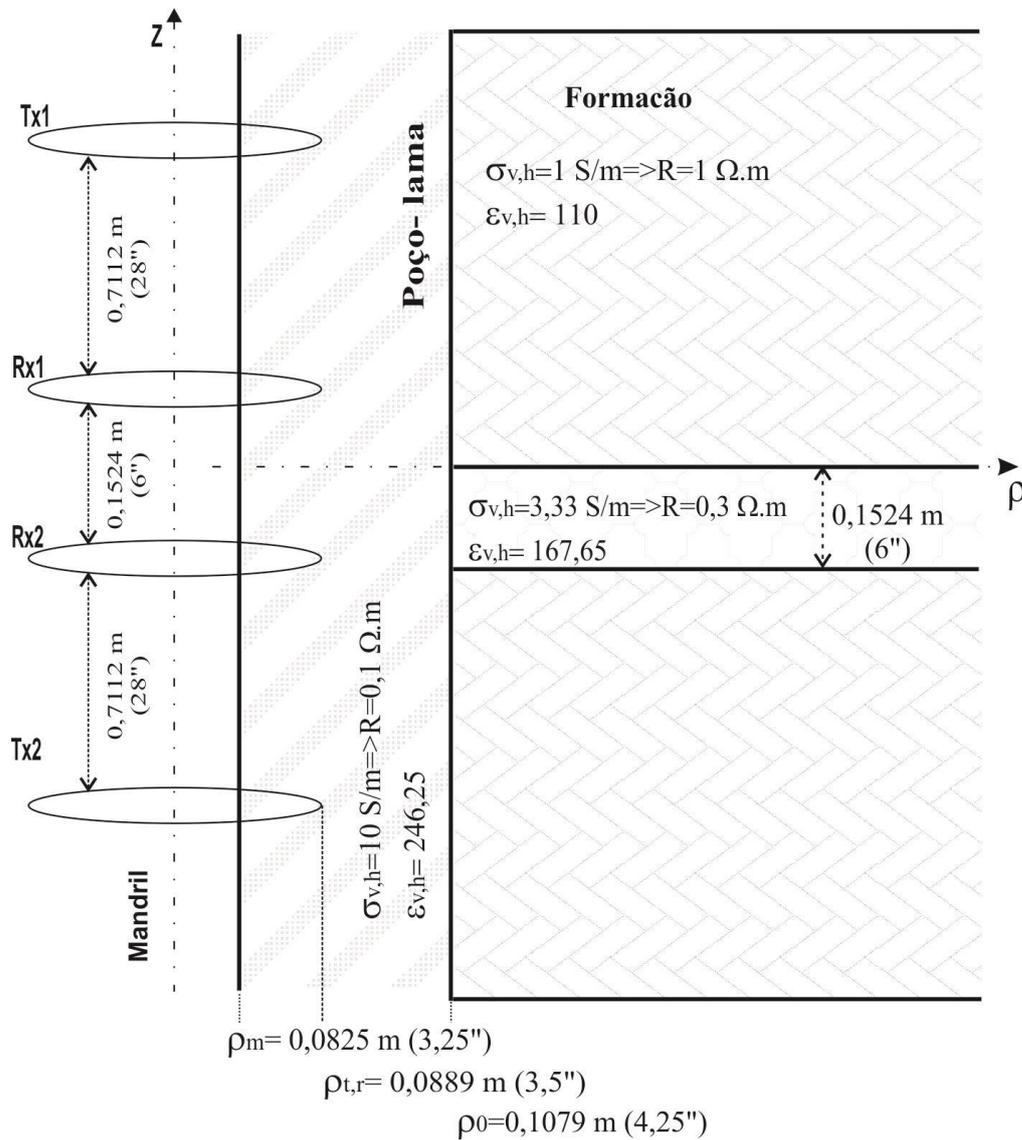
No processo de perfilagem de poços petrolíferos a espessura das camadas da formação é uma importante característica a ser analisada. Esta capacidade de determinação das espessuras é denominada resolução vertical da ferramenta. Na literatura especializada, a resolução vertical é apresentada como sendo aplicada na identificação de uma determinada camada disposta entre outras duas camadas com características similares formando assim os ombros – *shoulders* – entre a camada a ser determinada e sua vizinhança.

A ferramenta CDR apresenta a capacidade de identificar camadas a partir de 0,1524 m (6 in) de espessura, porém esta identificação segundo [9] é dividida em duas análises. Uma análise é qualitativa, através da qual a ferramenta consegue por meio da leitura das resistividades aparentes  $R_{da}$  e  $R_{ps}$  identificar a camada; entretanto, as resistividades aparentes não conseguem representar a resistividade real da camada. A outra análise é quantitativa, que embora normalmente consiga determinar o valor da resistividade real da camada ( $R_t$ ), pode ter dificuldade em camadas estreitas e principalmente em casos com  $R_t > R_s$  ( $R_s$  – resistividade dos *shoulders*). Em [9] são apresentados casos de leituras de camadas com espessuras de 0,1524 m (6 in), 0,3048 m (12 in) e 1,2192 m (48 in),

onde o primeiro ilustra a capacidade qualitativa da ferramenta CDR e os demais a capacidade quantitativa.

Assim como observado nas análises dos efeitos das rugosidades nas paredes dos poços de petróleo. A ferramenta CDR associada ao NMM com multiplicidade de nós possibilitou de forma satisfatória a detecção da presença de mudanças abruptas das propriedades constitutivas da formação. Tendo isso em vista, essa associação habilita-se a analisar os três casos de camadas citados acima. Com isso tem-se o objetivo de observar os resultados com a inclusão da multiplicidade dos nós no NMM nas análises dos *shoulders* presentes nas formações citadas.

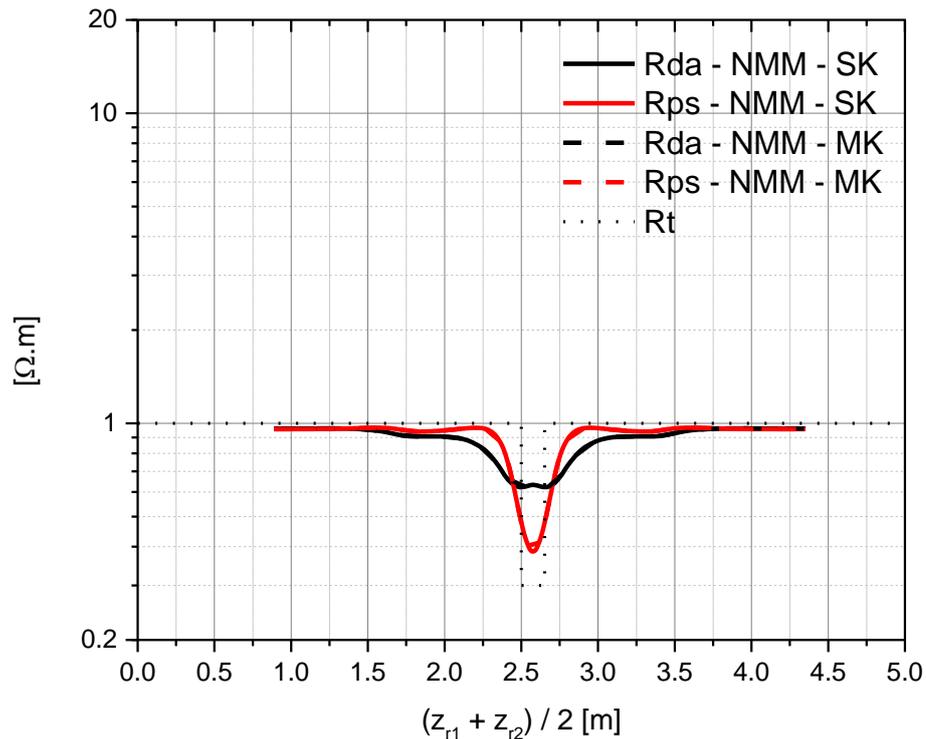
A Figura 5.8 ilustra um perfil que apresenta uma camada de espessura 0,1524 m (6 in), com  $R_t=0.3 \Omega.m$  e  $R_s=1 \Omega.m$  utilizada para análise qualitativa, [9]. A configuração da ferramenta CDR e as camadas de PML adotadas para esta análise são as mesmas adotadas na seção 5.3.



**Figura 5.8 – Perfil com presença de uma camada de espessura igual a 0,1524 m.**

A grade adotada é uniforme com  $\Delta_z=0,020 \text{ m}$  ao longo do domínio de interesse sem a multiplicidade dos nós e não uniforme com o mesmo espaçamento em  $z$  com a multiplicidade dos nós.

Os resultados obtidos via análise com NMM e a ferramenta CDR com e sem a multiplicidade dos nós são ilustrados na Figura 5.9.

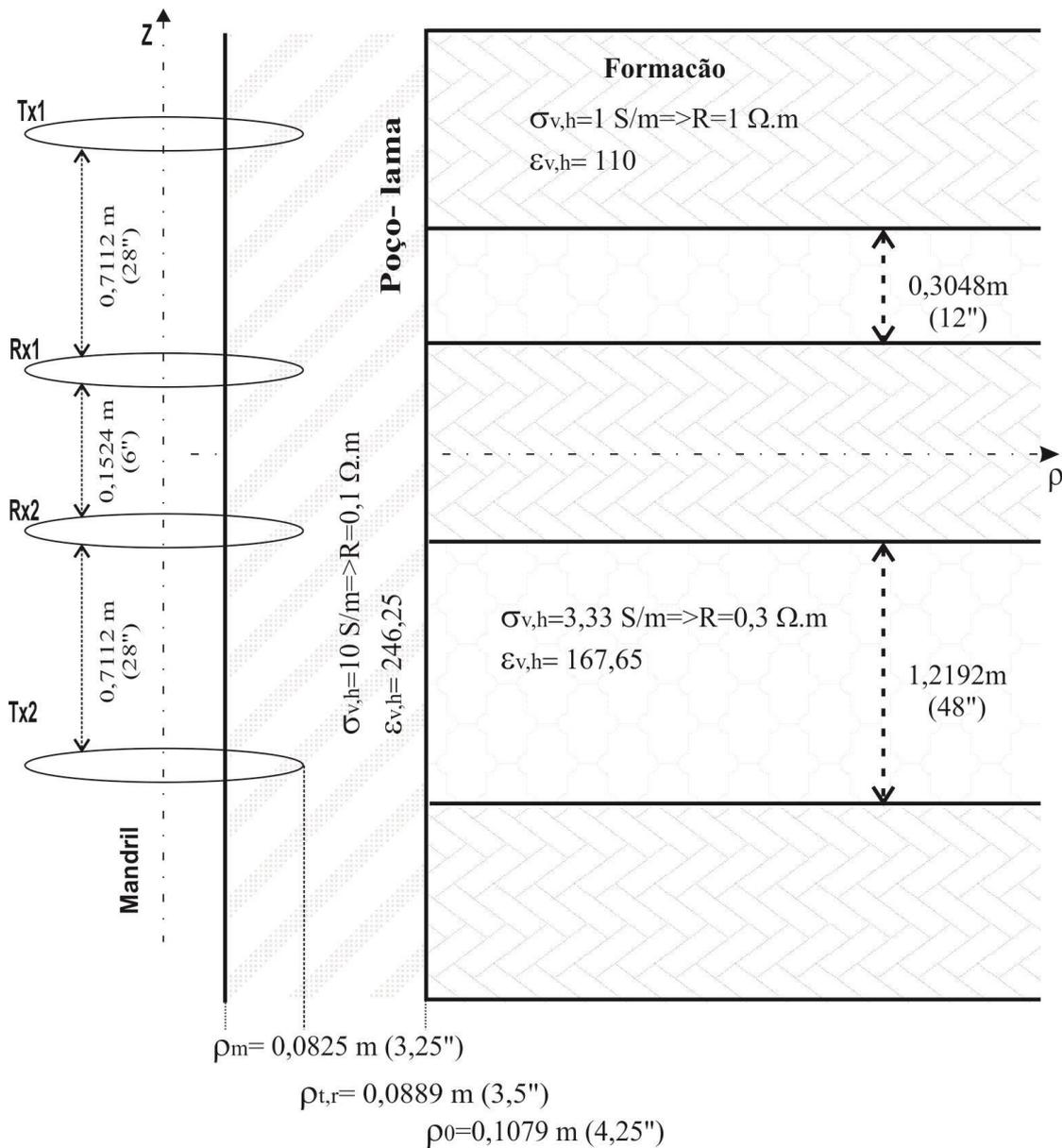


**Figura 5.9 – Resposta à análise da camada de espessura de 0,1524 m com (MK) e sem (SK) multiplicidade de nós com  $R_t=0.3 \Omega \cdot m$ .**

Tendo em vista os resultados apresentados na Figura 5.9, pode-se obter algumas conclusões: primeiramente que o algoritmo implementado para simular o comportamento da ferramenta CDR conseguiu detectar uma camada de espessura de 0,1524 m (6 in) ilustrada pelo cruzamento das resistividades aparentes, similar ao ilustrado em [9]. Uma segunda conclusão refere-se à inclusão da multiplicidade dos nós à análise, onde se observa que ela produziu resultados semelhantes aos gerados pela utilização de nós simples nas B-splines.

Partindo para uma análise quantitativa no estudo de perfis com presenças de *shoulder*, optou-se por explorar os casos com camadas entre *shoulders* de 0,3048 m (12 in) e 1,2192 m (48 in) com diferentes valores para a resistividade  $R_t$  das camadas.

O primeiro caso se refere ao perfil que apresenta  $R_t < R_s$ , conforme Figura 5.10, com  $R_t$  e  $R_s$  iguais aos do caso da análise qualitativa.



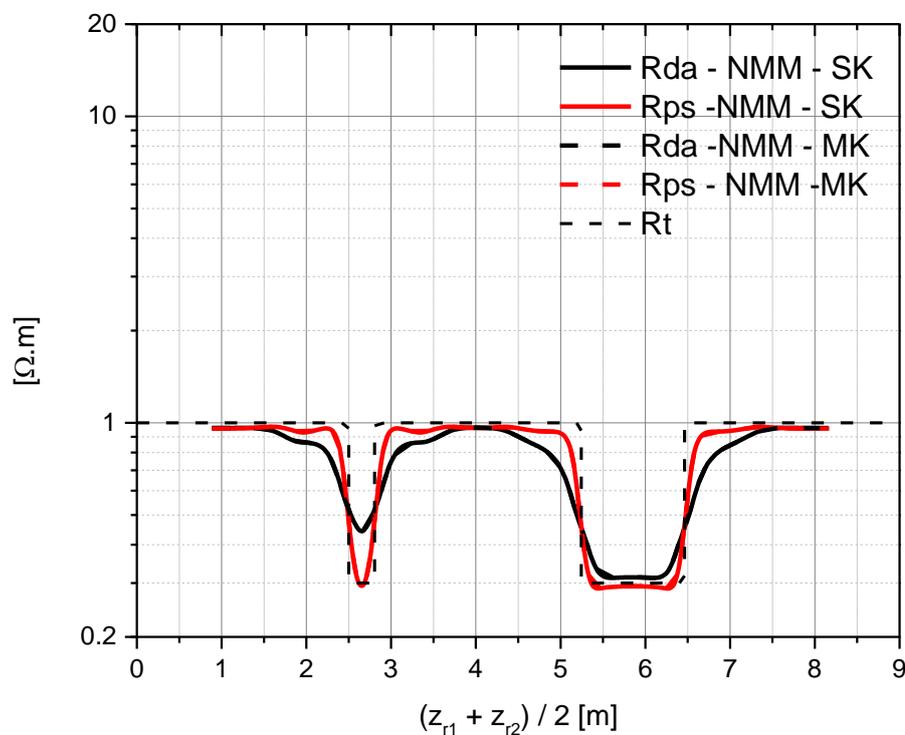
**Figura 5.10 – Perfil com presença de camadas de espessuras igual a 0,3048 m e 1,2192 m com  $R_t = 0,3 \Omega.m$ .**

Para a análise deste perfil foram adotadas as mesmas configurações da ferramenta CDR e da PML definidas no início desta seção.

Novamente, com o objetivo de observar o desempenho do NMM/CDR com multiplicidade de nós, foram adotadas duas grades de discretização no eixo z com espaçamento  $\Delta_z = 0,020 \text{ m}$  uniforme para o caso sem multiplicidade dos nós e não uniforme para o caso com multiplicidade sobre as interfaces.

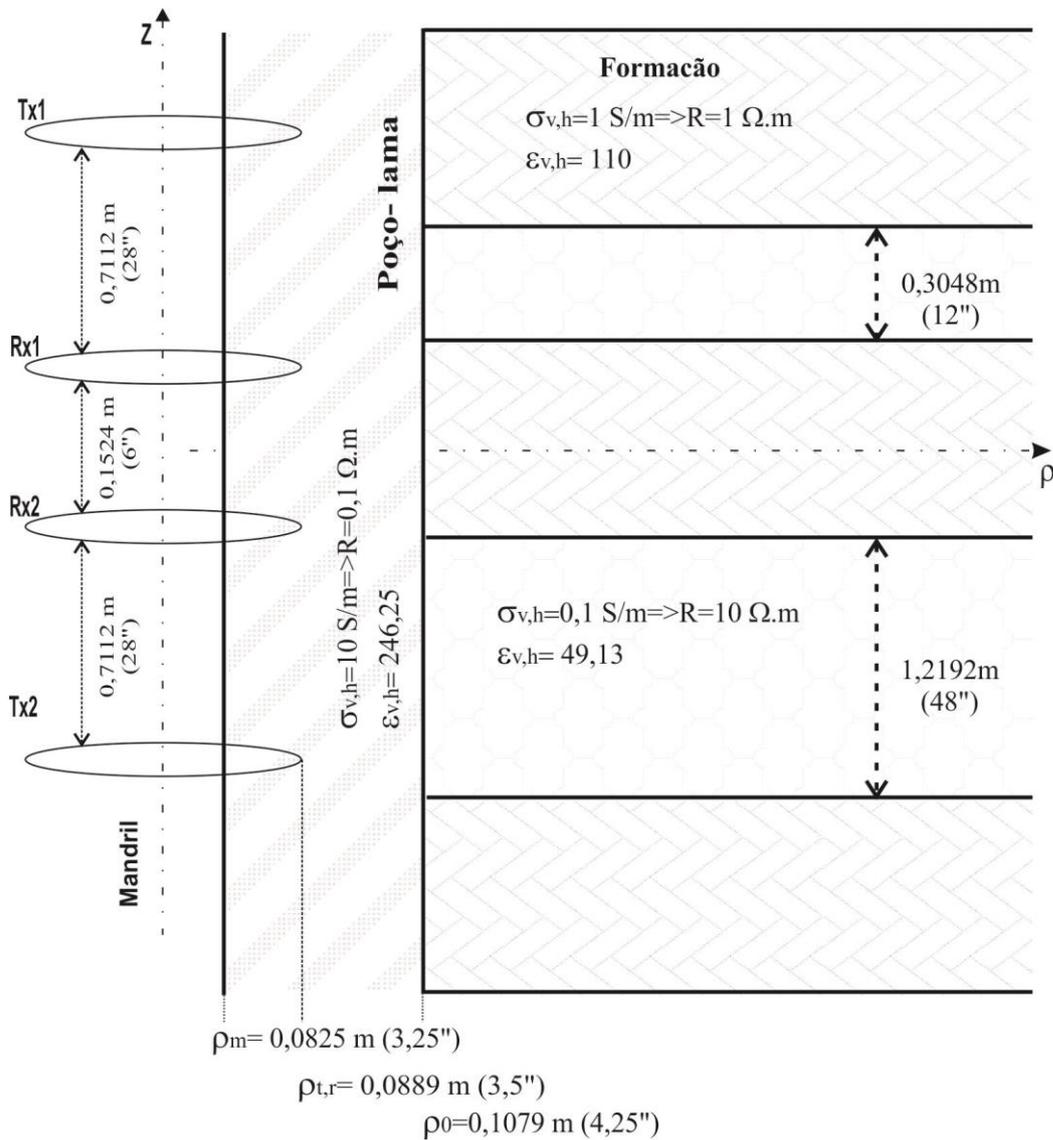
Os resultados obtidos apresentam uma maior sensibilidade da resistividade aparente  $R_{ps}$  conseguindo detectar a resistividade real em ambas as camadas. Porém, a resistividade  $R_{da}$  mostrou-se pouco sensível para camadas inferiores a 48in de espessura, conforme ilustrado na Figura 5.11.

A respeito do comportamento dos resultados com a inclusão da multiplicidade, constatou-se que a diferença entre a presença ou não dos múltiplos nós não alterou a resposta.



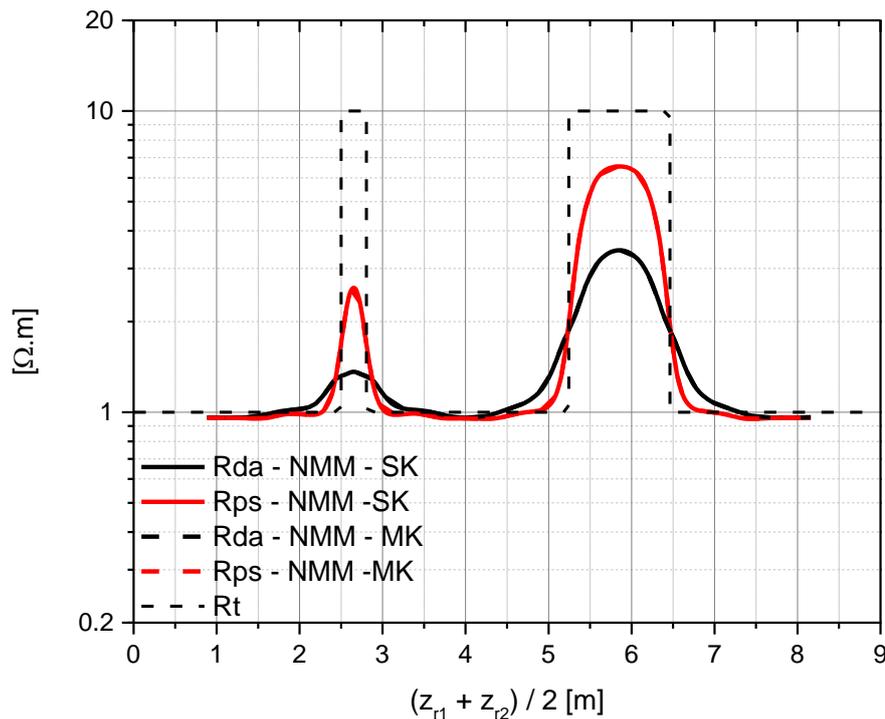
**Figura 5.11 – Resposta à análise das camadas com espessuras de 0,3048 m e 1,2192 m com (MK) e sem (SK) multiplicidade de nós com  $R_t=0,3 \Omega \cdot m$ .**

O segundo caso se refere ao perfil que apresenta  $R_t > R_s$ , o qual indica grande dificuldade de se detectar a resistividade real  $R_t$  da camada, [9]. Na tentativa de se obter uma análise com a multiplicidade dos nós a Figura 5.13 apresenta os resultados obtidos via NMM para o perfil ilustrado na Figura 5.12 considerando agora  $R_t$  igual a  $10 \Omega \cdot m$ .



**Figura 5.12 – Perfil com presença de camadas de espessuras igual a 0,3048 m e 1,2192 m com  $R_t = 10 \Omega.m$ .**

Observando a Figura 5.13 constata-se que a ferramenta realmente não é capaz de detectar a resistividade real tanto para a camada 0,3048 m (12 in) e quanto para a camada 1,2192 m (48 in). Portanto, mesmo com a inclusão da multiplicidade dos nós a ferramenta continua a não detectar a resistividade real.



**Figura 5.13 – Resposta à análise das camadas com espessuras de 0,3048 m e 1,2192 m com (MK) e sem (SK) multiplicidade de nós com  $R_t=10 \Omega.m$ .**

Após as análises destes casos que abordaram uma nova ferramenta (CDR) incorporada ao método de casamento dos modos (NMM) com multiplicidade de nós – que exploram aspectos importantes na área de perfilagem de poços petrolíferos, como o efeito da rugosidade nas paredes dos poços e o estudo da presença dos *shoulders* com diferentes relações entre as resistividades  $R_t$  e  $R_s$  – pode-se concluir que o algoritmo implementado está capacitado a analisar estes efeitos com desempenho a outros métodos disponíveis na literatura especializada. Dessa forma, pode-se afirmar que os estudos apresentados neste capítulo podem servir de material para futuras pesquisas que busquem dar continuidade à exploração das potencialidades do NMM com multiplicidade dos nós em perfilagem de poços petrolíferos.

## 6

### Considerações Finais

#### 6.1

##### Conclusões

Neste trabalho, foi apresentada uma nova formulação para o Método de Casamento de Modos utilizado nas análises eletromagnéticas de perfilagem de poços de petróleo. A etapa inicial abordou o desenvolvimento da inclusão das funções B-Splines cúbicas como funções de expansão modal, além de apresentar o desenvolvimento do uso da multiplicidade de nós ao NMM, obtendo assim um método mais adaptado e eficiente para analisar o comportamento dos campos eletromagnéticos sobre as interfaces axiais presentes em perfis de poços de petróleo.

No decorrer das seções 4.2 a 4.4, foram apresentadas comparações entre o NMM desenvolvido neste trabalho com o NMM encontrado em [3], que utiliza funções B-Splines quadráticas como função de expansão. A partir da análise dos resultados apresentados via NMM com as funções cúbicas, pôde-se observar que, para ferramentas operando tanto em baixas frequências (100 kHz e 500 kHz) como em frequência mais elevada (2 MHz). A análise eletromagnética dos casos abordados apresentou resultados similares aos resultados com as funções B-Splines quadráticas, proporcionando ilustrar de forma elucidativa casos em que o

uso das funções B-Splines cúbicas pode ser considerado optativo frente ao uso das B-Splines quadráticas.

Na seção 4.5, foi abordado um caso com a ferramenta operando na frequência de 25 MHz, [14], com o perfil apresentando variações tanto nas condutividades como nas permissividades entre os meios. Os resultados obtidos via NMM, quando confrontados com os resultados gerados pelo Método dos Elementos Finitos (FEM), mostraram uma ótima concordância, evidenciando que o método NMM, com as funções B-Splines cúbicas, está apto a trabalhar com frequências mais elevadas e perfis com diferentes propriedades dos meios, apresentando como vantagens ser um método que necessita de pouca memória computacional frente ao FEM, por exemplo.

Após a série de comparações entre o NMM com as funções B-Splines cúbicas e quadráticas, além do caso com FEM, buscou-se ilustrar, através de comparações, as vantagens da inclusão da multiplicidade de nós frente ao NMM sem ela. Os resultados obtidos para a frequência mais baixa (100 kHz) mostraram que a inclusão da multiplicidade dos nós sobre as interfaces resultou em uma redução de, no mínimo, 20% dos nós para representar os campos. Nas comparações com a ferramenta operando nas frequências de 500 kHz e 2 MHz, a redução chegou a 30% nos nós.

Observando o conjunto de resultados ilustrados ao longo do Capítulo 4, podem-se elencar algumas conclusões: mesmo a formulação desenvolvida com a combinação das funções B-Splines cúbicas ao método NMM ter apresentado resultados limitados quando comparado os resultados oriundos do NMM com B-Splines quadráticas, as comparações, quando incluídas à multiplicidade dos nós ao método NMM, apresentaram resultados promissores às análises eletromagnéticas

em perfilagem de poços de petróleo via NMM. Isso porque, com a inclusão da multiplicidade dos nós sobre as interfaces axiais, obteve-se uma redução no número de nós nesta região, o que demonstra a potencialidade do uso da multiplicidade dos nós frente ao processo normalmente adotado para essas regiões, que é o incremento da grade para se obter o comportamento dos campos desejado sobre as interfaces.

No decorrer do capítulo 5, foram apresentados estudos de casos com a presença de rugosidade nas paredes dos poços de petróleo e de finas camadas entre *shoulders* na direção axial de perfilagem. Tal fato permitiu constatar que o NMM desenvolvido com ou sem multiplicidade de nós associado à ferramenta CDR, com as bobinas orientadas transversalmente à ferramenta, apresentou resultados limitados. Porém, o NMM credencia-se como uma nova alternativa para detecção de rugosidades e finas camadas na direção axial em análises eletromagnéticas de perfis de poços petrolíferos.

## 6.2

### Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, pode-se destacar a inclusão ao algoritmo desenvolvido a capacidade de incorporar as bobinas inclinadas, chamadas *Tilted Coil Antenna* (TCA), o que permitirá ao método excitar modos TM às análises eletromagnéticas, estendendo, assim, a avaliação das potencialidades da combinação das funções B-Splines cúbicas e multiplicidade dos nós ao NMM. Esse método pode ser aplicado tanto em ferramentas clássicas como em ferramentas com múltiplos transmissores.

## Referências bibliográficas

- [1] M. S. Novo, "Análise Numérica de Sensores Eletromagnéticos de Prospecção Petrolífera," Puc-Rio, Rio de Janeiro - BR, 2007.
- [2] F. L. Teixeira and W. C. Chew, "Finite-Difference Computation of Transient Electromagnetic Waves for Cylindrical Geometries in Complex Media," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, pp. VOL. 38, NO. 4, pag. 1530-1543, July 2000.
- [3] Y.-K. Hue, "Analysis of Electromagnetic Well-Logging Tools," Ohio State University, Columbus, OH, USA, 2006.
- [4] M. S. Novo, L. C. da Silva and F. L. Teixeira, "Finite volume modeling of borehole electromagnetic logging in 3-D anisotropic formations using coupled scalar-vector potentials," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, pp. vol. 6, pp. 549-552, 2008.
- [5] M. S. Novo, L. C. da Silva and F. L. Teixeira, "Comparison of coupled-potentials and field-based finite-volume formulations for modeling of borehole electromagnetic tools," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, pp. vol. 5, pp. 209 - 211 , April 2008.
- [6] W. C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, New York, NY: IEEE Press, 1995.
- [7] D. Pai, "Induction log modeling using vertical eigenstates," *IEEE Transtion on Geoscience and Remote Sensing*, pp. Vol. 29, pp. 209-213, 1991.
- [8] Y.-K. Hue and . F. L. Teixeira, "Numerical Mode-Matching Method for Tilted-Coil Antennas in Cylindrically Layered Anisotropic Media With Multiple Horizontal Beds," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, pp. VOL. 45, NO. 8, pg. 2451-2462, AUGUST 2007.

- [9] B. Clark, M. G. Lüling, J. Jundt, M. Ross and D. Best, "A Dual Depth resistivity measurement for FEWD," in *SPWLA Twenty-Ninth Annual Logging Symposium*, June- 1988.
- [10] Tsili Wang and Sheng Fang, "3-D electromagnetic anisotropy modeling using finite differences," *Geophysics*, pp. 66(5):1386-1398, Sept-Oct 2001.
- [11] S. Bonner, J. Tabanou, P. Wu, J. Seydoux, K. Morlarty, B. Seal, E. Kwok and M. Kuchenbecker, "New 2-MHz Multiarray Borehole-Compensated Resistivity tool developed for MWD in split holes," *Society of Petroleum Engineers*, pp. 147-162, SPE 30547.
- [12] B. Clark, P. T. Wu and V. E. Grijalva, "Well logging apparatus and method with borehole compensation including multiple transmitting antennas asymmetrically disposed about a pair of receiving antennas - Patent Number 5.594.343," United States Patent, 1997.
- [13] J. Li and L. C. Shen, "Vertical Eigenstate Method For Simulation of Induction and MWD Resistivity Sensors," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, pp. Vol. 31 - 399 - 406, March 1993.
- [14] W. Chew, S. Barone, B. I. Anderson and C. Hennessy, "Diffraction of axisymmetric waves on borehole by boundary discontinuities," *Geophysics*, pp. Vol. 49, no. 10, pp. 1586 - 1595, 1984.
- [15] D. Pai and M. Huang, "A generalized Haskell matrix method for borehole electromagnetics: theory and applications," *Geophysics*, pp. Vol. 53, pp. 1577-1586, 1988.
- [16] W. C. Chew and B. Anderson, "Propagation of electromagnetic waves through geological beds in a geophysical probing environment," *Radio Sci.*, pp. Vol. 20, pp. 611 - 621, 1985.
- [17] W. Chew, "Modeling of the dielectric logging tool at high frequencies: Theory," *IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing*, pp. Vol. 26, pp. 382- 487, 1988.
- [18] Q. H. Liu, W. Chew, M. Taherian and K. Safinya, "A modeling study of electromagnetic propagation tool in complicated borehole environments," *The Log Analyst*, pp. Vol. 30, no. 6, pp. 424-436 , 1989.

- [19] W. Chew, Z. Nie, Q. Liu and B. Anderson, "An efficient solution for the response of electrical well logging tools in a complex environment," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, pp. Vol. 29, pp. 308-313, 1991.
- [20] D. M. Pai, J. Ahmad and W. Kennedy, "Two-dimensional induction log modeling using a coupled-mode, multiple-reflection series method," *Geophysics*, pp. Vol. 58, no. 4, pp. 466-474, April 1993.
- [21] T. Hagiwara, E. Banning, R. Ostermeier and S. Haugland, "Effects of mandrel, borehole, and invasion for tilt-coil antennas," in *SPE 78th Annu. Technical Conf. and Exhibition*, Denver, CO, Oct. 5-8 -2003.
- [22] E. Cavanagh and B. D. Cook, "Numerical Evaluation of Hankel Transforms Via Gaussian-Laguerre Polynomial Expansions," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. Vol. ASSP-27, No. 4- pag. 361-366, August 1979.
- [23] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, New York: Wiley, 1970.
- [24] J.R. Lovell and W.C. Chew, "effect of tool eccentricity on some electrical well-logging tools," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 1, no. 28, pp. 127-136, Jan-1990.
- [25] Huixian Yang; Yabin He; Huixian Huang; WenLong Yue; Haixia Xia, "The deduction of coefficient matrix for cubic non-uniform B-Spline curves," in *First International Workshop on Education Technology and Computer Science*, China, 2009.
- [26] F. L. Teixeira and W. C. Chew, "Systematic Derivation of Anisotropic PML Absorbing Media in Cylindrical and Spherical Coordinates," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, pp. VOL. 7, NO. 11, pag. 371-373, November 1997.
- [27] F. L. Teixeira and W. C. Chew, "Differential forms, metrics, and the reflectionless absorption of electromagnetic waves," *J. Electromagn. Waves Appl*, pp. vol. 13, pp. 665-686,, 1999.
- [28] F. L. Teixeira and W. C. Chew, "Lattice electromagnetic theory from a topological viewpoint," *J. Math. Phys.*, pp. vol. 40, no. 1, pp. 169-187, 1999.

- [29] Q. I. Dai, Yat Hei Lo, W. C. Chew, Y. G. Liu and J. J. Li , "Generalized Modal Expansion and Reduced Modal Representation of 3-D Electromagnetic Fields," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, pp. Vol. 62, No. 2, pg. 783-793, February 2014.
- [30] R. F. Harrington, Time-Harmonic Electromagnetic Fields, New York, NY: McGRAW-HILL Book Company, INC, 1961.
- [31] Y.-K. Hue, F. L. Teixeira, L. San Martin and M. S. Bittar, "Three-Dimensional Simulation of Eccentric LWD Tool Response in Boreholes Through Dipping Formations," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, pp. VOL. 43, NO. 2, pg. 257-268, FEBRUARY 2005.
- [32] B. I. Anderson and S.-K. Chang, "Synthetic induction logs by the finite element method," *The Log Analyst*, no. 23, 1982.
- [33] B. Anderson and S. Chang, "Synthetic DPT response by the finite element method," in *SPWLA Conf.*, Calgary, Canada, 1983.
- [34] B. Clark, D. F. Allen, D. . L. Best, S. D. Bonner, J. Jundt, M. . G. Luling and M. O. Ross, "Electromagnetic Propagation Logging While Drilling: Theory and Experiment," in *SPE Formation Evaluation*, New Orleans, Louisiana, September 1990.
- [35] M. Abramowitz and A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover: New York, 1970.
- [36] M. R. Spiegel, Mathematical Handbook of Formulas and Tables, New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, Sydney: McGraw-Hill Book Company, 1968 .
- [37] C. A. Balanis, Antenna Theory- Third Edition, New Jersey: John Wiley & Sons Inc., 2005.
- [38] Y. Kobayashi and T. Senju, "Resonant Modes in Shielded Uniaxial-Anisotropic Dielectric Rod Resonators," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, pp. VOL. 41, NO. 12 - pg. 2198-2205, dec. 1993.
- [39] C. A. Balanis, Advanced Engineering Electromagnetics, John Wiley & Sons, 1989.

## Anexo A

### Representação matemática de bobinas inclinadas (TCA: tilted coil antennas)

Este anexo explicita as características das antenas inclinadas em relação ao seu eixo de simetria, como ilustrado na Figura A.1. Devido a sua inclinação, a antena radia além de modos TE, os modos TM, que para o estudo de meios anisotrópicos se fazem necessários.

A Formulação ilustrada abaixo visa representar a densidade de corrente que flui ao longo da bobina.

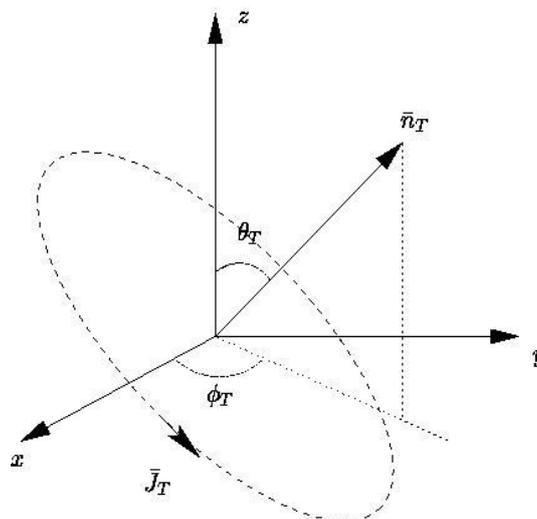


Figura A.1– A densidade de corrente ao longo da TCA e suas relações trigonométricas com seus eixos de simetria.

O vetor normal em relação à antena inclinada pode ser apresentado como:

$$\vec{n}_T = \text{sen}\theta_T \cos\phi_T \hat{x} + \text{sen}\theta_T \text{sen}\phi_T \hat{y} + \cos\theta_T \hat{z} \quad (\text{A.1})$$

Assim como as coordenadas na bobina pode ser dadas por:

$$\vec{r}_T = \rho_T \hat{\rho} + \zeta_T(\phi) \quad (\text{A.2})$$

onde,

$$\zeta_T(\phi) = \hat{z} \cdot \vec{r}_T = z_T + \rho_T \tan\theta_T \cos(\phi - \phi_T) \quad (\text{A.3})$$

Para o vetor infinitesimal  $\vec{l}_T$  ao longo do fio da bobina, tem-se:

$$d\vec{l}_T = \frac{d\vec{r}_T}{d\phi} d\phi = (\hat{\phi} + \xi_T(\phi) \hat{z}) \rho_T d\phi \quad (\text{A.4})$$

onde,

$$\xi_T(\phi) = \tan\theta_T \text{sen}(\phi - \phi_T) \quad (\text{A.5})$$

O vetor unitário na direção da derivada de  $\vec{l}_T$ , dado na direção na bobina em  $\vec{r}_T$ . Logo a densidade de corrente ao longo da bobina pode ser representada como:

$$\vec{J}_T = I_T \delta(\rho - \rho_T) \delta(z - \zeta_T(\phi)) \vec{u}_T \quad (\text{A.6})$$

sendo,

$$\vec{u}_T = \frac{1}{\rho_T} \frac{d\vec{l}_T}{d\phi} \quad (\text{A.7})$$

com  $\delta(\cdot)$  representando a função do Delta de Dirac.

## Anexo B

### Componente z da equação de onda

Este anexo apresenta o desenvolvimento algébrico para explicitar a componente z do campo elétrico da equação 3.7 do capítulo 3. Salienta-se que a componente z do campo magnético dado pela equação 3.8 segue os mesmos passos por dualidade. Relembrando a equação 3.7, a qual representa o caso para os modos TM:

$$\mu_h \nabla \times (\bar{\mu}^{-1} \nabla \times \vec{E}) - \nabla \left( \bar{\epsilon}_h^{-1} \nabla \cdot \bar{\epsilon}^{-1} \vec{E} \right) - \omega^2 \mu_h \bar{\epsilon} \vec{E} = i\omega \mu_h \vec{J} - \nabla \frac{\rho}{\epsilon_h} \quad (\text{B.1})$$

Assim serão apresentadas as manipulações algébricas que ao final resultará na separação das componentes escalares da equação vetorial dada na equação (B.1), tendo a componente z como objetivo final.

Para uma melhor clareza do processo a equação (B.1) será desmembrada e tratada membro a membro. Inicialmente será abordado o primeiro termo:

$$\mu_h^s \nabla \times (\bar{\mu}^{s-1} \nabla \times \vec{E}) \quad (\text{B.2})$$

lembrando da identidade vetorial:

$$\nabla \times \vec{E} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) \hat{i}_\rho + \left( \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \hat{i}_\phi + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{i}_z \quad (\text{B.3})$$

para simplificar, se usará a seguinte nomenclatura:

$$\nabla \times \vec{E} = A_\rho \hat{i}_\rho + A_\phi \hat{i}_\phi + A_z \hat{i}_z$$

onde

$$A_\rho = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) \quad (\text{B.4})$$

$$A_\phi = \left( \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right)$$

$$A_z = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right)$$

substituindo em (B.2) e manipulando os termos dentro do parênteses, tem-se:

$$\left( \bar{\mu}^{-1} \nabla \times E \right) = \bar{B} \quad (\text{B.5})$$

relembrando:

$$\bar{\mu}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\mu_h & & \\ & 1/\mu_h & \\ & & 1/\mu_v \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

assim,

$$\bar{\mu}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\mu_h & & \\ & 1/\mu_h & \\ & & 1/\mu_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\rho \\ B_\phi \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

ou seja,

$$\bar{B} = B_\rho \hat{i}_\rho + B_\phi \hat{i}_\phi + B_z \hat{i}_z = \mu_h^{-1} A_\rho \hat{i}_\rho + \mu_h^{-1} A_\phi \hat{i}_\phi + \mu_v^{-1} A_z \hat{i}_z \quad (\text{B.8})$$

Reescrevendo a equação (B.2) e utilizando as definições mostradas nas equações

(B.3) a (B.8) chega-se:

$$\mu_h^s \nabla \times \bar{B} = \mu_h^s \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) \hat{i}_\rho + \mu_h^s \left( \frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right) \hat{i}_\phi + \mu_h^s \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{i}_z \quad (\text{B.9})$$

manipulando a componente de  $\hat{i}_\rho$ , tem-se:

$$\mu_h^s \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) \hat{i}_\rho \quad (\text{B.10})$$

lembrando que os termos de **B** saem da equação (B.8), logo

$$\begin{aligned} & \mu_h \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_v^{-1} A_z) - \frac{\partial}{\partial z} (\mu_h^{-1} A_\phi) \right) \hat{i}_\rho \\ & \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_v^{-1} A_z) = \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_v^{-1}) A_z + \mu_v^{-1} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_z) \\ & \therefore \\ & A_z = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) \quad (\text{B.11}) \\ & \therefore \\ & A_z = \left[ \frac{\mu_h}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_v^{-1}) + \mu_h \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_v^{-1}) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\mu_h}{\mu_v} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial \rho} \right] (E_\phi) \\ & \quad - \left[ \frac{\mu_h}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_v^{-1}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] (E_\rho) \end{aligned}$$

como para a segunda parte:

$$\begin{aligned} \therefore \mu_h \frac{\partial B_\phi}{\partial z} &= \mu_h \frac{\partial}{\partial z} (\mu_h^{-1} A_\phi) = \mu_h \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\mu_h^{-1}) A_\phi + \mu_h^{-1} \frac{\partial}{\partial z} (A_\phi) \right] \\ &= \mu_h \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\mu_h^{-1}) \left( \frac{\partial}{\partial z} (E_\rho) - \frac{\partial}{\partial \rho} (E_z) \right) + \mu_h^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} (E_\rho) - \frac{\partial}{\partial \rho} (E_z) \right) \right] \quad (\text{B.12}) \\ &= \left[ \mu_h \frac{\partial}{\partial z} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] (E_\rho) - \left[ \mu_h \frac{\partial}{\partial z} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \right] (E_z) \end{aligned}$$

assim, a equação (B.10) pode ser reescrita:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ \mu_h \frac{\partial}{\partial z} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\mu_h}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_v^{-1}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] (E_\rho) + \\ & + \left[ \frac{\mu_h}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_v^{-1}) + \mu_h \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_v^{-1}) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\mu_h}{\mu_v} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial \rho} \right] (E_\phi) + \\ & + \left[ \mu_h \frac{\partial}{\partial z} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \right] (E_z) \end{aligned} \right\} \hat{i}_\rho \quad (\text{B.13})$$

Após ser determinada a componente  $\rho$  da equação (B.9), determinar-se-á,

agora, a parcela correspondente à componente  $\phi$  da equação (B.9), relembrando-a:

$$\mu_h \left( \frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right) \hat{i}_\phi \quad (\text{B.14})$$

onde,

$$\begin{aligned} B_\rho &= \mu_h^{-1} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) \\ B_z &= \mu_v^{-1} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

portanto,

$$= \mu_h \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu_h^{-1} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \mu_v^{-1} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) \right] \right\} \quad (\text{B.16})$$

para facilitar o entendimento do processo das derivadas:

$$\begin{aligned} &= \mu_h \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu_h^{-1} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \mu_v^{-1} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) \right] \right\} \\ &= \mu_h \{ a - b \} \\ a &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu_h^{-1} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) \right]; \\ b &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \mu_v^{-1} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

assim manipulando os termos “a” e “b” separadamente:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu_h^{-1} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu_h^{-1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right] \\ &\therefore \\ a &= \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{\mu_h \rho} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \phi} \right] (E_z) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} (E_\phi) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

e agora para b:

$$\begin{aligned}
b &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \mu_v^{-1} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \mu_v^{-1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\phi) \right] - \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \mu_v^{-1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right] \\
&\therefore \tag{B.19} \\
&\left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\mu_v^{-1}) \frac{1}{\rho} - \mu_v^{-1} \frac{1}{\rho^2} + \mu_v^{-1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial \rho} (\mu_v^{-1}) \frac{\partial}{\partial \rho} - \mu_v^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right] (E_\phi) + \\
&+ \left[ \mu_v^{-1} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial \rho} (\mu_v^{-1}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} - \mu_v^{-1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \phi} \right] (E_\rho)
\end{aligned}$$

portanto, o resultado da equação (B.17) da componente  $\phi$  fica:

$$\left. \begin{aligned}
&\left[ \frac{\mu_h}{\mu_v} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} - \mu_h^s \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\mu_v^{-1}) \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\mu_h}{\mu_v} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \phi} \right] (E_\rho) + \\
&\left[ \mu_h \frac{\partial}{\partial \rho} (\mu_v^{-1}) \frac{1}{\rho} - \frac{\mu_h}{\mu_v} \frac{1}{\rho^2} + \frac{\mu_h}{\mu_v} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \mu_h \frac{\partial}{\partial \rho} (\mu_v^{-1}) \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\mu_h}{\mu_v} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \mu_h \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] (E_\phi) + \\
&+ \left[ \mu_h \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \phi} \right] (E_z)
\end{aligned} \right\} \hat{i}_\phi \tag{B.20}$$

Determinado a componente  $\rho$  e  $\phi$  da equação (B.9), chaga-se a componente  $z$ :

relembrando do termo correspondente da componente:

$$\mu_h \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{i}_z \tag{B.21}$$

onde,

$$\begin{aligned}
B_\rho &= \mu_h^{-1} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) \\
B_\phi &= \mu_h^{-1} \left( \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right)
\end{aligned} \tag{B.22}$$

assim,

$$\begin{aligned}
& \mu_h^s \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{i}_z = \\
& = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial z} + \mu_h^s \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \mu_h^{-1} \frac{\partial E_\rho}{\partial z} \right) \right] + \left[ \mu_h^s \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \mu_h^{-1} \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) \right] - \\
& - \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \mu_h^s \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \mu_h^{-1} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + \mu_h^s \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \mu_h^{-1} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right) \right] \\
& = [a_\rho + b_\phi - c_z]
\end{aligned} \tag{B.23}$$

assim manipulando separadamente  $a_\rho$ ,  $b_\phi$  e  $c_z$  tem-se:

$$\begin{aligned}
a_\rho &= \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial z} + \mu_h^s \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \mu_h^{-1} \frac{\partial E_\rho}{\partial z} \right) \right] \\
&\therefore
\end{aligned} \tag{B.24}$$

$$a_\rho = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + \mu_h^s \frac{\partial}{\partial \rho} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \right] (E_\rho)$$

$$b_\phi = \left[ \mu_h^s \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \mu_h^{-1} \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) \right]$$

$\therefore$

$$b_\phi = \left[ \mu_h^s \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial z} \right] (E_\phi)$$

(B.25)

$$c_z = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \mu_h^s \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \mu_h^{-1} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + \mu_h^s \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \mu_h^{-1} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right) \right]$$

$\therefore$

$$c_z = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \mu_h^s \frac{\partial}{\partial \rho} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \mu_h^s \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] (E_z)$$

(B.26)

logo, a equação (B.23) pode ser reescrita:

$$\left. \begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + \mu_h^s \frac{\partial}{\partial \rho} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \right] (E_\rho) + \\
& + \left[ \mu_h^s \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial z} \right] (E_\phi) - \\
& - \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \mu_h^s \frac{\partial}{\partial \rho} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \mu_h^s \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] (E_z)
\end{aligned} \right\} \hat{i}_z \tag{B.27}$$

Determinado o primeiro termo da equação (B.1), agora, determinar-se-á o segundo termo da mesma equação:

$$\nabla \left( \bar{\bar{\epsilon}}_h^{-1} \nabla \cdot \bar{\bar{\epsilon}}^{-1} \bar{E} \right) \quad (\text{B.28})$$

reescrevendo-a de forma matricial tem-se:

$$\bar{\bar{\epsilon}} \bar{E} = \begin{pmatrix} \epsilon_h & & \\ & \epsilon_h & \\ & & \epsilon_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\rho \\ E_\phi \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_h E_\rho \\ \epsilon_h E_\phi \\ \epsilon_v E_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.29})$$

ou seja,

$$\bar{\bar{\epsilon}} \bar{E} = \bar{A} = \epsilon_h E_\rho \hat{i}_\rho + \epsilon_h E_\phi \hat{i}_\phi + \epsilon_v E_z \hat{i}_z \quad (\text{B.30})$$

da identidade vetorial:

$$\nabla \cdot \bar{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z) \quad (\text{B.31})$$

Assim do termo divergente da equação (B.28), tem-se:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \bar{\bar{\epsilon}}^{-1} \bar{E}) &= \frac{1}{\rho} \epsilon_h (E_\rho) + \frac{\partial}{\partial \rho} (\epsilon_h) (E_\rho) + \epsilon_h \frac{\partial}{\partial \rho} (E_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\epsilon_h) (E_\phi) \\ &+ \frac{1}{\rho} \epsilon_h \frac{\partial}{\partial \phi} (E_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_v) (E_z) + \epsilon_v \frac{\partial}{\partial z} (E_z) \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Para determinar o gradiente da equação (B.28) se utilizará da seguinte representação:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\epsilon}}_h^{-1} (\epsilon_h^{-1} \nabla \cdot \bar{\bar{\epsilon}}^{s-1} \bar{E}) &= W \\ \therefore \\ W &= \frac{1}{\rho} (E_\rho) + \epsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} (\epsilon_h^s) (E_\rho) + \frac{\partial}{\partial \rho} (E_\rho) + \epsilon_h^{-1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\epsilon_h^s) (E_\phi) \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (E_\phi) + \epsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_v^s) (E_z) + \frac{\epsilon_v^s}{\epsilon_h} \frac{\partial}{\partial z} (E_z) \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

utilizando a identidade vetorial:

$$\nabla W = \frac{\partial W}{\partial \rho} \hat{i}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \phi} \hat{i}_\phi + \frac{\partial W}{\partial z} \hat{i}_z \quad (\text{B.34})$$

Dessa forma, como o objetivo final dessas manipulações algébrica é a componente z do campo elétrico será determinada somente a parcela correspondente a componente z da equação (B.34):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right) \hat{i}_z &= \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\rho} (E_\rho) + \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} (\varepsilon_h) (E_\rho) + \frac{\partial}{\partial \rho} (E_\rho) + \varepsilon_h^{-1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\varepsilon_h) (E_\phi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (E_\phi) + \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_v) (E_z) + \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h} \frac{\partial}{\partial z} (E_z) \right] \\ &\therefore \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\rho} (E_\rho) + \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} (\varepsilon_h) (E_\rho) + \frac{\partial}{\partial \rho} (E_\rho) + \varepsilon_h^{-1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\varepsilon_h) (E_\phi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (E_\phi) + \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_v) (E_z) + \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h} \frac{\partial}{\partial z} (E_z) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial z} [f_\rho + g_\phi + h_z] \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

resolvendo separadamente  $f_\rho$ ,  $g_\phi$  e  $h_z$  tem-se:

$$f_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (E_\rho) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} (\varepsilon_h) (E_\rho) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (E_\rho) \right] \quad (\text{B.36})$$

$$\therefore f_\rho = \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial \rho} (\varepsilon_h) + \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} (\varepsilon_h) + \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} (\varepsilon_h) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \right] (E_\rho)$$

$$g_\phi = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \varepsilon_h^{-1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\varepsilon_h) (E_\phi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (E_\phi) \right] \quad (\text{B.37})$$

$$\therefore g_\phi = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial \phi} (\varepsilon_h^s) + \frac{1}{\rho} \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \phi} (\varepsilon_h) + \frac{1}{\rho} \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial \phi} (\varepsilon_h) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \phi} \right] (E_\phi)$$

$$h_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_v^s) (E_z) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\varepsilon_v^s}{\varepsilon_h} \frac{\partial}{\partial z} (E_z) \right] \quad (\text{B.38})$$

$$\therefore h_z = \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_v^s) + \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varepsilon_v^s) + 2\varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_v^s) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\varepsilon_v^s}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_h^s) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\varepsilon_v^s}{\varepsilon_h} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] (E_z)$$

portanto, a equação (B.35) resulta em:

$$= \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial \rho} (\varepsilon_h) + \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} (\varepsilon_h) + \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} (\varepsilon_h) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \right] (E_\rho) + \\ & \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial \phi} (\varepsilon_h) + \frac{1}{\rho} \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \phi} (\varepsilon_h) + \frac{1}{\rho} \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial \phi} (\varepsilon_h) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \phi} \right] (E_\phi) + \\ & \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_v) + \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varepsilon_v) + 2\varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_v) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_h) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] (E_z) \end{aligned} \right\} \hat{i}_z \quad (\text{B.39})$$

Para a determinação do terceiro termo da equação (B.1):

$$\varpi^2 \mu_h \bar{\varepsilon} \bar{E} \quad (\text{B.40})$$

que em forma matricial tem-se:

$$\varpi^2 \mu_h \begin{pmatrix} \varepsilon_h & & \\ & \varepsilon_h & \\ & & \varepsilon_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\rho \\ E_\phi \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi^2 \mu_h \varepsilon_h E_\rho \\ \varpi^2 \mu_h \varepsilon_h E_\phi \\ \varpi^2 \mu_h \varepsilon_v E_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.41})$$

ou seja,

$$\bar{E} = \varpi^2 \mu_h \left[ \varepsilon_h E_\rho \hat{i}_\rho + \varepsilon_h E_\phi \hat{i}_\phi + \varepsilon_v E_z \hat{i}_z \right] \quad (\text{B.42})$$

Portanto, para regiões sem fontes a equação vetorial de onda dada na equação (B.1) tem-se:

$$\mu_h^s \nabla \times (\bar{\mu}^{s-1} \nabla \times E) - \nabla (\bar{\varepsilon}_h^{s-1} \nabla \cdot \bar{\varepsilon}^{s-1} E) - \varpi^2 \mu_h^s \bar{\varepsilon}^s E = 0 \quad (\text{B.43})$$

Assim a componente z pode ser representada pela soma das equações determinadas nas equações (B.13), (B.39) e (B.42), agrupando os termos dependentes de  $\rho, \phi$  e  $z$ :

$$\left. \begin{aligned}
& \left[ \begin{aligned}
& \mu_h^s \frac{\partial}{\partial \rho} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial \rho} (\varepsilon_h) \\
& - \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} (\varepsilon_h) - \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} (\varepsilon_h) \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned} \right] (E_\rho) + \\
& \left[ \begin{aligned}
& \mu_h^s \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial \phi} (\varepsilon_h) \\
& - \frac{1}{\rho} \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \phi} (\varepsilon_h) - \frac{1}{\rho} \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial \phi} (\varepsilon_h) \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned} \right] (E_\phi) + \\
& \left[ \begin{aligned}
& -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \mu_h \frac{\partial}{\partial \rho} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \mu_h \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial \phi} \\
& -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_v) - \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varepsilon_v) - 2\varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_v) \frac{\partial}{\partial z} \\
& + \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_h) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \varpi^2 \mu_h \varepsilon_v
\end{aligned} \right] (E_z)
\end{aligned} \right\} \hat{i}_z \quad (\text{B.44})$$

Observando que as características do meio  $\varepsilon$  e  $\mu$  dependem somente de  $z$ , conclui-se que as derivadas parciais destas características na equação (B.44) são iguais a zero, assim pode-se reescrever a equação (B.44):

$$\left. \left[ \begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_v) - \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varepsilon_v) - 2\varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_v) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_h) \frac{\partial}{\partial z} \\
& -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \varpi^2 \mu_h \varepsilon_v
\end{aligned} \right] (E_z) \right\} \hat{i}_z \quad (\text{B.45})$$

Portanto, observa-se que na direção  $z$  somente há componente  $z$  do campo elétrico.

Aplicando o resultado encontrado na equação (B.45) na equação (3.9) tem-se:

$$\begin{aligned}
E_z(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{iv\phi} f_v(\rho, z) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{iv\phi} \left\{ \begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_v) - \varepsilon_h^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varepsilon_v) - 2\varepsilon_h^{-1} \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_v) \frac{\partial}{\partial z} \\ &+ \varepsilon_v^s \frac{1}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_h) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{v^2}{\rho^2} \right] \\ &-\varpi^2 \mu_h \varepsilon_v \end{aligned} \right\} f_v(\rho, z) \quad (\text{B.46})
\end{aligned}$$

manipulando algebricamente o termo em destaque:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\varepsilon_h^s} \right) &= \left[ \varepsilon_h^s - \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_h^s) \right] \frac{1}{\varepsilon_h^2} = \frac{1}{\varepsilon_h} - \frac{1}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_h^s) \\
\therefore \\
\frac{1}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_h) &= \frac{1}{\varepsilon_h} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\varepsilon_h} \right) \quad (\text{B.47})
\end{aligned}$$

resulta em:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{iv\phi} \left\{ \begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_v) - \varepsilon_h^{-1} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varepsilon_v) + 2 \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_v) \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ &+ \varepsilon_v \left[ -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\varepsilon_h^s} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon_h} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon_h} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \\ &-\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{v^2}{\rho^2} \right] - \varpi^2 \mu_h \varepsilon_v \end{aligned} \right\} f_v(\rho, z) \quad (\text{B.48})
\end{aligned}$$

considerando  $\varepsilon_h$  e  $\varepsilon_v$  constante na direção  $z$  para um espaço determinado, e

manipulando algebricamente os termos em destaque na equação (B.48), onde:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \quad (\text{B.49})$$

obtem-se:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{iv\phi} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_h^{-1}) \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_v) - \frac{1}{\varepsilon_h} \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varepsilon_v) - 2 \frac{1}{\varepsilon_h} \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_v) \frac{\partial}{\partial z} \\ & + \frac{1}{\varepsilon_h} \varepsilon_v \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon_h} \varepsilon_v \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \varepsilon_v \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\varepsilon_h^s} \right) \frac{\partial}{\partial z} \\ & - \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] - \frac{v^2}{\rho^2} \right] - \varpi^2 \mu_h \varepsilon_v \end{aligned} \right\} f_v(\rho, z) \quad (\text{B.50})$$

onde o termo em destaque na equação (B.50), pode-se ser reescrito:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\varepsilon_h^s} \right) = \left[ \varepsilon_h^s - \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_h^s) \right] \frac{1}{\varepsilon_h^2} = \frac{1}{\varepsilon_h} - \frac{1}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_h^s) \quad (\text{B.51})$$

logo:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{iv\phi} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{\varepsilon_h} \left[ \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_v) - \varepsilon_v \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varepsilon_v) + \varepsilon_v \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \\ & - 2 \frac{1}{\varepsilon_h} \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_v) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_h) \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_v) \\ & - \varepsilon_v \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\varepsilon_h} \right) \frac{\partial}{\partial z} - \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] - \frac{v^2}{\rho^2} \right] - \varpi^2 \mu_h \varepsilon_v \end{aligned} \right\} f_v(\rho, z) \quad (\text{B.52})$$

pode-se reescrever o termo em destaque da equação (B.52) como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\varepsilon_h} \right) &= \left[ \varepsilon_h - \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_h) \right] \frac{1}{\varepsilon_h^2} = \frac{1}{\varepsilon_h} - \frac{1}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_h) \\ \therefore \\ \frac{1}{\varepsilon_h^2} \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_h) &= \frac{1}{\varepsilon_h} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\varepsilon_h} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

reorganizando a equação (B.52):

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{iv\phi} \left\{ \varepsilon_v \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\varepsilon_h} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] - \frac{v^2}{\rho^2} \right] + \varpi^2 \mu_h \varepsilon_v \right\} f_v(\rho, z) \quad (\text{B.54})$$

Aplicando a transformada de Fourier na equação (3.10) na equação (B.54):

$$= -\frac{1}{2\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{iv\phi} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \varepsilon_v \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\varepsilon_h} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \varpi^2 \mu_h \varepsilon_v \right] \int_0^{\infty} \tilde{f}(k_\rho, z) J_v(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho + \\ & \int_0^{\infty} \tilde{f}(k_\rho, z) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] - \frac{v^2}{\rho^2} \right] J_v(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.55})$$

Observando somente as derivadas em  $\rho$  obtém-se:

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{v^2}{\rho^2} \right] J_v(k_\rho \rho) \quad (\text{B.56})$$

Recorrendo a definição de função de Bessel, dada em [35]:

$$\rho^2 y'' + \rho y' + ((k\rho)^2 - n^2)y = 0 \quad (\text{B.57})$$

onde  $n$  representa a ordem, assim, dividindo a definição da equação (B.57). por  $\rho^2$  e reorganizando-a:

$$y'' + \frac{1}{\rho} y' - \frac{n^2}{\rho^2} y = -k^2 y \quad (\text{B.58})$$

Assim aplicando a mesma definição na equação (B.56):

$$\begin{aligned} &= \left[ J_v''(k_\rho \rho) + \frac{1}{\rho} J_v'(k_\rho \rho) - \frac{v^2}{\rho^2} J_v(k_\rho \rho) \right] \\ &= -k_\rho^2 J_v(k_\rho \rho) \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

Portanto com o resultado apresentado pelas equações (B.55), (B.56) e

(B.59) mostra-se como se determina as equações do capítulo 3, a equação (3.11) e

a equação (3.26).

## Anexo C

### Condições de radiação da fonte na direção radial

Neste apêndice é apresentado de forma mais explicativa as condições de radiação da fonte na direção radial.

Relembrando as equações eq. (3.35) e eq. (3.36):

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{v^2}{\rho^2} + k_{\rho q}^2 \right) b_{\varepsilon q}(\rho) = -i\omega\mu_h \varepsilon_v j_{T\varepsilon v q} \delta(\rho - \rho_T) \quad (C.1)$$

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{v^2}{\rho^2} + k_{\rho q}^2 \right) b_{\mu q}(\rho) = -j_{T\mu v q} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \delta(\rho - \rho_T)) \quad (C.2)$$

onde  $q=1\dots N$ .

Considerando que a solução formal de radiação pode ser representada por funções Bessel e Hankel de ordem  $v$ , na camada da fonte pode-se dizer que:

$$b_{\varepsilon q}(\rho) = \begin{cases} J_v(k_{\rho\varepsilon q}\rho) c_{T\varepsilon v q}^- & \rho \leq \rho_T \\ H_v(k_{\rho\varepsilon q}\rho) c_{T\varepsilon v q}^+ & \rho \geq \rho_T \end{cases} \quad (C.3)$$

$$b_{\mu q}(\rho) = \begin{cases} J_v(k_{\rho\mu q}\rho) c_{T\mu v q}^- & \rho \leq \rho_T \\ H_v(k_{\rho\mu q}\rho) c_{T\mu v q}^+ & \rho \geq \rho_T \end{cases} \quad (C.4)$$

Assim, integrando as equações: equação (C.1) e a equação (C.2) nos limites dados por  $\rho_T^-$  e  $\rho_T^+$ , de forma simplificada resulta em:

$$\frac{d}{d\rho} b_{\varepsilon q}(\rho_T^+) - \frac{d}{d\rho} b_{\varepsilon q}(\rho_T^-) = i\omega\mu_h j_{T\varepsilon v q} \quad (C.5)$$

$$b_{\varepsilon q}(\rho_T^+) - b_{\varepsilon q}(\rho_T^-) = 0 \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{d}{d\rho} b_{\mu q}(\rho_T^+) - \frac{d}{d\rho} b_{\mu q}(\rho_T^-) = 0 \quad (\text{C.7})$$

$$b_{\mu q}(\rho_T^+) - b_{\mu q}(\rho_T^-) = -j_{T\mu\nu q} \quad (\text{C.8})$$

Aplicando a equação (C.3) na equação (C.6), onde há uma manipulação algébrica com uso da multiplicação de uma constante auxiliar  $\beta_\varepsilon$  pode-se escrever:

$$\frac{c^+}{c^-} = \frac{J_\nu(k_{\rho\varepsilon q}\rho)}{H_\nu(k_{\rho\varepsilon q}\rho)} \left( \frac{\beta_\varepsilon}{\beta_\varepsilon} \right) \quad (\text{C.9})$$

Assim como substituindo a equação (C.3) na equação (C.5), se obtém:

$$\frac{d}{d\rho} \left( H_\nu(k_{\rho\varepsilon q}\rho) c_{T\nu\varepsilon q}^+ \right) - \frac{d}{d\rho} \left( \rho_T^- J_\nu(k_{\rho\varepsilon q}\rho) c_{T\nu\varepsilon q}^- \right) = i\omega\mu_h j_{T\varepsilon\nu q} \quad (\text{C.10})$$

Neste ponto é necessário utilizar a propriedade algébrica desenvolvida em [35], a qual descreve:

$$\begin{aligned} \Psi'_\nu(z) &= \frac{\nu}{z} \Psi_\nu(z) - \Psi_{\nu+1}(z) \\ \therefore & \\ \Psi'_\nu(z) &= \frac{1}{z} \left[ \nu \Psi_{\nu+1}(z) - z \Psi_{\nu+1}(z) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Outra identidade utilizada é apresentada em [36], onde descreve:

$$J_{n+1} Y_n - J_n Y_{n+1} = \frac{2}{\pi x} \quad (\text{C.12})$$

para aplicação dessa identidade no problema em questão deve-se observar a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} H &= J + iY \\ \therefore & \\ Y_n &= i^{-1} (H_n - J_n) \\ Y_{n+1} &= i^{-1} (H_{n+1} - J_{n+1}) \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

logo, manipulando algebricamente a identidade dada por (C.12) usando (C.13):

$$\begin{aligned}
 J_{n+1} \left[ i^{-1} (H_n - J_n) \right] - J_n \left[ i^{-1} (H_{n+1} - J_{n+1}) \right] &= \frac{2}{\pi x} \\
 (J_{n+1} H_n) i^{-1} - (J_n H_{n+1}) i^{-1} &= \frac{2}{\pi x} \\
 \therefore \\
 J_{n+1} H_n - J_n H_{n+1} &= H'_n J_n - J'_n H_n = \frac{2i}{\pi x}
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

Portanto, substituindo a equação (C.9) e aplicando as propriedades dadas pelas equações (C.11)- (C.14), na equação (C.10), consegue-se isolar a constante auxiliar  $\beta_\varepsilon$ :

$$\beta_\varepsilon = -\frac{\pi}{2} \omega \mu_h \rho_T \dot{J}_{T\varepsilon\nu q} \tag{C.15}$$

Com metodologia similar, substituindo a equação (C.4) na equação (C.7), onde há uma manipulação algébrica com uso da multiplicação de uma constante auxiliar  $\beta_\mu$  pode-se escrever:

$$\frac{c_T^+}{c_T^-} = \frac{\frac{d}{d\rho} \left[ H_\nu(k_{\rho\varepsilon q} \rho) \right]}{\frac{d}{d\rho} \left[ J_\nu(k_{\rho\varepsilon q} \rho) \right]} \left( \frac{\beta_\mu}{\beta_\mu} \right) \tag{C.16}$$

assim como substituindo a equação (C.3) na equação (C.8), se obtém:

$$H_\nu(k_{\rho\mu q} \rho) c_{T\nu\mu q}^+ - J_\nu(k_{\rho\mu q} \rho) c_{T\nu\mu q}^- = -j_{T\mu\nu q} \tag{C.17}$$

se utilizando novamente das identidades (C.12) a (C.14) isola-se a constante  $\beta_\mu$ .

$$\beta_\mu = \frac{i\pi}{2} k_\rho \rho_T \dot{J}_{T\mu\nu q} \tag{C.18}$$

Portanto, depois de encontradas as expressões para as constantes  $\beta_\varepsilon$  e  $\beta_\mu$  das pelas equações (C.15) e (C.18) pode-se descrever as soluções de radiação substituindo-as nas equações (C.9) e (C.16), o que resulta nas seguintes expressões:

$$c_{T\varepsilon\nu q}^- = -\frac{\pi}{2} j_{T\varepsilon\nu q} \omega \mu_h \rho_T H_\nu(k_{\varepsilon\rho q} \rho_T) \quad (\text{C.19})$$

$$c_{T\varepsilon\nu q}^+ = -\frac{\pi}{2} j_{T\varepsilon\nu q} \omega \mu_h \rho_T J_\nu(k_{\varepsilon\rho q} \rho_T) \quad (\text{C.20})$$

$$c_{T\mu\nu q}^- = -\frac{i\pi}{2} j_{T\mu\nu q} k_{\rho\mu q} \rho_T H'_\nu(k_{\mu\rho q} \rho_T) \quad (\text{C.21})$$

$$c_{T\mu\nu q}^+ = -\frac{i\pi}{2} j_{T\mu\nu q} k_{\rho\mu q} \rho_T J'_\nu(k_{\mu\rho q} \rho_T) \quad (\text{C.22})$$

## Anexo D

### Algébrica para achar a componente transversal do campo

Considerando um meio uniaxial anisotrópico sem fontes, assumindo a dependência harmônica  $e^{-i\omega t}$  e usando equações rotacionais de Maxwell, tem-se:

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \quad (\text{D.1})$$

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega\bar{\bar{\epsilon}}\vec{E} \quad (\text{D.2})$$

onde  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são os campos elétrico e magnético,  $\mu$  a permeabilidade e  $\bar{\bar{\epsilon}}$  um tensor de permissividade dado em coordenadas cilíndricas, como segue:

$$\bar{\bar{\epsilon}}(z) = \begin{pmatrix} \epsilon_h & & \\ & \epsilon_h & \\ & & \epsilon_v \end{pmatrix}; \epsilon_h = \epsilon_{eh} - \frac{\sigma_h}{i\omega}; \epsilon_v = \epsilon_{ev} - \frac{\sigma_v}{i\omega} \quad (\text{D.3})$$

Para representar a decomposição dos campos em axial e transversal tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_s + \vec{E}_z \\ \nabla &= \nabla_s + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Assim como para o campo magnético:

$$\vec{H} = \vec{H}_s + \vec{H}_z \quad (\text{D.5})$$

Aplicando (D.4) em (D.1), tem-se

$$\begin{aligned} \left( \nabla_s + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\vec{E}_s + \vec{E}_z) &= i\omega (\mu_h \vec{H}_s + \mu_v \vec{H}_z) \\ \nabla_s \times \vec{E}_s + \nabla_s \times \vec{E}_z + \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_s + \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_z &= i\omega\mu_h \vec{H}_s + i\omega\mu_v \vec{H}_z \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Recapitulando como se chega a equação (D.6) através da aplicação do rotacional em coordenadas cilíndricas, (D.7), na equação (D.1):

$$\nabla \times \vec{E} = \hat{\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left( \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + \hat{z} \left( \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) \right) \quad (D.7)$$

assim:

$$\begin{aligned} & \left[ \hat{\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left( \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \right] + \hat{z} \left( \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) \right) \\ & \left[ \hat{\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left( \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \right] + \nabla_s \times \vec{E}_s \\ & \nabla_s \times \vec{E}_s = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & 0 \\ E_r & \rho E_\phi & 0 \end{vmatrix} = \hat{z} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\phi) - \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) \\ & \nabla_s \times \vec{E}_z = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = \hat{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \hat{\phi} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \\ & \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_s = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial E_\rho}{\partial z} & \frac{\partial E_\phi}{\partial z} & 0 \end{vmatrix} = \left[ \left( \hat{\phi} \left( \frac{\partial E_\rho}{\partial z} \right) - \hat{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) \right] \\ & \hat{z} \times \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (D.8)$$

e repetindo com (D.5) em (D.2):

$$\begin{aligned} & \left( \nabla_s + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\vec{H}_s + \vec{H}_z) = -i\omega (\varepsilon_h \vec{E}_s + \varepsilon_v \vec{E}_z) \\ & \nabla_s \times \vec{H}_s + \nabla_s \times \vec{H}_z + \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_s + \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_z = -i\omega \varepsilon_h \vec{E}_s - i\omega \varepsilon_v \vec{E}_z \end{aligned} \quad (D.9)$$

manipulando termo a termo das equações (D.6) e (D.9), chega-se a:

$$i\omega\mu_h\vec{H}_s = \nabla_s \times \vec{E}_z + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \times \vec{E}_s \quad (\text{D.10})$$

$$-i\omega\varepsilon_h\vec{E}_s = \nabla_s \times \vec{H}_z + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \times \vec{H}_s \quad (\text{D.11})$$

$$i\omega\mu_v\vec{H}_z = \nabla_s \times \vec{E}_s \quad (\text{D.12})$$

$$-i\omega\varepsilon_v\vec{E}_z = \nabla_s \times \vec{H}_s \quad (\text{D.13})$$

Seguindo, multiplicando a equação (D.10) por  $\hat{z} \times$  em ambos lados, tem-se:

$$\hat{z} \times (i\omega\mu_h\vec{H}_s) = \hat{z} \times (\nabla_s \times \vec{E}_z) + \hat{z} \times \left( \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \times \vec{E}_s \right) \quad (\text{D.14})$$

e usando as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \hat{z} \times (\nabla_s \times \vec{E}_z) &= \nabla_s \vec{E}_z \\ \hat{z} \times (\hat{z} \times \vec{E}_s) &= -\vec{E}_s \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

chega-se:

$$i\omega\mu_h (\hat{z} \times \vec{H}_s) = \nabla_s \vec{E}_z - \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_s \quad (\text{D.16})$$

usando as mesmas identidades na equação (D.11), obtém-se:

$$-i\omega\varepsilon_h (\hat{z} \times \vec{E}_s) = \nabla_s \vec{H}_z - \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_s \quad (\text{D.17})$$

Substituindo a equação (D.16) em (D.17): primeiro isolando  $\vec{E}_s$  da equação (D.16) multiplicando-a por  $\hat{z} \times$  e logo em seguida utilizando as identidades de (D.15), tem-se:

$$\begin{aligned} i\omega\mu_h \hat{z} \times (\hat{z} \times \vec{H}_s) &= \hat{z} \times \nabla_s \vec{E}_z - \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_s \\ i\omega\mu_h (-\vec{H}_s) &= \hat{z} \times \nabla_s \vec{E}_z - \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_s \\ \vec{H}_s &= \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_s - \frac{1}{i\omega\mu_h} \hat{z} \times \nabla_s \vec{E}_z \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

aplicando o resultado da equação (D.18) em (D.17):

$$\begin{aligned}
-i\omega\varepsilon_h(\hat{z}\times\vec{E}_s) &= \nabla_s\vec{H}_z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{i\omega\mu_h}\hat{z}\times\frac{\partial}{\partial z}\vec{E}_s - \frac{1}{i\omega\mu_h}\hat{z}\times\nabla_s\vec{E}_z\right) \\
-i\omega\varepsilon_h\hat{z}\times(\hat{z}\times\vec{E}_s) &= \hat{z}\times\nabla_s\vec{H}_z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{i\omega\mu_h}\hat{z}\times\hat{z}\times\frac{\partial}{\partial z}\vec{E}_s - \frac{1}{i\omega\mu_h}\hat{z}\times\hat{z}\times\nabla_s\vec{E}_z\right) \\
i\omega\varepsilon_h\vec{E}_s &= \hat{z}\times\nabla_s\vec{H}_z - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{i\omega\mu_h}\frac{\partial}{\partial z}\vec{E}_s + \frac{1}{i\omega\mu_h}\nabla_s\vec{E}_z\right) \\
-\omega^2\varepsilon_h\vec{E}_s &= i\omega\hat{z}\times\nabla_s\vec{H}_z + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu_h}\frac{\partial}{\partial z}\vec{E}_s - \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu_h}\nabla_s\vec{E}_z \\
\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu_h}\frac{\partial}{\partial z}\vec{E}_s + \omega^2\varepsilon_h\vec{E}_s &= -i\omega\hat{z}\times\nabla_s\vec{H}_z + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu_h}\nabla_s\vec{E}_z \\
\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu_h}\frac{\partial}{\partial z} + \omega^2\varepsilon_h\right)\vec{E}_s &= -i\omega\hat{z}\times\nabla_s\vec{H}_z + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu_h}\nabla_s\vec{E}_z
\end{aligned} \tag{D.19}$$

Substituindo a equação (D.17) em (D.16): primeiro isolando  $\vec{E}_s$  da equação

(D.17) multiplicando-a por  $\hat{z}\times$  e logo em seguida utilizando as identidades de

(D.15):

$$\begin{aligned}
-i\omega\varepsilon_h\hat{z}\times(\hat{z}\times\vec{E}_s) &= \hat{z}\times\nabla_s\vec{H}_z - \hat{z}\times\frac{\partial}{\partial z}\vec{H}_s \\
\vec{E}_s &= \frac{1}{i\omega\varepsilon_h}\hat{z}\times\nabla_s\vec{H}_z - \frac{1}{i\omega\varepsilon_h}\hat{z}\times\frac{\partial}{\partial z}\vec{H}_s
\end{aligned} \tag{D.20}$$

aplicando o resultado da equação (D.20) em (D.16):

$$\begin{aligned}
i\omega\mu_h(\hat{z}\times\vec{H}_s) &= \nabla_s\vec{E}_z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{i\omega\varepsilon_h}\hat{z}\times\nabla_s\vec{H}_z - \frac{1}{i\omega\varepsilon_h}\hat{z}\times\frac{\partial}{\partial z}\vec{H}_s\right) \\
i\omega\mu_h\hat{z}\times(\hat{z}\times\vec{H}_s) &= \hat{z}\times\nabla_s\vec{E}_z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{i\omega\varepsilon_h}\hat{z}\times\hat{z}\times\nabla_s\vec{H}_z - \frac{1}{i\omega\varepsilon_h}\hat{z}\times\hat{z}\times\frac{\partial}{\partial z}\vec{H}_s\right) \\
-i\omega\mu_h\vec{H}_s &= \hat{z}\times\nabla_s\vec{E}_z - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{i\omega\varepsilon_h}\nabla_s\vec{H}_z + \frac{1}{i\omega\varepsilon_h}\frac{\partial}{\partial z}\vec{H}_s\right) \\
\omega^2\mu_h\vec{H}_s &= i\omega\hat{z}\times\nabla_s\vec{E}_z + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\varepsilon_h}\nabla_s\vec{H}_z - \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\varepsilon_h}\frac{\partial}{\partial z}\vec{H}_s \\
\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\varepsilon_h}\frac{\partial}{\partial z} + \omega^2\mu_h\right)\vec{H}_s &= i\omega\hat{z}\times\nabla_s\vec{E}_z + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\varepsilon_h}\nabla_s\vec{H}_z
\end{aligned} \tag{D.21}$$

lembrando que:

$$\nabla_s = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (\text{D.22})$$

aplicando (D.22) nos resultados finais de (D.19) e (D.21) tem-se:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_h} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \varepsilon_h \right) \vec{E}_s &= -i\omega \hat{z} \times \left( \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \vec{H}_z + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_h} \left( \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \vec{E}_z \\ \hat{z} \times \left( \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) &= \left( \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \rho} - \hat{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_h} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \varepsilon_h \right) \vec{E}_s &= -i\omega \left( \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \rho} - \hat{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \vec{H}_z + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_h} \left( \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \vec{E}_z \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

como se busca a componente transversal e lembrando da forma do campo  $E_z$ ,

assumindo a dependência de  $e^{iv\phi}$  tem-se:

$$\begin{aligned} E_z(\rho, \phi, z) &= R(\rho) F(\phi) Z(z) \\ F(\phi) &= e^{iv\phi} \\ \therefore & \\ \frac{\partial}{\partial \phi} [E_z(\rho, \phi, z)] &= R(\rho) Z(z) \frac{\partial}{\partial \phi} [F(\phi)] = \\ &= R(\rho) Z(z) [iv e^{iv\phi}] = R(\rho) Z(z) [iv F(\phi)] = iv E_z(\rho, \phi, z) \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

fica:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_h} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \varepsilon_h \right) E_\phi &= -i\omega \frac{\partial}{\partial \rho} H_z + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_h} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} E_z \\ \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_h} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \varepsilon_h \right) E_\phi &= -i\omega \frac{\partial}{\partial \rho} H_z + \frac{iv}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_h} E_z \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Repetindo para  $\vec{H}_s$  (D.21):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon_h} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \mu_h \right) \vec{H}_s &= i\omega \hat{z} \times \left( \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \vec{E}_z + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon_h} \left( \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \vec{H}_z \\ \hat{z} \times \left( \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) &= \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \rho} - \hat{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon_h} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \mu_h \right) \vec{H}_s &= i\omega \left( \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \rho} - \hat{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \vec{E}_z + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon_h} \left( \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \vec{H}_z \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

como se busca a componente transversal, e lembrando da forma do campo  $H_z$ , assumindo a dependência de  $e^{iv\phi}$  tem-se:

$$\begin{aligned}
 H_z(\rho, \phi, z) &= R(\rho)F(\phi)Z(z) \\
 F(\phi) &= e^{iv\phi} \\
 \therefore & \\
 \frac{\partial}{\partial \phi} [H_z(\rho, \phi, z)] &= R(\rho)Z(z) \frac{\partial}{\partial \phi} [F(\phi)] = \\
 &= R(\rho)Z(z) [ive^{iv\phi}] = R(\rho)Z(z) [ivF(\phi)] = ivH_z(\rho, \phi, z)
 \end{aligned} \tag{D.27}$$

fica:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\epsilon_h} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \mu_h \right) H_\phi &= i\omega \frac{\partial}{\partial \rho} E_z + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\epsilon_h} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z \\
 \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\epsilon_h} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \mu_h \right) H_\phi &= i\omega \frac{\partial}{\partial \rho} E_z + \frac{iv}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\epsilon_h} H_z
 \end{aligned} \tag{D.28}$$

Porém as equações encontradas em (D.25) e (D.28) apresentam em suas formulações os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  – os quais são descontínuos na interface em  $z$  – o que indica a necessidade de tratamento. Para isso sabe-se que as derivadas em  $z$  das densidades de fluxos desses campos são constantes na interface, logo pode-se aplicar o seguinte artifício matemático:

$$\begin{aligned}
 D_z &= \epsilon_v E_z \\
 B_z &= \mu_v H_z
 \end{aligned} \tag{D.29}$$

Portanto, reescrevendo as equações dado em (D.25) e (D.28), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_h} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \epsilon_h \right) E_\phi &= \frac{iv}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu_h \epsilon_v} D_z - \frac{i\omega}{\mu_v} \frac{\partial}{\partial \rho} B_z \\
 \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\epsilon_h} \frac{\partial}{\partial z} + \omega^2 \mu_h \right) H_\phi &= \frac{i\omega}{\epsilon_v} \frac{\partial}{\partial \rho} (D_z) + \frac{iv}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\epsilon_h \mu_v} B_z
 \end{aligned} \tag{D.30}$$

## Anexo E

### Integral de Radiação para uma bobina

Neste anexo é explicitada a formulação do campo radiado por uma antena loop em meios homogêneos via integral de radiação, encontrada facilmente nos livros de eletromagnetismo como em Balanis Antennas Theory, [37]. Tal formulação é adotada como solução de referência no cálculo das funções erro, dadas pelas equações (3.100) e (3.101). Por conseguinte, tais funções erro fornecem as análises de desempenho da inclusão ou não da camada PML aos problemas propostos no capítulo 3.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega\vec{A} = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') e^{ikR}}{R} dV' \quad (\text{E.1})$$

onde,  $\vec{r}'$  representa a posição da fonte assim como  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ .

Pode-se encontrar a tensão induzida na bobina receptora pela eq.

$$V = -\oint_{lr} \vec{E} d\vec{l}r = -i\omega \oint_{lr} \vec{A} d\vec{l}r \quad (\text{E.2})$$

Assim lembrando da equação (A.6), chega-se a equação da transimpedância na bobina receptora:

$$Z_{RT}^h = -i\omega \frac{\mu\rho_T\rho_R}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi' \int_{-\pi}^{\pi} \vec{u}_T \cdot \vec{u}_R \frac{e^{ikR}}{R} d\phi \quad (\text{E.3})$$

onde,

$$\vec{u}_T \cdot \vec{u}_R = \cos(\phi - \phi') + \tan(\theta_T) \tan(\theta_R) \sin(\phi - \phi_T) \sin(\phi' - \phi_R) \quad (\text{E.4})$$

$$R = \sqrt{\rho_T^2 + \rho_R^2 - 2\rho_T\rho_R \cos(\phi - \phi') + ((z_R + \zeta_R(\phi')) - (z_T + \zeta_T(\phi)))^2} \quad (\text{E.5})$$

## Anexo F

### Campos Modais para o caso equivalente

Este apêndice aborda a formulação teórica de um caso equivalente idealizado e referido na literatura, o qual foi utilizado para a validação do algoritmo desenvolvido nesta Tese.

Assumindo a dependência harmônica no tempo na forma  $e^{-i\omega t}$ , podem-se escrever as equações de Maxwell, como:

$$\nabla \times \bar{E} = i\omega\mu_0 \bar{H} \quad (\text{F.1})$$

$$\nabla \times \bar{H} = -i\omega\epsilon_0 \bar{\epsilon}_r \bar{E} \quad (\text{F.2})$$

$$\nabla \cdot (\bar{\epsilon}_r \bar{E}) = 0 \quad (\text{F.3})$$

$$\nabla \cdot \bar{H} = 0 \quad (\text{F.4})$$

onde,

$$\bar{\epsilon}_r = \begin{pmatrix} \epsilon_h & & \\ & \epsilon_h & \\ & & \epsilon_v \end{pmatrix}; \quad \epsilon_h = \epsilon_{eh} - \frac{\sigma_h}{i\omega\epsilon_0}; \quad \epsilon_v = \epsilon_{ev} - \frac{\sigma_v}{i\omega\epsilon_0} \quad (\text{F.5})$$

Pode-se reescrever a equação (F.4) como:

$$\nabla \cdot (\bar{\epsilon}_r \bar{E}) = \epsilon_h \nabla \cdot \bar{E} - \epsilon_h \left(1 - \frac{\epsilon_v}{\epsilon_h}\right) \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{F.6})$$

Logo,

$$\nabla \cdot \bar{E} = \left(1 - \frac{\epsilon_v}{\epsilon_h}\right) \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (\text{F.7})$$

Com o objetivo de analisar sistematicamente os autovalores modais, duas equações de onda são derivadas, as componentes  $E_z$  e  $H_z$ .

Aplicando o rotacional na equação (F.2) e utilizando a equação (F.3), chega-se a:

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) - K_0^2 \bar{\epsilon}_r \bar{E} = 0 \quad (\text{F.8})$$

onde se aplicando a identidade vetorial a  $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$  tem-se:

$$(\nabla \cdot \nabla) \bar{E} = \nabla (\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{E}) \quad (\text{F.9})$$

e equação (F.7), pode-se reescrever a equação (F.8) da seguinte forma:

$$(\nabla \cdot \nabla) \bar{E} - \left(1 - \frac{\epsilon_v}{\epsilon_h}\right) \nabla \left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) + k_0^2 \bar{\epsilon}_r \bar{E} = 0 \quad (\text{F.10})$$

Assim, a componente em termos da direção z da equação (F.10), resulta na seguinte equação da onda para  $E_z$ :

$$\nabla^2 E_z - \left(1 - \frac{\epsilon_v}{\epsilon_h}\right) \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right) + \epsilon_v k_0^2 E_z = 0 \quad (\text{F.11})$$

Onde o operador  $\nabla^2$  representa o Laplaciano.

De forma análoga, aplicando o rotacional na equação (F.3) e utilizando as equações (F.5) e (F.9), pode-se escrever:

$$(\nabla \cdot \nabla) \bar{H} - i\omega \epsilon_0 \nabla \times (\bar{\epsilon}_r \bar{E}) = 0 \quad (\text{F.12})$$

Utilizando a equação (F.2), pode-se reescrever a componente z do segundo termo do lado esquerdo da equação (F.12) como:

$$\left[\nabla \times (\bar{\epsilon}_r \bar{E})\right]_z = \epsilon_h \left[\nabla \times \bar{E}\right]_z = i\omega \mu_0 \epsilon_h H_z \quad (\text{F.13})$$

Dessa forma, a combinação das componentes z das equações (F.12) e (F.13) resulta na seguinte equação de onda em termos de  $H_z$ :

$$\nabla^2 H_z + \varepsilon_h k_0^2 H_z = 0 \quad (\text{F.14})$$

## F.1

### Solução da Equação da Onda para o Modo TM

Seja a equação de onda escalar:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \left( 1 - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \varepsilon_v k_0^2 \psi \quad (\text{F.15})$$

Que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \varepsilon_v k_0^2 \psi = 0 \quad (\text{F.16})$$

Ela será resolvida pelo método de separação de variáveis, em que são procuradas soluções da seguinte forma:

$$\psi = R(\rho) \Phi(\phi) Z(z) \quad (\text{F.17})$$

Substituindo a equação (F.17) na equação (F.16), e dividindo por  $\psi$ , chega-se em:

$$\frac{1}{\rho R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h} \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \varepsilon_v k_0^2 = 0 \quad (\text{F.18})$$

Onde o terceiro termo da equação (F.18) é explicitamente independente de  $\rho$  e  $\phi$ . Este termo deve também ser independente de  $z$  para que a equação seja zero para todo  $\rho, \phi$  e  $z$ . Assim tem-se:

$$\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h} \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h} (-k_z^2) \quad (\text{F.19})$$

onde,  $k_z$  é uma constante.

Substituindo a equação (F.19) na equação (F.18) e multiplicando por  $\rho^2$ , encontramos:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \left( \varepsilon_v k_0^2 - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h} k_z^2 \right) \rho^2 = 0 \quad (\text{F.20})$$

Pode-se notar que o segundo termo da equação (F.20) é independente de  $\rho$  e  $z$ , assim como os outros termos são independentes de  $\phi$ , portanto pode-se escrever:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -n^2 \quad (\text{F.21})$$

onde,  $n$  é uma constante.

Assim combinando as equações (F.20) e (F.21), chega-se em:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) - n^2 + \left( \varepsilon_v k_0^2 - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h} k_z^2 \right) \rho^2 = 0 \quad (\text{F.22})$$

Esta equação descreve uma equação apenas em termos de  $\rho$ . Assim pode-se definir  $k_{\rho\varepsilon}$  como:

$$k_{\rho\varepsilon}^2 + \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h} k_z^2 = \varepsilon_v k_0^2 \quad (\text{F.23})$$

Portando, resumindo tem-se:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \left[ (k_{\rho\varepsilon} \rho)^2 - n^2 \right] R &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + n^2 \Phi &= 0 \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_z^2 Z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.24})$$

onde as equações  $\Phi$  e  $Z$  são equações harmônicas e que originam funções harmônicas. Já a equação  $R$  é uma função de Bessel de ordem  $n$ .

## F.2

### Solução da Equação de Onda para o Modo TE

A solução da equação (F.14), a qual é a equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas, é bem conhecida como encontrada em [30]. Sua solução pelo método da separação de variáveis ocorre de forma semelhante à equação (F.17), contudo ao invés de  $k_\mu$  ser definido na forma da equação (F.23), para o modo TE, tem-se:

$$k_{\rho\mu}^2 = \varepsilon_h k_0^2 - k_z^2 \quad (\text{F.25})$$

## F.3

### Solução Modal para guia de placas paralelas (PEC ou PMC) não homogêneo com anisotropia uniaxial

Neste caso é importante lembrar que as combinações lineares das funções  $\psi$  também são soluções para a equação de Helmholtz. Dessa forma:

$$\psi = \sum_n \sum_{k_z} C_{n,k_z} B_n(k_\rho \rho) h(n\phi) h(k_z z) \quad (\text{F.26})$$

Também representa uma solução para a equação de Helmholtz, em que  $B_n(k_\rho \rho)$  é uma função ou combinação de funções de Bessel de ordem  $n$ , e  $h(n\phi)$  e  $h(k_z z)$  são funções harmônicas em termos de  $n$  e  $k_z$ , respectivamente.

A solução das equações (F.11) e (F.14) são dadas por:

$$\begin{aligned} E_z &= \sum_n \sum_{k_z} e_z \\ H_z &= \sum_n \sum_{k_z} h_z \end{aligned} \quad (\text{F.27})$$

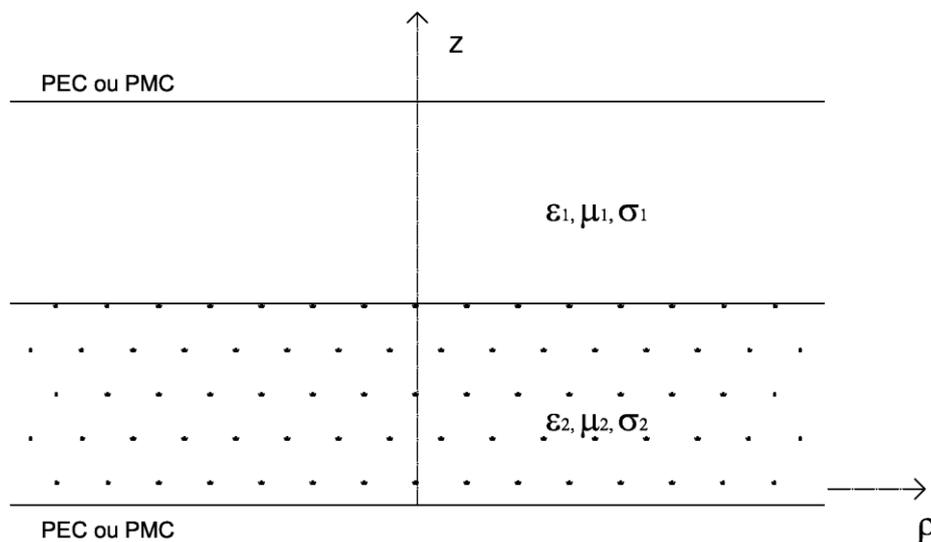
Para o problema do guia de placas paralelas, no qual os campos do modo  $TM^z$  estão sujeitos à condição de contorno da parede elétrica perfeitamente condutora em  $z=0$ ,  $z=d$ , conforme a Figura F.1, e cujos campos  $TE^z$  estão sujeitos a condição de contorno de parede magnética perfeitamente condutora em  $z=0$  e  $z=d$ , as soluções são tais que:

$TE^z$ :

$$\begin{aligned} e_{z1} &= k_{\rho\mu}^2 A \cos(k_{z1}z) \cos(n\phi) H_n^{(1)}(k_{\rho\mu}\rho) \\ e_{z2} &= k_{\rho\mu}^2 B \cos(k_{z2}(a-z)) \cos(n\phi) H_n^{(1)}(k_{\rho\mu}\rho) \end{aligned} \quad (F.28)$$

$TM^z$ :

$$\begin{aligned} h_{z1} &= k_{\rho\varepsilon}^2 C \cos(k_{z1}z) \text{Sen}(n\phi) H_n^{(1)}(k_{\rho\varepsilon}\rho) \\ h_{z2} &= k_{\rho\varepsilon}^2 D \cos(k_{z2}(a-z)) \text{Sen}(n\phi) H_n^{(1)}(k_{\rho\varepsilon}\rho) \end{aligned} \quad (F.29)$$



**Figura F.0.1 – Guia de placas paralelas.**

As componentes transversais dos campos podem ser obtidas pelas seguintes relações, [38].

$$\begin{aligned}
E_\rho &= \frac{i\omega\mu_0}{k_{\rho\mu}^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho \partial z} \frac{1}{k_{\rho\varepsilon}^2} \\
E_\phi &= -\frac{i\omega\mu_0}{k_{\rho\mu}^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_h} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi \partial z} \frac{1}{k_{\rho\varepsilon}^2} \\
H_\rho &= \frac{1}{k_{\rho\mu}^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho \partial \phi} - \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon_v}{k_{\rho\varepsilon}^2} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \\
H_\phi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi \partial z} \frac{1}{k_{\rho\mu}^2} + \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon_v}{k_{\rho\varepsilon}^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}
\end{aligned} \tag{F.30}$$

#### F.4

#### Autovalores para o Modo $TM^z$

Considerando que os autovetores  $TM^z$  são derivados das equações (F.28), as quais satisfazem as condições de contorno de campo elétrico transversal nulo em  $z=0$  e  $z=a$ . Adicionalmente, se faz necessário satisfazer as condições de contorno de continuidade dos campos eletromagnéticos transversais em  $z=d$ .

Assim, a continuidade do campo  $E_\rho$  e em  $z=d$  pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\left[ E_{\rho 1} - E_{\rho 2} \right]_{z=d} &= \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} \left[ \frac{\varepsilon_{v1}}{\varepsilon_{h1}} E_{z1} - \frac{\varepsilon_{v2}}{\varepsilon_{h2}} E_{z2} \right]_{z=d} = 0 \\
-\frac{\varepsilon_{v1}}{\varepsilon_{h1}} A k_{z1} \text{Sen}(k_{z1}d) - \frac{\varepsilon_{v2}}{\varepsilon_{h2}} B k_{z2} \text{Sen}(k_{z2}(a-d)) &= 0
\end{aligned} \tag{F.31}$$

A continuidade do campo  $E_\phi$  em  $z=d$ :

$$\begin{aligned}
\left[ E_{\phi 1} - E_{\phi 2} \right]_{z=d} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial z} \left[ \frac{\varepsilon_{v1}}{\varepsilon_{h1}} E_{z1} - \frac{\varepsilon_{v2}}{\varepsilon_{h2}} E_{z2} \right]_{z=d} = 0 \\
-\frac{\varepsilon_{v1}}{\varepsilon_{h1}} A k_{z1} \text{Sen}(k_{z1}d) - \frac{\varepsilon_{v2}}{\varepsilon_{h2}} B k_{z2} \text{Sen}(k_{z2}(a-d)) &= 0
\end{aligned} \tag{F.32}$$

O que pode ser demonstrado na mesma equação (F.31), ou seja, as condições de contorno de continuidade de  $E_\rho$  e  $E_\phi$  em  $z=d$  resultam na mesma equação (F.31).

Agora a continuidade do campo  $H_\rho$  e em  $z=d$ :

$$\begin{aligned} [H_{\rho 1} - H_{\rho 2}]_{z=d} &= -\frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon_v}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} [\varepsilon_{v1}E_{z1} - \varepsilon_{v2}E_{z2}]_{z=d} = 0 \\ \varepsilon_{v1}Ak_{z1}\text{Cos}(k_{z1}d) - \varepsilon_{v2}Bk_{z2}\text{Cos}(k_{z2}(a-d)) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.33})$$

A continuidade do campo  $H_\phi$  e em  $z=d$ :

$$\begin{aligned} [E_{\phi 1} - E_{\phi 2}]_{z=d} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon_v \frac{\partial}{\partial \rho} [\varepsilon_{v1}E_{z1} - \varepsilon_{v2}E_{z2}]_{z=d} = 0 \\ \varepsilon_{v1}Ak_{z1}\text{Cos}(k_{z1}d) - \varepsilon_{v2}Bk_{z2}\text{Cos}(k_{z2}(a-d)) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.34})$$

Obsevando-se a igualdade entre as equações (F.33) e (F.34).

A combinação das condições de contorno das equações (F.31) e (F.33) podem ser representadas em forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_{v1}}{\varepsilon_{h1}} Ak_{z1}\text{Sen}(k_{z1}d) & \frac{\varepsilon_{v2}}{\varepsilon_{h2}} Bk_{z2}\text{Sen}(k_{z2}(a-d)) \\ \varepsilon_{v1}Ak_{z1}\text{Cos}(k_{z1}d) & \varepsilon_{v2}Bk_{z2}\text{Cos}(k_{z2}(a-d)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{N} \end{pmatrix} \quad (\text{F.35})$$

O sistema da equação (F.35) terá solução quando  $\det(\bar{Z}) = 0$ , ou seja,

$$\frac{k_{z1}}{\varepsilon_{h1}} \text{Sen}(k_{z1}d)\text{Cos}(k_{z2}(a-d)) + \frac{k_{z2}}{\varepsilon_{h2}} \text{Sen}(k_{z2}(a-d))\text{Cos}(k_{z1}d) = 0 \quad (\text{F.36})$$

ou simplesmente,

$$\frac{k_{z1}}{\varepsilon_{h1}} \text{Tan}(k_{z1}d) = -\frac{k_{z2}}{\varepsilon_{h2}} \text{Tan}(k_{z2}(a-d)) \quad (\text{F.37})$$

onde,

$$\begin{aligned}
 k_{z1} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{h1}}{\varepsilon_{v1}} \left[ k_0^2 (\varepsilon_{v1} - \varepsilon_{v2}) + \frac{\varepsilon_{v2}}{\varepsilon_{h2}} k_{z2}^2 \right]} \\
 k_{z2} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_{h2}}{\varepsilon_{v2}} \left[ k_0^2 (\varepsilon_{v2} - \varepsilon_{v1}) + \frac{\varepsilon_{v1}}{\varepsilon_{h1}} k_{z1}^2 \right]}
 \end{aligned}
 \tag{F.38}$$

A equação (F.37) recai em uma equação característica, conhecida quando os meios são isotrópicos, [30].

## F.5

### Autovalores para o Modo TE<sup>z</sup>

Os autovetores TE<sup>z</sup> são derivados das equações (F.29), as quais satisfazem as condições de contorno de campo magnético transversal nulo em z=0 e z=a. Está é uma condição de continuidade necessária dos campos em z=d.

Similarmente ao modo TM<sup>z</sup>, a equação característica do TE<sup>z</sup> é a seguinte:

$$k_{z1} \tan(k_{z1}d) = -k_{z2} \tan(k_{z2}(a-d)) \tag{F.39}$$

onde,

$$k_{\rho\mu}^2 = \varepsilon_h k_0^2 - k_z^2 \tag{F.40}$$

Um aspecto importante a ser destacado é que a equação característica do modo TE<sup>z</sup>, equação (F.39), bem como os autovalores dados na equação (F.40) são sensíveis a anisotropia transversal  $\varepsilon_h$ . Os modos de propagação TM<sup>z</sup>, entretanto, são sensíveis tanto a  $\varepsilon_h$  como a  $\varepsilon_v$ .

Assim conclui-se que os modos TM<sup>z</sup> e TE<sup>z</sup> puros independem de n, ou seja, não apresentam simetria azimutal.