

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Modelo de Apreçamento de Opções GARCH

A teoria de apreçamento de opções por GARCH foi desenvolvida por Duan (1995) ao estender o conceito de neutralidade a risco de Rubinstein (1976) e Brennan (1979). Devido à complexidade dos processos GARCH, uma versão generalizada de neutralidade a risco foi desenvolvida: o conceito *Locally Risk-Neutral Valuation Relationship* (LRNVR). No LRNVR, a variância é constante para apenas um período à frente. A variância além de um período pode apresentar mudanças. Assim, diferentemente do modelo de B&S, o modelo de apreçamento de opções por GARCH leva em consideração o fator prêmio de risco característico do ativo-objeto.

As premissas pertinentes ao modelo de apreçamento de opções por GARCH são as seguintes:

- O preço do ativo-objeto segue o movimento browniano geométrico;
- A volatilidade dos retornos do ativo-objeto segue um modelo GARCH; e
- Para um período à frente, o desvio-padrão é constante.

Se o preço de um ativo-objeto (S), como por exemplo uma ação, segue o movimento browniano geométrico, tem-se que $d \ln S = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \varepsilon$,¹ onde μ é o retorno logarítmico esperado do ativo, σ é o desvio-padrão no instante t , e ε é

¹ Ver Hull (1999, p. 237).

uma variável aleatória que possui uma distribuição normal com média 0 e variância condicional σ_t^2 . Então, como μ , sob condições de log-normalidade, é igual a $\exp(r + \lambda\sigma)$, onde λ é a unidade de prêmio de risco, e r é o retorno logarítmico do ativo livre de risco, ambos para um período, tem-se que o preço do ativo objeto para um período segue o seguinte processo:

$$S_t = S_{t-1} \exp\left[r_t + \lambda_t \sigma_t - \frac{\sigma_t^2}{2} + \varepsilon_t\right]. \quad (2.1.a)$$

É assumido que σ_t^2 , a variância condicional de ε_t , segue um processo GARCH (1,1) de Bollerslev (1986). A dinâmica ε_t é governada pela lei de probabilidade P com respeito a Φ_{t-1} . Φ_{t-1} é o conjunto de todas as informações até o período t .

Assim sendo,

$$\varepsilon_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2), \text{ sob a medida P; } \quad e$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \quad (2.1.b)$$

Os parâmetros de GARCH ω , α e β devem ser maiores que zero. α mede o impacto marginal da inovação mais recente na variância condicional e β captura os impactos marginais combinados das últimas inovações.

Para garantir a estacionariedade da covariância de ε_t , a soma dos parâmetros α e β , a partir deste momento chamada γ , deve ser menor que 1.² O parâmetro γ pode ser encarado como uma medida de persistência a choques da variância condicional.³ Um alto valor de γ indica uma pequena taxa de decaimento na variância condicional devido à influência das inovações, o que faz com que a variância condicional fique longe de sua média de longo prazo (volatilidade estacionária) por um grande período.

Estudos empíricos de retornos financeiros mostram que os valores estimados de β são maiores que os de α ,⁴ ou seja, a persistência da variância é na maioria das vezes caracterizada por um efeito pouco significativo, porém

² Para se garantir a estacionariedade do modelo, $\alpha + \beta$ deve ser menor que 1 para que a volatilidade incondicional, $\omega/(1-\alpha-\beta)$, não seja negativa.

³ Ver Engle e Mustafa (1992, p.292) e Bollerslev, Chou e Kroner (1992) sobre discussões acerca da persistência a choques de variância.

⁴ Ver Taylor (1986), Akgiray (1989), Lamoureux e Lastrapes (1990), Ng (1991), Engle e Mustafa (1992) e Heynen e Kat (1994).

prolongado, das inovações da variância em um certo período. Isso corresponde a uma pequena autocorrelação entre os quadrados dos retornos (devido à menor magnitude do parâmetro α), mas que decai vagarosamente (devido à maior magnitude do parâmetro β). De uma forma geral, pode-se dizer que o primeiro impacto do valor do parâmetro α é no valor desta autocorrelação, enquanto o primeiro impacto do valor do parâmetro β é no seu decaimento.

Pode-se utilizar, neste modelo, quaisquer especificações para a variância, tais como o EGARCH (Nelson, 1991), o GJR-GARCH (Glosten et al., 1993) ou o NGARCH (Engle e Ng, 1993)⁵ desde que os retornos do ativo sigam o processo especificado.⁶

Alguns estudos empíricos sobre preços de ações, como os de Bollerslev (1986) e Bollerslev, Engle e Nelson (1994), evidenciam que os resíduos do modelo GARCH possuem excesso de curtose. Taylor (1994) sugere o uso de uma distribuição t ou uma distribuição de erros generalizada para o modelo.

No modelo de apreçamento por GARCH existe apenas uma fonte de aleatoriedade, o ε_t , que faz parte da equação do preço do ativo-objeto (equação 2.1.a). A volatilidade do retorno para um período à frente é conhecida, dado o conjunto de informações Φ . Duan (1995) define uma medida de preço Q absolutamente contínua com respeito a P, e sob a qual 1 (um) mais o retorno condicional esperado do ativo-objeto é igual a $\exp(r)$ ao invés de $\exp(r + \lambda\sigma)$; a variância condicional, contudo, é a mesma para ambas as medidas. Portanto, como a média condicional de 1 (um) mais o retorno condicional esperado é independente de qualquer parâmetro relativo à preferência do investidor, a medida Q é dita satisfazer uma *locally risk-neutral valuation relationship* (LRNVR). Se a variância for constante, a LRNVR se reduz ao convencional *risk-neutral valuation relationship*. Assim, o LRNVR é uma versão generalizada de neutralidade a risco. É importante observar que a medida Q não satisfaz a neutralidade a risco global.

⁵ O NGARCH, EGARCH e GJR-GARCH são especificações do modelo GARCH que capturam o “efeito alavancagem”.

⁶ É pressuposto que exista normalidade condicional dos resíduos dos retornos.

Assim, uma medida de preço em equilíbrio Q satisfaz o conceito locally risk-neutral valuation relationship (LRNVR) se para qualquer valor do ativo-objeto, S_t , as seguintes condições são satisfeitas:

(a) Q é mutuamente contínua com respeito a P;

(b) $\frac{S_{t+1}}{S_t}$ é log-normalmente distribuído sob Q;

(c) $E^Q\left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \mid \phi_t\right) = \exp(r_{t+1})$; e

(d) $\text{Var}^Q\left(\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) \mid \phi_t\right) = \text{Var}^P\left(\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) \mid \phi_t\right)$.

Sob a medida de preço Q, tem-se que:

$$S_t = S_{t-1} \exp\left[r_t - \frac{\sigma_t^2}{2} + \xi_t\right] \quad (2.1.c)$$

$$\xi_t \mid \Phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(\xi_{t-1} - \lambda_t \sigma_{t-1})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (2.1.d)$$

Como a medida Q satisfaz o LRNVR, o parâmetro λ não deve estar presente na equação que modela o preço do ativo-objeto. Para isso, substituiu-se a variável aleatória ε_t nas equações 2.1.a e 2.1.b por $\xi_t - \lambda\sigma$. O modelo de variância condicional obtido é o modelo GARCH assimétrico não-linear de Engle e Ng (1993) - NGARCH. Portanto, opções de um ativo que segue o tradicional GARCH, simétrico e linear, podem ser avaliadas como se o ativo seguisse um modelo GARCH assimétrico não-linear com a unidade de prêmio de risco, λ , sendo o parâmetro de alavancagem. Se $\lambda > 0$, a variância condicional é correlacionada negativamente com o retorno anterior do ativo-objeto, ou seja, o impacto na variância de “surpresas” negativas no retorno é maior que o de “surpresas” positivas. Esse efeito assimétrico na volatilidade também é chamado de “efeito alavancagem”.

É importante observar que o LRNVR não elimina a unidade de prêmio de risco. Ela afeta a inovação na variância condicional sob Q, a qual, por sua vez, afeta o preço do ativo-objeto.

Duan (1995) afirma que se qualquer metodologia GARCH fosse escolhida, como por exemplo o EGARCH, um resultado semelhante para a variância condicional, σ^2 , seria obtido. Da mesma forma que no GARCH simétrico, sempre que ε_t aparecer na equação da variância condicional, ele deve ser substituído por $\xi_t - \lambda\sigma$, com todo o resto permanecendo sem alterações.

O valor da opção de compra (C_t) na data t , com preço de exercício K , é obtido ao se descontar, à taxa livre de risco, o valor esperado do pagamento final sob a medida Q :

$$C_t = \exp(-r(T-t))E^Q [\max(S_T - K, 0)|\phi_t], \quad (2.1.c)$$

onde T é o prazo de vencimento da opção.

Uma vez que uma solução fechada para a equação 2.1.c não pode ser derivada analiticamente, a simulação de Monte Carlo é um método conveniente para o modelo de apreçamento de opções por GARCH.

O valor da opção de venda (P_t) na data t pode ser calculado utilizando-se a relação de paridade entre as opções de compra e as opções de venda:

$$P_t = C_t + \exp(-r(T-t))K - S_t.$$

Os parâmetros de GARCH podem ser estimados não só a partir de preços à vista dos ativos-objeto, como também a partir dos preços das opções⁷, sempre se empregando técnicas econométricas como a máxima verossimilhança e o mínimo do quadrado dos erros.

2.2

Modelo de Apreçamento de Opções GARCH x Modelo de Black&Scholes (B&S)

Sob a incorreta premissa da homoscedasticidade dos retornos de um ativo-objeto, na qual o modelo de B&S se baseia, quando o que governa realmente os processos é a heteroscedasticidade, a neutralidade a risco deve ser global (e não local) a fim de se manter a consistência do modelo.

Assim, o processo homoscedástico utilizado pelo modelo de Black&Scholes (B&S) é um caso especial do modelo de apreçamento de opções por GARCH ao

⁷ Ver Duan e Zhang (2000, p. 8-9).

se admitir que a variância é constante através do tempo. Neste caso, uma medida de variância a ser utilizada na fórmula de B&S, a fim de se comparar os dois modelos, é a variância estacionária (incondicional) de GARCH sob a medida P, igual a $\sigma_p^2 = \omega / (1 - \alpha - \beta)$,⁸ uma vez que esta medida de volatilidade pode ser definida como a variância média de longo prazo.⁹ Essa variância não possui correlação com os retornos passados. A distribuição dos preços do ativo-objeto é log-normal e não depende do caminho da variância, apenas da variância média.

No modelo de apreçamento de opções por GARCH, a variância dos retornos do ativo-objeto para o próximo período é conhecida sob as informações correntes, e, conseqüentemente, a distribuição dos retornos do ativo-objeto é log-normal para um período à frente. Além desse período, as variâncias são estocásticas e dependem de qual modelo GARCH foi assumido. Assim, a distribuição da variância condicional de um período futuro não é log-normal e a distribuição do preço final do ativo-objeto provavelmente não é log-normal, dado o caminho da variância condicional para um período.

É improvável que a variância inicial do modelo GARCH seja igual a σ_p^2 , a variância incondicional sob a medida P. Mesmo que σ_p^2 seja utilizada como variância inicial do modelo GARCH, o conceito LRNVR implica que a variância condicional sob a medida Q irá se reverter a uma variância incondicional maior que σ_p^2 e, portanto, a variância média não será igual à variância utilizada no modelo de B&S. Esse aumento ocorre porque o LRNVR induz uma variância incondicional igual a $\omega / [1 - \alpha(1 + \lambda^2) - \beta]$.¹⁰ Quando a unidade de prêmio de risco, λ , é diferente de zero, o LRNVR também induz uma correlação entre a variância condicional e os retornos anteriores do ativo objeto.

Se a correlação entre o retorno do ativo-objeto e a variância condicional puder ser ignorada (i.e., o parâmetro λ for pequeno – ver equação 2.1.a), e a

⁸ Para o GARCH(1,1), $\sigma_t^2 = \alpha_0 V + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$, com $\omega = \alpha_0 V$ e $\alpha_0 + \alpha + \beta = 1$, a variância incondicional V é igual a $\omega / (1 - \alpha - \beta)$.

⁹ Ver HULL (1999, p. 372).

¹⁰ Para o NGARCH(1,1), $\sigma_t^2 = \alpha_0 V + \alpha (\varepsilon_{t-1} - \lambda \sigma_t)^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$, com $\omega = \alpha_0 V$ e $\alpha_0 + \alpha + \beta = 1$, a volatilidade incondicional V é igual a $\omega / [1 - \alpha(\lambda - 1)^2 - \beta]$. O processo é estacionário se $\alpha(\lambda - 1)^2 + \beta < 1$.

distribuição condicional do preço final do ativo-objeto puder ser considerada log-normal (i.e., os parâmetros de GARCH α e β forem pequenos), o preço dado pelo modelo de opções por GARCH é aproximadamente o preço encontrado pelo modelo de B&S.

Se o parâmetro λ não for pequeno o suficiente, o preço dado pela fórmula de B&S se distancia do preço dado por GARCH por dois motivos. Primeiro, o preço de B&S seria baseado numa variância incondicional incorreta, a variância incondicional da medida P. Segundo, porque o preço dado por GARCH depende da variância condicional, e existe um prêmio de risco em seu processo; ou seja, o preço dado por GARCH depende do caminho da variância condicional.

2.3

Aplicações do Modelo de Apreçamento de Opções GARCH

A primeira tentativa de se prover um fundamento teórico para o apreçamento de opções por GARCH foi realizada por Duan (1990). Nesta primeira tentativa, o conceito de *Risk-Neutral Valuation Relationship* foi incorretamente aplicado para apreçamento de opção por uma estrutura GARCH.¹¹

Duan (1995) desenvolve a teoria de apreçamento de uma opção por GARCH e a fórmula para o seu delta. Sua análise numérica sugere que o modelo GARCH pode ser capaz de explicar alguns vieses sistemáticos bem documentados associados ao modelo de B&S, a saber: o sub-apreçamento de opções fora-do-dinheiro e de opções com curto tempo para vencimento. Contudo, em sua análise os resultados não são comparados com os preços de mercado. As variáveis de controle são os próprios preços dados por B&S.

No experimento, o método GARCH utilizado foi o GARCH (1,1) sobre as cotações do índice do S&P100 (preços de fechamento durante três anos) a fim de se apreçar opções sobre esse índice. A taxa livre de risco é considerada nula para facilitar a classificação das opções quanto à proximidade do dinheiro (classificação fora, no e dentro-do-dinheiro). Os parâmetros de GARCH

¹¹ Satchell e Timmermann (1992) e Amin e NG (1993) propuseram modelos de apreçamento de opções que utilizavam estruturas GARCH que invalidaram a utilização do conceito de *Risk-Neutral Valuation Relationship* utilizado por Duan (1990).

encontrados na regressão não são atualizados em momento algum, e as opções apreçadas estão dentro da amostra, ou seja, dentro do período de estimação dos parâmetros das equações. Para se verificar o impacto da variância condicional inicial no preço da opção, três variâncias iniciais são estudadas: 0,8, 1 e 1,2 vezes a variância incondicional. São realizadas 50.000 simulações de Monte Carlo para cada opção. O modelo de B&S é sempre empregado com a variância incondicional do GARCH (1,1), $\omega/(1 - \alpha - \beta)$.

Os resultados mostraram que o modelo de B&S, conhecido por sub-apreçar opções fora-do-dinheiro, pode apreçar a maior ou a menor, que o modelo GARCH, essas opções, dependendo da variância condicional inicial utilizada (quanto maior a variância utilizada, maior o preço por GARCH). Para opções fora-do-dinheiro de curto tempo para vencimento, o apreçamento a menor do modelo de B&S se torna mais acentuado. Para opções extremamente-fora-do-dinheiro, o modelo de B&S sempre apreçou a menor.

O autor utiliza a fórmula de B&S para determinar a volatilidade implícita dos preços por GARCH para a verificação do efeito sorriso. O gráfico preço/preço de exercício (S/K) X volatilidade implícita é construído para três tempos para vencimento diferentes (T=30, T=90 e T=180). As volatilidades implícitas também produziram um formato de U, sendo esta forma muito mais acentuada para as opções de menor tempo para vencimento.

Chaudhury e Wei (1996) estudam a sensibilidade do modelo de apreçamento GARCH à volatilidade condicional inicial e aos parâmetros α , β e λ , e comparam este modelo ao de B&S. As condições do experimento são semelhantes ao de Duan (1995): o processo GARCH utilizado é o GARCH (1,1), a taxa livre de risco é admitida como nula, os parâmetros encontrados na regressão não são atualizados, as opções apreçadas estão dentro do período de estimação dos parâmetros das equações (experimento dentro-da-amostra), o modelo de B&S é empregado com a variância incondicional do GARCH (1,1) e os preços de mercado não são considerados. Para o modelo GARCH são realizadas 50.000 simulações.

Em geral, o preço por GARCH não é muito sensível à volatilidade condicional inicial, exceto nas opções extremamente-fora-do-dinheiro e de curto tempo para vencimento. Quanto a mudanças na unidade de prêmio de risco λ , o

preço por GARCH não se altera sempre no mesmo sentido. Para opções fora-do-dinheiro e no-dinheiro, o aumento de λ faz o preço diminuir, ocorrendo o oposto para as opções dentro-do-dinheiro. Porém, o grau de sensibilidade foi pequeno, exceto para opções extremamente-fora-do-dinheiro. Não houve uniformidade na variação do preço dado por GARCH ao se variarem os parâmetros α e β , porém o grau de sensibilidade é mais acentuado para opções extremamente-fora-do-dinheiro e de curtíssimo tempo para vencimento.

Ao comparar os modelo de B&S com o GARCH, os autores observam que a diferença percentual entre os modelos aumenta ao se diminuir a relação preço/preço de exercício (S/K) e o tempo para vencimento. Assim, a maior diferença percentual ocorre em opções de curtíssimo tempo para vencimento e em opções extremamente-fora-do-dinheiro. As opções extremamente-dentro-do-dinheiro e as de muito grande tempo para vencimento tendem a ser sub-apreçadas pelo modelo de B&S. As de curto tempo para vencimento e extremamente-dentro-do-dinheiro e as de curto tempo para vencimento e extremamente-fora-do-dinheiro sempre são sub-apreçadas. Nas opções no-dinheiro, o comportamento não é uniforme.

Após esta primeira análise comparativa da diferença entre os modelos, os autores alteram os parâmetros de GARCH e a variância condicional inicial no modelo de apreçamento por GARCH. Observa-se que o parâmetro de persistência da variância $\gamma(=\alpha+\beta)$ é um fator importante na magnitude da diferença entre os dois modelos (quanto maior o γ , maior diferença percentual entre os modelos, independente da variância condicional inicial utilizada). A unidade de prêmio de risco λ é importante para determinar a direção do viés do modelo de B&S em relação ao GARCH. O modelo de B&S tende a sub-apreçar as opções ao se utilizar um λ maior no modelo GARCH.

Um algoritmo para apreçar opções americanas quando seu ativo-objeto segue um processo GARCH de tempos discretos foi desenvolvido por Ritchken e Trevor (1999). Os modelos estocásticos de volatilidade bivariada aparecem como casos especiais deste modelo. O algoritmo é apenas descrito em detalhes para o modelo NGARCH, mas pode apreçar opções sob quase todos os processos GARCH existentes e sob a grande gama de processos de volatilidade estocástica bivariada.

Duan e Wei (1999) estendem o modelo de apreçamento GARCH para opções sobre taxas de câmbio e sobre ativos cotados em moeda estrangeira. Em sua análise numérica, os autores demonstram que o modelo fornece uma potencial explicação para sorrisos de volatilidade e assimetria destas opções.

Assume-se que a taxa de câmbio segue o processo NGARCH sob a medida P. Assim, para a taxa de câmbio tem-se as seguintes definições:

$$e_t = e_{t-1} \exp \left[r_{d,t} - r_{e,t} + \delta_t h_t - \frac{h_t^2}{2} + \varepsilon_t \right];$$

$$\varepsilon_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, h_t^2), \text{ sob a medida P ; e}$$

$$h_t^2 = \omega + \alpha (\varepsilon_{t-1} - a h_{t-1})^2 + \beta h_{t-1}^2;$$

onde e_t é a taxa de câmbio entre os mercados doméstico e estrangeiro no tempo t (definida por unidades da moeda doméstica por unidades da moeda estrangeira), δ é a unidade de prêmio de risco, $r_{d,t}$ é o retorno logarítmico do ativo doméstico livre de risco entre o tempo $t-1$ e t , enquanto $r_{e,t}$ é o retorno logarítmico do ativo estrangeiro livre de risco entre o tempo $t-1$ e t .

Sob a medida de preço de equilíbrio doméstico, Q_d , que satisfaz o conceito LRNVR, tem-se que:

$$e_t = e_{t-1} \exp \left[r_{d,t} - r_{e,t} - \frac{h_t^2}{2} + \varepsilon_t^* \right];$$

$$\varepsilon_t^* | \Phi_{t-1} \sim N(0, h_t^2);$$

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 [\varepsilon_{t-1}^* - h_{t-1} (\delta_t - a)]^2 + \alpha_2 h_{t-1}^2;$$

Se K é o preço de exercício e T o prazo para o vencimento, o valor da opção européia de compra sobre a taxa de câmbio é expresso por:

$$C_t = \exp(-r_d(T-t)) E^Q [\max(e_T - K, 0) | \phi_t].$$

Se os dois parâmetros de persistência (α e β) forem iguais a zero, verifica-se a homoscedasticidade dos retornos da taxa de câmbio.¹²

Assume-se que um ativo-objeto em moeda estrangeira, como uma ação, segue a dinâmica NGARCH. Assim, para esse ativo têm-se as seguintes definições:

¹² Ver Biger e Hull (1983) e Garman e Kohlgahen (1983).

$$S_t = S_{t-1} \exp \left[r_{e,t} + \lambda_t \sigma_t - \frac{\sigma_t^2}{2} + \xi_t \right];$$

$$\xi_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2), \text{ sob a medida } P;$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1} \left(\frac{\zeta_{t-1}}{\sigma_{t-1}} - b \right)^2 + \beta_2 \sigma_{t-1}^2; e$$

$$E^P(\varepsilon_t, \xi_t | \Phi_{t-1}) = \rho_t;$$

onde λ é a unidade de prêmio de risco, $r_{e,t}$ é o retorno logarítmico do ativo livre de risco estrangeiro entre o tempo $t-1$ e t e σ^2 é a variância dos retornos do ativo-objeto. É importante observar que existe uma correlação condicional estocástica, ρ_{t+1} , entre o preço do ativo-objeto e o retorno da taxa de câmbio.

Como para o processo da taxa de câmbio, para o processo do ativo também é identificada a dinâmica do preço de um ativo-objeto estrangeiro sob a medida de preço de equilíbrio doméstica, Q_d :¹³

$$S_t = S_{t-1} \exp \left[r_{e,t+1} - \rho_t h_t \sigma_t - \frac{\sigma_t^2}{2} + \sigma_t \xi_t^* \right];$$

$$\xi_t^* = \xi_t + \lambda_t \sigma_t + \rho_t h_t \sigma_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2);$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 (\xi_{t-1}^* - \lambda_{t-1} - \rho_{t-1} h_{t-1} - b)^2 + \beta_2 \sigma_{t-1}^2; e$$

$$E^{Q_d}(\varepsilon_t^*, \xi_t^* | \Phi_{t-1}) = \rho_t.$$

A mudança nas medidas, de P para Q , faz com que haja uma covariância condicional no retorno esperado do ativo-objeto estrangeiro.

Uma opção de compra de quanto, que é uma opção de compra em um ativo-objeto estrangeiro com uma taxa de câmbio fixa, é avaliada da seguinte forma:

$$C_t^{\text{quanto}} = e_0 \exp(-r(T-t)) E^Q [\max(S_T - K, 0) | \phi_t],$$

onde e_0 é uma taxa de câmbio fixa, pré-especificada, K é o preço de exercício e T o prazo para o vencimento, denominado em moeda estrangeira.

É importante observar que para uma opção de quanto que envolva apenas o ativo-objeto estrangeiro, tem-se que simular a taxa de câmbio e o preço do ativo-objeto simultaneamente.

¹³ Ver prova em Duan e Wei (1999, apêndice).

Em seu experimento, os autores apreçam opções de compra da taxa de câmbio do dólar americano por yen e índice Nikkei 225. São utilizados dados diários cobrindo aproximadamente cinco anos (início de 1994 a início de 1999). As opções apreçadas estão dentro do período de estimação dos parâmetros, os quais foram calculados apenas uma vez (com dados dos cinco anos). Foram realizadas 50.000 simulações para cada preço de opção.

Os prêmios de risco (λ e δ) e a correlação ρ , na estimação, foram estatisticamente insignificantes. Assim, estes parâmetros foram considerados nulos. O parâmetro de assimetria para a taxa de câmbio, a , é negativo. O parâmetro de assimetria para o índice Nikkei, b , é positivo, o que sugere o efeito alavancagem.

Para chegar aos resultados, os autores utilizam o mesmo artifício utilizado por Duan (1995), no qual encontram a volatilidade implícita de opções apreçadas pelo modelo GARCH por intermédio da fórmula de B&S. Ao comparar as volatilidades implícitas com a volatilidade estacionária de GARCH, os autores interpretam se houve sub ou super-apreçamento das opções (se a volatilidade implícita está abaixo da volatilidade estacionária, o modelo sub-apreçou a opção; e vice-versa).

Para as opções sobre a taxa de câmbio, o modelo sub-apreçou opções fora-do-dinheiro e super-apreçou as dentro-do-dinheiro (a volatilidade implícita é crescente em relação a S/K), sendo que o maior erro ocorre para opções com menor tempo para o vencimento. Para as opções sobre o índice, o modelo sub-apreçou opções dentro-do-dinheiro e super-apreçou as fora-do-dinheiro (a volatilidade implícita é decrescente em relação a S/K).

Os autores também realizam simulações na correlação, ρ , a fim de observar o seu impacto no sorriso da volatilidade implícita. É verificado que quanto maior o ρ , mais acima está a curva, sendo que quanto mais fora-do-dinheiro estão as opções, maior a mudança na volatilidade implícita e maior o sorriso da volatilidade.

Um algoritmo fechado para apreçamento de opções europeias por GARCH foi desenvolvido por Heston & Nandi (2000). Os autores comparam este modelo com o de B&S, utilizando, neste último, a volatilidade incondicional estimada pelo método de GARCH e também a volatilidade implícita atualizada a cada

período (o período é uma semana; a volatilidade implícita utilizada é a da quarta-feira da semana anterior). Até o momento, artigos anteriores só haviam comparado o modelo GARCH com o modelo de B&S utilizando a volatilidade incondicional do processo GARCH. É também o primeiro trabalho que compara os preços dados pelos modelos com os preços efetivos de mercado.

De uma forma geral, o algoritmo do modelo GARCH apreçou melhor que o modelo de B&S. Essa constatação foi evidenciada mesmo com a atualização semanal do modelo de B&S, enquanto os parâmetros de GARCH calculados inicialmente eram mantidos constantes ao longo de todo o período analisado.

Para o desenvolvimento do algoritmo, Heston & Nandi (2000) partem de uma dinâmica, aqui só mostrada em sua primeira ordem, diferente da de Duan (1995):

$$S_t = S_{t-1} \exp[r + \lambda \sigma_t + \varepsilon_t];$$

$$\varepsilon_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2); \text{ e}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(\varepsilon_{t-1} / \sigma_{t-1} - \gamma \sigma_{t-1})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2,$$

onde γ é o parâmetro resultante da influência assimétrica dos choques (ε_t); um choque positivo afeta a variância diferentemente de um choque negativo. Se o valor de γ é positivo há uma correlação negativa entre o retorno do ativo-objeto e a variância. γ controla a assimetria da distribuição dos retornos logarítmicos. Se γ é nulo, a distribuição é simétrica.

Deve-se observar a ausência do termo $-\frac{\sigma_t^2}{2}$ na equação do preço do ativo-objeto e que o processo da variância pode ser interpretado como uma justaposição dos modelos NGARCH e VGARCH de Engle e Ng (1993). O processo é estacionário se $\beta + \alpha\gamma^2 < 1$.

Os autores realizam testes empíricos com o algoritmo fechado¹⁴ em opções de compra e venda sobre o índice do S&P500. São realizados testes dentro-da-amostra e fora-da-amostra. Os parâmetros de GARCH (α , β , ω e γ) e o λ são estimados por máxima verossimilhança. A taxa livre de risco r é admitida como zero. Duas versões foram realizadas para a estimação; GARCH Simétrico, com γ

¹⁴ O algoritmo fechado para o apreçamento de opções européias derivado por Heston e Nandi não foi descrito neste estudo devido à sua complexidade. Ver a sua fórmula em Heston & Nandi (2000).

nulo e o GARCH Assimétrico com γ diferente de zero. Os dados da amostra foram coletados a cada quarta-feira (o passo era de uma semana) nos anos de 1992, 1993 e 1994.

A comparação entre os resultados dos modelos foi feita com base na medida

$$\sqrt{\frac{SQE}{n}},$$

onde SQE é soma do quadrado dos erros entre o preço do modelo, o erro \bar{P}_m

é igual à diferença entre preço dado pelo modelo e o verificado no mercado, n é o tamanho da amostra e \bar{P}_m é o preço médio das opções no mercado.

Para os testes dentro-da-amostra foi adotado o seguinte procedimento: com os parâmetros calculados para ambas as versões de GARCH com dados do 1º semestre de cada ano, foram estimados os preços das opções para este mesmo período. Estes valores foram comparados com os preços efetivos do mercado e com os encontrados através do modelo de B&S em duas versões: utilizando a volatilidade incondicional estimada pelo método de GARCH (B&S constante) e utilizando a volatilidade implícita da data anterior (uma quarta-feira passada) para o cálculo do preço da opção na data atual (B&S atualizado).

Os resultados dos testes dentro-da-amostra mostram que o γ é sempre positivo, o que indica: que há assimetria e que os choques de variância e o retorno são correlacionados negativamente; que o GARCH assimétrico foi superior a todos os modelos de B&S; que o GARCH simétrico foi superior ao B&S constante (como observado na seção 2.1, o B&S constante é uma versão restrita do GARCH simétrico); que o B&S atualizado foi superior ao GARCH simétrico.

Os procedimentos dos testes fora-da-amostra são descritos a seguir: com os parâmetros calculados no 1º semestre de cada ano para a versão do GARCH assimétrico, foram estimados os preços das opções para o 2º semestre de cada ano. Os parâmetros não são atualizados. O GARCH simétrico foi abandonado devido ao seu insucesso no teste dentro-da-amostra. Os preços das opções por GARCH foram comparados aos preços efetivos do mercado e aos encontrados através dos modelos de B&S constante (que utiliza a volatilidade incondicional encontrada com base nos parâmetros de GARCH dos 1ºs semestres de cada ano) e B&S atualizado (que utiliza a volatilidade implícita atualizada período a período).

Os resultados do teste para o modelo GARCH foram inferiores aos do teste dentro-da-amostra. Contudo, o apreçamento por GARCH continua superior a ambas as versões de B&S. Para opções fora-do-dinheiro, o desempenho do modelo GARCH é substancialmente superior, principalmente para as opções de venda. Para ambos os modelos, B&S e GARCH, quanto maior o tempo para vencimento, menores os erros. Opções fora-do-dinheiro de curto tempo para vencimento são as que possuem maior erro em ambos os modelos, embora o erro no modelo de GARCH seja substancialmente menor.

Os autores concluem que a melhor performance de seu modelo se deve à sua habilidade para capturar a correlação entre a volatilidade e os retornos, e à dependência do preço ao caminho da volatilidade.

Hsieh & Ritchken (2001) comparam os modelos de apreçamento de opções de Duan (1995), de Heston & Nandi (2000) e o de B&S com volatilidade implícita atualizada toda semana para opções europeias do índice S&P500. Os resultados indicaram que o método de Duan possui menos erros em relação ao preço de mercado que o de Heston & Nandi para todas os tempos para vencimento e para todas as situações de proximidade do dinheiro. O GARCH utilizado para o processo de Duan foi o NGARCH, $\sigma_t^2 = \omega + \alpha(\varepsilon_{t-1} - \gamma\sigma_{t-1}^2)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$, onde ε_{t-1} é uma variável aleatória normalmente distribuída com média 0 e variância σ_{t-1}^2 . Os resultados indicam ainda que ambos os modelos GARCH foram capazes de reduzir os vieses do modelo de B&S de sub-apreçamento de opções de fora-do-dinheiro e de curto tempo para vencimento.

Os testes empíricos foram realizados nos anos de 1991 a 1995, com os parâmetros dos modelos GARCH sendo calculados sempre no 1º semestre de cada ano, para se apreçar opções no 2º semestre de cada ano (teste fora-da-amostra). Para o modelo de B&S, o método utilizado foi o mesmo de Heston & Nandi (2000), em que era encontrada a volatilidade implícita do modelo na quarta-feira de uma semana, para ser utilizada na mesma opção na quarta-feira seguinte (teste dentro-da-amostra).

Os autores afirmam que o modelo NGARCH de Duan, mesmo não sendo reestimado freqüentemente (em bimestres ou até em anos), continua a ter um desempenho normalmente melhor que o modelo de B&S sempre atualizado para opções dentro e no-dinheiro. Como existem algoritmos eficientes para apreçar

opções americanas e exóticas que utilizam o processo NGARCH, os autores sugerem a utilização do modelo de apreçamento por GARCH por todos os profissionais da área de risco.

Duan e Zhang (2000) investigam o apreçamento de opções europeias sobre o índice Hang Seng (índice sobre ações negociadas na bolsa de valores de Hong Kong) pelo modelo GARCH. O processo utilizado no modelo mais uma vez é o NGARCH (1,1). O modelo é comparado a duas versões do modelo de B&S: uma empregando o valor de volatilidade implícita extraída da opção no período anterior; e outra utilizando volatilidades diferentes para opções com tempo para vencimento e preços de exercício diferentes.

Para a segunda versão do modelo de B&S, foram calculadas, a cada quarta-feira, as volatilidades implícitas para opções com o mesmo tempo para vencimento, mas com preços de exercício diferentes. Para a quarta-feira seguinte são mantidas as mesmas razões entre as volatilidades da data anterior, porém as volatilidades são ajustadas por uma constante de acordo com o novo preço das opções. Em outras palavras, o formato da curva de volatilidade é fixado, mas é permitido que essa curva suba ou desça.

Os dados da amostra são semanais (a cada quarta-feira) ao longo de 1997 e de janeiro de 1998, ou seja, cobrem o período de turbulência da crise asiática.¹⁵ Somente foram coletadas as opções que possuíam vencimentos no mês corrente, no seguinte, ou no mês posterior a este último. Foram excluídas opções com menos de 14 dias para o vencimento a fim de evitar vieses em relação à liquidez. Também foram excluídas opções extremamente-dentro-do-dinheiro e extremamente-fora-do-dinheiro, uma vez que são pouco negociadas e podem distorcer informações da volatilidade.

O experimento foi realizado dentro-da-amostra, que abrange o ano de 1997, e fora da amostra, que compreende janeiro de 1998.

Os parâmetros do processo NGARCH foram obtidos ao se minimizar o quadrado dos erros entre as volatilidades implícitas do preço dado pelo modelo GARCH e do preço de mercado. Para o cálculo da volatilidade implícita do apreçamento pelo modelo GARCH foi utilizada, mais uma vez, a fórmula de

¹⁵ A crise asiática teve seu início na Tailândia em julho de 1997, com a desvalorização do Thai Bat, a moeda local. Logo em seguida houve a desvalorização do Won (Coreia do Sul), do Ringgit (Malásia), e do Peso Filipino e a economia asiática entrou em recessão.

B&S. Os parâmetros foram estimados para todas as semanas do ano de 1997 (52 semanas).

O modelo de apreçamento por GARCH obteve desempenhos superiores a ambas as versões do modelo de B&S, dentro e fora-da-amostra. A primeira versão de B&S sub-apreçou opções dentro-do-dinheiro e super-apreçou as fora-do-dinheiro, sendo que os vieses foram acentuados em opções de menor tempo para vencimento. Estes vieses sistemáticos desapareceram para a segunda versão. O modelo GARCH não apresentou vieses sistemáticos claramente identificáveis.

A amostra foi dividida em antes e depois de dois de julho de 1997, dia em que foi permitida flutuar a moeda da Tailândia, o que marca o começo da crise asiática. Apesar da volatilidade ter subido bastante após o início das turbulências, o modelo GARCH apresenta um desempenho superior similar, em ambos os períodos, aos modelos de B&S.

Os autores concluem que os resultados empíricos indicam que o mercado de opções sobre o índice Hang Seng funciona de uma forma consistente e previsível, e que o fenômeno do sorriso da volatilidade deve ser encarado como uma falha do modelo de B&S. Os autores acrescentam ainda que, para opções exóticas negociadas em balcão, é extremamente importante empregar modelos consistentes, uma vez que não podem ser conduzidas como uma simples interpolação como em opções européias líquidas.

Como observado anteriormente, este estudo é o primeiro trabalho brasileiro que emprega o modelo apreçamento de opções GARCH. Porém, se faz interessante comentar alguns trabalhos nacionais, uma vez que apresentam várias características semelhantes as deste estudo.

Duarte Jr. (1997) ilustra a importância da simulação de Monte Carlo para o mercado de opções. Ele explica passo a passo como devem ser feitos o apreçamento de opções européias e a estimação das gregas pela simulação de Monte Carlo. Porém, a volatilidade é mantida constante ao longo do tempo para o vencimento.

Aragão e La Roque (1999) utilizam a simulação de Monte Carlo, com volatilidade estocástica, para a análise de risco de uma carteira de opções. O método consiste em gerar cenários aleatórios para preços do ativo-objeto num momento futuro, re-apreçar a carteira de opções em cada um dos cenários, determinar a distribuição de probabilidade do resultado da carteira e calcular o

VaR. É enfatizado que é fundamental se incorporar a influência da volatilidade da volatilidade implícita (no caso, a de B&S) na análise, ou seja, a letra grega “vega”, principalmente no mercado brasileiro. Assim, do mesmo modo que no modelo GARCH de apreçamento de opções, são simuladas duas variáveis aleatórias, o preço do ativo e a sua volatilidade. Porém, essas variáveis são simuladas por intermédio de equações diferentes; para o preço tem-se:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \Delta z,$$

onde μ é o *drift*, e Δz é o movimento browniano-padrão e para a volatilidade

implícita: $\frac{\Delta V}{V} = \mu_v \Delta t + \sigma_v \Delta w$, onde μ é o *drif da volatilidade* t , e σ_v é a

volatilidade da volatilidade implícita.

Os autores mostram que as diferenças dos resultados deste tipo de análise, em comparação à simulação de Monte Carlo padrão, em que há a simulação apenas do preço da ação, podem ser substanciais. Ressalta-se, ainda, a importância da correlação entre o preço da ação e da volatilidade implícita para os resultados de risco.

Ao concluir o artigo, os autores enfatizam que a metodologia pode ser empregada no apreçamento de opções. Entretanto, para se elaborar um modelo preciso, seria necessário um maior preciosismo na definição dos processos estocásticos e consistência entre eles.

Silva e Guimarães (2000) utilizam o modelo de apreçamento de opções de Bakshi que inclui volatilidade estocástica e saltos no processo de difusão no preço do ativo subjacente ao contrato de opção. O modelo é mais uma alternativa ao modelo de B&S que não precisa recorrer à hipótese de que o parâmetro de volatilidade tem que ser ajustado para cada preço de exercício e data de vencimento de opção. Apesar da maior complexidade em relação ao modelo de B&S, o modelo de Bakshi possui fórmula fechada para os preços de opção de compra e venda européias. Os resultados mostraram que o modelo proposto foi capaz de explicar melhor os preços das opções de Telebras (com vencimento em abril, junho e agosto de 1999) do que o modelo de B&S.