

3 Revisão da literatura II: Fluxo em meios porosos

3.1. Meio poroso saturado e parcialmente saturado

O solo na sua estrutura apresenta duas zonas em função do seu conteúdo de umidade, zona saturada e não saturada. A zona saturada é aquela onde os vazios do solo estão completamente preenchidos por água, aqui a poro pressão tem valor positivo. Além da parte saturada o solo está composto pela chamada de zona vadosa, onde se distinguem duas regiões, a franja capilar e a zona não saturada. A franja capilar é considerada de transição entre a zona saturada e a não saturada, é uma porção onde a saturação ainda é completa, mais se tem pressões negativas. Em quanto que a zona não saturada ou parcialmente saturada, possui conteúdo de água nos vazios inferior a 100%, diferença que é preenchida pelo ar, de igual forma a distribuição de poro pressões é negativa nesta parte.

A distribuição da zona saturada e não saturada está apresentada na figura 3.1.



Figura 3.1 Distribuição da pressão no meio poroso.

3.2. Equação fundamental do fluxo no meio poroso

Considerando um elemento infinitesimal com dimensões dx , dy , dz como apresentado na figura 3.2, a água flui através dos poros interconectados com velocidade V em cada direção.

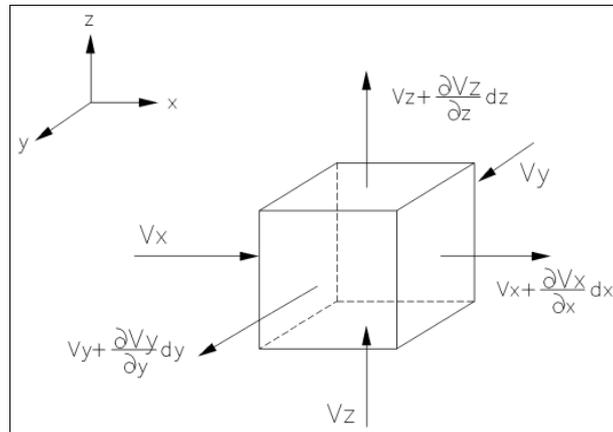


Figura 3.2 Fluxo através de um elemento infinitesimal no meio poroso

Quando a água entrando no meio poroso experimenta uma variação na velocidade, a vazão com que o fluido entra no elemento infinitesimal será a seguinte.

$$Q_o = v_x dydz + v_y dx dz + v_z dx dy \quad (3.1)$$

Da mesma forma, a vazão de saída,

$$Q_s = \left[v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right] dydz + \left[v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \right] dx dz + \left[v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right] dx dy \quad (3.2)$$

Considerando conservação da massa, a vazão de entrada será igual à vazão de saída do elemento, e assumindo rigidez do meio poroso, assim efetuando simplificações, resulta:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

Introduzindo a Lei de Darcy na equação 3.3 sendo que o potencial é expresso como $h(x,y,z)$, para o meio poroso isotrópico resulta.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-k \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.4)$$

Finalmente,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (3.5)$$

Ou em termos do gradiente do potencial,

$$\nabla^2 h(x, y, z) = 0 \quad (3.6)$$

A equação 3.6 é conhecida como Equação de Laplace que governa o fluxo permanente tridimensional através do meio poroso isotrópico, trata-se de uma equação diferencial parcial de segundo ordem.

Quando condições de anisotropia no solo, mais com a restrição de que a direção das permeabilidades principais coincidam com os eixos de referencia (x,y,z), a equação 3.4 adota a seguinte forma,

$$k_{xx} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_{yy} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_{zz} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (3.7)$$

Pelas condições de estratificação, grande parte dos solos apresenta condutividade hidráulica homogênea no plano horizontal (kh) maior do que a condutividade hidráulica vertical (kv), (Figura 3.3).

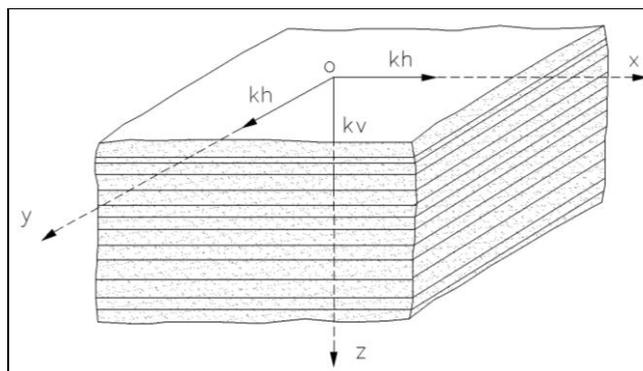


Figura 3.3 Condutividade hidráulica meio estratificada

O tensor da condutividade hidráulica para um sistema de referencia cartesiano (x,y,z) em condições de isotropia no plano horizontal resulta:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_h & 0 & 0 \\ 0 & k_h & 0 \\ 0 & 0 & k_v \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Neste caso, a equação fundamental do fluxo adota a seguinte forma,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \left(\frac{k_v}{k_h}\right) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (3.9)$$

A equação 3.9 não satisfaz a condição de equação de Laplace, mais é possível efetuar uma transformação de coordenadas em termos de:

$$X = x ; Y = y ; Z = z \sqrt{\frac{k_h}{k_v}} \quad (3.10)$$

A partir desta transformação é obtida a equação 3.11 que satisfaz a condição de Laplace no sistema de coordenadas (X,Y,Z).

$$\frac{\partial^2 h}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial Z^2} = 0 \quad (3.11)$$

A equação de Laplace requer de condições de contorno suficientes para a solução de cada problema particular, estas condições de contorno são de dois tipos:

- Condição de contorno de Dirichlet, quando o potencial $h(x,y,z)$ é prescrito no contorno.
- Condição de contorno de Neuman, quando o fluxo é prescrito no contorno.

Considerando fluxo unidimensional, a equação de Laplace representada pela equação diferencial parcial de segundo ordem, transforma-se numa equação diferencial ordinária fácil de ser resolvida, onde a solução é linear.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (3.12)$$

Para fluxo bidimensional a solução mais comum da equação de Laplace são as redes de fluxo compostas por linhas equipotenciais e linhas de fluxo. Em condições de isotropia, as linhas equipotenciais e linhas de fluxo interceptam-se em ângulos retos. Para meio anisotrópico é possível também desenhar redes de fluxo utilizando-se um domínio transformado de acordo com a equação 3.13. Quando desenhada a rede de fluxo para um problema, pode-se determinar a vazão

circulando no sistema utilizando-se a equação 3.14. Para meio anisotrópico adota-se uma condutividade hidráulica equivalente dada por $k_{eq} = (k_x k_y)^{1/2}$. Na literatura tem-se abundante material respeito ao desenho de redes de fluxo, assim como exemplos para os problemas mais frequentes em engenharia.

$$x_t = x \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \quad (3.13)$$

$$Q = k \Delta h \frac{N_F}{N_D} \quad (3.14)$$

Onde, k representa a condutividade hidráulica do meio poroso, Δh é a perda de carga hidráulica total no sistema, N_D e N_F são o número de canais de fluxo e número de quedas equipotenciais na rede respectivamente.

3.3.

Método dos Elementos Finitos (MEF) para fluxo no meio poroso

O MEF é um método numérico a través do qual qualquer função continua pode ser aproximada utilizando um modelo discreto consistente de uma serie de valores da função e eventualmente as derivadas num número finito de pontos no domínio, junto com uma aproximação por partes da função sob um número finito de subdomínios conectados separadamente. Estes subdomínios são chamados de elementos finitos (Oden, 1972).

A solução da equação de Laplace (equação 3.6) pelo MEF é de grande utilidade quando problemas com geometrias complexas, anisotropia e particularmente em problemas 3D. Neste trabalho aplica-se o MEF para o contínuo (Ω) sendo fraccionado em elementos finitos (Ω_e) ligados entre eles através de nós nos contornos. Utilizou-se o programa de Elementos Finitos para aplicações geotécnicas Plaxis v2013 2D que discretiza o meio contínuo mediante elementos triangulares de 15 nós.

O procedimento básico do MEF baseia-se numa serie de passos que são relatados a seguir,

- O meio contínuo é dividido em elementos finitos, formulando-se as características de cada elemento, no caso de fluxo as cargas hidráulicas são associadas com os campos de velocidade no elemento.

- Montagem da matriz de fluxo com as características de cada elemento finito.
- Aplicação das cargas hidráulicas conhecidas do modelo, assim como condições de fluxo prescrito (condições de contorno de Dirichlet e de Neuman).
- Resolve-se o sistema de equações. Para fluxo em meios porosos serão obtidas as cargas hidráulicas desconhecidas (primeira variável).
- Calcular as quantidades secundárias, trata-se dos gradientes e velocidades determinadas a partir dos resultados do passo anterior.

3.3.1. Elementos finitos bidimensionais no sistema de coordenadas

Para cada elemento finito no domínio Ω_e é considerado um sistema de coordenadas chamado de sistema local, neste sistema é feito um mapeamento particular de cada elemento do contínuo. Depois, num sistema global referencia-se cada elemento finito respeito de um sistema único no domínio total Ω (Figura 3.4).

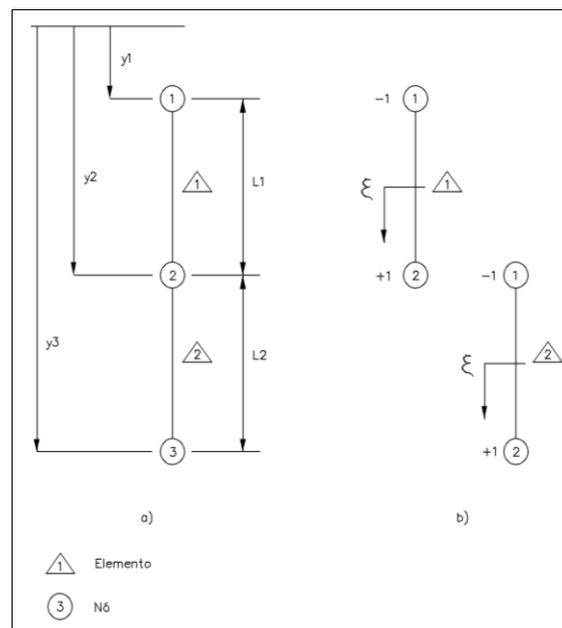


Figura 3.4 MEF sistemas de coordenadas a) global, b) local.

3.3.2. Funções de interpolação (N_i)

As funções de interpolação são polinômios com grau dependente do número de nós no elemento, desta forma é definida uma função para cada nó. No MEF utilizam-se estas funções para representar o comportamento de uma variável

dentro de cada nó do elemento, assim, o grau de aproximação do método dependerá também das funções de interpolação. Apesar de poder ser utilizados para este fim vários tipos de funções, o uso de polinômios é mais prático já que eles podem ser derivados ou integrados com maior facilidade, mantem-se a seguinte relação para sua determinação, (equação 3.15).

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, k \quad (3.15)$$

Onde, x_j é o vetor de coordenadas do nó j e δ_{ij} é o chamado delta de Kronecker que tem valores em função da seguinte configuração,

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

O que é apresentado na equação (3.16) é uma das propriedades das funções de interpolação, sendo que tem valor igual a 1 para o nó onde é definida e igual a zero para todos os demais nós. A segunda propriedade delas é que a soma das funções de interpolação num determinado nó é igual a 1.

Um dos métodos mais simples para obter as funções de interpolação em coordenadas locais $N(\xi)$ de um determinado elemento é através da interpolação de Lagrange, onde em função do número de graus de liberdade do elemento (n) tem-se:

$$N_i(\xi) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (3.17)$$

Com ξ representando as coordenadas locais do elemento e denomina-se N_i à função de interpolação de cada nó i .

3.3.3.

Elementos triangulares com funções de interpolação de grau elevado

No MEF a precisão pode ser incrementada utilizando-se maior número de nós no elemento, isto implica polinômios de interpolação de maior grau, assim por exemplo para uma interpolação quadrática tem-se,

$$u = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 \quad (3.18)$$

Generalizando,

$$u = \sum_{i=1}^k N_i u_i \quad (3.19)$$

As configurações nodais para funções de interpolação com polinômios quadráticos e cúbicos são representadas na figura 3.5a e 3.5b respectivamente.

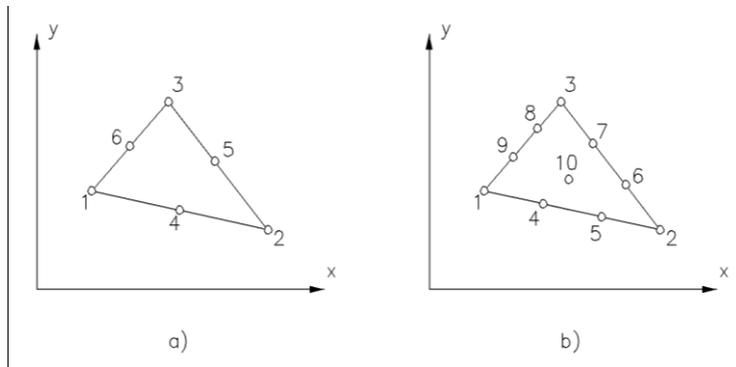


Figura 3.5 a) Função de interpolação quadrática, b) Função de interpolação cúbica (Kazda, 1990).

O programa Plaxis v2013 utiliza elementos triangulares de quarta ordem (quártico), apresentado na figura a seguir.

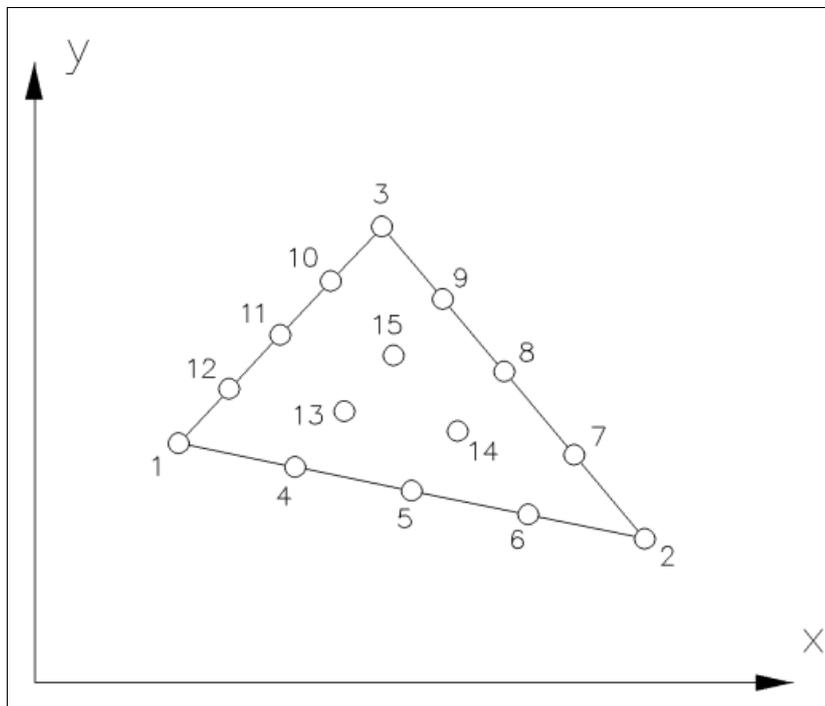


Figura 3.6 Elemento triangular de quarta ordem utilizado no programa Plaxis.

As vantagens derivadas da utilização de elementos finitos triangulares são duas:

- As funções de interpolação são construídas com polinômios completos segundo o triangulo de Pascal.
- Melhor ajuste da malha quando se tem geometrias complexas.