

4 Princípio dos Trabalhos Virtuais

4.1. Contínuo de Cosserat Elástico

As equações para a teoria da elasticidade e da plasticidade serão apresentadas para o contínuo de Cosserat 2D, conforme apresentadas nas referências [9] e [10].

Neste item serão demonstradas as grandezas cinemáticas para um contínuo de Cosserat 2D, as coordenadas do plano cartesiano serão x_1, x_2 e x_3 . Cujo plano de deformação será representado por x_1 e x_2 , o vetor posição será, conforme equação 121 até 123 e Figura 6:

$$R = x_i e_i \quad i = 1, 2 \quad \dots\dots\dots 121$$

O vetor deslocamento será:

$$u = u_i e_i \quad \dots\dots\dots 122$$

E o vetor de rotação será:

$$\omega^c = \omega^c_3 e_3 \quad \dots\dots\dots 123$$

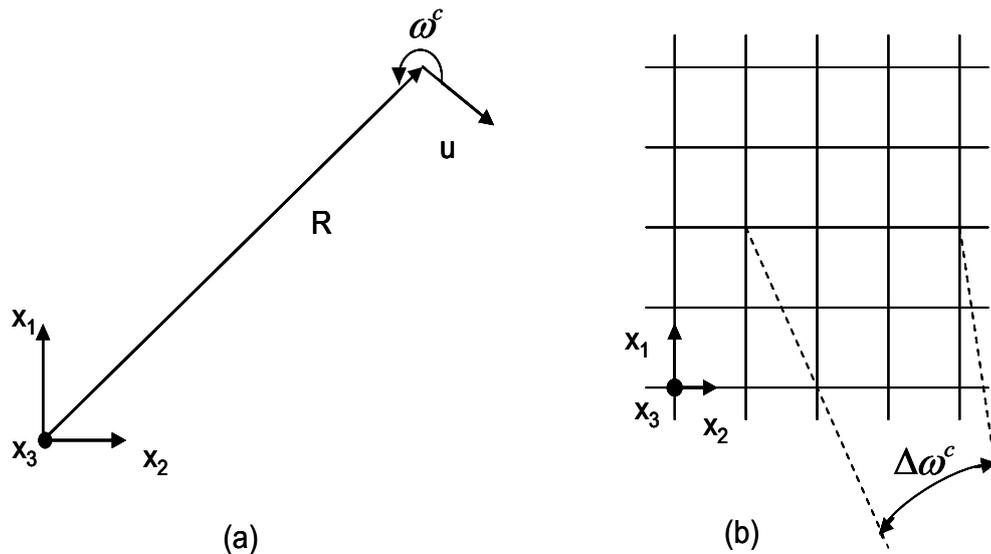


Figura 6 – (a) Campo de deslocamento e rotação no contínuo de Cosserat; (b) Curvatura – gradiente de micro rotações [10].

Por simplicidade é assumido que o gradiente de deslocamento e rotação são infinitesimais até que comece a se formar as bandas de cisalhamento. Assim sendo no contínuo de Cosserat 2D o estado de deformação é descrito por seis componentes. As deformações referentes ao contínuo macroscópico, correspondentes a quatro das seis deformações mencionadas acima, são divididas na parcela simétrica, referente à equação 127 e 128, e na parcela anti-simétrica, referente à equação 129 e 130. E as outras duas deformações são referentes ao gradiente do tensor relativo (equação 133 e 134) que no caso é puramente anti-simétrico, $x_{[ij]k}$.

$$\eta_{(ij)} = \varepsilon_{(ij)} = \partial_i u_j \dots\dots\dots 124$$

$$\eta_{[ij]} = \varepsilon_{[ij]} - \chi_{[ij]} = \Omega_{ij} - \overline{\Omega_{ij}} \dots\dots\dots 125$$

$$\overline{\Omega_{ij}} = -e_{ijk} \omega^c_k \dots\dots\dots 126$$

$$\eta_{(11)} = \varepsilon_{11} = \partial_1 u_1 \dots\dots\dots 127$$

$$\eta_{(22)} = \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2 \dots\dots\dots 128$$

$$\eta_{[12]} = \varepsilon_{[12]} - \chi_{[12]} = \partial_2 u_1 + \omega_3^c \dots\dots\dots 129$$

$$\eta_{[21]} = \varepsilon_{[21]} - \chi_{[21]} = \partial_1 u_2 - \omega_3^c \dots\dots\dots 130$$

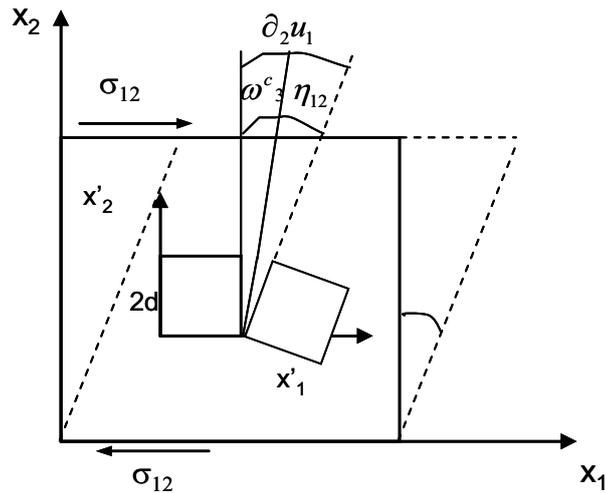
$$x_{[ij]k} = \partial \chi_{[ij]} = \partial \overline{\Omega}_{ij} \dots\dots\dots 131$$

$$x_i = \partial_i \omega^c_k \dots\dots\dots 132$$

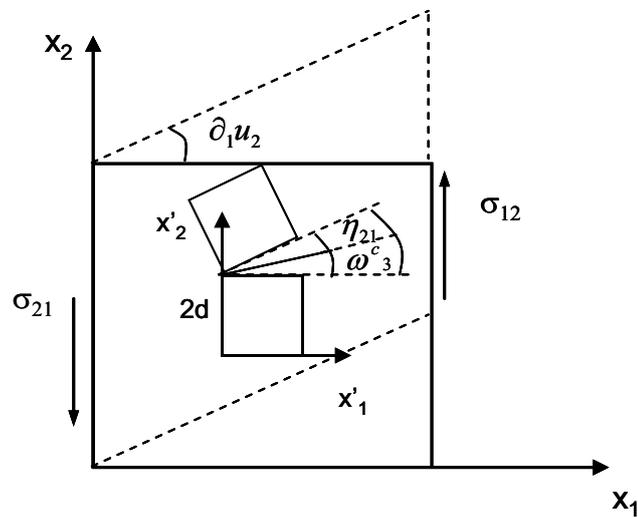
$$x_1 = \partial_1 \omega^c_k \dots\dots\dots 133$$

$$x_2 = \partial_2 \omega^c_k \dots\dots\dots 134$$

A Figura 7 demonstra como o tensor relativo, no caso a parcela anti-simétrica, são obtidos, conforme equação 129 e 130.



(a)



(b)

Figura 7 – (a) Tensor relativo conforme 129(b) Tensor relativo conforme 130 [12].

4.1.1.Princípio do Trabalho Virtual para Contínuo de Cosserat

Para representar as condições cinemáticas relacionadas com as seis equações apresentadas acima temos tensores duais σ^c_{ij} (tensor dual de Cosserat) e m_k (tensor dual de tensões-momento, cuja unidade é momento por área ou força por comprimento), conforme Figura 8.

$$V_{[ij]k} = -e_{ijk} m_k \dots\dots\dots 135$$

$$M_{[ij]} = -e_{ijk} m \dots\dots\dots 136$$

$$\Psi_{[ij]} = -e_{ijk} \Psi_k \dots\dots\dots 137$$

Desprezando as forças de massa e os momentos de massa e utilizando o tensor de permutação para obter os tensores duais temos as seguintes condições de equilíbrio e contorno.

Substituindo da equação 135 até 137 entre a equação 65 até 68 temos:

$$\partial_j \sigma^c_{(ij)} = 0 \dots\dots\dots 138$$

$$-e_{ijk} \sigma^c_{ij} + \partial_k m_k = 0 \dots\dots\dots 139$$

$$\sigma^c_{21} - \sigma^c_{12} + \partial_k m_k = 0 \dots\dots\dots 140$$

$$T_i = \sigma^c_{ij} n_j \dots\dots\dots 141$$

$$m = m_k n_k \dots\dots\dots 142$$

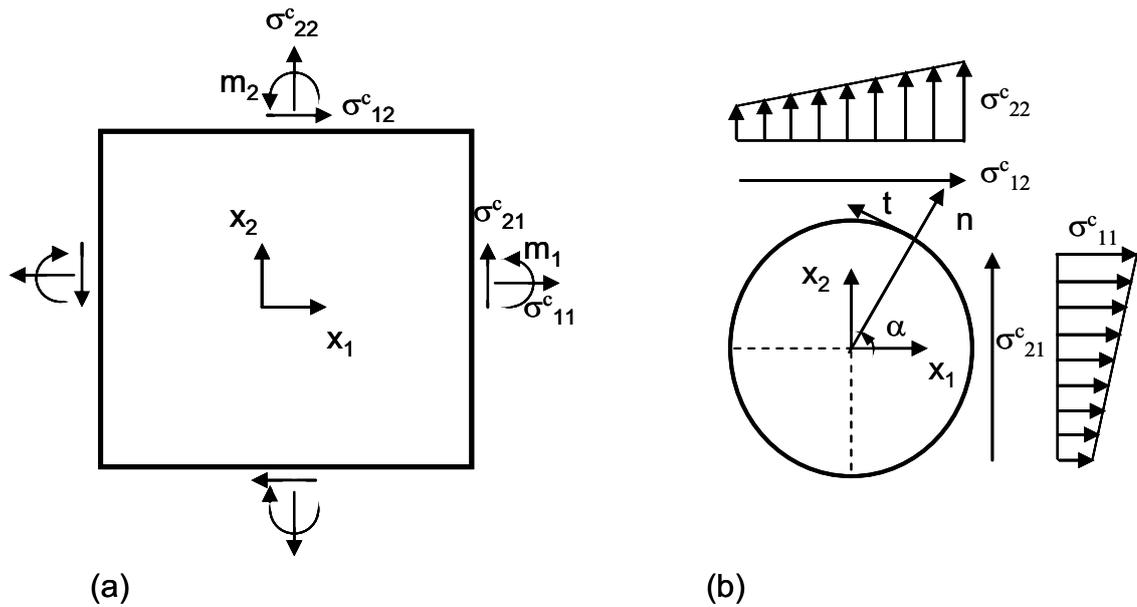


Figura 8 – (a) Tensor dual de Cosserat e de tensões-momento nas faces do elemento do contínuo (b) Exemplo de campo de tensões não homogêneo na escala da partícula [10].

Como já dito anteriormente para material linear isotrópico, teoria de Cosserat, é necessário definir quatro parâmetros sendo estes: λ e G , parâmetros clássicos de Lamé, e outros dois referentes à partícula, o primeiro é o módulo de cisalhamento anti-simétrico ou rotacional G_c e o segundo é o módulo de flexão B . Como já mencionado B tem dimensão de força e por isto sua relação com qualquer outro parâmetro é de comprimento ao quadrado, [35] sugeriu a relação entre B e G , já que as maiorias dos autores se preocupam em medir a partir de ensaios de laboratório o comprimento característico, o coeficiente dois foi adotado apenas por conveniência segundo [12]. Então são apresentados abaixo para problemas 2D as equações constitutivas e o significado de seus parâmetros.

$$\sigma_{ij}^c = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij} + 2G_c \eta_{[ij]} \dots\dots\dots 143$$

$$G_c \equiv (e_2 - e_3)/2 \dots\dots\dots 144$$

$$m = Bx_i \dots\dots\dots 145$$

$$B \equiv \alpha_2 \dots\dots\dots 146$$

$$l = \sqrt{\frac{B}{2G}} \dots\dots\dots 147$$

Das equações mencionadas em 4.1.1 podemos definir vetores generalizados de deslocamento, deformação, tensão e tensão de condição de contorno para o contínuo de Cosserat 2D, conforme da equação 148 até 151.

$u^g = (u_1, u_2, \omega^c)$	148
$\varepsilon^g = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, x_1 l, x_2 l)$	149
$\sigma^g = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, m_1 / l, m_2 / l)$	150
$T^g = (T_1, T_2, m)$	151

4.2. Contínuo de Cosserat Elastoplástico

Um carregamento externo causa deformações e tensões no corpo. Quando o carregamento externo é retirado, o corpo pode ou não voltar à configuração inicial. Até agora só temos tratado de materiais que retornam ao seu estado inicial quando o carregamento é removido, o que é chamado de material elástico. Neste item consideraremos materiais que retêm parte da deformação no descarregamento, estes tipos de materiais são conhecidos como materiais plásticos ou inelásticos [1].

Ensaio de laboratório demonstraram que alguns tipos de materiais tal como o aço se comportam de maneira elástica até certo estágio de carregamento. Uma curva típica de tensão deformação de ensaio de extensão é apresentada na Figura 9, onde o trecho OA representa a parcela na qual o material é elástico. Quando a amostra é carregada além do ponto A o material passa a ter comportamento elastoplástico, ou seja, supomos que o material seja carregado até o ponto B quando o mesmo é descarregado apresentará uma deformação permanente, deformação plástica. Quando a amostra é recarregada do ponto C até o ponto B apresenta comportamento elástico. Como a trajetória de recarregamento não segue a trajetória original de carregamento, as deformações dependem da trajetória de carregamento que o material já sofreu. Como é o caso do ponto F e G que com diferentes tensões aplicadas possuem mesma deformação.

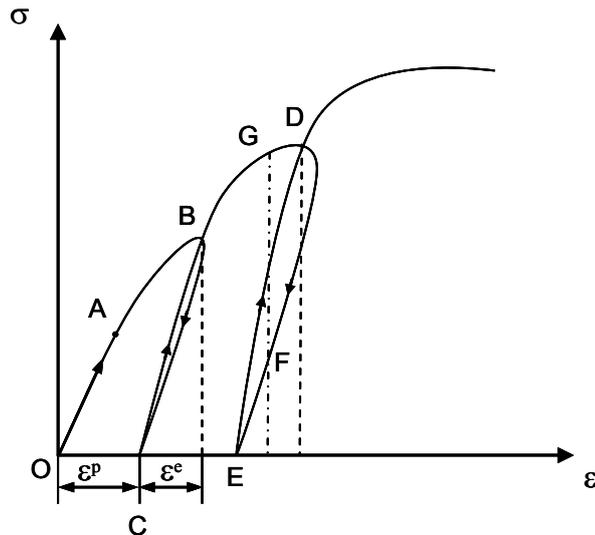


Figura 9 – Curva típica tensão deformação de ensaio de extensão de aço [1].

A figura acima mostra que as deformações são compostas de deformação elástica e deformação plástica, conforme equação 152.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij} \dots\dots\dots 152$$

O critério de escoamento é definido como o limite até onde ocorrem apenas deformações elásticas, devido a um determinado estado de tensão. Este critério de escoamento é matematicamente expresso por uma função escalar dependente, no caso do contínuo de Cosserat e material isotrópico, do tensor de tensões generalizado.

$$F = F(\sigma^g) = F(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, m_1/l, m_2/l) \dots\dots\dots 153$$

A seguir, conforme Figura 10, serão apresentadas duas idealizações, a primeira referente a comportamento elastoplástico perfeito e a última referente a comportamento elastoplástico com endurecimento.

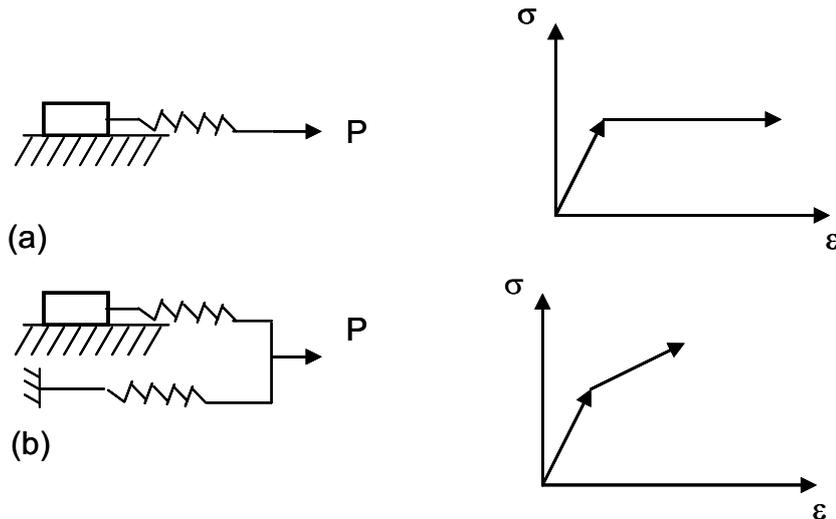


Figura 10 – (a) Modelo idealizado e curva típica de tensão vs deformação para comportamento elastoplástico perfeito (b) Modelo idealizado e curva típica de tensão vs deformação para comportamento elastoplástico com endurecimento [1].

A definição do comportamento do escoamento plástico dos materiais é importante na relação tensão deformação, por isto uma lei de fluxo é definida. Quando o estado de tensão, sob o qual o material está submetido, atinge o critério de escoamento F , o corpo passa a apresentar deformações plásticas, que é definido como escoamento plástico. Na teoria da plasticidade a direção das deformações plásticas é definida através de uma lei de fluxo, supõe-se a existência de uma função de potencial plástico Q , expresso como função do estado de tensão:

$$Q = Q(\sigma^g) = Q(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, m_1 / l, m_2 / l) \dots\dots\dots 154$$

O qual é ortogonal com relação ao incremento de deformação plástica $d\varepsilon^{g^p}_{ij}$ e o mesmo pode ser expresso da seguinte forma:

$$d\varepsilon^{g^p}_{ij} = h \frac{\partial Q}{\partial \sigma^g_{ij}} \dots\dots\dots 155$$

Para o modelo de Cosserat o tensor de tensões é correspondente aquele expresso na equação 150 e h é um escalar positivo que representa um fator de proporcionalidade referente ao endurecimento e/ou amolecimento. Quando o potencial plástico coincide com o critério de escoamento, pode-se dizer que a lei de fluxo é associada, equação 156, e quando os mesmos não são iguais diz-se que a lei de fluxo é não associada, equação 157.

$$Q = F \dots\dots\dots 156$$

$$Q \neq F \dots\dots\dots 157$$

Da condição de consistência apresentada no item seguinte o escalar dh pode ser expresso da seguinte maneira, segundo [9]:

$$dh = \frac{1}{H} \frac{\partial F^t}{\partial \sigma^g} C^e d\varepsilon^g \dots\dots\dots 158$$

Onde H pode ser expresso da seguinte maneira:

$$H = \frac{\partial F^t}{\partial \sigma^g} C^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma^g} + A - B \dots\dots\dots 159$$

$$A = r \frac{\partial F^t}{\partial \sigma^g} \frac{\partial Q}{\partial \sigma^g} \dots\dots\dots 160$$

$$B = -\frac{\partial F}{\partial h} \dots\dots\dots 161$$

Onde A corresponde a parcela do amolecimento, r corresponde à taxa de amolecimento que ocorre no parâmetro de coesão e/ou ângulo de atrito, B corresponde à parcela do endurecimento e C^e representa a matriz de rigidez elástica. O comportamento de endurecimento e/ou amolecimento existente em alguns materiais geotécnicos será apresentado nos itens seguintes. Por hora será apresentada a relação entre incremento de tensão em relação ao de deformação de maneira abrangente, ou seja, com endurecimento e amolecimento.

A taxa de tensão pode ser determinada da seguinte maneira:

$$d\sigma^g_{ij} = C^{ep} d\varepsilon^g_{ij} \dots\dots\dots 162$$

Onde a matriz de rigidez elastoplástica C^{ep} pode ser definida como:

$$C^{ep} = C^e - C^p \dots\dots\dots 163$$

E a matriz de rigidez plástica C^p pode ser definida como:

$$C^p = \frac{\langle 1 \rangle}{H} C^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma^g_{ij}} \frac{\partial F^t}{\partial \sigma^g_{ij}} C^e \dots\dots\dots 164$$

Daí tem-se que o incremento de tensão pode ser expresso da seguinte maneira:

$$d\sigma^g_{ij} = \left[C^e - \frac{\langle 1 \rangle}{H} C^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma^g_{ij}} \frac{\partial F^t}{\partial \sigma^g_{ij}} C^e \right] d\varepsilon^g_{ij} \dots\dots\dots 165$$

4.2.1. Implicações do Trabalho Plástico

O conceito de trabalho plástico é importante nas relações de tensões de deformação, o trabalho total realizado por unidade de volume de um corpo durante o incremento de deformação é definido:

$$dW = \sigma_{ij}^g d\varepsilon_{ij}^g \dots\dots\dots 166$$

O incremento de deformação total, $d\varepsilon_{ij}^g$, possui sua parcela plástica e elástica conforme apresentado abaixo:

$$d\varepsilon_{ij}^g = d\varepsilon_{ij}^{e^g} + d\varepsilon_{ij}^{p^g} \dots\dots\dots 167$$

Substituindo na equação 166 a 167 tem:

$$dW = \sigma_{ij}^g (d\varepsilon_{ij}^{e^g} + d\varepsilon_{ij}^{p^g}) \dots\dots\dots 168$$

$$dW = dW^e + dW^p \dots\dots\dots 169$$

A quantidade de trabalho elástico dW^e realizado é recuperável, porém a quantidade de trabalho plástico dW^p não o é, já que as deformações plásticas são permanentes.

O trabalho que será referido agora, não representa o trabalho total, mas somente o trabalho realizado devido ao incremento de tensões que geram incrementos de deformações. E o mesmo é governado pelos seguintes postulados [1]:

- Durante a aplicação da tensão, o trabalho realizado pelos agentes externos será positivo; e
- Durante o ciclo de carregamento e descarregamento de tensão, o trabalho realizado será nulo ou positivo.

Em outras palavras, o trabalho plástico implica que a energia gasta não pode ser retirada do material que está sujeito a carregamento externo.

Para estabelecer relações matemáticas destes postulados, são apresentadas as equações abaixo:

$$d\sigma_{ij}^g (d\varepsilon_{ij}^{e^g} + d\varepsilon_{ij}^{p^g}) > 0 \dots\dots\dots 170$$

$$d\sigma_{ij}^g d\varepsilon_{ij}^{p^g} \geq 0 \dots\dots\dots 171$$

Agora duas hipóteses são assumidas [1]:

- Existe uma superfície, chamada de superfície de escoamento, que representa o limite do escoamento associado ao estado de tensão para qualquer trajetória de tensão. Somente deformações elásticas ocorrem para mudanças de tensões que ocorram dentro da superfície de escoamento, enquanto deformações plásticas para qualquer mudança de tensão que ocorra apontada para fora ou para dentro da superfície de escoamento; e
- A relação entre mudanças infinitesimais de tensões e deformações plásticas é linear. Isto significa que o somatório de incrementos de deformações plásticas obtidos por dois conjuntos de incrementos de tensões $d\sigma^{g'_{ij}}$ e $d\sigma^{g''_{ij}}$ será o mesmo que a deformação plástica resultante de $d\sigma^{g_{ij}} = d\sigma^{g'_{ij}} + d\sigma^{g''_{ij}}$.

Além disto, algumas condições precisam ser satisfeitas para assegurar uma correta descrição do processo físico envolvido nas deformações plásticas. Quatro condições foram formuladas por Prager, sendo estas [1]:

- Condição de continuidade – Considera-se um estado de tensão que está sobre a superfície de escoamento. Uma mudança infinitesimal de tensão causa um carregamento ou descarregamento, ou carregamento neutro, dependendo se a trajetória de tensão esta apontada para fora ou para dentro da superfície de escoamento ou tangente a mesma, respectivamente. Para evitar descontinuidades nas relações de tensão-deformação, requer que um carregamento neutro não cause deformação plástica;
- Condição de unicidade – Isto garante que para um estado de tensão do material, os acréscimos de tensões e deformações são únicos;
- Condição de irreversibilidade – Esta condição requer que devido ao fato das deformações plásticas serem permanentes, que o trabalho plástico realizado seja positivo:

$$\sigma^{g_{ij}} d\varepsilon^{p_{ij}} > 0 \dots\dots\dots 172$$

- Condição de consistência – Carregamento de um estado plástico levará forçosamente a outro estado plástico, o que satisfaz o critério de escoamento enquanto o material permanecer em regime plástico.

Estas quatro condições implicam que para um incremento de tensão apenas a parcela normal contribui para incremento de deformação plástica, por isto o incremento de deformação plástica é normal a superfície de escoamento, conforme Figura 11.

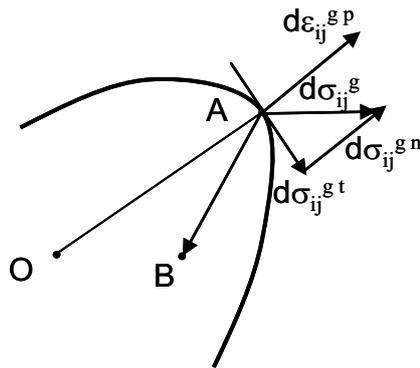


Figura 11 – Superfície de escoamento e direção do incremento de deformação plástica [1].

4.2.2. Comportamento de Endurecimento e Amolecimento

Devido ao escoamento plástico o endurecimento e/ou amolecimento pode acontecer em certos materiais. Neste trabalho será adotada a hipótese de Hill o qual assume que o endurecimento e o amolecimento são funções do trabalho plástico, são independentes da trajetória de tensões e são funções do estado de tensão atuante σ_a^g . Daí tem o seguinte critério de escoamento e o potencial plástico:

$$f = f(\sigma_a^g, W^p) \dots\dots\dots 173$$

$$Q = Q(\sigma_a^g, W^p) \dots\dots\dots 174$$

Onde o estado de tensão atuante pode ser expresso da seguinte maneira [9]:

$$\sigma_a^g = \sigma^g - \alpha \dots\dots\dots 175$$

O estado de tensão atuante é reduzido por um fator α cuja derivada é obtida através da lei cinemática de Prager [9]:

$$d\alpha = rd\varepsilon^p \dots\dots\dots 176$$

Onde r é a taxa de amolecimento da coesão e/ou do ângulo de atrito.

O material pode apresentar dois tipos de endurecimento o isotrópico e o cinemático. Aqui apenas será apresentado o endurecimento isotrópico, o qual corresponde à expansão da superfície de escoamento inicial devido ao histórico de tensões, conservando sua forma e origem no espaço de tensões, como exemplo abaixo.

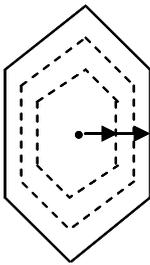


Figura 12 – Endurecimento plástico isotrópico.

O comportamento unidimensional de endurecimento e amolecimento está apresentado na Figura 13, então o comportamento de amolecimento pode ser generalizado da mesma forma que o endurecimento para estado de tensão e deformação multiaxial. Primeiro será visto o comportamento do endurecimento e amolecimento no espaço de tensão conforme Figura 14a. Se no estágio A está na superfície de escoamento, $F = 0$, porém o material ainda está no intervalo de endurecimento, o incremento de tensão estará apontado para fora de maneira a produzir incrementos plásticos e elásticos de deformação. Neste caso um incremento de tensão que esteja apontado para dentro da superfície apenas irá causar deformação elástica. O movimento crescente do estado de tensão do ponto A, ao percorrer a superfície de escoamento, corresponde à parcela de endurecimento ou ascendente na curva de tensão-deformação para o caso unidimensional. Já para o caso em que o material está no intervalo de amolecimento, a deformação plástica ocasiona diminuição da superfície ou que o estado de tensão diminua, o segundo caso é o que será utilizado neste trabalho. O movimento decrescente do estado de tensão do ponto C, ao percorrer a superfície de escoamento, corresponde à parcela de amolecimento ou descendente na curva de tensão-deformação para o caso unidimensional. Como na formulação do espaço de tensões, o comportamento do amolecimento é idêntico ao do

descarregamento elástico é por isto difícil diferenciar um do outro, razão pela qual será apresentada a formulação de espaço de deformação para a superfície de escoamento conforme Figura 14b.

Conforme Figura 13, ao observar o ponto A e C percebe-se que o incremento de deformação é positivo em ambos os casos e negativo nos trechos AG e CH referentes a descarregamento elástico. Para qualquer deformação tanto no ponto A como no C, o acréscimo de deformação aponta para fora da superfície o que representa o caso de carregamento plástico. Quando o acréscimo de deformação aponta para dentro da superfície representa o descarregamento elástico, e por isto não existe ambigüidade na formulação [6].

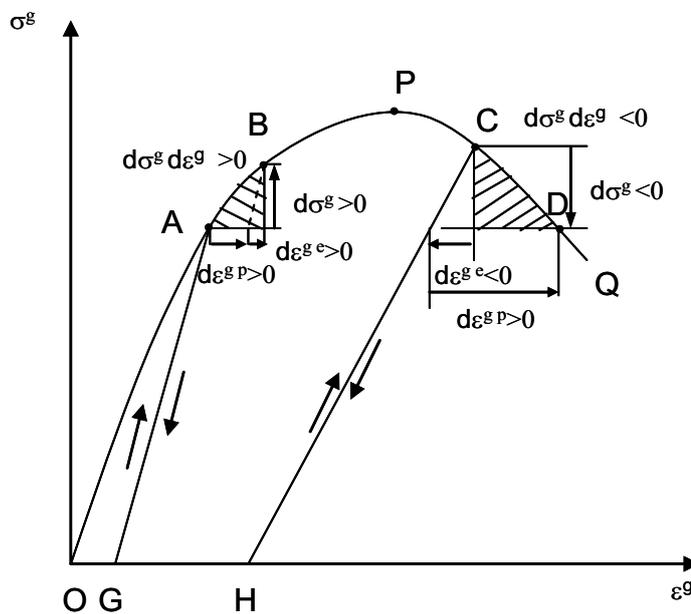


Figura 13 – Acréscimo de trabalho plástico para o trecho AB com endurecimento e para o trecho CD com amolecimento [6].

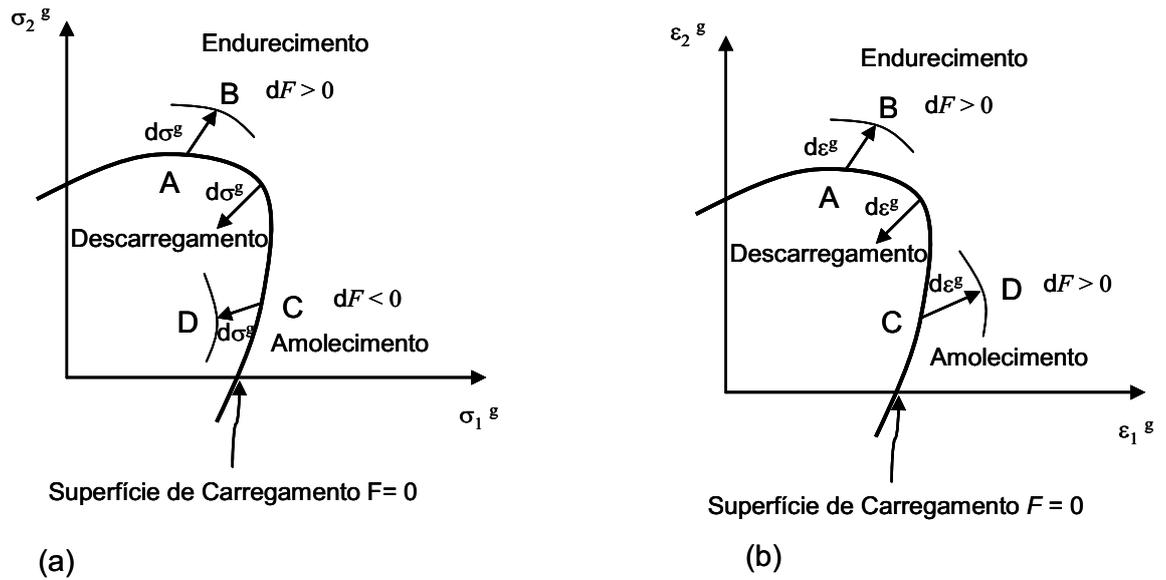


Figura 14 – (a) Superfície de escoamento no espaço de tensões (b) Superfície de escoamento no espaço de deformações [6].

4.2.3. Modelo de Mohr-Coulomb

A envoltória de Mohr-Coulomb, conforme Figura 15, é obtida através de ensaios realizados com tensões confinantes distintas respectivamente. A tensão confinante do ensaio triaxial corresponde à menor tensão na ruptura (σ_3) e a tensão axial do ensaio triaxial corresponde à maior tensão na ruptura (σ_1). O envelope de Mohr-Coulomb, conforme Figura 15, é uma função linear expressa da seguinte forma:

$$\sigma^s = c + \sigma^n \tan \phi \dots\dots\dots 177$$

Onde c é a coesão, que corresponde ao intercepto da reta no eixo σ^s , ϕ é o ângulo de atrito, que corresponde à tangente da inclinação da reta, σ^s é a tensão cisalhante no plano de ruptura, σ^n é a tensão efetiva normal a superfície de falha e RT é a resistência a tração.

A envoltória do diagrama p-q, conforme Figura 16, é uma função linear expressa da seguinte forma:

$$q = a + p\sigma^n \tan \alpha \dots\dots\dots 178$$

Onde:

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_d + \sigma_c}{2} \dots\dots\dots 179$$

$$q = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_d}{2} \dots\dots\dots 180$$

Onde a corresponde ao intercepto da reta com o eixo q e sua relação com a coesão se encontra expressa na equação 182, α' corresponde à tangente da inclinação da reta, e sua relação com o ângulo de atrito se encontra na equação 181.

$$\tan \alpha' = \sin \phi \dots\dots\dots 181$$

$$a = c \cos \phi \dots\dots\dots 182$$

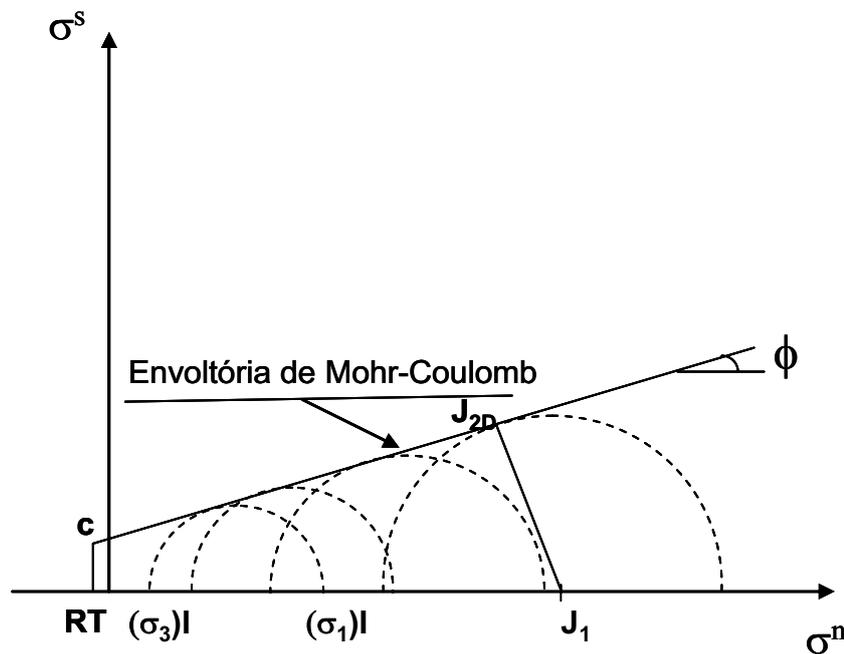


Figura 15 – Parâmetros do Modelo de Mohr-Coulomb, onde σ_3 é a menor tensão principal de ruptura e σ_1 é a maior tensão principal de ruptura dos diversos testes.

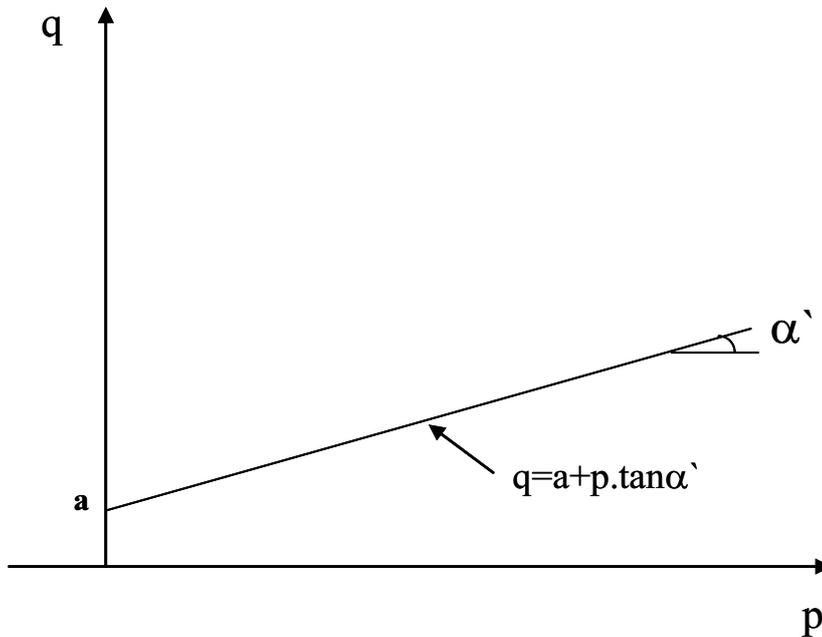


Figura 16 – Parâmetros do Modelo de Mohr-Coulomb diagrama p-q.

A função de escoamento e o potencial plástico para o critério de Mohr-Coulomb são definidos em função do primeiro invariante do tensor de tensões e do segundo invariante do tensor de tensões desviador. A generalização do segundo invariante do tensor de tensões desviadoras incorpora o efeito das tensões-momento e da assimetria de tensões, conforme equações 183 e 184 respectivamente [10].

$$F = J_1 \sin \phi + \sqrt{J_{2D}} - c \cos \phi \dots\dots\dots 183$$

$$Q = J_1 \sin \psi + \sqrt{J_{2D}} - c \cos \mu \dots\dots\dots 184$$

O critério de Mohr-Coulomb pode ser associado quando o potencial plástico é igual à função de escoamento, então $\phi = \mu$, caso o critério seja não associado então $\phi \neq \mu$. O ângulo de dilatância μ expressa a relação existente entre os incrementos de deformação plástica volumétrica e de deformação plástica cisalhante.

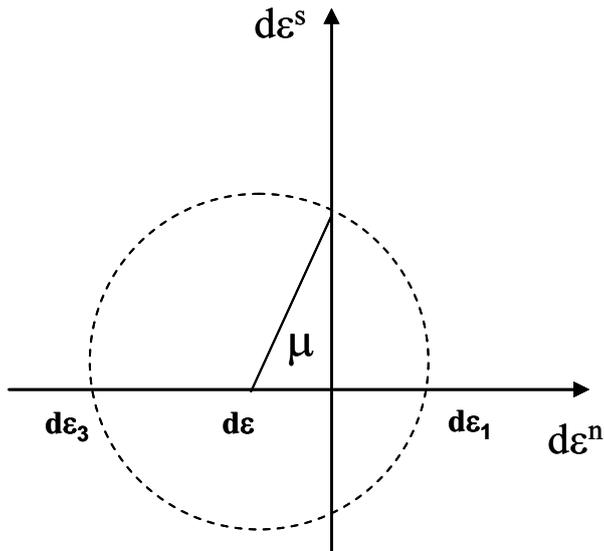


Figura 17 – Círculo de Mohr para estado de deformação.

O primeiro invariante J_1 , conforme equação 185, é idêntico ao utilizado no contínuo clássico, o segundo invariante do tensor de tensões desviador J_{2D} , conforme equação 187, já é distinto do contínuo clássico, pois incorpora o tensor-momento devido às partículas. Porém quando não existir o tensor-momento, o tensor de tensões será simétrico e J_{2D} deverá ser o correspondente ao do contínuo clássico [10].

$$J_1 = \frac{\sigma_{kk}}{2} \dots\dots\dots 185$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{2} \delta_{ij} \dots\dots\dots 186$$

$$J_{2D} = \sqrt{h_1 s_{ij} s_{ij} + h_2 s_{ji} s_{ji} + h_3 \frac{m_i m_i}{l^2}} \dots\dots\dots 187$$

Mühlhaus e Vardoulakis chegaram a dois conjuntos de h_i [12], ambos obtidos, a partir de uma função de distribuição de probabilidade uniforme para ocorrência de contatos entre partículas vizinhas, isso para a microestrutura representativa do meio de Cosserat.

O primeiro conjunto é denominado cinemático h_i^c , pois as considerações estáticas, deslocamento relativo, normal e tangencial aos contatos entre as partículas, são referentes à cinemática do meio, conforme equação 188.

$$h_i^c = \left\{ \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right\} \dots\dots\dots 188$$

O segundo conjunto é denominado estático h_i^e , pois as considerações estáticas, forças de interação, normais e tangenciais, distribuídas pela área total dos grãos em contato, são referentes à estática do meio, conforme equação 189.

$$h_i^e = \left\{ \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right\} \dots\dots\dots 189$$

Substituindo equação 188 ou 189 na equação 187 e considerando a não existência do tensor-momento, tem:

$$J_{2D} = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} \dots\dots\dots 190$$

Que corresponde com o segundo invariante de tensões desviadoras do contínuo clássico, condição esta que a equação 187 deve obedecer.

Alguns autores (Borst, Yu, Borst&Sluys) têm utilizado um terceiro conjunto denominado de padrão h_i^p , o motivo deste conjunto ser utilizado é devido ao fato que para os algoritmos de integração das equações incrementais da plasticidade o retorno do estado de tensões a superfície de plastificação é exato e não requer iterações [12], conforme equação 191.

$$h_i^p = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\} \dots\dots\dots 191$$

4.2.4. Modelo de Bogdanova-Lippmann

A motivação da adoção de novas funções de potencial plástico e de escoamento é que haja uma resposta separada da influência de cada grandeza estática adicional introduzida, assim não será mais utilizado seja conjunto cinemático ou estático para incorporar através de uma distribuição estatística o comportamento do material.

Antes de apresentar as funções de potencial plástico e de escoamento será apresentado o círculo de Mohr 2D com o tensor de tensões assimétrico já que este efeito aparece na função de escoamento, conforme Figura 18.

4.2.4.1. Círculo de Mohr – Tensor Assimétrico

Na Figura 18a, é apresentado um diagrama de corpo livre com o tensor de tensões assimétrico, as faces do diagrama estão orientadas perpendicularmente aos eixos coordenados x_i e a um vetor unitário n_i . A orientação do vetor unitário é fixada pelo ângulo α , que o mesmo faz com o eixo x_1 no sentido anti-horário, seus componentes são:

$$n_i^t = (\cos \alpha, \text{sen} \alpha)^t \dots\dots\dots 192$$

E para o vetor paralelo a n_i , denominando s_i seus componentes são:

$$s_i^t = (-\text{sen} \alpha, \cos \alpha)^t \dots\dots\dots 193$$

O equilíbrio de forças F_i é então obtido pelas componentes do vetor de tensões assimétrico no plano normal a n_i , segundo equação 194, e suas componentes normais e cisalhantes se encontram descritas abaixo.

$$F_i = \sigma_{ij} n_j \dots\dots\dots 194$$

$$\sigma^n = F_i n_i = \sigma_{ij} n_j n_i \dots\dots\dots 195$$

$$\sigma^s = F_i s_i = \sigma_{ij} n_j s_i \dots\dots\dots 196$$

A seguir são apresentadas as equações 195 e 196 por extenso:

$$\sigma^n = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \text{sen}^2 \alpha + (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \text{sen} \alpha \cos \alpha \dots\dots\dots 197$$

$$\sigma^s = \sigma_{21} \cos^2 \alpha - \sigma_{12} \text{sen}^2 \alpha + (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \text{sen} \alpha \cos \alpha \dots\dots\dots 198$$

Das equações 197 e 198 temos a equação de um círculo plano (σ^n , σ^s):

$$(\sigma^n - \sigma_m)^2 + (\sigma^s - \sigma^a)^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2}\right)^2 \dots\dots\dots 199$$

Onde da Figura 18b temos que as componentes de tensão normal média σ_m e tensão cisalhante anti-simétrica σ^a são:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \dots\dots\dots 200$$

$$\sigma^a = \frac{\sigma_{12} - \sigma_{21}}{2} \dots\dots\dots 201$$

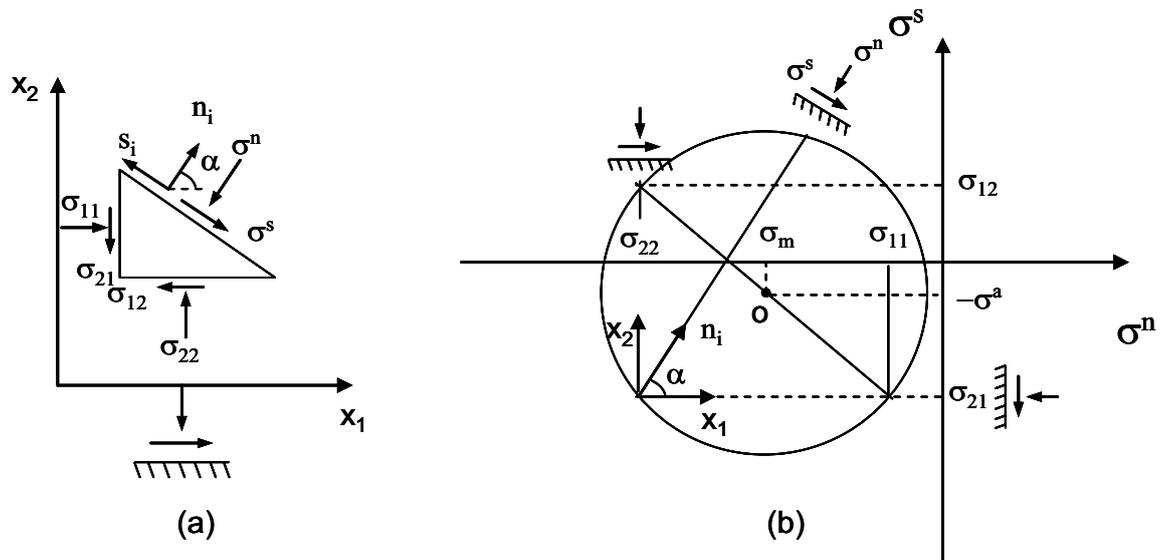


Figura 18 – (a)Diagrama de corpo livre (b) Círculo de Mohr 2D para um tensor de tensões assimétrico [12].

Como pode se perceber na Figura 19, a tensão cisalhante é responsável pelo mecanismo de distorção e a tensão cisalhante anti-simétrica é responsável pelo mecanismo de rotação. Percebe-se que a tensão cisalhante anti-simétrica mede o gradiente de tensões-momento, que representa a diferença entre a rotação da parcela macroscópica e da partícula.

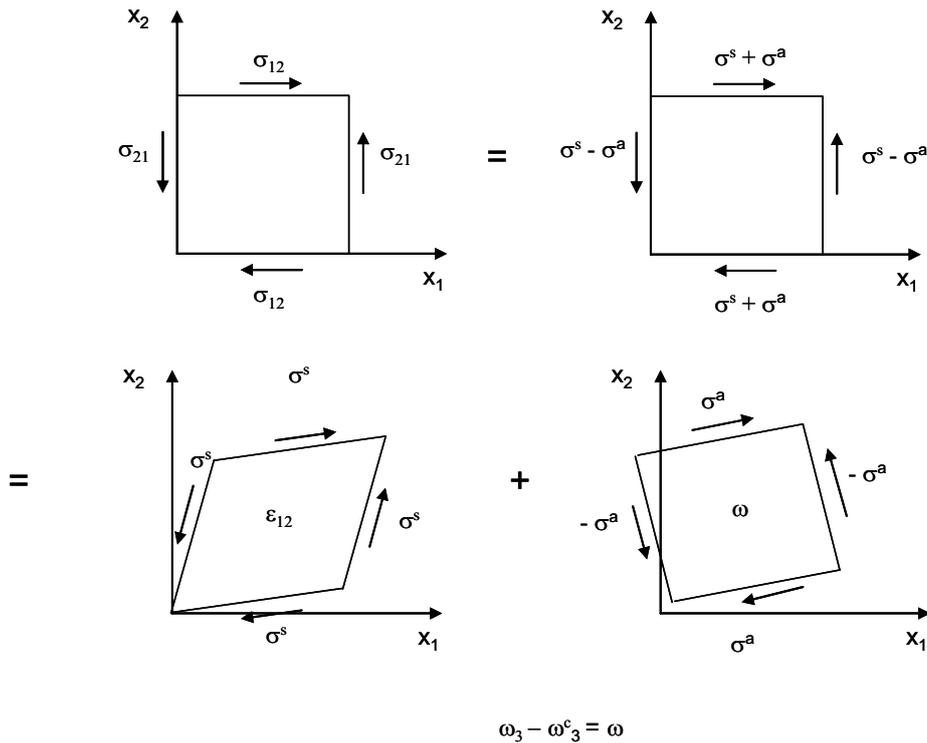


Figura 19 – Componentes simétricas e anti-simétricas das tensões cisalhantes e como elas atuam num contínuo de Cosserat [12].

4.2.4.2. Elastoplasticidade para modelo de Bogdanova-Lippmann

Bogdanova e Lippmann [11] propuseram em 1974 dois conjuntos de funções de potencial plástico e escoamento conforme equações 203, 202, 207 e 208. A diferença entre as funções do modelo de Mohr-Coulomb e do modelo mencionado acima é referente à parcela da função que inclui $|\sigma^a|$, que pode ser considerado como um amolecimento.

Já para o segundo par de funções temos \bar{c} que pode ser considerado como uma resistência coesiva referente ao tensor-momento, e o segundo invariante de tensor desviador é referente também ao tensor-momento conforme equação 209.

Como é possível notar na Figura 20 ocorre uma translação na superfície de escoamento, fato este que ocorre na Elastoplasticidade clássica no amolecimento cinemático. Então é possível conjecturar que a partícula do meio possa explicar de certa forma o amolecimento que é observado nos materiais.

$$F_1 = J_1 \sin \phi + \sqrt{J_{2D}} + (|\sigma^a| - c) \cos \phi \dots\dots\dots 202$$

$Q_1 = J_1 \sin \psi + \sqrt{J_{2D}} - (\sigma^a - c) \cos \mu$	203
$J_1 = \frac{\sigma_{kk}}{2}$	204
$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{2} \delta_{ij}$	205
$\overline{J_{2D}} = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}}$	206
$F_2 = \sqrt{J_{2D}} - \bar{c} \cos \phi$	207
$Q_2 = F_2$	208
$\overline{J_{2D}} = \sqrt{m_i m_i}$	209

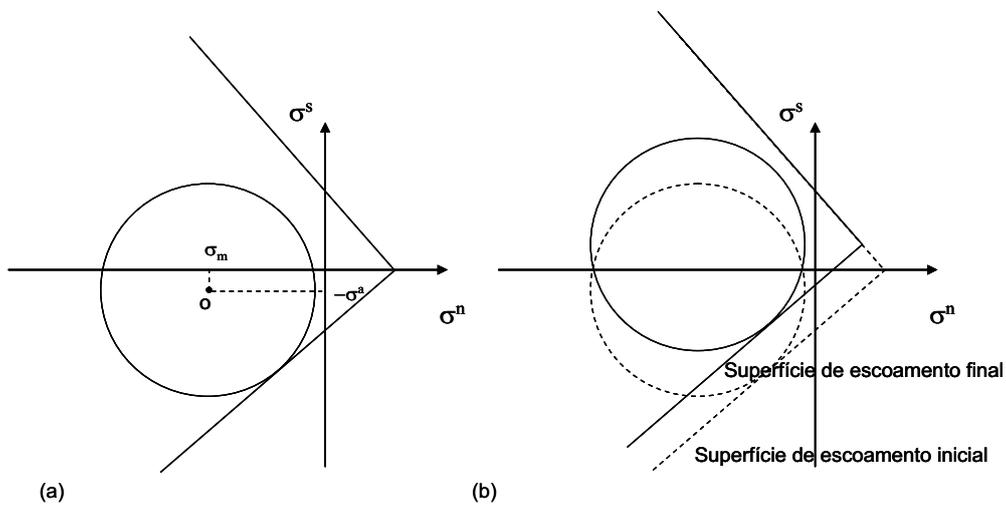


Figura 20 – Possível relação entre a existência da microestrutura e o amolecimento cinemático clássico [12].

Como o modelo possui duas funções de potencial plástico foi adotada a mesma solução da elastoplasticidade clássica, lei de fluxo de Koiter para tratamento de superfícies com vértices e/ou arestas [11].

Assim quando violados ambos os critérios de escoamento o incremento da deformação plástica poderá ser calculado como o somatório da parcela de cada função de potencial plástico, conforme:

$$d\varepsilon^p_{ij} = h_1 \frac{\partial Q_1}{\partial \sigma_{ij}} + h_2 \frac{\partial Q_2}{\partial \sigma_{ij}} \dots\dots\dots 210$$

4.2.4.3. Elastoplasticidade para modelo de Bogdanova-Lippmann Modificado

Unterreiner sugeriu eliminar σ^a da equação 202 e 203, assim sendo, voltaríamos a ter para o primeiro par de funções, as funções da elastoplasticidade clássica de Mohr-Coulomb, conforme equação 211 e 212 e incluir no segundo par de funções a parcela da tensão anti-simétrica com o tensor-momento, conforme equação 213 e 214. Isto corresponde a separar critérios para grandezas estáticas que tem diferentes mecanismos de deformação conforme Figura 19 [13].

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= J_1 \sin \phi + \sqrt{J_{2D}} + c \cos \phi \dots\dots\dots 211 \\ \bar{Q}_1 &= J_1 \sin \psi + \sqrt{J_{2D}} - c \cos \mu \dots\dots\dots 212 \\ \bar{F}_2 &= \sqrt{J_{2D}} + (|\sigma^a| - \bar{c}) \cos \phi \dots\dots\dots 213 \\ \bar{Q}_2 &= F_2 \dots\dots\dots 214 \end{aligned}$$