

## 4

### Metodologias para mensuração do valor em risco

#### 4.1

##### A teoria dos valores extremos (T.V.E.)

Ao analisar os dados de retornos de séries financeiras, é comum que estas apresentem uma distribuição não normal. No entanto, esse fato gera atrito com as metodologias de Value-at-Risk desenvolvidas para prevenção de riscos financeiros. Ou seja, as ocorrências extremas não são corretamente contempladas nos modelos. Cabe então, neste momento, o questionamento sobre qual seria o método mais adequado para controle de risco nessas situações extremas.

Esta pergunta é importante para permitir uma correta alocação de capital de acordo com o dimensionamento do risco na administração de posições e determinação das exigências de capital requeridas

A Teoria dos Valores Extremos (TVE) ganhou maior importância a partir de 1953, quando barragens que protegem a Holanda do avanço do mar se romperam e causaram a inundação de boa parte do país. A Extremal Value Theory (EVT), ou Teoria dos Valores Extremos, permite estimar probabilidades e quantis com razoável precisão nos limites dos valores encontrados dentro da amostra. Sua modelagem corresponde a um ajuste na cauda da distribuição dos dados originais, já que o interior da distribuição fornece pouca informação sobre os seus extremos.

Dessa forma, o cálculo do Value-at-Risk por TVE se mostra atrativo, uma vez que ele está ligado às observações extremas. Contudo, para uma correta utilização da teoria, torna-se necessário que os dados que compõem a amostra sejam independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.).

## A distribuição dos valores extremos

Primeiramente, para uma dada série de retornos de ativos, ordenamos em ordem crescente,  $\{r_1, \dots, r_n\}$ , onde  $r_1$  é o menor valor do retorno (o mínimo), e  $r_n$  o máximo. Lembrando-se que para posições compradas, foco deste estudo,  $r_1$  seria o dado mais relevante, ao representar a pior perda possível.

Assumimos, a partir dos dados acima, que os retornos são serialmente independentes e com uma Função de Distribuição Acumulada (CDF)  $F(x)$ , onde os limites dos retornos seriam  $]-\infty; +\infty[$ . Nesse caso, a CDF pode ser dada por:

$$F_{n,1}(x) = P[r_{(l)} \leq x] = 1 - P[r_{(l)} > x] = 1 - P[r_1 > x_1, r_2 > x_2, \dots, r_n > x_n] \quad (43)$$

E, considerando a independência entre os retornos:

$$F_{n,1}(x) = 1 - \prod_{j=1}^n P[r_{(i)} > x] = 1 - \prod_{j=1}^n [1 - P[r_{(i)} \leq x]] = 1 - [1 - F(x)]^n \quad (44)$$

Contudo, a Função de Distribuição Cumulativa  $F(x)$  de  $r_t$  é desconhecida, o que torna  $F_{n,1}(x)$  também desconhecida. No entanto, fazendo uso de uma adaptação da demonstração para máximos descrita em Embrechts Et Al (1997), se  $n$  cresce para o infinito,  $F_{n,1}(x)$  torna-se degenerada, conforme iremos demonstrar a seguir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n,1}(x) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - F(x)]^n \quad (45)$$

Mas se  $x \leq l$ ,  $F(x) = 0$  e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - F(x)]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} [1]^n = 1 \quad (46)$$

O que resulta em:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n,1}(x) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - F(x)]^n = 0 \quad (47)$$

Por outro lado, se  $x \geq l$ ,  $F(x) > 0$  e, portanto,  $1 - F(x) < 1$ , o que resulta em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - F(x)]^n = 0 \quad (48)$$

E, neste caso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n,1}(x) = 1 - 0 = 1 \quad (49)$$

Ou seja, essa Função Densidade Cumulativa não possui valores práticos! Como resultado, recorre-se a resultados de Convergência fraca para mínimos centrados e normalizados, fornecidos pelo Teorema de Fisher – Tippett (anunciado logo mais), que afirma que podem ser obtidas duas seqüências  $\{\beta_n\}$  e  $\{\alpha_n\}$ , onde  $\alpha_n \geq 0$ , de modo que a distribuição  $r_{(l^*)} = \frac{(r_{(l)} - \beta_n)}{\alpha_n}$  converge para uma distribuição não-degenerada quando  $n \rightarrow \infty$ .

Considerando  $\{\beta_n\}$  uma série local e  $\{\alpha_n\}$  uma série de valores escalares, seguindo a ótica do Teorema de Fisher – Tippett sobre o fato de se assumirem retornos independentes, a distribuição limite dos mínimos normalizados é dada por:

$$F_*(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-(1 + kx)^{\frac{1}{k}}\right] & , \text{ se } k \neq 0 \\ 1 - \exp[-\exp(x)] & , \text{ se } k = 0 \end{cases} \quad (50)$$

Para  $x < -\frac{1}{k}$ , se  $k < 0$  e para  $x > -\frac{1}{k}$  se  $k > 0$ , onde o subscrito \* significa mínimo. Para o caso onde  $k = 0$ , temos  $\lim_{k \rightarrow 0} ((1 + kx)^{1/k}) = \exp(x)$ . O parâmetro  $k$  é chamado de parâmetro de formato que governa o comportamento da cauda da distribuição limite.

A distribuição limite na eq. (50) é a distribuição generalizada do valor extremo de Jenkinson para mínimo, que compreende os três tipos de distribuições limites de Gnedenko, a família Gumbel, a família Fréchet e a família Weibull. Resumidamente, o comportamento da cauda de  $F(x)$  determina a distribuição limite de mínimos  $F_*(x)$ . Para gerenciamento de risco, na maior parte dos casos o interesse recai sobre a família Fréchet, com distribuições estáveis e *t-student*.

Para a Teoria dos Valores Extremos, o comportamento da cauda da CDF  $F(x)$  de  $r_t$  determina a distribuição limite (normalizada) de mínimos  $F_*(x)$ . Além disso, a teoria geralmente é aplicável a um amplo número de distribuições de retornos  $r_t$ .

## 4.2

### O teorema de FISCHER - TIPPET

Para um dado conjunto de retornos  $r_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , de tal forma que sejam i.i.d., podemos dizer que, se existirem constantes  $\alpha_n > 0$  e  $\beta_n$ , e alguma distribuição não degenerada  $H$ , de modo que:

$$\frac{(r_t - \beta_n)^{\alpha_n}}{\alpha_n} \xrightarrow{d} H, n \rightarrow \infty \quad (51)$$

Então podemos classificar  $H$  como uma distribuição de Fréchet, Weibull ou Gumbel, como se segue:

#### Fréchet

$$\Phi_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{para } x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0 \quad (52)$$

#### Weibull

$$\Psi_\alpha = \begin{cases} \exp\{-x^{-\alpha}\}, & \text{para } x \leq 0 \\ 1, & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0 \quad (53)$$

#### Gumbel

$$\Lambda_\alpha = \exp\{-e^{-x}\}, \text{ para } x \in \mathfrak{R} \quad (54)$$

O Teorema de Fisher – Tippet vale para qualquer variável aleatória, desde que seja independente e identicamente distribuída, sendo que a transformação mencionada produza uma variável aleatória não degenerada. Para essa classe de variáveis aleatórias denominamos de distribuições Max-estáveis.

### 4.3 Estimação dos parâmetros da distribuição de valores extremos

Entre os métodos de estimação dos parâmetros da cauda das distribuições utilizando-se a Teoria dos Valores Extremos, podemos utilizar métodos não paramétricos (Estimador de Hill, Estimador de Pickands) ou abordar métodos paramétricos (Máxima Verossimilhança, método de regressão).

Para o cálculo dos parâmetros  $k, \beta_n, \alpha_n$ , vamos analisar uma amostra de retornos, onde há um mínimo e um máximo. Por se tratar de três parâmetros, quando apenas temos dois valores extremos, vamos utilizar um artifício que consiste em dividirmos a amostra em sub-períodos. Com  $g$  sub-períodos, podemos usar a TVE para cada um destes.

Primeiramente, supondo uma amostra com  $T$  retornos, vamos formar  $g$  conjuntos com  $n$  observações cada, de modo que  $T = gn$ . Para utilizarmos a TVE com eficácia, temos que ter um número  $n$  suficientemente grande. Para cada sub-amostra, consideremos  $r_{n,i}$  o valor mínimo do retorno da  $i$ -ésima sub-amostra. Para um  $n$  suficientemente grande,  $x_{n,i} = \frac{(r_{n,i} - \beta_n)}{\alpha_n}$  deve seguir uma distribuição de valor extremo. Com isso, podemos aproximar o conjunto de mínimos das sub-amostras  $\{r_{n,i}/i = 1, \dots, g\}$  como sendo uma amostra de  $g$  observações que segue uma distribuição de valores extremos.

Para localizarmos um mínimo em uma sub-amostra, podemos definir-lo como:

$$r_{n,i} = \min_{1 \leq j \leq n} \{r_{(i-1)n+j}\}, \text{ para } i = 1, \dots, g \quad (55)$$

Assim, com um conjunto de mínimos, torna-se possível o cálculo da estimativa dos parâmetros das caudas das distribuições da TVE.

#### Cálculo dos parâmetros por métodos paramétricos

Para estimarmos os parâmetros das caudas das distribuições de valores extremos, mencionamos que poderíamos utilizar de dois ferramentais estatísticos, o Método da Máxima Verossimilhança e o Método de regressão. Vamos aqui abordar resumidamente ambos, já que o foco do presente estudo se baseia em uma estimativa por método não paramétrico.

## Método de Máxima verossimilhança

Conforme mencionado, para um  $n$  suficientemente grande e considerando  $r_{n,i}$  o valor mínimo do retorno da  $i$ -ésima sub-amostra,  $x_{n,i} = \frac{(r_{n,i} - \beta_n)}{\alpha_n}$  deve seguir uma distribuição de valor extremo e sua pdf pode ser dada pela derivada da Eq. (50).

Se  $k \neq 0$ :

$$f_*(x) = \frac{dF_*(x)}{dx} = -\exp\left[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}\right] \frac{d}{dx}\left[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}\right] = -\exp\left[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}\right] \left[-\frac{1}{k}(1+kx)^{\left(\frac{1}{k}-1\right)}k\right]$$

$$f_*(x) = (1+kx)^{\left(\frac{1}{k}-1\right)} \exp\left[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}\right] \quad (56)$$

Se  $k = 0$ :

$$f_*(x) = \frac{dF_*(x)}{dx} = -(-\exp(x))\exp(-\exp(x)) = \exp(x)\exp(-\exp(x))$$

$$f_*(x) = \exp(x - \exp(x))$$

$$f_*(x) = \begin{cases} (1+kx)^{\left(\frac{1}{k}-1\right)} \exp\left[-(1+kx)^{\frac{1}{k}}\right] & , \text{ se } k \neq 0 \\ \exp(x - \exp(x)) & , \text{ se } k = 0 \end{cases} \quad (57)$$

onde  $-\infty < x < \infty$  para  $k = 0$ ;  $x < -\frac{1}{k}$  para  $k < 0$ ;  $x > -\frac{1}{k}$  para  $k > 0$

Admitindo-se que os retornos são independentes, a função de verossimilhança do conjunto de mínimos das sub-amostras é dada por:

$$l(r_{n,1}, \dots, r_{n,g} | k_n, \beta_n, \alpha_n) = \prod_{i=1}^g f(r_{n,i})$$

$$l(r_{n,1}, \dots, r_{n,g} | k_n, \beta_n, \alpha_n) = \prod_{i=1}^g \left\{ \left[ 1 + k_n \left( \frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right]^{\left( \frac{-1+k_n}{k_n} \right)} \exp \left\{ \sum_{i=1}^g \left[ - \left[ 1 + k_n \left( \frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right]^{\frac{1}{k_n}} \right] \right\} \right\} \quad (58)$$

Aplicando-se à Eq. (57) a função logarítmica, obtemos:

$$\begin{aligned}
 L(k_n, \beta_n, \alpha_n) &= \ln[l(r_{n,1}, \dots, r_{n,g} | k_n, \beta_n, \alpha_n)] \\
 &= \sum_{i=1}^g \left\{ \left[ -\left( \frac{-1+k_n}{k_n} \right) \right] \ln \left[ 1 + k_n \left( \frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right] - \left[ 1 + k_n \left( \frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right]^{\frac{1}{k_n}} \right\} \quad (59)
 \end{aligned}$$

Aplicando-se à Eq. (58) derivadas parciais e igualando-se à zero, obtemos os estimadores  $k_n$ ,  $\beta_n$  e  $\alpha_n$ .

$$\frac{\partial L(k_n, \beta_n, \alpha_n)}{\partial k_n} = 0 ; \quad \frac{\partial L(k_n, \beta_n, \alpha_n)}{\partial \beta_n} = 0 ; \quad \frac{\partial L(k_n, \beta_n, \alpha_n)}{\partial \alpha_n} = 0 \quad (60)$$

Essa estimativa é não viesada, assintoticamente normal e de mínima variância sob as premissas consideradas. Uma observação que julgo relevante mencionar neste ponto é que ao ajustar a distribuição generalizada do valor extremo aos mínimos de mínimos disjuntos, pode haver informações em outras observações além dos mínimos e que não estamos considerando.

## Método de Regressão

Para o Método da regressão, consideramos que o conjunto dos mínimos das sub-amostras são amostras aleatórias da distribuição de valores extremos generalizada e faz uso de propriedades de ordenação estatística. Apesar de consistente, este método de estimação é menos eficiente que o método de estimação a partir da função de verossimilhança.

$$\ln \left[ -\ln \left( \frac{g+1-i}{g+1} \right) \right] = \begin{cases} \frac{1}{k_n} \ln \left( 1 + k_n \frac{(r_{n(i)} - \beta_n)}{\alpha_n} \right) + e_i, & \text{se } k \neq 0 \\ \frac{r_{n(i)}}{\alpha_n} - \frac{\beta_n}{\alpha_n} + e_i, & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (61)$$

onde:  $i = 1, \dots, g$ ;  $e_i$  é o erro associado a regressão.

## Cálculo dos parâmetros por métodos não-paramétricos

Para o uso de métodos não paramétricos, vamos fazer uso do Estimador de Hill e do Estimador de Pickands, que usam diretamente retornos e torna desnecessário dividirmos em sub-amostras.

Considerando o parâmetro de forma da distribuição  $k$ , e ordenando-se os retornos  $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \dots \leq r_{(T)}$ , e considerando  $q$  um número positivo, podemos definir os Estimadores de Hill e Pickands da seguinte forma:

$$\widehat{K}_h(q) = -\frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \{\ln[-r_{(i)}] - \ln[-r_{(q+1)}]\} \quad (62)$$

$$\widehat{K}_p(q) = -\frac{1}{\ln(2)} \ln\left[\frac{-r_{(q)} + r_{(2q)}}{-r_{(2q)} + r_{(4q)}}\right] \quad (63)$$

Onde  $1 \leq q \leq n$  e  $1 \leq i \leq q$ .

Segundo Embrechts ET AL (1997), podemos obter consistência fraca quando  $(r_t)$  é i.i.d., ou seja:

Se  $q \rightarrow \infty$ ,  $\frac{q}{n} \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ , então podemos afirmar que:

$$\widehat{K}_h(q) \xrightarrow{p} k \quad (64)$$

Vale mencionar também que, para  $\sqrt{q} (\widehat{K}_p(q) - k) \xrightarrow{d} N(0, k^2)$ , podemos obter consistência forte e normalidade assintótica.

Embora o Estimador de Hill seja baseado em uma amostra de dados i.i.d., Resnick e Starica (1998) comprovam que é possível obter consistência para dados que apresentem dependência.

Para a escolha do número de estatísticas de ordem  $q$ , podemos dizer que este é um ponto que levanta questionamentos, pois representa um ponto de corte, a partir do qual as caudas da distribuição efetivamente se iniciam e onde a TVE pode ser observada e aplicada com maior eficácia.

Embora sensível à escolha da estatística de ordem  $q$ , não existe um consenso sobre a melhor maneira de se obtê-lo. Portanto, qualquer análise usando a TVE deve ser cuidadosa neste aspecto.

O problema reside na seguinte análise: Conforme mostramos anteriormente,  $\sqrt{q}(\hat{K}_p(q) - k) \xrightarrow{d} N(0, k^2)$ , Isto significa que quanto maior  $q$ , menor seria a variância do estimador. Contudo, não é suficiente escolher um  $q$  reduzido de modo a manter a variância reduzida, pois existe um viés em amostras finitas, crescente com o valor de  $q$ . Ou seja, há um “*trade-off*” entre variância e viés para o uso do Estimador de Hill. Precisamos, então, buscar um valor ótimo, onde viés e variância se estabilizam.

Para o cálculo deste  $q$  ótimo, há alguns estudos que apontam alguns métodos, como o método proposto por Danielsson e Vries (1997) e baseado em *bootstrap*. Contudo, vamos utilizar o método gráfico, denominado Hillplot (Embrechts (1997)). Este método se baseia em traçarmos um gráfico  $\{q, \hat{K}_h(q)\}$  e procurar um ponto específico onde viés e variância se equilibram.

### Estimativa de parâmetros da distribuição de valores extremos

Conforme já mencionado anteriormente, com  $T$  observações de retornos de um ativo/carteira, teremos  $g$  sub-períodos de tamanho  $n$ . Substituindo  $x_{n,i} = \frac{(r_{n,i} - \beta_n)}{\alpha_n}$  na CDF eq. (50), e sendo  $p^*$  a menor probabilidade de perdas potenciais e  $r_{n,p^*}$  o  $p^*$ -ésimo quantil do sub-período, temos que:

$$p^* = \begin{cases} 1 - \exp \left[ \left( -1 + \frac{k_n(r_{n,p^*} - \beta_n)}{\alpha_n} \right)^{\frac{1}{k_n}} \right], & \text{se } k \neq 0 \\ 1 - \exp \left[ - \exp \left( \frac{(r_{n,p^*} - \beta_n)}{\alpha_n} \right) \right], & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (65)$$

Aplicando ln e fazendo algum algebrismo, temos:

$$\ln(1 - p^*) = \begin{cases} -\left(1 + \frac{k_n(r_n^* - \beta_n)}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{k_n}}, & \text{se } k \neq 0 \\ -\exp\left(\frac{(r_n^* - \beta_n)}{\alpha_n}\right), & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (66)$$

Onde  $r_n^*$  é o quantil, que pode ser expresso como:

$$r_n^* = \begin{cases} \beta_n - \frac{\alpha_n}{k_n} ([-\ln(1 - p^*)]^{k_n}), & \text{se } k \neq 0 \\ \beta_n + \alpha_n \ln[-\ln(1 - p^*)], & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (67)$$

No entanto, para considerarmos o cálculo do parâmetro da cauda  $k$  através do Estimador de Hill, segundo Embrechts (1997), precisamos considerar que o estimador é uma particularização do estimador de Máxima Verossimilhança. Assim, podemos reescrever a função de distribuição acumulada conforme se segue:

$$F(r_i) = \frac{q}{n} \left(\frac{r_i}{r_{(q+1)}}\right)^{\frac{1}{k_n(q)}} \quad (68)$$

$$r_i = \left[\frac{n}{q}((1 - p))\right]^{k_n(q)} r_{(q+1)} \quad (69)$$

Assim, para um  $p^*$ , o quantil  $r_n^*$  representa o VaR com base TVE, onde consideramos os mínimos como sendo os mínimos das sub - amostras dos retornos. Por serem não correlacionados ou fracamente correlacionados, podemos ainda reescrever usando a eq. (61) da seguinte forma:

$$p^* = P[r_{n,i} \leq r_n^*] = 1 - [1 - P(r_{n,i} \leq r_n^*)]^n \quad (70)$$

Esta fórmula consegue relacionar o retorno do ativo/carteira com a probabilidade de ocorrência do mesmo, considerando que modelamos a distribuição de retornos com base na TVE. Ou seja,  $p = P(r_t \leq r_n^*)$ . Usando a eq. (61), podemos definir o VaR como:

$$VaR = \begin{cases} \beta_n - \frac{\alpha_n}{k_n} (1 - [-\ln(1 - p^*)]) , se k \neq 0 \\ \beta_n + \alpha_n \ln[-\ln(1 - p^n)] , se k = 0 \end{cases} \quad (71)$$

Assim, substituindo na eq. (71) a eq. (67), temos:

$$VaR = \begin{cases} \beta_n - \frac{\alpha_n}{k_n} (1 - [\ln(1 - p)^n]) , se k \neq 0 \\ \beta_n + \alpha_n \ln[-\ln(1 - p)^n] , se k = 0 \end{cases} \quad (72)$$

Para o caso do Estimador de Hill, conforme a eq. (69), o cálculo do VaR seria dado por:

$$VaR = \left[ \frac{n}{q} ((1 - p)) \right]^{k_h(q)} r_{(q+1)} \quad (73)$$

Onde :

$k_h(q)$ : Estimador de Hill;

$n$ : Tamanho dos sub-períodos da amostra;

$q$ : Estatística de ordem;

$r_{(q+1)}$ : retorno do índice  $q$ (estatística de ordem) + 1;

$$p = P(r_t \leq r_n^*)$$

#### 4.4 A Simulação de Monte Carlo

Desenvolvido por Metropolis & Ulam (1949), a Simulação de Monte Carlo (SMC) surgiu no contexto da Segunda Guerra Mundial e consiste em um método estatístico para avaliar problemas complexos onde as variáveis são muitas e torna-se difícil estimar o todo. Ou seja, quando se torna difícil modelar um evento por uma formulação analítica ou equação matemática, este método nos permite “simular” caminhos para a evolução do fenômeno, até encontrar uma aproximação satisfatória que o explique.

Quando consideramos que o método “simula” caminhos para encontrar uma resposta aproximada, estamos dizendo que, diferentemente de uma equação matemática e um resultado exato, a SMC não objetiva encontrar um resultado exato, mas uma distribuição de valores para descrever um determinado fenômeno. Podemos dizer que a SMC ajuda a estimar as distribuições de probabilidades de diferentes fatores que condicionam as decisões, como tamanho do mercado, preço, investimentos, custos etc.

A SMC tem sido aplicada em vários ramos da ciência moderna, e em finanças sua aplicabilidade se faz necessária para lidar com problemas de orçamentação de capital, avaliação de carteiras de investimentos, *hedging* com futuros, opções reais e financeiras, gerenciamento de risco sobre taxas de juros, cálculo do VaR, entre outras.

Fortemente embasado na Lei dos Grandes Números, onde, se o número de iterações for grande, a média da distribuição converge para a média teórica, a SMC ganha precisão com um grande número de simulações. Contudo, este é um problema cuja solução está ligada ao desenvolvimento de tecnologias computacionais, que permitem ganhar eficiência em cálculos complexos. Até alguns anos, este método esbarrava nessa limitação, mas com o avanço tecnológico das duas últimas décadas esta técnica tem se tornado mais comum entre os tomadores de decisão.

Com relação ao número de simulações, podemos dizer que existem dois tipos de erros numéricos significativos que podem ocorrer:

- I. Erro de discretização de processos estocásticos contínuos
- II. Erro de amostragem das distribuições.

No presente estudo, a SMC é calculada no Software Microsoft Excel e procurei usar um número de simulações que permitisse um equilíbrio com a complexidade computacional e cujo prazo de realização dos cálculos não fosse demasiadamente extenso.

## **Execução**

O processo de simulação começa com a conversão de números aleatórios em observações das variáveis. Com isso, esperamos obter uma distribuição de probabilidade que de certa forma se aproxime da distribuição real da variável. Os principais passos a serem seguidos no processo são:

- I. Estabelecimento de todas as variáveis e equações necessárias para modelagem para obter os retornos da carteira, que devem refletir interdependência entre as variáveis.
- II. Especificar probabilidades de erro de previsão para cada parâmetro.
- III. Combinar os valores das distribuições de erros de previsão das variáveis, repetindo esse processo um número grande de vezes.

Uma forma prática para se obter a distribuição de probabilidade é analisar uma seqüência de valores para a variável em estudo e montar a sua probabilidade de freqüência. Considere um exemplo simples: Vamos supor que uma variável de cotação de uma moeda estrangeira flutue frente ao Real (R\$) num determinado período, onde o preço mínimo foi de \$3,00 e o preço máximo foi de R\$44,00, variando-se em uma amostra de 100 valores em um determinado período. Com isso, podemos gerar a seguinte distribuição de freqüências:

| Faixa de valores           | Número de observações | Frequência acumulada |
|----------------------------|-----------------------|----------------------|
| $\leq 3$                   | 1                     | 1%                   |
| $> 3 \text{ \& } < 7$      | 7                     | 8%                   |
| $> 7 \text{ \& } < 11$     | 5                     | 13%                  |
| $> 11 \text{ \& } < 15$    | 7                     | 20%                  |
| $\geq 15 \text{ \& } < 19$ | 27                    | 47%                  |
| $\geq 19 \text{ \& } < 24$ | 18                    | 65%                  |
| $\geq 24 \text{ \& } < 29$ | 9                     | 74%                  |
| $\geq 29 \text{ \& } < 34$ | 7                     | 81%                  |
| $\geq 34 \text{ \& } < 39$ | 11                    | 92%                  |
| $\geq 39 \text{ \& } < 44$ | 8                     | 100%                 |
| Total                      | 100                   |                      |

Tabela 2: Distribuição de frequências de cotação de uma moeda

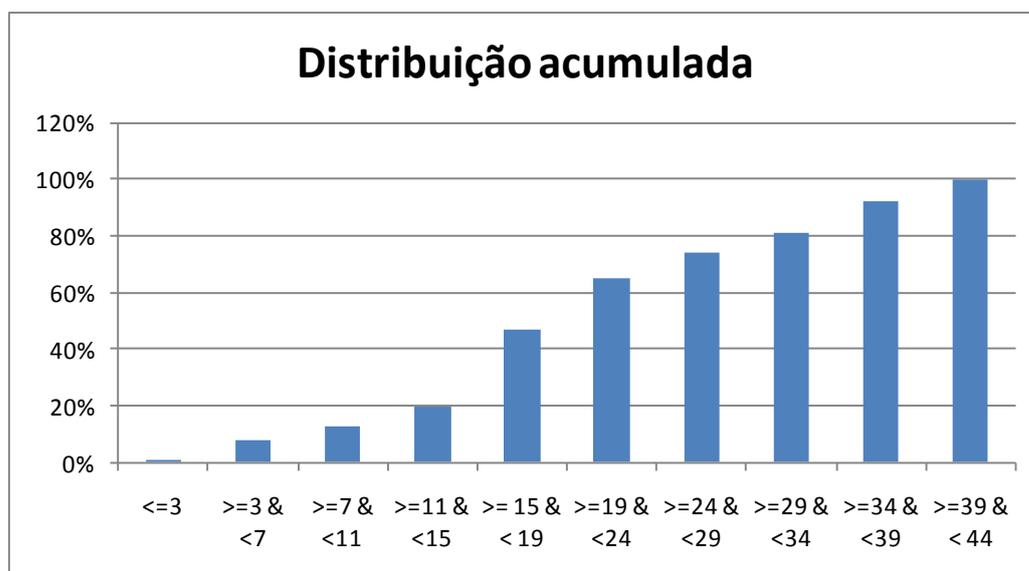


Figura 1 – Distribuição de probabilidades cumulativa

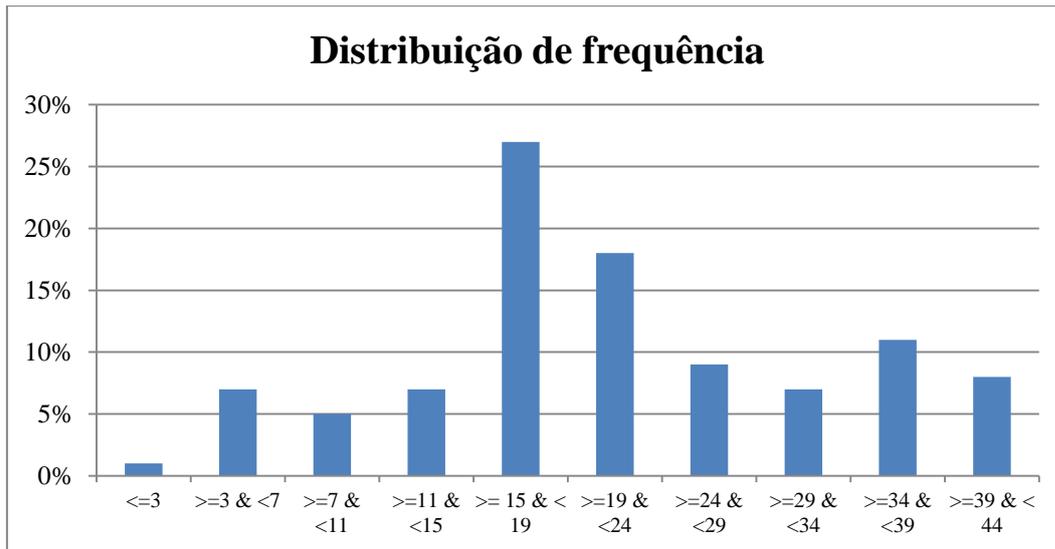


Figura 2 – Distribuição de frequência

O próximo passo será gerar uma tabela de números aleatórios, para qual pode ser usado algum programa de cômputo estatístico, como o Excel, o Matlab, entre outros. Segue na Tabela 3 uma tabela gerada pelo Microsoft Excel. Cada número aleatório indica o resultado de determinado experimento e, de acordo com a sua coincidência com os números representativos das variáveis, podemos determinar as variáveis em análise, que no nosso exemplo se refere ao preço de cotação de uma moeda frente à outra.

Na prática, pela Lei dos Grandes Números, seria recomendável utilizarmos um mínimo de 100 experimentos para obtermos resultados com uma qualidade superior. Embora na tabela abaixo coloco 100 números aleatórios, no presente estudo foram usadas 50.000 simulações na geração de retornos para compor a carteira.

### Geração de números aleatórios

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 23 | 4  | 8  | 5  | 15 | 8  | 32 | 23 | 13 | 15 |
| 41 | 41 | 12 | 10 | 25 | 4  | 11 | 34 | 1  | 15 |
| 24 | 17 | 38 | 20 | 29 | 1  | 28 | 4  | 25 | 3  |
| 16 | 17 | 35 | 36 | 8  | 20 | 34 | 34 | 23 | 29 |
| 24 | 26 | 31 | 9  | 6  | 4  | 35 | 33 | 7  | 18 |
| 30 | 23 | 24 | 38 | 17 | 42 | 43 | 11 | 22 | 42 |
| 16 | 30 | 8  | 18 | 27 | 29 | 31 | 40 | 36 | 32 |
| 42 | 40 | 32 | 30 | 4  | 12 | 28 | 34 | 39 | 6  |
| 15 | 24 | 19 | 24 | 12 | 35 | 37 | 43 | 43 | 30 |
| 9  | 41 | 21 | 25 | 39 | 12 | 5  | 4  | 36 | 7  |

Tabela 3: Geração de números aleatórios

Após a geração dos números aleatórios, iremos usar cada número gerado para alocar-lo em uma faixa representativa da variável em análise. Devemos seguir esse procedimento até alcançar um número suficientemente grande de números aleatórios, que nos permita atribuir confiabilidade à modelagem. Desse modo, vamos criando valores de distribuição de probabilidades de faixa de frequência das variáveis e montamos um novo quadro.

À partir deste novo quadro construído, vamos definir a frequência com que cada faixa de valores da variável em análise ocorre. Assim, podemos chegar a um valor esperado da variável em análise ao multiplicarmos o valor médio de cada faixa de frequência pela sua probabilidade de ocorrência.

Samanez (2007) afirma que uma das vantagens da SMC trata da especificação da interdependência entre as variáveis, mostrando de que forma estas variáveis estariam correlacionadas e ajudando a verificar o resultado final quando as variáveis determinantes sofrem mudanças aleatórias.

Ou seja, a SMC é uma ferramenta de simulação de probabilidades, não uma ferramenta de otimização sob incerteza. E segundo a Lei dos Grandes Números, com um número grande de interações, é possível crer que a média da distribuição irá convergir para a média teórica.

## 4.5 A Simulação de Monte Carlo e a Teoria dos Valores Extremos

Embora a Simulação de Monte Carlo seja capaz de incorporar um grande número de incertezas ao modelo, bem como a interdependência entre as variáveis, ela é uma simulação de probabilidades, não uma ferramenta de otimização sob incerteza. Com um maior número de iterações, a média da distribuição irá convergir para a média teórica, gerando uma distribuição de valores, não um resultado apenas. Mas isso ainda leva em consideração o fato de que a distribuição de dados passados pode ser uma boa referência para a distribuição de dados futuros.

Com este estudo, a partir de carteiras de investimentos que irei construir por metodologias distintas (Modelo de Índice Único e Medida  $\hat{\Omega}$ ) no Capítulo 5, meu objetivo está em mostrar que o uso da T.V.E. pode ser mais eficiente que a S.M.C. para níveis de confiança mais elevados, por estar ligada diretamente à ocorrência de valores extremos e à informação presente nas caudas da distribuição.

Ao analisar o número de violações para cada nível de confiança do VaR, usarei o Teste de Kupiec para formalizar a aceitação / rejeição do número de violações dado pelo Var pela S.M.C. e pelo VaR pela T.V.E., onde espero encontrar melhores resultados para a T.V.E. para níveis de confiança mais elevados. Com isso, espero comprovar sua maior eficiência para estimação de perdas / ganhos elevados frente ao cálculo do VaR pela S.M.C.