

## 6. Modelo probabilístico

### 6.1. Introdução

No capítulo 2 foram apresentados modelos de fadiga para o concreto que fornecem expressões determinísticas para relacionar o número de ciclos até a ruptura com as tensões utilizadas em ensaios de fadiga, contemplando a frequência de carregamento (Hsu, 1981; Furtak, 1984; Zhang *et al.*, 1996). Entretanto, nenhum desses autores considerou a dispersão nos ensaios de fadiga em concreto. A primeira consideração da distribuição estatística da resistência do concreto para ensaios de fadiga foi realizada por Zhao *et al.* (2007), que considerou uma distribuição normal como sugerido por algumas normas de projeto internacionais. Recentemente Przybilla *et al.* (2011) consideraram o ajuste estatístico da resistência característica de materiais frágeis e derivaram a função de distribuição cumulativa (CDF – *cumulative distribution function*) da distribuição de Weibull de três parâmetros para ensaios de fadiga em flexão em três e quatro pontos, para materiais frágeis como cerâmica. No Anexo B explica-se o que é e como se ajusta uma função de distribuição cumulativa a um grupo de dados quaisquer, no caso, os resultados de ensaios. A distribuição de Weibull também foi utilizada para ajustar resultados de vida à fadiga – número de ciclos até a ruptura  $N$  – em concreto para variados níveis de tensão por Oh (1991), e para ajustar a vida à fadiga em flexão de concreto com nanopartículas por Li *et al.* (2007).

Castillo e seus colaboradores (2008, 2009) propuseram um modelo probabilístico geral para prever o comportamento à fadiga para qualquer nível e faixa de tensões, baseado em ensaios de laboratório em materiais dúcteis como, por exemplo, o aço. O modelo tem nove parâmetros de ajuste, os quais são definidos por meio de considerações físicas e de compatibilidade em um modelo estatístico de Weibull. Contudo, esse modelo não serve para materiais frágeis como o concreto, assim como não leva em consideração a influência da frequência de carregamento.

Os modelos propostos que consideram a distribuição estatística de ensaios de fadiga não servem para materiais frágeis como o concreto. Os modelos para concreto consideram apenas a distribuição estatística dos resultados de resistência ou da vida à fadiga, e não de ambos os casos.

Neste capítulo é proposto o desenvolvimento de um modelo probabilístico para avaliar a vida à fadiga do concreto com base nos resultados experimentais, considerando-se tanto a distribuição estatística das propriedades mecânicas do material quanto a distribuição dos ensaios de fadiga, contemplando a influência da frequência de carregamento. Esse modelo está baseado na consideração física que a ruptura de um corpo de prova a um ciclo ocorre pela mesma causa que um corpo de prova que rompe após milhares ou milhões de ciclos.

Inicialmente toda a distribuição estatística dada por ensaios de caracterização – ensaios de compressão – foi considerada para elaborar o modelo de fadiga. Segundo, a frequência de carregamento foi levada em conta baseada na resposta dinâmica descrita no Código Modelo FIB (2010), e finalmente, a partir dos ensaios de fadiga de configurações conhecidas ( $S_{máx}$ ,  $R$  e  $f$ ) se estabelecem funções que descrevem a vida à fadiga para diferentes níveis de probabilidade de falha.

A faixa de aplicação do modelo proposto está abaixo dos 10 Hz. Uma vez que os ensaios foram realizados entre 0,0625 Hz e 4 Hz, assim a aplicação desse modelo acima de 10 Hz necessitaria ser corroborada por ensaios adicionais.

Este modelo probabilístico foi recentemente publicado (Saucedo *et al.*, 2013) com enfoque na fundamentação matemática contrastada com poucos exemplos. Neste capítulo o modelo é exposto detalhadamente e todos os resultados de fadiga apresentados no capítulo 5 são usados para validação do modelo.

## **6.2. Modelo probabilístico para fadiga baseado na distribuição inicial**

Como mencionado anteriormente, foi desenvolvido um modelo probabilístico de fadiga para concreto levando em consideração a distribuição estatística dos ensaios de caracterização da resistência e dos ensaios de fadiga, a influência da frequência de carregamento e da razão entre tensões mínima e máxima, assumindo-se as seguintes hipóteses:

- as propriedades mecânicas do material como resistência à compressão ou à tração seguem a distribuição de Weibull de três parâmetros. Nesse caso ensaios de compressão em corpos de prova cúbicos;
- essa distribuição estatística é influenciada pela condição dinâmica por meio da frequência de carregamento. A relação fornecida pelo Código Modelo FIB (2010) para descrever as propriedades dinâmicas do concreto é estendida para considerar a influência da frequência;
- existe uma tensão mínima  $\sigma_{mín_0}$  que é uma assíntota para uma probabilidade de falha nula.

Neste capítulo as tensões serão simbolizadas pela letra grega  $\sigma$ , diferente dos capítulos anteriores quando eram simbolizadas pela letra  $S$ . Em termos práticos a tensão máxima de um ensaio de fadiga  $S_{máx} = \sigma_{máx}$  é a mesma apresentada no programa experimental ou no modelo.

Para certa quantidade de ensaios de caracterização, no caso de compressão, realizados a uma taxa de carregamento  $\dot{\sigma}_0$  constante, considerada estática, onde o ponto (  $\cdot$  ) representa a derivada em função do tempo, e a resistência medida ou tensão de ruptura a um ciclo é denominada  $\sigma_{f_0}$  ( $f$  para falha,  $0$  para carregamento estático), a probabilidade de falha  $PF$  correspondente a cada nível de tensões pode ser ajustada à função de distribuição cumulativa CDF da distribuição de Weibull de três parâmetros por:

$$PF(\sigma_{f_0}) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_{f_0} - \sigma_{mín_0}}{\lambda} \right)^k \right], \sigma_{f_0} \geq \sigma_{mín_0} \quad \text{eq.(6.1)}$$

onde  $\sigma_{mín_0}$  é o parâmetro de locação ou o limite de tensão abaixo do qual nenhuma ruptura ocorreria, enquanto que  $\lambda$  e  $k$  são os parâmetros de Weibull de escala e forma, respectivamente. Na Equação 6.1 o conceito de ruptura absoluta ou dano absoluto é substituído pela probabilidade de falha por ruptura, variando de 0 a 1. A distribuição estatística dada pela Equação 6.1 é definida como distribuição inicial  $D_i$ , sendo uma propriedade do material obtida por meio de ensaios experimentais de caracterização da resistência.

### 6.2.1. Influência da frequência de carregamento

Para relacionar a resistência à compressão dinâmica  $f_{cd}$  ( $f$  para falha,  $c$  para compressão,  $d$  para dinâmico) com sua correspondente estática  $f_{c_0}$  utiliza-se a expressão empírica fornecida pelo Código Modelo FIB (2010):

$$\frac{f_{cd}}{f_{c_0}} = \left( \frac{\dot{\sigma}_d}{\dot{\sigma}_o} \right)^\alpha \quad \text{eq.(6.2)}$$

onde  $\dot{\sigma}_d$  e  $\dot{\sigma}_o$  são a taxa de carregamento do ensaio de fadiga em compressão e do ensaio de caracterização estático à compressão, respectivamente. O expoente  $\alpha$  é definido pelo Código Modelo como 0,014, onde o efeito da frequência não é considerado.

Para se considerar então o efeito da frequência, se propõe relacionar a taxa de carregamento dinâmico  $\dot{\sigma}_d$  na Equação 6.2 em cada ciclo com a frequência de carregamento  $f$  e a faixa de tensões  $\Delta\sigma = \sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}$  por meio de:

$$\dot{\sigma}_d = 2f\Delta\sigma \quad \text{eq.(6.3)}$$

enquanto o expoente  $\alpha$  é obtido por ajuste dos ensaios de fadiga em compressão para frequências abaixo de 10 Hz, assim:

$$\alpha = 0,014\exp[\gamma f] \quad \text{eq.(6.4)}$$

onde o parâmetro  $\gamma$  é ajustado para diferentes frequências de carregamento. O coeficiente  $\alpha$  igual a 0,014 corresponde a uma condição estática para uma frequência nula. Como consequência, a influência da frequência em um ensaio de fadiga é considerada tanto na taxa de carregamento pela Equação 6.3, quanto pelo expoente  $\alpha$  por meio da Equação 6.4. Ademais, a Equação 6.2 permite a transição da distribuição inicial  $D_i$  da resistência à compressão estática  $f_{c_0}$  para a distribuição de  $f_{cd}$  para condição dinâmica.

### 6.2.2. Curvas de iso-probabilidade de falha

Neste item são exploradas todas as condições das curvas de probabilidade de falha de modo a se obter uma expressão para a tensão de ruptura  $\sigma_f$   $\{f, \sigma_{m\acute{a}x}, \sigma_{m\acute{i}n_0}, \sigma_{f_0}, R, N\}$ , onde  $\sigma_{m\acute{i}n_0}$  e  $\sigma_{f_0}$  são propriedades do material,  $f$ ,  $\sigma_{m\acute{a}x}$  e  $R$  são parâmetros de configuração de um ensaio de fadiga e  $N$  é o número de ciclos até a ruptura. Por um lado, cada curva representa uma probabilidade de falha  $PF$  que intercepta o eixo  $\sigma_f$  em  $\sigma_{f_0}$ , onde a probabilidade de falha de cada ensaio estático de compressão é determinada pela distribuição  $D_i$ , definida pela Equação 6.1, como mostra a Figura 6.1.

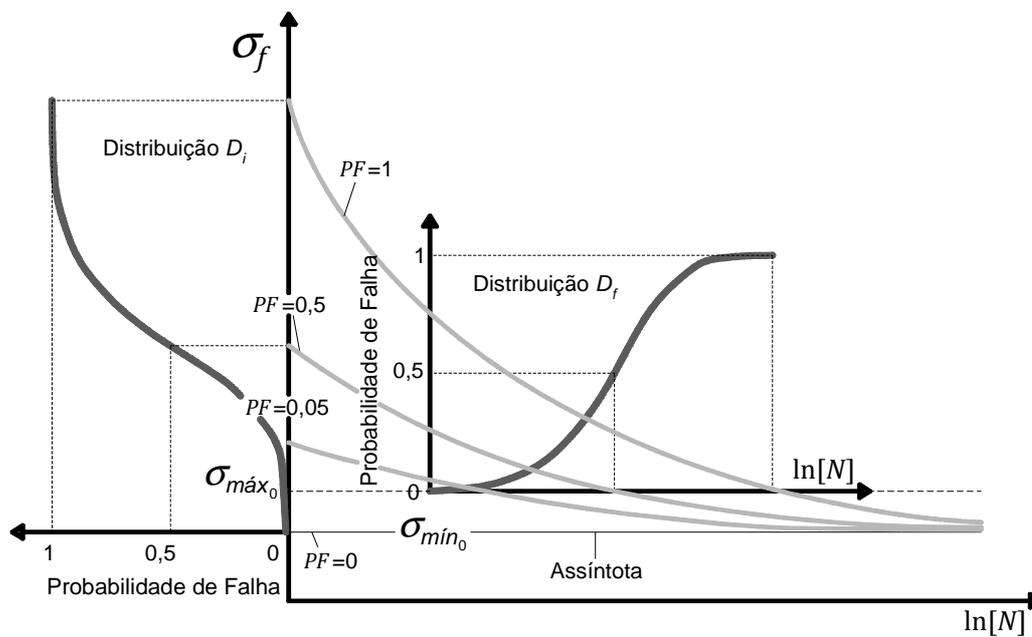


Figura 6.1 – Curvas de iso-probabilidade de falha, onde  $D_i$  é a CDF inicial, determinada pelos ensaios de resistência ajustada segundo a Equação 6.1, enquanto que  $D_f$  é a CDF final, ajustada aos ensaios de fadiga.

Por outro lado existem três condições limites as quais todas as curvas de iso-probabilidade de falha devem satisfazer:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_f = \sigma_{m\acute{i}n_0} \quad \text{eq.(6.5)}$$

$$\lim_{R \rightarrow 1} \sigma_f = \sigma_{f_0} \quad \text{eq.(6.6)}$$

$$\lim_{N \rightarrow 1} \sigma_f = \sigma_{f_0} \quad \text{eq.(6.7)}$$

Lembrando-se que  $\sigma_{mín_0}$  é o limite de tensão abaixo do qual não ocorreria ruptura por fadiga, ao passo que  $\sigma_{f_0}$  é a resistência à compressão estática, seja quando a razão entre tensões  $R$  for igual à unidade ou quando a ruptura por fadiga ocorra no primeiro ciclo.

Na Figura 6.1 são apresentadas três curvas de iso-probabilidade de falha de 0,05, 0,5 e 1,0. À esquerda do eixo  $\sigma_f$  está a distribuição inicial  $D_i$ , determinada pelos ensaios de caracterização da resistência, nesse caso à compressão. À direita está a distribuição final  $D_f$ , a qual será definida adiante nas Equações 6.12 ou 6.13. Respeitando-se as condições limite dadas pelas Equações 6.5, 6.6 e 6.7, a seguinte equação para cada curva de falha é proposta:

$$\sigma_f = \sigma_{mín_0} + (\sigma_{f_0} - \sigma_{mín_0})N^{-a(1-R)} \quad \text{eq.(6.8)}$$

onde  $R$  é a razão entre tensões mínima e máxima, e o parâmetro  $a$  está relacionado com a frequência de carregamento por:

$$a = b + c \ln(1 + f) \quad \text{eq.(6.9)}$$

onde  $b$  e  $c$  são parâmetros que necessitam ser ajustados com os resultados experimentais dos ensaios de fadiga. Cabe salientar que pela Equação 6.3, tanto o efeito da faixa de tensões  $\Delta\sigma$ , quanto o da taxa de carregamento dinâmica  $\dot{\sigma}_d$ , tem uma função importante nas curvas de iso-probabilidade de falha dada pela Equação 6.8.

Em um ensaio de fadiga realizado,  $\sigma_{máx}$ ,  $R$ , e  $N$  são parâmetros conhecidos, enquanto que a contrapartida estática de  $\sigma_{máx}$ , aqui denominada de  $\sigma_{máx_0}$ , corresponderia ao valor dado pelo ensaio de caracterização. De acordo com a Equação 6.2, esses parâmetros podem ser relacionados segundo:

$$\sigma_{máx_0} = \sigma_{máx} \left( \frac{\dot{\sigma}_0}{\dot{\sigma}_d} \right)^\alpha = \sigma_{máx} \left( \frac{\dot{\sigma}_0}{2f\Delta\sigma} \right)^\alpha \quad \text{eq.(6.10)}$$

Substituindo-se o valor de  $\sigma_{máx_0}$  por  $\sigma_f$  na Equação 6.8 obtém-se  $\sigma_{f_0}$  (intersecção da curva de iso-probabilidade de falha):

$$\sigma_{f_0} = \sigma_{mín_0} + (\sigma_{máx_0} - \sigma_{mín_0})N^{a(1-R)} \quad \text{eq.(6.11)}$$

Introduzindo-se o valor de  $\sigma_{f_0}$  na Equação 6.1 obtém-se uma equação geral para a probabilidade de falha cumulativa para um ensaio de fadiga qualquer em uma dada série de ensaios:

$$PF(N; \sigma_{máx}, f, R) = 1 - \exp \left\{ - \left[ \frac{\sigma_{máx_0} - \sigma_{mín_0}}{\lambda N^{-a(1-R)}} \right]^k \right\} \quad \text{eq.(6.12)}$$

onde o número de ciclos até a ruptura  $N$  é a variável principal e as outras variáveis secundárias são parâmetros obtidos para um dado ensaio de fadiga. Quando se tem a transição da função de distribuição cumulativa CDF da Equação 6.1 para a Equação 6.12, o parâmetro de forma  $k$  é mantido, porém, o parâmetro de escala  $\lambda$  agora esta relacionado com a frequência de carregamento, com a razão entre tensões mínima e máxima  $R$ , e o número de ciclos submetidos. Inserindo-se a Equação 6.9 e 6.10 na Equação 6.12 a função de distribuição cumulativa é finalmente obtida:

$$PF(N; \sigma_{máx}, f, R) = 1 - \exp \left\{ - \left[ \frac{\sigma_{máx} \left( \frac{\dot{\sigma}_0}{2f\Delta\sigma} \right)^{0,014\exp(\gamma f)} - \sigma_{mín_0}}{\lambda N^{-[b+c \ln(1+f)](1-R)}} \right]^k \right\} \quad \text{eq.(6.13)}$$

Essa é a distribuição final  $D_f$  apresentada na Figura 6.1, onde é possível se observar que a probabilidade de falha aumenta com o número de ciclos para um ensaio de fadiga a um dado nível de tensão  $\sigma_{máx_0}$ . Isolando-se  $N$  na Equação 6.12 é possível calcular o número de ciclos resistidos para uma dada  $PF$  sob condições de carregamento conhecidas:

$$N(PF; \sigma_{máx}, R, f) = \left[ \frac{\lambda^k \sqrt{-\ln(1 - PF)}}{\sigma_{máx_0} - \sigma_{mín_0}} \right]^{\frac{1}{a(1-R)}} \quad \text{eq.(6.14)}$$

Escrevendo-se a faixa de tensões em termos de razão de tensões  $R$ , e tensão máxima como  $\Delta\sigma = (1 - R)\sigma_{máx}$  na Equação 6.10 também se pode estimar a tensão máxima para qualquer  $PF$  e uma dada configuração de ensaio de fadiga a uma razão entre tensões definida para certa frequência por:

$$\sigma_{m\acute{a}x}(N; PF, R, f) = \left[ \sigma_{m\acute{i}n_0} + \frac{\lambda \sqrt{-\ln(1 - PF)}}{N^{\alpha(1-R)}} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[ \frac{2f(1-R)}{\dot{\sigma}_0} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \text{eq.(6.15)}$$

onde  $\alpha$  é calculado por meio da Equação 6.4.

### 6.2.3.

#### Sensibilidade do modelo com respeito à frequência e à razão entre tensões

A variação da distribuição probabilista final  $D_f$  dada pela Equação 6.13 é mostrada na Figura 6.2 para seis frequências distintas. Para uma mesma probabilidade de falha pode ser observado que um corpo de prova resiste a um maior número de ciclos para as frequências mais altas. Esse fato pode ser atribuído ao comportamento dinâmico do concreto que resulta em um aumento do expoente dinâmico  $\alpha$ . A influência da frequência não é linear, pois a distância entre 1 Hz e 4 Hz é menor do que a distância entre 6 Hz e 8 Hz.

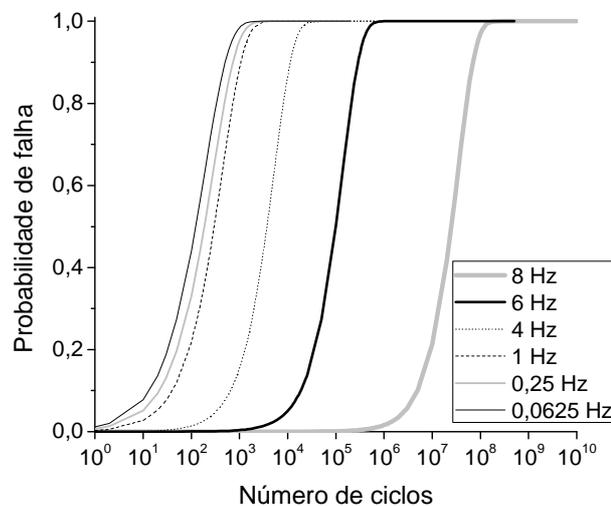


Figura 6.2 – Variação da distribuição  $D_f$  em função da frequência.

A influência da razão entre tensões mínima e máxima  $R$  é apresentada na Figura 6.3, dada pela Equação 6.15 para três valores de  $R$  iguais a: 0,1, 0,5 e 0,9. A forma da curva de iso-probabilidade de falha varia para diferentes valores de  $R$ . Uma razão entre tensões unitária resultaria em uma carga constante e uma linha horizontal de falha, sendo esse o caso limite de uma ruptura de fadiga a um ciclo.

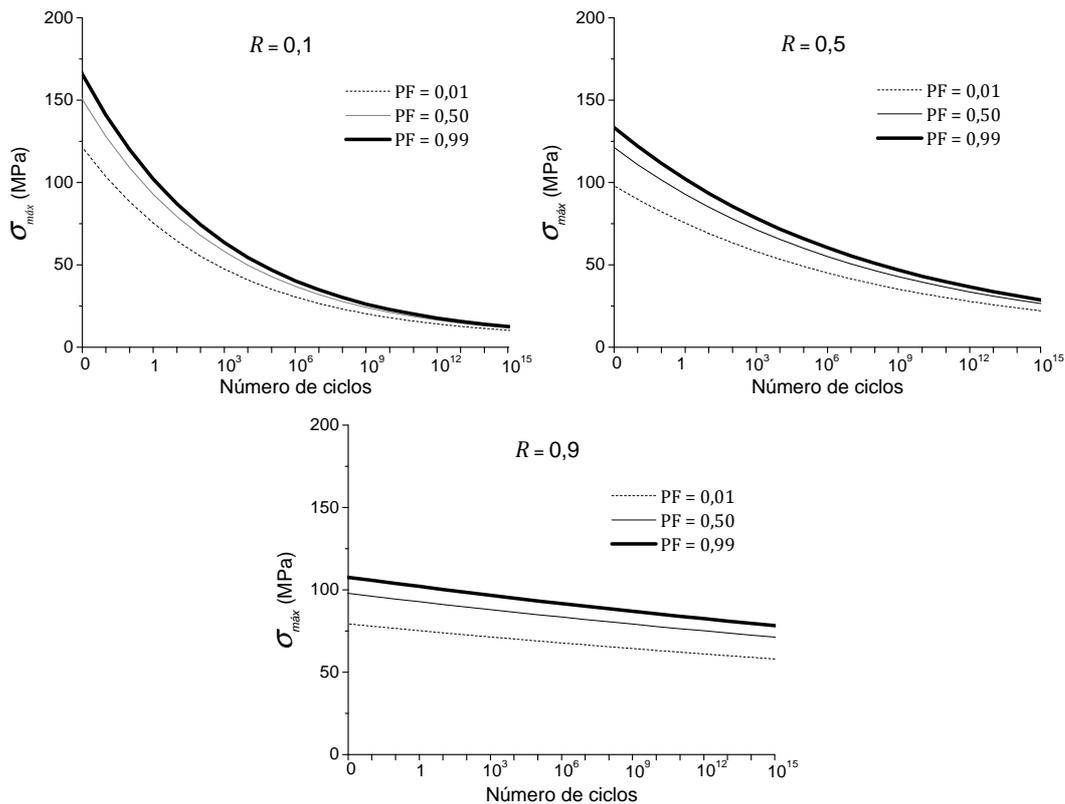


Figura 6.3 – Influência da razão entre tensões nas curvas de iso-probabilidade de falha:  $R = 0,1$ ;  $0,5$  e  $0,9$ .

### 6.3. Validação do modelo probabilístico baseado nos resultados experimentais

A validação do modelo probabilístico proposto está dividida inicialmente em duas etapas: a primeira consiste no ajuste dos resultados de caracterização da resistência à compressão estática  $f_{c_{cub}}$  à função de distribuição cumulativa CDF inicial  $D_i$ , ajustando-se os parâmetros  $\lambda$ ,  $k$  e  $\sigma_{mín_0}$  pela Equação 6.1. Na segunda etapa é realizado o ajuste dos resultados dos ensaios de fadiga – número de ciclos até a ruptura – à CDF final (Figura 6.1), ajustando-se os parâmetros  $b$ ,  $c$  e  $\gamma$  pelas Equações 6.12 ou 6.13. Posteriormente os parâmetros obtidos no modelo são utilizados para obter uma relação direta entre o número de ciclos até a ruptura  $N$  e a taxa de deformação secundária  $\dot{\epsilon}$ .

### 6.3.1.

#### Validação do modelo para os ensaios de caracterização da resistência à compressão

A validação do modelo probabilístico proposto se inicia por ajustar os parâmetros de Weibull de escala  $\lambda$ , de forma  $k$  e de locação  $\sigma_{mín_0}$  aos resultados experimentais de caracterização de resistência à compressão  $f_{c_{cub}}$ , nesse caso em corpos de prova cúbicos, usando-se a Equação 6.1. Esse ajuste é realizado desenhando-se a curva fornecida pela Equação 6.1 para valores arbitrários de  $\lambda$ ,  $k$  e  $\sigma_{mín_0}$ , em conjunto com os resultados experimentais e busca-se o melhor ajuste da curva aos dados experimentais variando-se simultaneamente os três parâmetros.

Conforme descrito anteriormente no programa experimental, foram ensaiados à compressão seis ou mais cubos para cada concreto a uma taxa de carregamento  $\dot{\sigma}_0$  de 0,20 MPa, considerada estática. Os resultados de cada um desses ensaios, para cada concreto, são apresentados na Tabela 6.1, ordenados da menor para a maior resistência, bem como sua probabilidade de falha respectiva. A probabilidade de falha de cada ensaio é dada por  $i/j$ , onde  $j$  é o número total de ensaios, e  $i$  o número do ensaio, ordenado do menor para o maior. De tal forma que para seis ensaios de caracterização o corpo de prova menos resistente tem  $PF$  de 1/6, o segundo menos resistente 2/6, até o mais resistente que tem 100% de  $PF$  ( $i/j = 1$ ).

Tabela 6.1 – Resistência à compressão estática  $f_{c_{cub}}$  e probabilidade de falha para cada corpo de prova e para cada concreto.

Número do ensaio	C1 4 Hz	C1	C2	$PF$ C1 e C2	C3	$PF$ C3
	MPa				MPa	
1	64,7	73,5	63,3	0,17	80,2	0,125
2	71,4	75,2	73,1	0,33	85,3	0,250
3	71,8	77,5	73,5	0,50	86,3	0,375
4	76,9	79,8	74,0	0,67	86,9	0,500
5	77,7	82,4	78,7	0,83	88,5	0,625
6	78,5	83,9	79,1	1,00	89,1	0,750
7	—	—	—	—	89,9	0,875
8	—	—	—	—	90,6	1,000

Como os ensaios de fadiga do concreto sem fibras C1 foram realizado em duas etapas (4 Hz aos seis meses e demais frequências a um ano), ensaiou-se duas séries à compressão  $f_{c_{cub}}$  para o concreto C1.

Para o concreto com fibras de aço C3 foram ensaiados dois cubos adicionais totalizando oito cubos nessa etapa de caracterização de resistência à compressão estática.

Os parâmetros  $\lambda$ ,  $k$  e  $\sigma_{mín_0}$  foram ajustados pela Equação 6.1, e descrevem a curva da distribuição inicial  $D_i$  da Figura 6.1. Nessa primeira etapa de ajuste dos parâmetros de Weibull para os ensaios de resistência à compressão  $f_{c_{cub}}$ , esses parâmetros foram ajustados para cada concreto. O melhor ajuste foi realizado buscando-se simultaneamente o maior coeficiente de correlação  $r$  e o menor erro relativo médio calculando-se o valor experimental, nesse caso resistência à compressão por meio da Equação 6.1.

A Figura 6.4 ilustra a distribuição inicial  $D_i$  em conjunto com os resultados experimentais para cada concreto, e a Tabela 6.2 apresenta os parâmetros ajustados para os diferentes concretos.

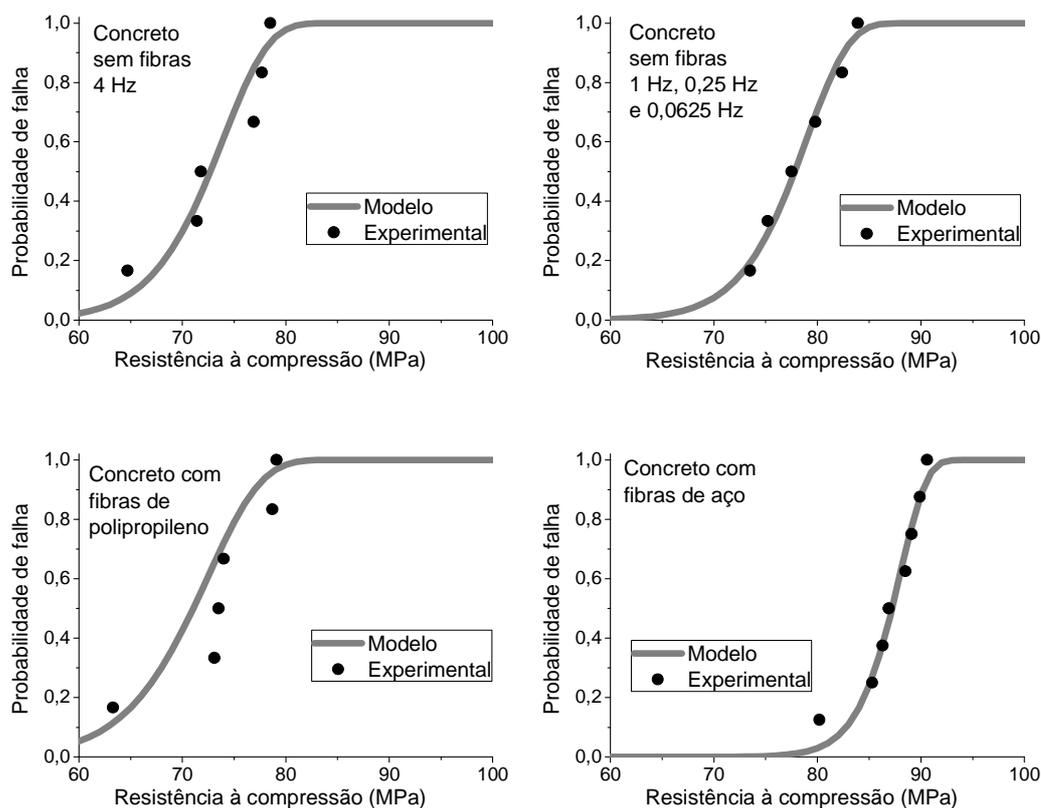


Figura 6.4 – Distribuição inicial  $D_i$  dos ensaios de resistência à compressão  $f_{c_{cub}}$  em conjunto com os resultados experimentais.

Tabela 6.2 – Parâmetros ajustados para a distribuição inicial  $D_i$  com base nos ensaios de resistência à compressão  $f_{cub}$ .

Parâmetros de ajuste	C1 4 Hz	C1	C2	C3
	sem fibras		fibras de polipropileno	fibras de aço
$\lambda$	71,1	76,1	68,0	76,1
$k$	17,1	19,8	14,0	31,0
$\sigma_{mín_0}$	3,1		4,8	12,0

Os parâmetros de escala  $\lambda$  e de forma  $k$  variam para os diferentes concretos, assim como o parâmetro de locação  $\sigma_{mín_0}$  – limite de tensão abaixo do qual não ocorreria a ruptura por fadiga. É possível observar que esse limite aumenta nos concretos com fibras, sendo bastante superior para o concreto com fibras de aço. A soma dos parâmetros  $\lambda$  e  $\sigma_{mín_0}$  segue a média dos resultados de resistência de cada concreto, enquanto que o parâmetro de forma  $k$  altera prioritariamente a inclinação de cada curva (Figura 6.4).

O ajuste do modelo aos resultados experimentais de resistência à compressão estática foi bastante satisfatório, e o erro relativo médio obtido variou de 0,7% (C1 e C3) a 3,4% (C2), e o coeficiente de correlação  $r$  foi 0,99 (C1), 0,93 (C2) e 0,96 (C3).

O ajuste do concreto com fibras de polipropileno C2 foi menos preciso que os demais devido à combinação de poucos resultados e uma grande dispersão entre os mesmos. Esse fato sugere que um maior número de ensaios de resistência à compressão por série forneceria um ajuste mais preciso.

A Figura 6.5 reúne as quatro curvas apresentadas na Figura 6.4, para os três concretos. O concreto sem fibras C1 tem duas curvas, pois os ensaios a 4 Hz foram realizados em uma etapa inicial, seis meses antes dos demais ensaios do mesmo concreto e sua respectiva resistência à compressão  $f_{cub}$  naquele momento foi inferior, como descrito anteriormente.

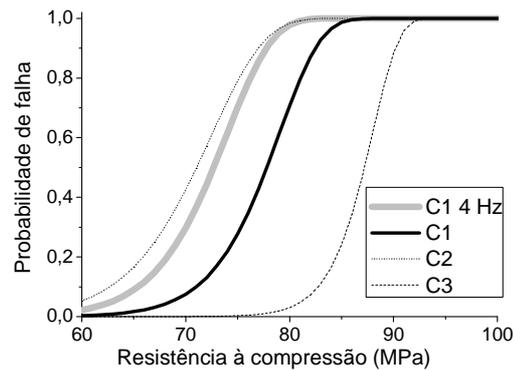


Figura 6.5 – Distribuição inicial  $D_f$  para os diferentes concretos.

As curvas ajustadas para o concreto sem fibras C1 têm forma muito semelhante, onde a diferença principal está na escala das curvas, uma vez que a resistência à compressão  $f_{c_{cub}}$  média, quando realizados os ensaios à frequência 4 Hz, foi inferior em 5 MPa.

### 6.3.2. Validação do modelo para os ensaios de fadiga

A segunda parte do modelo consiste no ajuste simultâneo dos parâmetros  $b$ ,  $c$  e  $\gamma$  para os ensaios de fadiga confrontando com os resultados experimentais, neste caso o número de ciclos até a ruptura, à curva dada pelas Equações 6.13 ou 6.14. Este ajuste foi feito para cada concreto, porém verificado para cada frequência.

Assim como o ajuste realizado anteriormente para os resultados de caracterização de resistência estática  $f_{c_{cub}}$ , os resultados de número de ciclos foram ordenados do menor ao maior e a probabilidade de falha é de  $1/j$  para o menor número de ciclos,  $2/j$  para o segundo menor  $N$  e assim sucessivamente até  $i/j = 1$  para o maior número de ciclos da série.

Como descrito no programa experimental, foram ensaiados pelo menos dez corpos de prova cúbicos para cada frequência – 4, 1, 0,25 e 0,0625 Hz – para cada um dos três concretos. Foram ensaiados três corpos de prova adicionais para a frequência de 4 Hz para o concreto sem fibras C1 e um corpo de prova a mais para a mesma frequência para o concreto com fibras de polipropileno C2.

## Concreto sem fibras

A Tabela 6.3 mostra os resultados de número de ciclos até a ruptura  $N$ , com sua respectiva probabilidade de falha  $PF$ , para cada frequência, para o concreto sem fibras C1.

A Figura 6.6 apresenta a distribuição final  $D_f$ , da Figura 6.1, ajustada aos resultados experimentais pela Equação 6.13 para as quatro diferentes frequências para o concreto sem fibras C1. Na segunda etapa de ajuste dos parâmetros  $b$ ,  $c$  e  $\gamma$ , o ajuste foi realizado para cada concreto simultaneamente para as quatro frequências.

Tabela 6.3 – Número de ciclos até a ruptura e probabilidade de falha: concreto sem fibras C1.

Número do ensaio	4 Hz		1 Hz	0,25 Hz	0,0625 Hz	$PF$
	$N$	$PF$	Número de ciclos ( $N$ )			
1	133	0,08	23	18	11	0,1
2	821	0,15	85	30	38	0,2
3	1222	0,23	157	98	76	0,3
4	1578	0,31	282	122	102	0,4
5	1660	0,38	368	157	142	0,5
6	2485	0,46	479	219	234	0,6
7	4192	0,54	759	400	275	0,7
8	7038	0,62	833	535	329	0,8
9	8411	0,69	1351	650	339	0,9
10	9521	0,77	1571	1242	473	1,0
11	13020	0,85	—	—	—	—
12	22570	0,92	—	—	—	—
13	170256	1,00	—	—	—	—

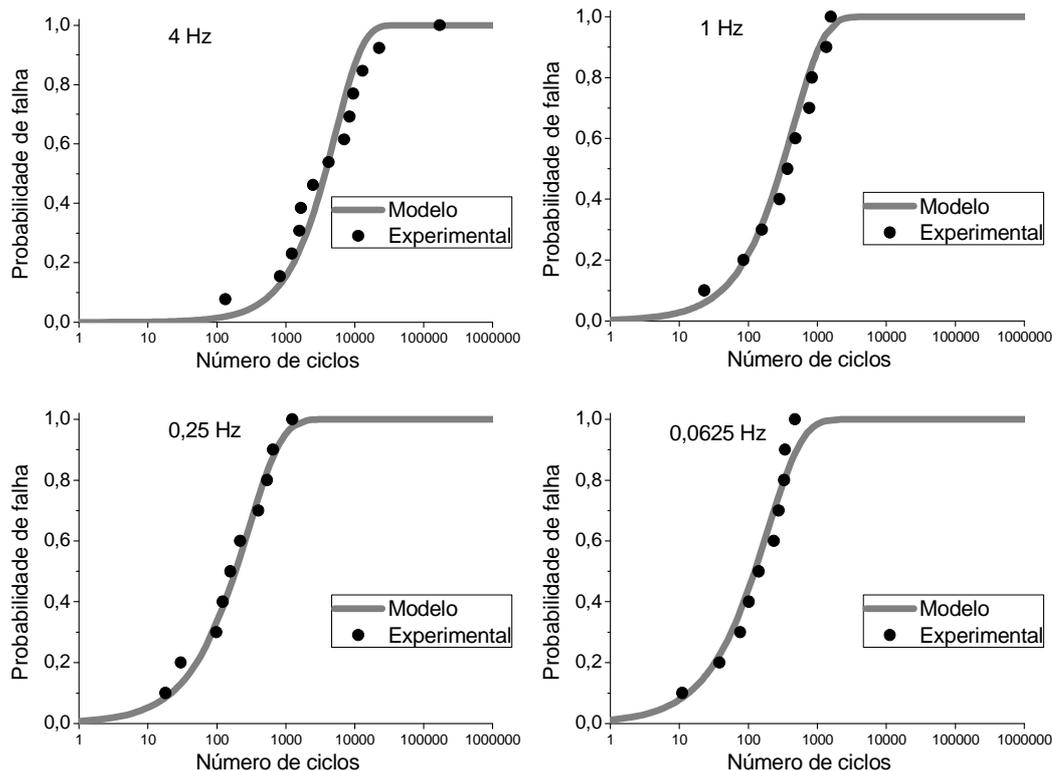


Figura 6.6 – Distribuição final  $D_f$  ajustada para os ensaios de fadiga do concreto sem fibras C1 para as diferentes frequências, em conjunto com os resultados experimentais.

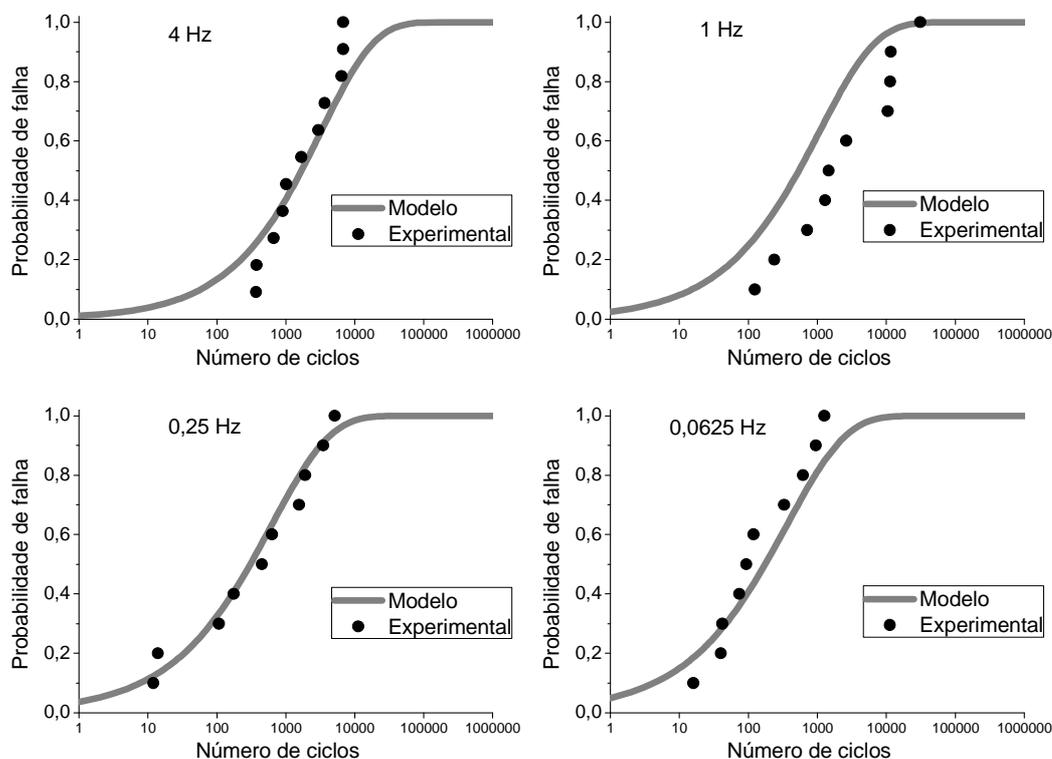
Os parâmetros de ajuste  $b$ ,  $c$  e  $\gamma$  são os mesmos para os quatro gráficos, ou para as quatro frequências, na Figura 6.6, para o concreto sem fibras C1. Os parâmetros ajustados foram:  $b = 0,061$ ;  $c = 0,0105$  e  $\gamma = 0,24$ . Observa-se que o modelo se ajusta muito bem aos dados experimentais, onde o erro relativo médio calculando-se o número de ciclos pela Equação 6.14 foi inferior a 5%, o coeficiente de correlação  $r$  foi superior a 0,98 para as três maiores frequências, e foi de 0,93 para a menor frequência 0,0625 Hz.

### Concreto com fibras de polipropileno

Na Tabela 6.4 são apresentados o número de ciclos  $N$  e a probabilidade de falha  $PF$  de cada ensaio para o concreto com fibras de polipropileno C2 para as diferentes frequências ensaiadas. A distribuição de final  $D_f$  ajustada aos resultados experimentais está desenhada na Figura 6.7, para cada frequência.

Tabela 6.4 – Número de ciclos até a ruptura e probabilidade de falha: concreto C2.

Número do ensaio	4 Hz		1 Hz	0,25 Hz	0,0625 Hz	PF
	<i>N</i>	<i>PF</i>	Número de ciclos ( <i>N</i> )			
1	371	0,09	124	12	16	0,1
2	376	0,18	237	14	40	0,2
3	668	0,27	710	107	42	0,3
4	900	0,36	1294	176	74	0,4
5	1009	0,45	1457	451	93	0,5
6	1685	0,55	2629	632	119	0,6
7	2962	0,64	10480	1559	331	0,7
8	3656	0,73	11383	1905	617	0,8
9	6446	0,82	11589	3500	949	0,9
10	6792	0,91	31020	5113	1264	1,0
11	6799	1,00	—	—	—	—

Figura 6.7 – Distribuição final  $D_f$  ajustada para os ensaios de fadiga do concreto C2, em conjunto com os resultados experimentais, para as diferentes frequências.

O ajuste apresentado na Figura 6.7 foi adequado, porém não foi tão satisfatório como o ajuste do concreto sem fibras C1. Observa-se na Figura 6.7 que a curva desenhada pela Equação 6.13 ficou um pouco afastada dos resultados experimentais, para a frequência 1 Hz. O fato dos ajustes dos parâmetros de resistência à compressão não terem sido tão precisos para o concreto C2 refletiu no ajuste dos parâmetros  $b$ ,  $c$  e  $\gamma$ . Uma vez que o ajuste foi

feito simultaneamente buscando o melhor coeficiente de correlação e o menor erro relativo médio para as quatro frequências. Entende-se que o baixo número de ensaios de resistência à compressão  $f_{c_{cub}}$  e a dispersão daqueles resultados prejudicou a precisão do ajuste dos ensaios de fadiga para o concreto com fibras de polipropileno C2. Lembrando-se que a inclinação das curvas das Figuras 6.6 a 6.8 são fortemente influenciadas pelo parâmetro de forma  $k$  ajustado pela Equação 6.1 para os resultados de resistência à compressão  $f_{c_{cub}}$  e que um ajuste não muito preciso dos resultados de resistência tem consequências no ajuste dos resultados de fadiga.

O erro relativo médio das quatro séries de ensaios de fadiga do concreto C2 de ensaios foi de 13%, impulsionado pelo maior distância do modelo aos resultados experimentais para a frequência 1 Hz. O erro em geral é maior em cada um dos menores números de ciclos para cada frequência, de tal forma que desconsiderando estes menores  $N$  para cada  $f$  o erro relativo médio para toda a série de ensaios de fadiga do concreto com fibras de polipropileno C2 seria inferior a 10%. O coeficiente de correlação foi 0,99 para as duas menores frequências, 0,86 para 1 Hz e 0,94 para 4 Hz.

Para o concreto com fibras de polipropileno C2, os parâmetros ajustados na Figura 6.7, utilizando-se a Equação 6.13, foram:  $b = 0,0515$ ;  $c = 0,0035$  e  $\gamma = 0,086$ .

### **Concreto com fibras de aço**

Os resultados experimentais dos ensaios de fadiga do concreto com fibras de aço C3, bem como suas probabilidades de falha e a distribuição final  $D_f$  ajustada estão apresentados na Tabela 6.5 e Figura 6.8, respectivamente.

Tabela 6.5 – Número de ciclos até a ruptura e probabilidade de falha: concreto com fibras de aço C3.

Número do ensaio	4 Hz	1 Hz	0,25 Hz	0,0625 Hz	PF
	Número de ciclos ( $N$ )				
1	849	154	237	221	0,1
2	1176	412	314	256	0,2
3	1347	746	716	741	0,3
4	1398	1344	751	1121	0,4
5	1673	2077	986	1144	0,5
6	1751	2365	1014	1246	0,6
7	2042	3120	1291	1273	0,7
8	2635	3945	2432	1304	0,8
9	4070	4082	3659	1875	0,9
10	5952	7438	5541	2409	1,0

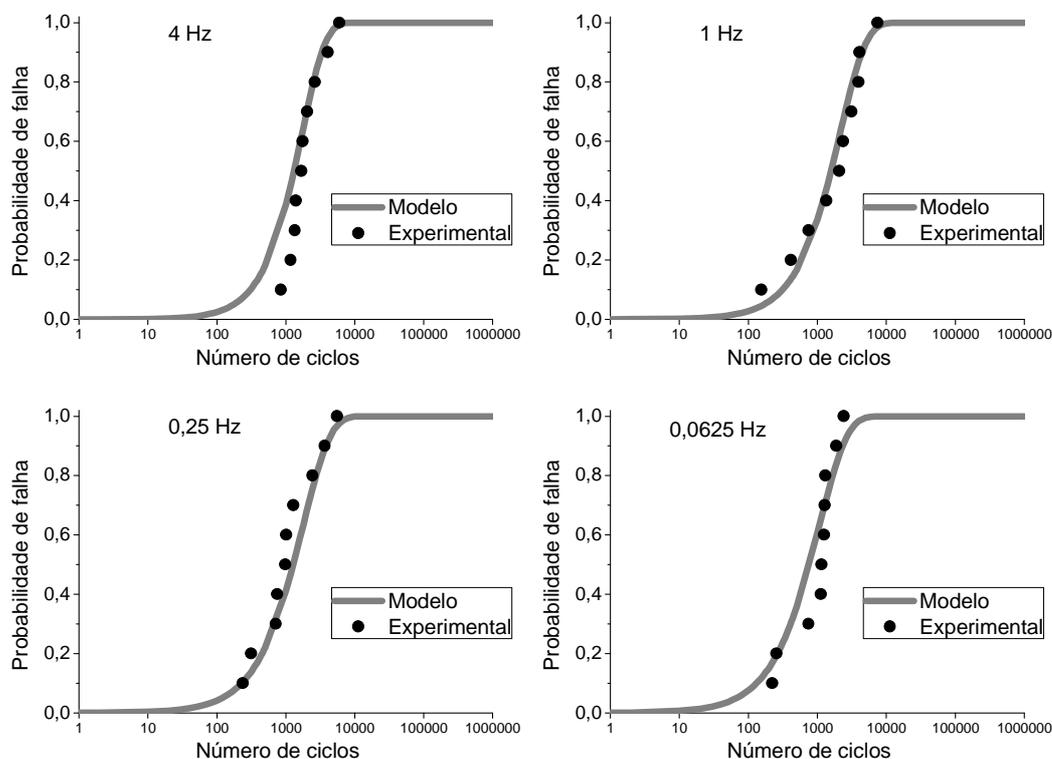


Figura 6.8 – Distribuição final  $D_f$  ajustada para os ensaios de fadiga do concreto com fibras de aço C3, para as quatro frequências distintas, em conjunto com os resultados experimentais.

O ajuste do modelo aos resultados experimentais mostrado na Figura 6.8 é bastante satisfatório e o erro relativo médio de todos os quarenta ensaios de fadiga desta série de concreto com fibras de aço foi de 4,3% sendo menor que os erros médios dos demais concretos C1 e C2. O coeficiente de correlação foi 0,97 para as três maiores frequências e 0,9 para a menor frequência.

No ajuste dos parâmetros  $b$ ,  $c$  e  $\gamma$  para este concreto com fibras de aço, o parâmetro  $\gamma$  é nulo, reduzindo bastante a influência da frequência para este concreto. Porém, a frequência ainda é considerada no parâmetro  $c$ . Os parâmetros ajustados, para o concreto com fibras de aço C3, na Figura 6.8, utilizando a Equação 6.13, foram:  $b = 0,049$ ;  $c = 0,0066$  e  $\gamma = 0$ .

A Tabela 6.6 reúne os parâmetros ajustados nas Figuras 6.6 a 6.8 para os três concretos.

Tabela 6.6 – Parâmetros de ajuste  $b$ ,  $c$  e  $\gamma$  ajustados para cada concreto.

Concreto:	$b$	$c$	$\gamma$
C1: sem fibras	0,0610	0,0105	0,240
C2: fibras de polipropileno	0,0515	0,0035	0,086
C3: fibras de aço	0,0490	0,0066	0

Confrontando as curvas obtidas por meio do modelo probabilístico proposto, para os parâmetros ajustados para cada um dos três concretos ensaiados é possível observar a influência da frequência em cada concreto.

A Figura 6.9 apresenta as curvas obtidas pelo modelo proposto para os três concretos: sem fibras C1, com fibras de polipropileno C2 e com fibras de aço C3 para cada frequências de carregamento (4, 1, 0,25 e 0,0625 Hz).

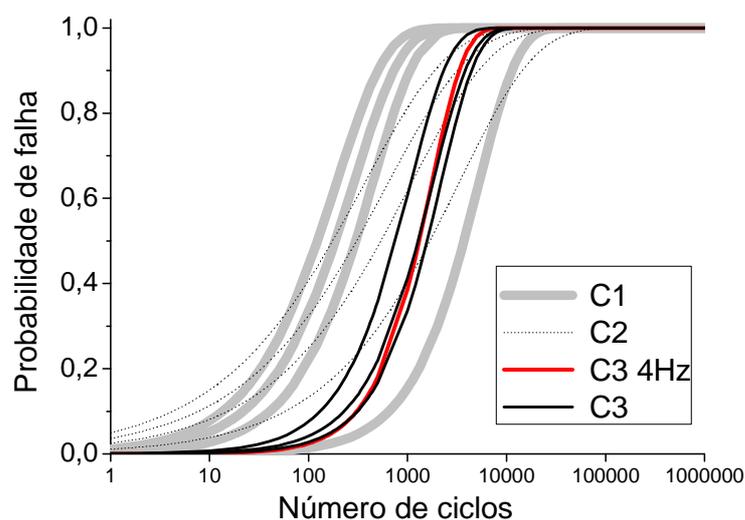


Figura 6.9 – Número de ciclos *versus* probabilidade de falha; comparação da influência da frequência para as curvas ajustadas aplicando-se o modelo aos três concretos.

Para o concreto sem fibras C1 e para o concreto com fibras de polipropileno C2 quanto mais alta a frequência, maior o número de ciclos para

uma mesma probabilidade de falha, *i.e.*, a curva de maior frequência se encontra mais à direita na Figura 6.9. A distância entre a curva mais à direita para o concreto C1, que corresponde a 4 Hz, e a seguinte da mesma série, correspondente a 1 Hz, é maior do que a distância entre a segunda e terceira curvas, 1 Hz e 0,25 Hz, respectivamente. O mesmo ocorre para o concreto com fibras de polipropileno C2 – linhas pontilhadas – porém esta distância é menor. Enquanto que no caso do concreto com fibras de aço C3, as curvas das frequências mais altas se aproximam e chegam a se cruzar, como mostra em destaque a curva C3 4 Hz em vermelho. A partir dessa observação é possível chegar à mesma conclusão obtida no programa experimental: os resultados à baixas frequências se aproximam dos resultados das frequências mais altas para o concreto com fibras de aço C3.

### 6.3.3.

#### Validação do modelo para diferentes razões entre tensões

Com o intuito de validar o modelo para a variação da razão entre as tensões mínima e máxima  $R$ , uma nova série de ensaios foi realizada em um novo concreto sem fibras, diferente dos concretos apresentados no programa experimental. Como não existiam mais corpos de prova disponíveis dos concretos C1, C2 e C3 ensaiados anteriormente, foi selecionado outro concreto de alta resistência sem fibras denominado C4, conforme descrito no item 5.7.

A tensão de ruptura em alguns corpos de prova cúbicos com 100 mm de aresta superava o valor de 100 MPa, limite máximo da máquina de ensaios dinâmica. O tamanho dos cubos foi reduzido para 80 mm de aresta e foram ensaiados à compressão vinte corpos de prova desta geometria, a uma taxa de carregamento  $\dot{\sigma}_0$  de 0,20 MPa/s. A Tabela 6.7 apresenta a resistência à compressão estática  $f_{c_{cub}}$  de cada um dos cubos e suas respectivas probabilidades de falha  $PF$  de maneira análoga à apresentada no item 6.3.1. A Figura 6.10 apresenta a curva – distribuição inicial  $D_i$  – ajustada através do modelo aos resultados experimentais para o concreto C4.

Tabela 6.7 – Resistência à compressão estática e probabilidade de falha para cada corpo de prova do concreto C4.

Número do ensaio	$f_{c_{cub}}$	$PF$	Número do ensaio	$f_{c_{cub}}$	$PF$
	MPa			MPa	
1	84	0,05	11	98	0,55
2	85	0,10	12	99	0,60
3	85	0,15	13	100	0,65
4	88	0,20	14	100	0,70
5	89	0,25	15	102	0,75
6	90	0,30	16	102	0,80
7	90	0,35	17	102	0,85
8	91	0,40	18	103	0,90
9	93	0,45	19	104	0,95
10	97	0,50	20	108	1,00

Os parâmetros ajustados para que a curva melhor se aproximasse dos resultados experimentais  $f_{c_{cub}}$  foram  $\lambda = 94,7$ ,  $k = 12,4$  e  $\sigma_{mín_0} = 3,1$ , esse último idêntico ao concreto sem fibras C1. O erro relativo médio obtido foi de 1,7%, e o coeficiente de correlação  $r$  foi de 0,97.

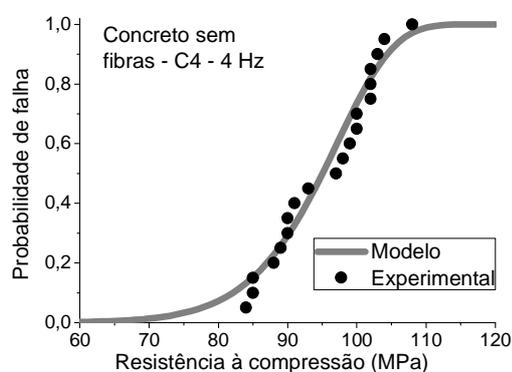


Figura 6.10 – Distribuição inicial  $D_i$  dos ensaios de resistência à compressão  $f_{c_{cub}}$  em conjunto com os resultados experimentais para o concreto sem fibras C4.

Foram realizados alguns ensaios de fadiga com a configuração idêntica aos ensaios realizados no programa experimental: com  $\sigma_{máx} = 85\%$  da resistência à compressão  $f_{c_{cub}}$ , razão entre tensões  $R = 0,3$  e frequência de carregamento 4 Hz com sinal senoidal. Porém, alguns destes ensaios chegaram a mais de um milhão de ciclos sem romper, enquanto alguns romperam com poucos milhares de ciclos. Foi então arbitrada uma tensão máxima de 90 MPa = 94%  $f_{c_{cub}}$  e foram ensaiados à fadiga 30 corpos de prova cúbicos de 80 mm de aresta, divididos em dois grupos de 15 ensaios. Os primeiros quinze ensaios

com razão entre tensões  $R$  de 0,3 e os seguintes com  $R = 0,1$ . A Tabela 6.8 mostra o número de ciclos até a ruptura  $N$  com a respectiva probabilidade de falha  $PF$  de cada corpo de prova, para as duas razões entre tensões selecionadas.

Tabela 6.8 – Número de ciclos até a ruptura e probabilidade de falha: concreto sem fibras C4:  $R = 0,3$  e  $R = 0,1$ .

Número do ensaio	$R = 0,3$		Número do ensaio	$R = 0,1$	
	$N$	$PF$		$N$	$PF$
1	38	0,07	1	46	0,07
2	73	0,13	2	125	0,13
3	150	0,20	3	222	0,20
4	667	0,27	4	302	0,27
5	2149	0,33	5	731	0,33
6	2798	0,40	6	858	0,40
7	2927	0,47	7	1106	0,47
8	7288	0,53	8	1231	0,53
9	7600	0,60	9	1753	0,60
10	7839	0,67	10	2265	0,67
11	9218	0,73	11	2352	0,73
12	11863	0,80	12	3961	0,80
13	17172	0,87	13	4276	0,87
14	20426	0,93	14	5988	0,93
15	75378	1,00	15	7153	1,00

Era esperado que, na média, o número de ciclos até a ruptura seria maior para a maior razão entre tensões  $R$ , em virtude da menor amplitude de tensões aplicada, conseqüentemente menor deformação a cada ciclo. Observa-se na Tabela 6.9 que os menores números de ciclos são da mesma ordem de grandeza, porém existe uma grande diferença nos corpos de prova que suportaram um maior número de ciclos.

A Figura 6.11 mostra a curva ajustada aos resultados experimentais para duas diferentes razões entre tensões  $R = 0,3$  e  $0,1$ .

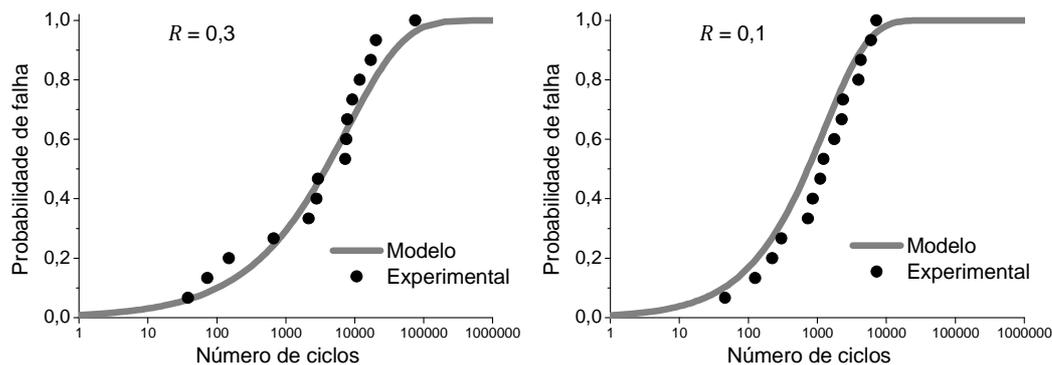


Figura 6.11 – Distribuição final  $D_f$  ajustada para os ensaios de fadiga;  $R = 0,3$  e  $R = 0,1$ : concreto sem fibras C4.

O ajuste da Figura 6.11 foi realizado utilizando-se a Equação 6.12 onde os parâmetros  $b$  e  $c$  se reduzem a um único parâmetro  $a$ , uma vez que todos os ensaios dessa série foram realizados a uma mesma frequência de carregamento 4 Hz. O parâmetro ajustados então foram  $a = 0,06$  e  $\gamma = 0,240$ , este último idêntico ao do concreto sem fibras C1.

O erro relativo médio obtido em ambas as séries de  $R = 0,3$  e  $0,1$  se aproximou de 7%, um pouco acima do obtido nos traços anteriores. Esse erro levemente superior se deve ao maior erro percentual dos corpos de prova com baixo número de ciclos. Eliminando-se, por exemplo, dois dos menores  $N$  em cada série o erro relativo médio das duas séries seria inferior a 4%. O coeficiente de correlação foi de 0,94 ( $R = 0,3$ ) e 0,98 ( $R = 0,1$ ).

#### 6.3.4. Exemplo de aplicação do modelo

Considerando-se a relação direta entre a probabilidade de falha – ou o número de ciclos até a ruptura – e as condições de carregamento de um ensaio de fadiga como  $S_{m\acute{a}x}$ ,  $R$  e  $f$ , um exemplo de aplicação o modelo proposto é apresentado calculando a probabilidade de falha para diferentes passos de carregamento cíclico com configurações de carregamento variando a cada passo. Inicialmente aplicam-se quatro passos de carregamento cíclico conforme a Tabela 6.9. Ao final do quarto passo já haverão ocorrido dez mil ciclos.

Utilizando-se os parâmetros de ajuste de cada concreto:  $\lambda$ ,  $k$ ,  $\sigma_{m\acute{i}n_0}$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\gamma$ , a resistência  $f_{c_{cub}}$  e a taxa de carregamento do ensaio de compressão estática  $\dot{\sigma}_0$ , considerando-se que ao início do passo 1 a probabilidade de falha é nula, calcula-se a probabilidade de falha ao final deste passo por meio da

Equação 6.13. A condição de carregamento do segundo passo é diferente e ao início do passo seguinte já existe uma probabilidade de falha acumulada do passo anterior. Utilizando a Equação 6.14 calcula-se um número de ciclos equivalente ao início do passo 2, denominado  $N_{1,eq}$ . A probabilidade de falha ao final do passo dois será calculada (Equação 6.13) utilizando o número de ciclos como:  $N_2 = N_{1,eq} + \Delta N_2$ , como sugere a Figura 6.12.

Tabela 6.9 – Passos de carregamento cíclico.

Passo	$S_{m\acute{a}x}$	$S_{m\acute{i}n}$	Frequência	Número de ciclos do passo $\Delta N$
1	80%	25%	4 Hz	2000
2	80%	40%	0,0625 Hz	3000
3	70%	20%	1 Hz	2500
4	80%	25%	0,25 Hz	2500

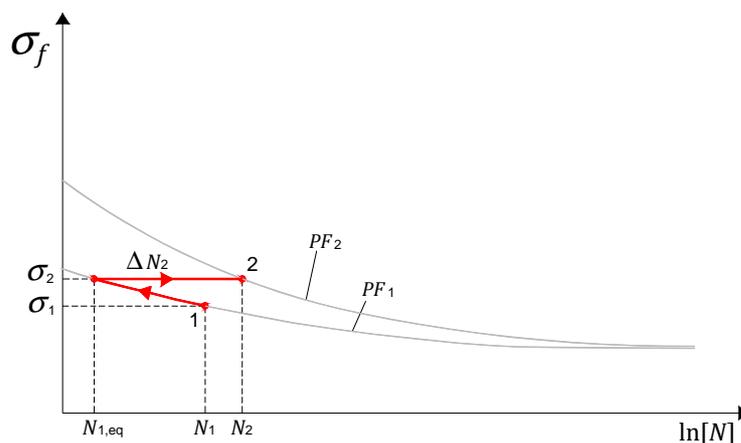


Figura 6.12 – Passos de carregamento cíclico utilizando-se o modelo.

Para a configuração de carregamento do passo 1 tem-se a equivalente estática da tensão máxima  $\sigma_1$ , aplicando-se o número de ciclos dessa etapa  $N_1$  calcula-se a probabilidade de falha  $PF_1$ . Ao início do passo dois, para uma nova configuração de carregamento  $\sigma_2$  calcula-se o número de ciclos equivalentes ao passo anterior  $N_{1,eq}$ , *i.e.*, caminha-se pela curva de iso-probabilidade  $PF_1$  até o ponto  $\sigma_2$ . Aplica-se então o número de ciclos do passo dois  $\Delta N_2$  e com  $N_2 = N_{1,eq} + \Delta N_2$  calcula-se a probabilidade de falha ao final do passo 2. Repete-se este procedimento para os passos seguintes. Quando a probabilidade de falha calculada for igual à unidade, considera-se a ruptura do corpo de prova (ou a ruptura de uma série de corpos de prova ensaiados com as mesmas condições

de carregamento) com uma quantidade ciclos acumulada após diversos passos de carregamento.

A Tabela 6.10 mostra a probabilidade de falha calculada para o concreto sem fibras C1 após os quatro ciclos de carregamento cíclico apresentados na Tabela 6.9.

Tabela 6.10 – Quatro ciclos de carregamento, concreto sem fibras C1.

Passo	$\sigma_{m\acute{a}x}$	$\sigma_{m\acute{i}n}$	$\Delta N$	$f$ (Hz)	$PF_{inicial}$	$PF_{final}$
1	63,0	19,7	2000	4	0	0,03
2	63,0	31,5	3000	0,0625	0,03	0,29
3	55,1	15,7	2500	1	0,29	0,36
4	63,0	19,7	2500	0,25	0,36	0,96

Após os quatro ciclos de carregamento a probabilidade de falha acumulada é de 0,96. Utilizando-se o mesmo procedimento para os concretos com fibras a probabilidade de falha acumulada, após os quatro passos de carregamento cíclico da Tabela 6.9, é de 0,59 para o concreto com fibras de polipropileno C2 e de 0,24 para o concreto com fibras de aço. As Tabelas 6.11 e 6.12 apresentam as probabilidades de falha calculadas em cada etapa para os concretos C2 e C3, respectivamente.

Tabela 6.11 – Quatro ciclos de carregamento, concreto com fibras de polipropileno C2.

Passo	$\sigma_{m\acute{a}x}$	$\sigma_{m\acute{i}n}$	$\Delta N$	$f$ (Hz)	$PF_{inicial}$	$PF_{final}$
1	58,9	18,4	2000	4	0	0,25
2	58,9	29,4	3000	0,0625	0,25	0,36
3	51,5	14,7	2500	1	0,36	0,37
4	58,9	18,4	2500	0,25	0,37	0,59

Tabela 6.12 – Quatro ciclos de carregamento, concreto com fibras de aço C3.

Passo	$\sigma_{m\acute{a}x}$	$\sigma_{m\acute{i}n}$	$\Delta N$	$f$ (Hz)	$PF_{inicial}$	$PF_{final}$
1	71,0	22,2	2000	4	0	0,10
2	71,0	35,5	3000	0,0625	0,10	0,12
3	62,1	17,7	2500	1	0,12	0,12
4	71,0	22,2	2500	0,25	0,12	0,24

A Figura 6.13 resume as probabilidades de falha acumuladas ao longo dos quatro etapas de carregamento cíclico para os três concretos.

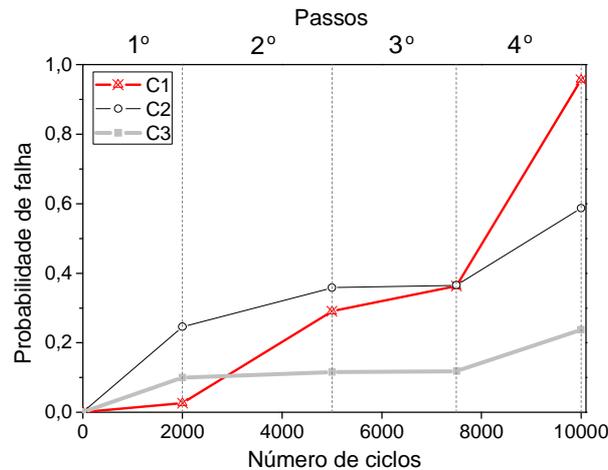


Figura 6.13 – Probabilidades de falha acumuladas após quatro passos de carregamento cíclico.

Considerando-se que a ruptura ocorrerá quando a probabilidade de falha alcance a unidade, após quatro etapas de carregamentos equivalentes em termos de porcentagem da carga de ruptura de cada concreto, o concreto sem fibras C1 está bem próximo da ruptura, o concreto com fibras de aço C3 é o que está mais longe de romper e o concreto com fibras de polipropileno C2 se situa entre os concretos C1 e C3.

Para levar os corpos de prova à ruptura, aplica-se um quinto ciclo de carregamento  $\Delta N_5$  com as tensões máxima e mínima em 85% e 25% de  $f_{cub}$ , respectivamente. O número de ciclos estimado para chegar à ruptura depende da frequência de carregamento. A Tabela 6.13 apresenta o número de ciclos necessários para levar o corpo de prova de cada concreto à ruptura, equivalente a  $PF = 1$ , para quatro diferentes frequências.

Tabela 6.13 – Número de ciclos para alcançar a ruptura.

$f$ (Hz)	C1	C2	C3
	$\Delta N_5$		
4	6267	92751	6914
1	718	40308	9931
0,25	580	29784	9276
0,0625	383	17251	6237

Ao final de esse exemplo é possível fazer algumas observações. Levando-se em consideração que as probabilidades de falha e números de ciclos calculados a cada passo, em cada concreto, utilizaram os parâmetros de ajuste e a resistência à compressão  $f_{cub}$  de cada concreto, o modelo reflete as tendências dos ensaios reais apresentados no capítulo 5. Para o concreto sem fibras C1 e para o com fibras de polipropileno C2, o modelo estima um menor número de ciclos conforme se reduz a frequência (Tabela 6.13). No concreto com fibras de aço C3 a influência da frequência é menor do que nos demais concretos, por este motivo o número de ciclos estimados para 4 Hz acabou sendo menor do que para 1 Hz, como visto anteriormente na Figura 6.9.

O elevado número de ciclos estimados para romper o concreto C2 é reflexo da sensibilidade do modelo ao ajuste dos ensaios de compressão estática. Lembrando o que foi discutido em 6.3.2 que a dispersão dos resultados de compressão do concreto C2 prejudicou o ajuste do modelo aos ensaios de fadiga. Desta forma, o modelo estima um número de ciclos superior ao que se esperava. Uma vez que o desempenho do concreto C2 em geral sempre esteve entre os concretos C1 e C3, esperava-se que os números de ciclos estimados para o concreto C2, na Tabela 6.13, se situassem entre mil e dez mil ciclos.

#### **6.4. Histórico de deformações**

Neste item busca-se obter uma expressão que relacione o número de ciclos até a ruptura  $N$  e a taxa de deformação (específica secundária  $\dot{\epsilon}_{sec}$ ) – descrita anteriormente no capítulo 2, item 2.3.5 – utilizando-se os parâmetros de fadiga da Equação 6.13, obtidos a partir do modelo probabilístico proposto.

Segundo Hordijk *et al.* (1995) e Cornelissen (1984), parece existir uma forte correlação entre esta taxa de deformação e o número de ciclos até a ruptura, onde com a diminuição de  $\dot{\epsilon}$  a vida à fadiga aumenta. Em geral a previsão do número de ciclos baseada na  $\dot{\epsilon}$  é mais precisa do que as previsões baseadas em níveis de tensão através das curvas  $SxN$ .

Os resultados experimentais aqui são apresentados na Figura 6.14 no plano número de ciclos *versus* taxa de deformação em escala logarítmica. Esses resultados são os mesmos apresentados no capítulo anterior, na Figura 5.10, para os concretos C1, C2 e C3 somados aos resultados do concreto sem fibras C4.

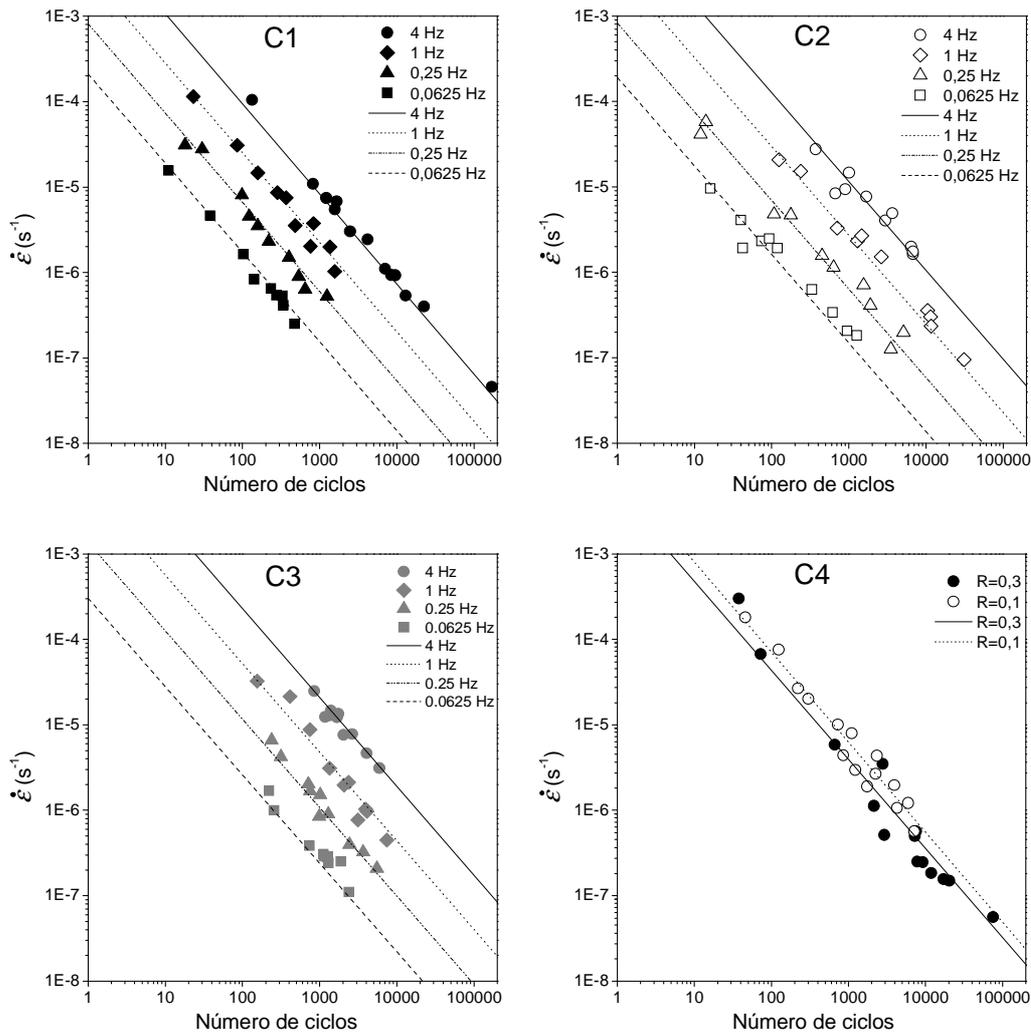


Figura 6.14 – Número de ciclos versus taxa de deformação: C1, C2, C3 e C4.

A Figura 6.14 comprova que existe uma boa correlação entre o número de ciclos até a ruptura e a taxa de deformação  $\dot{\epsilon}$ . Para cada série de ensaios de fadiga – tipo de concreto; frequência ou razão entre tensões  $R$  – foi ajustada uma reta nos gráficos da Figura 6.14. Para tal, denomina-se a intersecção de uma das retas para uma certa frequência  $f$  como o logaritmo natural de uma taxa de deformação qualquer  $\ln \dot{\epsilon}_i$ , a equação dessa reta é escrita como:

$$\ln \dot{\epsilon} = \ln \dot{\epsilon}_i + \varphi(\ln N) \quad \text{eq.(6.16)}$$

onde  $\varphi$  é a inclinação dessa reta.

A relação entre  $\ln \dot{\epsilon}_i$  e a frequência de carregamento  $f$  também pode ser expressa como:

$$\frac{\ln \dot{\varepsilon}_i}{\ln \dot{\varepsilon}_0} = 1 - \eta \ln \left( \frac{f}{f_0} \right) \quad \text{eq.(6.17)}$$

onde  $\dot{\varepsilon}_0$  é a taxa de deformação de referência, correspondente a um ensaio de fadiga realizado a uma frequência de referência  $f_0$ . Essa frequência  $f_0$  seria o limite abaixo do qual o ensaio poderia ser considerado estático. Sendo assim,  $\dot{\varepsilon}_0$  pode ser expresso por linearidade elástica como  $\dot{\sigma}_0/E$  onde  $\dot{\sigma}_0$  é a taxa de carregamento estática e  $E$  corresponde ao módulo de elasticidade. A Equação 6.17 também descreve uma reta com o eixo das abscissas em escala logarítmica onde  $\eta$  é a inclinação dessa reta. Tanto  $\eta$  como  $f_0$  foram obtidas para cada tipo de concreto e seus valores serão apresentados na Tabela 6.14, com os demais parâmetros ajustados em todas as etapas do modelo.

As condições limite a seguir devem ser satisfeitas com respeito a taxa de deformação em um ensaio de fadiga:

$$\lim_{R \rightarrow 1} \dot{\varepsilon} = \ln \dot{\varepsilon}_0 \quad \text{eq.(6.18)}$$

$$\lim_{N \rightarrow 1} \dot{\varepsilon} = \ln \dot{\varepsilon}_0 \quad \text{eq.(6.19)}$$

Em condições análogas aos limites de tensão satisfeitos nas Equações 6.5 a 6.7 e considerando que  $\ln \dot{\varepsilon}$  também depende da razão entre tensões  $R$  e da frequência de carregamento  $f$  nas Equações 6.8 e 6.9, a inclinação  $\varphi$  pode ser expressa como:

$$\varphi = \varphi_1 + [b + c \ln(1 + f)](1 + R) \quad \text{eq.(6.20)}$$

Ajustando-se a Equação 6.16 aos resultados experimentais da Figura 6.14,  $\varphi_1$  é obtido como unitário. Inserindo-se a Equação 6.17 e 6.20 na Equação 6.16, obtém-se uma relação entre a taxa de deformação  $\dot{\varepsilon}$  e o número de ciclos até a ruptura  $N$  por:

$$\ln(\dot{\varepsilon}) = \ln(\dot{\varepsilon}_0) \left[ 1 - \eta \ln \left( \frac{f}{f_0} \right) \right] - [1 + (b + c \ln[1 + f])(1 - R)] \ln(N) \quad \text{eq.(6.21)}$$

As retas da Figura 6.14 foram obtidas a partir da Equação 6.21. A partir dessa equação é possível obter uma relação direta entre  $\dot{\epsilon}$  e  $N$  como:

$$\dot{\epsilon} = \exp \left\{ \ln \left( \frac{\dot{\sigma}_0}{E} \right) \left[ 1 - \eta \ln \left( \frac{f}{f_0} \right) \right] \right\} N^{-\{1+(b+c \ln[1+f])(1-R)\}} \quad \text{eq.(6.22)}$$

O número de ciclos em função da taxa de deformação é obtido isolando-se  $N$  na Equação 6.22:

$$N = \left\{ \frac{\dot{\epsilon}}{\ln(\dot{\sigma}_0/E) [1 - \eta \ln(f/f_0)]} \right\}^{\frac{-1}{1+(b+c \ln[1+f])(1-R)}} \quad \text{eq.(6.23)}$$

A Equação 6.23 permite prever o número de ciclos até a ruptura controlando a deformação ao longo do ensaio sem que seja necessário levar o corpo de prova até a ruptura.

O ajuste das Equações 6.22 e 6.23 foi bastante satisfatório, com um erro médio relativo abaixo de 2% e 3%, respectivamente. Os coeficientes de correlação de cada uma das quatorze séries, ou retas, da Figura 6.14, foram em sua maioria superiores a 0,96 e em poucos casos no mínimo 0,93.

Estas equações (6.22 e 6.23) são determinísticas, uma vez conhecidos os parâmetros de ajuste, e as demais variáveis são conhecidas para um dado ensaio de fadiga. Inserindo a Equação 6.23, onde o número de ciclos é função da taxa de deformação  $N\{\dot{\epsilon}\}$  na Equação 6.13 onde  $N$  é a variável principal para obter a  $PF$ , é possível expressar a probabilidade de falha relacionada com  $\dot{\epsilon}$  como:

$$PF(\dot{\epsilon}; \sigma_{m\acute{a}x}, f, R) = 1 - \exp \left\{ - \left[ \frac{\sigma_{m\acute{a}x} \left( \frac{\dot{\sigma}_0}{2f\Delta\sigma} \right)^\alpha - \sigma_{m\acute{i}n_o}}{\lambda N\{\dot{\epsilon}\}} \right]^k \right\} \quad \text{eq.(6.24)}$$

Comparando-se as Equações 6.13 e 6.24 conclui-se que para um ensaio de fadiga realizado sob certa condição de carregamento – tensão máxima, razão entre tensões e frequência –, tanto o número de ciclos até a ruptura como a taxa de deformação são probabilistas.

A Tabela 6.14 resume todos os parâmetros ajustados ao modelo para os três concretos do programa experimental e também para o concreto sem fibras C4, apresentado no item 6.3.3.

Tabela 6.14 – Resumo dos parâmetros do modelo ajustados para os diferentes concretos.

Concreto	Resistência à compressão			Fadiga			$\dot{\epsilon}$	
	$\lambda$	$k$	$\sigma_{mín_0}$	$b$	$c$	$\gamma$	$f_0$	$\eta$
C1	76,1	19,8	3,1	0,0610	0,0105	0,240	0,0016	0,081
C2	68,0	14,0	4,8	0,0515	0,0035	0,086	0,0019	0,086
C3	76,1	31,0	12,0	0,0490	0,0066	0	0,0015	0,089
C4	94,7	12,4	3,1	$\alpha = 0,06$		0,240	—	—

No caso do concreto sem fibras C4, como este foi ensaiado apenas a frequência 4 Hz, não foi possível obter uma frequência de referência  $f_0$ , tampouco a inclinação  $\eta$  e também não é possível separar os parâmetros de ajuste  $b$  e  $c$ . Ao invés disso, um único valor para o parâmetro  $\alpha$  da Equação 6.12 foi ajustado como 0,06.

A constante  $\gamma$  que tem a função de incluir a influência da frequência de carregamento no expoente dinâmico  $\alpha$ , na Equação 6.4, foi ajustada em 0,24 para ambos os concretos sem fibras C1 e C4. Para o concreto com fibras de aço C3 seu valor foi nulo e para o concreto com fibras de polipropileno C2, o ajuste ficou em um valor intermediário de 0,086.

## 6.5. Comentários finais

O modelo probabilístico proposto neste capítulo foi dividido em três etapas: resistência à compressão, número de ciclos e taxa de deformação. Dos oito parâmetros apresentados na Tabela 6.14 os três primeiros:  $\lambda$ ,  $k$  e  $\sigma_{mín_0}$  são parâmetro de ajuste da distribuição estatística de Weibull, facilmente obtidos pela probabilidade de falha por ruptura dos ensaios de resistência à compressão; os três parâmetros  $b$ ,  $c$  e  $\gamma$ , ajustados através da probabilidade de falha dos ensaios de fadiga, são os únicos parâmetros que requerem a realização dos ensaios de fadiga; por fim, as variáveis  $\eta$  e  $f_0$  não são parâmetros de ajuste, são obtidos a partir da taxa de deformação, uma vez ajustados os seis parâmetros anteriores.

Para cada concreto, foram ensaiados à compressão estática no mínimo seis corpos de prova cúbicos e dez cubos à fadiga para cada frequência selecionada.

Em geral o ajuste foi satisfatório em todos os casos e observou-se que o ajuste foi mais preciso quanto maior foi o número de ensaios realizados. Nos ensaios à compressão de vinte corpos de prova para resistência e quinze mais quinze para fadiga do concreto sem fibras C4, apesar da alta dispersão dos resultados, o ajuste do modelo foi bastante satisfatório.

A proposta deste modelo é, uma vez realizada uma série de ensaios de fadiga com um mínimo de corpos de prova que permita o ajuste dos parâmetros  $b$ ,  $c$  e  $\gamma$ , possibilitar a previsão do número de ciclos até a ruptura considerando a frequência de carregamento e a evolução das deformações ao longo de um ensaio sem levar os corpos de prova até a ruptura. A metodologia probabilística pode vir a ser mais precisa para a análise e projeto de estruturas de concreto – sejam essas com ou sem fibras – em comparação aos critérios que em geral se baseiam nas curvas  $SxN$ . Seria possível uma caracterização mais ampla do comportamento do concreto à fadiga de maneira mais ágil, sem esperar a ruptura de inúmeros corpos de prova, variando a frequência de carregamento e o nível de tensões. A possibilidade de extrapolar os resultados de laboratório para estruturas construídas, monitorando-se o seu histórico de deformações, seria de grande utilidade.