

2

FORMULAÇÃO DO ELEMENTO VIGA-DUTO

2.1

Introdução

A análise numérica de dutos sujeitos a deformações impostas baseia-se em geral em dois tipos de modelos: modelo de casca e modelo de viga.

Apresenta-se a seguir o modelo adotado no presente trabalho, o qual recorre a um modelo de viga específico para dutos enterrados. Este modelo está apresentado em detalhes na seção 2.8.

O modelo de viga é adotado para prever o comportamento de dutos sujeitos a deformações e cargas aplicadas.

Importantes fatores considerados são interação duto-solo e distribuição e redistribuição de deformações e forças internas.

A técnica empregada para a análise deste elemento é a técnica RMDI (Modulo Reduzido de Integração Direta) técnica que exclui os efeitos de flambagem local.

O elemento viga-duto desenvolvido neste capítulo, é apropriado para representar os carregamentos usuais atuantes em dutos enterrados e avaliar as deformações do sistema estrutural. A formulação do elemento viga-duto para a técnica RMDI inclui os seguintes elementos:

- Hipóteses cinemáticas fundamentais.
- Relação deformação-deslocamento.
- Relações constitutivas.
- Interação duto-solo.
- Equação de trabalho virtual.
- Discretização do elemento finito.

2.2

Hipóteses Cinemáticas Fundamentais

Levando em conta a resposta da análise de dutos sem o efeito de flambagem local, as seguintes hipóteses são feitas no desenvolvimento do modelo matemático.

- Seções planas do tubo permanecem planas e o tubo permanece com a seção transversal constante ou seja, perfeitamente circular.
- Tensões cisalhantes e radiais são insignificantes e podem ser ignoradas.
- Tensões longitudinais e circunferenciais são de magnitude considerável, motivo pelo qual devem ser levadas em conta.
- Considera-se o material do tubo com comportamento elasto-plástico. O escoamento do tubo se dá segundo o critério de von Mises.
- O suporte do solo é modelado por meio do emprego de molas de solo inelásticas.
- Todas as deformações ativas e tensões distribuídas são simétricas em relação ao plano vertical da seção transversal do duto.

Estas hipóteses são baseadas na seguinte interpretação do comportamento de dutos.

A hipótese cinemática da teoria de vigas de Bernoulli (primeira hipótese) é justificada aproximadamente, porque a distorção da seção transversal e empenamento resultam principalmente da flambagem local.

Uma linha de tubulação é uma estrutura flexível linear onde deformações axiais e de flexão são dominantes. Conseqüentemente tensões de corte têm menor influência na resposta de linhas de tubulação.

Como a espessura da parede do tubo é significativamente pequena em comparação com o diâmetro e comprimento do tubo, a tensão radial é desprezada comparada com as tensões longitudinal e circunferencial. A segunda hipótese é baseada nestes fatos.

A quarta hipótese define o emprego da teoria de plasticidade para a análise. Embora muitas outras teorias estejam disponíveis, esta teoria é a mais comumente usada para materiais metálicos semelhantes a um tubo de aço.

A hipótese de suporte do solo basicamente considera que o terreno pode ser dividido em partes e a reação de cada uma das partes do solo pode ser

representada por molas de solo. A interação entre as partes pode ser ignorada. Isto não é exato no sentido de que a interação entre as partes do solo algumas vezes pode ser importante. Esta é a hipótese clássica de fundação tipo Winkler.

Considerando a dificuldade de obtenção das propriedades do solo com exatidão e também a variabilidade destas propriedades ao longo do duto, esta hipótese é aceitável, e reforçada pelo fato do objetivo do estudo focar no comportamento do duto em si.

2.3

Relações Deformações-Deslocamentos

Os sistemas de coordenadas global e local para o modelo de viga-tubo são definidos na figura (2.1), onde o eixo x do sistema local de coordenadas passa através do eixo central da seção transversal, e o plano $x - y$ define o plano de flexão da viga.

Os deslocamentos u e v são na direção do eixo x e eixo y respectivamente no sistema de coordenadas local.

O sistema de coordenadas global é denotado por \tilde{x} e \tilde{y} e todas as quantidades definidas no sistema global de coordenadas são similarmente denotadas, com um til sobreposto à letra.

Os vetores ${}_i u_o$ e ${}_i v_o$ são os deslocamentos incrementais do eixo central da seção transversal relativos à configuração de referencia ${}^i \Gamma$, ver figuras (2.2) e (2.3).

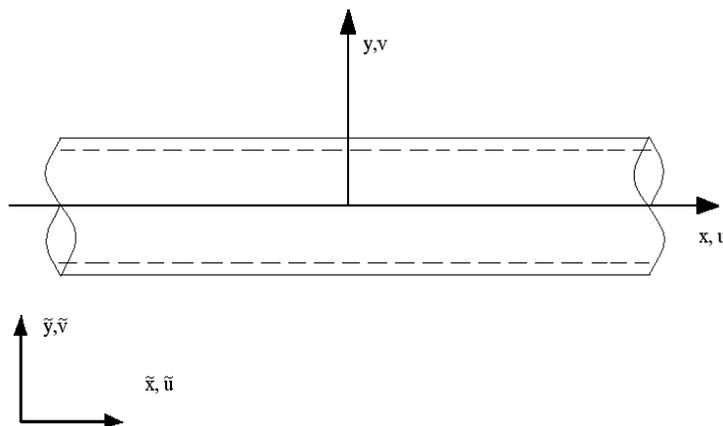


Figura 2.1 Sistema de coordenadas, global e local.

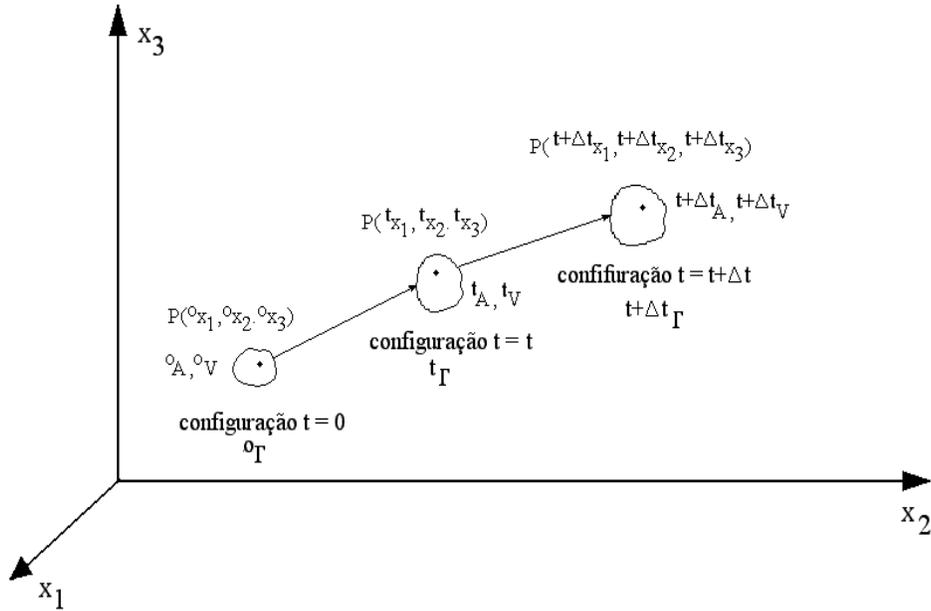


Figura 2.2 Configurações deformadas para $t = 0$, $t = t$ e $t = t + \Delta t$.

As componentes de deslocamento de qualquer ponto na seção transversal podem ser expressas de acordo com a seguinte equação, conforme a primeira hipótese na seção 2.1.

$${}_i u = {}_i u_o - \frac{d {}_i v_o}{d {}^i x} y \quad (2.1a)$$

$${}_i v = {}_i v_o \quad (2.1b)$$

Os deslocamentos totais acumulados no sistema de coordenadas globais são apresentados como:

$${}^{t+\Delta t} \tilde{u} = {}^t \tilde{u} + {}_i \tilde{u} \quad (2.2a)$$

$${}^{t+\Delta t} \tilde{v} = {}^t \tilde{v} + {}_i \tilde{v} \quad (2.2b)$$

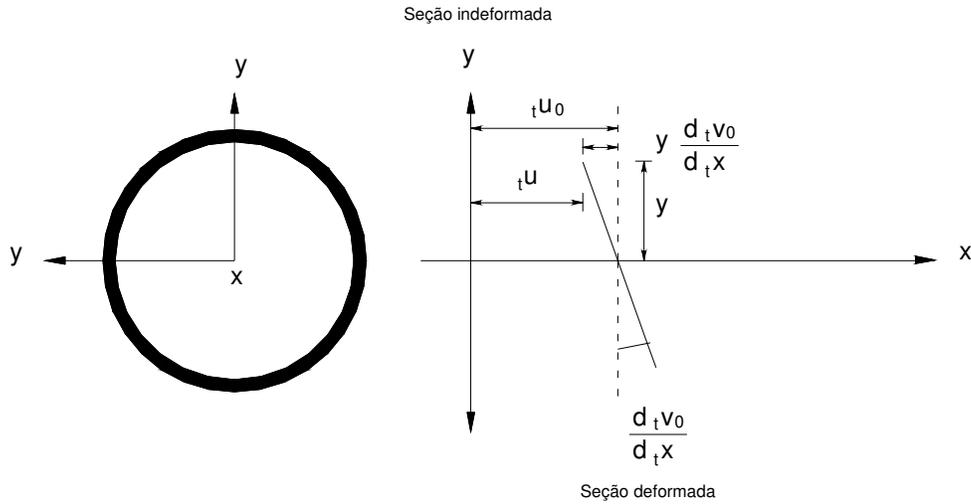


Figura 2.3 Deformações no duto fletido.

Os deslocamentos do eixo centroidal são obtidos a partir dos deslocamentos incrementais.

$${}^{t+\Delta t} \tilde{u}_o = {}^t \tilde{u}_o + {}_t \tilde{u}_o \quad (2.3a)$$

$${}^{t+\Delta t} \tilde{v}_o = {}^t \tilde{v}_o + {}_t \tilde{v}_o \quad (2.3b)$$

onde as quantidades com sub-índices à esquerda são os valores totais de tempo indicado pelo índice. Esta notação, definida por BATHE (1982) será aplicada no decorrer da próxima seção.

Os incrementos ${}_t \tilde{u}_o$ e ${}_t \tilde{v}_o$ são determinados a partir da equação de equilíbrio incremental, e os incrementos no sistema local de coordenadas ${}_t u$ e ${}_t v$ são obtidos por transformação de coordenadas:

$${}_t u_o = \cos^t \alpha_t \tilde{u}_o + \text{sen}^t \alpha_t \tilde{v}_o \quad (2.4a)$$

$${}_t v_o = -\text{sen}^t \alpha_t \tilde{u}_o + \cos^t \alpha_t \tilde{v}_o \quad (2.4b)$$

$${}^t\alpha = \arctan \frac{d^t \tilde{y}_o}{d^t \tilde{x}_o} \quad (2.5)$$

A única componente diferente de zero da deformação é a deformação axial na direção x . A forma incremental para a expressão desta componente de deformação pode ser derivada da expressão geral do tensor de deformação tridimensional BATHE (1982) como:

$${}^{(t+\Delta t)}{}_t\boldsymbol{\varepsilon}_x = {}^t\boldsymbol{\varepsilon}_x + {}_t\boldsymbol{\varepsilon}_x \quad (2.6)$$

com a deformação incremental dada por:

$${}_t\boldsymbol{\varepsilon}_x = \frac{d_t u}{d^t x} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d_t u}{d^t x} \right)^2 + \left(\frac{d_t v}{d^t x} \right)^2 \right) \quad (2.7)$$

Os índices à esquerda indicam a configuração ${}^t\Gamma$ tomada como a configuração de referência.

Substituindo as equações (2.1) e (2.2) na equação (2.7) a componente de deformação pode ser expressa em termos de componentes de deslocamento do eixo centroidal.

$${}_t\boldsymbol{\varepsilon}_x = \frac{d_t u_o}{d^t x} - y \frac{d^2_t v_o}{d^t x^2} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d_t u}{d^t x} - y \frac{d^2_t v_o}{d^t x^2} \right)^2 + \left(\frac{d_t v_o}{d^t x} \right)^2 \right) \quad (2.8)$$

Define-se a seguir a deformação incremental linear axial no eixo centroidal e a curvatura incremental linear como:

$${}_t\boldsymbol{\varepsilon}_o^L = \frac{d_t u_o}{d^t x} \quad \text{deformação incremental} \quad (2.9)$$

$${}_t\phi^L = \frac{d^2_t v_o}{d^t x^2} \quad \text{curvatura incremental} \quad (2.10)$$

A rotação incremental da seção transversal é dada por:

$${}_t\theta = \frac{d{}_t v_o}{d{}_t x} \quad (2.11)$$

Substituindo as definições anteriores e ignorando os termos de segunda ordem da curvatura incremental linear a componente de deformação torna-se:

$${}_t\epsilon_x = {}_t\epsilon_x^L + {}_t\epsilon_x^{NL} \quad (2.12)$$

onde

$${}_t\epsilon_x^L = {}_t\epsilon_o^L - y{}_t\phi^L \quad (2.13)$$

$${}_t\epsilon_x^{NL} = \frac{1}{2} \left(({}_t\epsilon_o^L)^2 - 2y + \epsilon_o^L + {}_t\phi^L + {}_t\theta^2 \right) \quad (2.14)$$

A equação acima também pode ser escrita como:

$${}_t\epsilon_x^{NL} = {}_t\epsilon_o^L - y{}_t\phi^{NL} \quad (2.15)$$

Usando as definições a seguir

$${}_t\epsilon_o^{NL} = \frac{1}{2} \left(({}_t\epsilon_o^L)^2 + {}_t\theta^2 \right) \quad (2.16)$$

$${}_t\phi^{NL} = {}_t\epsilon_o^L - y{}_t\phi^L \quad (2.17)$$

e substituindo na equação (2.12) tem-se:

$${}_t\epsilon_x = {}_t\epsilon_o - y{}_t\phi \quad (2.18)$$

onde:

$${}_t\epsilon_o = {}_t\epsilon_o^L - {}_t\epsilon_o^{NL} \quad (2.19)$$

$${}^t\phi = {}^t\phi^L + {}^t\phi^{NL} \quad (2.20)$$

são os incrementos totais de deformação axial e curvatura respectivamente.

2.4

Relações Constitutivas

Na técnica RMDI é essencialmente correto assumir que seções planas permanecem planas e circulares porque os efeitos de flambagem local não são levados em conta. Conseqüentemente as forças internas do elemento viga-duto são dependentes somente da distribuição de tensões longitudinais.

Os esforços resultantes podem ser definidos como:

$${}^tF = \int_A {}^tS_x dA \quad (2.21)$$

$${}^tM = \int_A {}^tS_x y dA \quad (2.22)$$

Onde tF e tM são força axial e momento fletor, respectivamente e y é a coordenada no plano de flexão.

A relação constitutiva pode ser especificada no nível de tensão-deformação onde as tensões podem ser avaliadas diretamente para a deformação incremental.

A relação tensão-deformação para um elemento viga-duto é uma relação tensão-deformação uniaxial no sistema de coordenadas locais, porque a pressão interna é usualmente constante (condição essencial de carregamento do duto). A tensão circunferencial constante introduzida pela pressão interna deve ser levada em conta na relação tensão-deformação.

O uso da teoria de plasticidade baseada no critério de escoamento de von Mises implica que componentes incrementais de deformação plástica podem existir em três direções, enquanto as tensões incrementais estão só na direção x .

Entre as componentes da deformação incremental plástica, a componente na direção x é independente. As outras duas componentes relacionam-se à componente axial através das restrições de tensões incrementais nulas nessas direções. Portanto a relação entre a tensão incremental independente e a deformação incremental independente pode ainda ser considerada como um tipo especial de relação tensão-deformação uniaxial.

Se tensões de cisalhamento e correspondentes deformações são desprezadas, a relação incremental tensão-deformação pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} {}_t S_\theta \\ {}_t S_r \\ {}_t S_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda' \lambda \lambda \\ \lambda \lambda' \lambda \\ \lambda \lambda \lambda' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_t \varepsilon_\theta \\ {}_t \varepsilon_r \\ {}_t \varepsilon_x \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} {}_t P_{\theta\theta} & {}_t P_{\theta r} & {}_t P_{\theta x} \\ {}_t P_{r\theta} & {}_t P_{rr} & {}_t P_{rx} \\ {}_t P_{x\theta} & {}_t P_{xr} & {}_t P_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_t \varepsilon_\theta \\ {}_t \varepsilon_r \\ {}_t \varepsilon_x \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

onde

$$\lambda' = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.24a)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.24b)$$

$${}_t P_{mn} = \frac{3G}{(1+H')(G)} \frac{1}{S} \cdot {}_t s_{mm} {}_t s_{nn} \quad m, n = \theta, r, x \quad (2.24c)$$

Na nomenclatura acima índices repetidos não indicam soma e H' é o módulo de encruamento.

$$H' = \frac{EE_T}{E - E_T}$$

Os sub-índices θ e r representam as direções circunferencial e radial. O tensor desviador de tensões é definido como:

$${}_t s_{ij} = {}_t S_{ij} - \frac{1}{3} {}_t S_{kk} \delta_{ij} \quad (2.25)$$

Para a hipótese de tensão radial nula, a componente normal do tensor desviador de tensões fica:

$${}^t s_\theta = \frac{1}{3}(2{}^t S_\theta - {}^t S_x) \quad (2.26a)$$

$${}^t s_r = \frac{-1}{3}({}^t S_\theta + {}^t S_x) \quad (2.26b)$$

$${}^t s_x = \frac{1}{3}(2{}^t S_x - {}^t S_\theta) \quad (2.26c)$$

Índices simples são usados porque só as componentes normais são consideradas.

A tensão circunferencial ${}^t S_\theta$ pode ser calculada como:

$${}^t S_\theta = \left(\frac{D-2t}{2t} p \right) \quad (2.27)$$

sendo D e t , diâmetro exterior e espessura do duto, e p a pressão interna respectivamente.

As tensões incrementais na direção radial e circunferencial são nulas porque a tensão radial é assumida nula todo o tempo e a tensão circunferencial é constante devido à condição de pressão interna de operação constante no duto.

Aplicando estas condições às duas primeiras equações obtemos o seguinte:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^t P_{\theta\theta} & {}^t P_{\theta r} \\ {}^t P_{r\theta} & {}^t P_{rr} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_\theta \\ {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_r \end{Bmatrix} + \left(\begin{Bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^t P_{\theta x} \\ {}^t P_{rx} \end{Bmatrix} \right) {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_x \quad (2.28)$$

Resolvendo a equação acima tem-se:

$$\begin{Bmatrix} {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_\theta \\ {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^t C_{\theta x} \\ {}^t C_{rx} \end{Bmatrix} {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_x \quad (2.29)$$

onde:

$$\begin{Bmatrix} {}^t C_{\theta x} \\ {}^t C_{rx} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda^{-1} P_{\theta\theta} & \lambda^{-1} P_{\theta r} \\ \lambda^{-1} P_{r\theta} & \lambda^{-1} P_{rr} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \lambda^{-1} P_{\theta x} \\ \lambda^{-1} P_{rx} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

A terceira linha da equação (2.23) descreve a relação tensão-deformação entre a tensão independente e deformações incrementais que podem ser expressas como:

$${}^t S_x = {}^t C^{EP} {}^t \varepsilon_x \quad (2.31)$$

onde

$${}^t C^{EP} = {}^t C_{\theta x} (\lambda^{-1} P_{x\theta}) + {}^t C_{rx} (\lambda^{-1} P_{xr}) + \lambda^{-1} P_{xx} \quad (2.32)$$

Observa-se que para incrementos elásticos de deformação o coeficiente do material recai na relação elástica.

$${}^t S_x = E {}^t \varepsilon_x \quad (2.33)$$

A tensão efetiva e deformação plástica efetiva incremental podem ser expressas pelas seguintes expressões.

$${}^t \bar{S} = \sqrt{\frac{1}{2} (4 {}^t S_\theta^2 + 4 {}^t S_x^2 + 2 S_x S_\theta)} \quad (2.34)$$

$${}^t \bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \left(({}^t \varepsilon_\theta^p)^2 + ({}^t \varepsilon_r^p)^2 + ({}^t \varepsilon_x^p)^2 \right)} \quad (2.35)$$

onde os componentes da deformação plástica incremental são:

$$\begin{Bmatrix} {}^t \varepsilon_\theta^p \\ {}^t \varepsilon_r^p \\ {}^t \varepsilon_x^p \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^t P_{\theta\theta} & {}^t P_{\theta r} & {}^t P_{\theta x} \\ {}^t P_{r\theta} & {}^t P_{rr} & {}^t P_{rx} \\ {}^t P_{x\theta} & {}^t P_{xr} & {}^t P_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t C_{\theta x} \\ {}^t C_{rx} \\ 1 \end{Bmatrix} {}^t \varepsilon_x \quad (2.36)$$

A deformação plástica efetiva acumulada é usada para avaliar a tensão de escoamento com encruamento e modulo tangente para a curva tensão-deformação.

2.5

Procedimento de Solução para Avaliar Incrementos de Tensão

Nesta seção o procedimento de solução para avaliar incrementos de tensões para uma dada deformação incremental é apresentado. Assumindo que a solução no tempo t é conhecida, as tensões tS_x , deformações ${}^t\epsilon_x, {}^t\bar{\epsilon}^p$ e deslocamentos ${}^tu, {}^tv$ são conhecidos. Os incrementos de deslocamentos e conseqüentemente os incrementos de deformações são determinados para o incremento $t + \Delta t$. Os incrementos em tensão e deformação plástica efetiva serão determinados a partir dos incrementos de deslocamentos.

Deve-se notar que a deformação incremental é avaliada sempre com respeito à última configuração de equilíbrio.

O procedimento de solução para as tensões em regime elasto-plástico é baseado numa técnica de sub-incrementos segundo CHEN e HAN (1988) que divide o incremento de deformação em $NSUB$ sub-incrementos.

O número $NSUB$ deve ser grande o suficiente para obter a precisão requerida.

Se o tamanho aceitável para sub-incrementos de deformação fixo é 10 microdeformações, então o numero $NSUB$ pode ser estimado como:

$$NSUB = \frac{{}^t\epsilon_x}{0.00001} \quad (2.37)$$

Para cada sub-incremento de deformação $d_t\epsilon_x^i$, o seguinte procedimento é usado para avaliar a tensão incremental.

1. Previsão de um subincremento de tensão baseado no comportamento elástico, equação (2.33) e a tensão total como:

$${}^tS_x^T = {}^tS_x^{i-1} + E d_t\epsilon_x^i$$

O índice T indica o valor de teste.

2. Avaliar a tensão efetiva ${}^t S^T$ com a equação (2.34).

3. Checar a condição de escoamento com a tensão de escoamento corrente. ${}^t S_y$

a) caso ${}^t \bar{S}^T \leq {}^t S_y$

a tensões finais correspondem às de teste, ou seja, ${}^t S_x^i = {}^t S_x^T$.

Seguir para o passo 1 para o seguinte subincremento de deformação.

b) caso ${}^t \bar{S}^T > {}^t S_y$

ir ao passo 4 para corrigir a tensão incremental.

4. Determinar o valor de κ que define a fração elástica deste sub-incremento de deformação como $(1 - \kappa)d\varepsilon_x$ e fração elasto-plástica como $\kappa d\varepsilon_x$. O fator κ é igual a 1 para sub-incrementos completamente elasto-plásticos e κ é igual a zero para sub incrementos de deformação completamente elásticos.

Atualizar as tensões para a fração elástica de acordo com a equação (2.33) e ir ao seguinte passo para a fração elasto-plástica

5. Calcular o incremento de tensões para equação (2.31) baseada no modulo tangente e estado de tensão correntes, e atualizar a tensão total para obter ${}^t S_x^i$ como:

$${}^t S_x^i = {}^t S_x^{i-1} + (1 - \kappa)E d_i \varepsilon_x^i + \kappa {}^t C^{EP} d_i \varepsilon_x^i \quad (2.38)$$

6. Calcular a deformação plástica efetiva incremental com a equação (2.36) e atualizar a deformação plástica efetiva total para obter ${}^t \varepsilon_x^{Pi}$. O calculo para o i-ésimo subincremento de deformação é finalizado aqui. Ir ao passo 1 para o seguinte subincremento de deformação seguinte.

Observa-se que o procedimento acima se baseia em um esquema de integração explícito, sendo portanto dependente do tamanho do incremento e condicionalmente estável.

As forças internas ${}^t F$ e ${}^t M$ na seção transversal são integradas para um estado de tensão que é avaliado pelo procedimento anterior. O número de pontos onde são avaliadas as forças internas na seção transversal depende da

divisão da mesma, isto é cada parcela de área tem um diferencial de força interna segundo sua posição e seu diferencial de área.

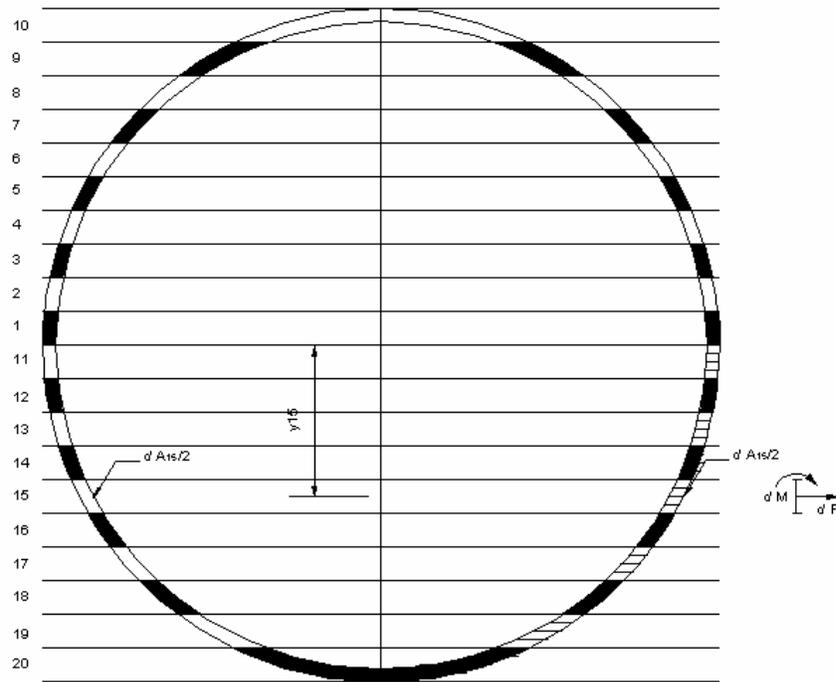


Figura 2.4 Exemplo de divisão da seção transversal

O vetor de forças internas é integrado ao longo do elemento nos pontos de Gauss de acordo a seguinte expressão.

$$\int_a^b f(x) dx = J \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = J \sum_{j=1}^i w_j g(\xi_j) \quad (2.39)$$

sendo :

i o número do ponto de integração.

ξ_j a coordenada do ponto i e

w_j o peso associado ao ponto i .

A partir do vetor de carregamento e do vetor das forças equilibradoras o vetor força desbalanceado pode ser determinado e usado para avaliar o incremento de deslocamentos e deformações seguintes.

2.6

Interação Duto-Solo

A interação duto-solo tem um papel importante na resposta de dutos enterrados. A hipótese fundamental para o modelo de interação duto-solo é que os efeitos do solo sob o duto podem ser modelados por uma série de molas de solo que concentram a reação do solo em pontos discretos do duto.

Para estabelecer o modelo de interação, o perfil do solo deve ser descrito em todas as regiões. As deformações das molas de solo podem ser determinadas de acordo com os deslocamentos do duto e a posição relativa do duto e o perfil do solo.

Usando a relação constitutiva das molas de solo que descreve a relação entre forças de mola e deformação das mesmas, as forças de reação das molas do solo podem ser encontradas.

Os três aspectos básicos neste procedimento são discutidos nas seguintes seções.

2.6.1

Deformação de Molas de Solo

Há três tipos de reação de molas de solo circundante ao duto considerado para o modelo. Essas são: suporte de solo abaixo do duto, reação de solo acima do duto, e atrito ao longo do duto. Elas são modeladas por molas de apoio, molas de levantamento e molas longitudinais, respectivamente ao longo da tubulação. As deformações nessas molas são determinadas de acordo com a posição relativa do duto e do solo. As relações constitutivas para essas molas são apresentadas na seção seguinte.

Molas de apoio e de levantamento são molas que só podem suportar forças compressivas. Conseqüentemente para um par de molas de apoio e levantamento atuando numa mesma seção transversal do duto, só uma delas é ativa em cada instante. Para identificar a mola ativa e inativa deve-se observar o vetor de deslocamentos, especificamente os deslocamentos u e v , como apresenta a figura (2.3).

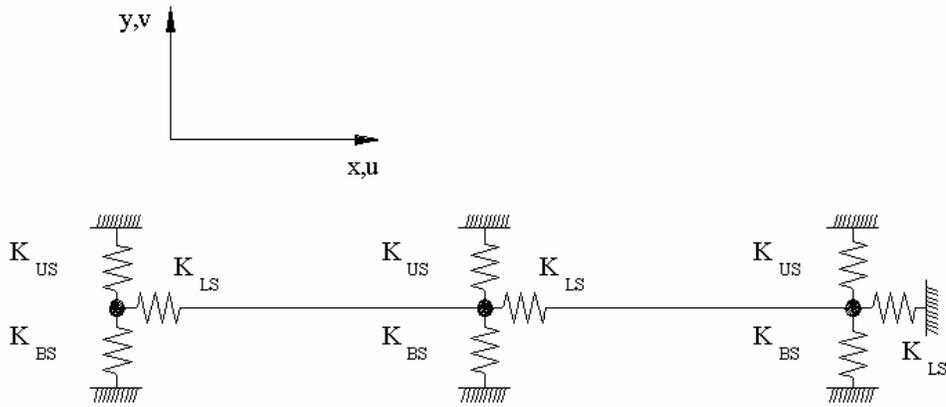


Figura 2.5 Tipos de molas

A deformação incremental das molas é avaliada no sistema de coordenadas locais como:

$${}^t\Delta_{LS} = -{}_t u_0 \quad (2.40a)$$

se ${}_t v > 0$

$${}^t\Delta_{BS} = 0 \quad \text{e} \quad {}^t\Delta_{US} = -{}_t v_0 \quad (2.40b)$$

se ${}_t v < 0$

$${}^t\Delta_{BS} = -{}_t v_0 \quad \text{e} \quad {}^t\Delta_{US} = 0 \quad (2.40c)$$

onde ${}^t\Delta_{BS}$, ${}^t\Delta_{US}$ e ${}^t\Delta_{LS}$ são respectivamente deformações incrementais para molas de apoio de levantamento e longitudinais e ${}^tK_{BS}$, ${}^tK_{US}$ e ${}^tK_{LS}$ são respectivamente rigidez tangencial corrente de molas de apoio, de levantamento e longitudinais.

2.6.2

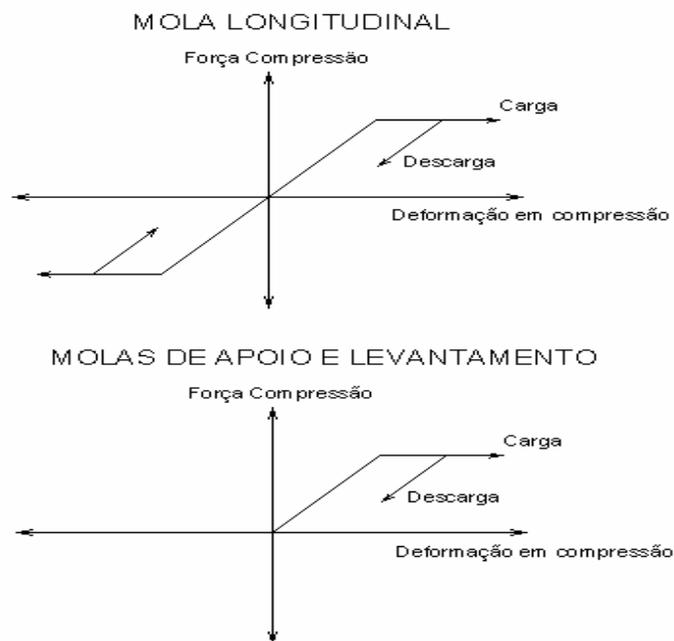
Relações Constitutivas para Molas de Solo

As relações constitutivas para molas de solo são definidas em termos de relações entre a força e deformação das molas. As relações para molas de apoio e molas de levantamento são funções unilaterais com rigidez diferente de zero só para deformação compressiva devido ao fato de que forças de tração do solo são desprezadas. A relação para molas longitudinais é uma função simétrica com relação à compressão ou tração da mola. Relações típicas são apresentadas na figura (2.6). As forças incrementais de mola, são definidas no sistema local de coordenadas na configuração deformada corrente e denotadas por ${}^tF_{BS}$, ${}^tF_{US}$ e ${}^tF_{LS}$.

$${}^tF_{BS} = {}^tK_{BS}\Delta_{BS} \quad (2.41a)$$

$${}^tF_{US} = {}^tK_{US}\Delta_{US} \quad (2.41b)$$

$${}^tF_{LS} = {}^tK_{LS}\Delta_{LS} \quad (2.41c)$$



2.6 Relação força deformação para molas.

O sinal das forças é usualmente definido como positivo para deformações de tração e negativo para deformações de compressão. Portanto a convenção de sinais usada aqui é baseada nas forças de reação externas para molas sobre o duto. As forças de mola são positivas se suas reações sobre o duto são positivas no sistema local de coordenadas.

2.7

Equação de Trabalho Virtual Incremental

Definidos os tensores de tensão e deformação e a relação constitutiva, a equação de trabalho virtual de um corpo pode ser desenvolvida. Duas formulações são comumente adotadas para a análise não-linear de estruturas, atendendo a uma configuração deformada inicial ou atualizada, estas formulações são; Lagrangeana total e Lagrangeana atualizada.

2.7.1

Referenciais Lagrangeanos

A maioria das formulações de elementos finitos com não-linearidade geométrica encontradas na literatura se baseia em referenciais Lagrangeanos. Nesses referenciais os deslocamentos em um sistema estrutural, decorrentes de um dado carregamento, são medidos em relação a uma configuração inicial deste sistema. Numa análise não-linear incremental pode-se adotar duas formas de referenciais Lagrangeanos: referencial Lagrangeano total e referencial Lagrangeano atualizado. As diferenças entre estes dois referenciais são apresentadas a seguir.

No referencial Lagrangeano total os deslocamentos são medidos em relação à configuração inicial indeformada, como mostra o esquema da figura (2.7).

No referencial Lagrangeano atualizado os deslocamentos são medidos em relação à última configuração de equilíbrio obtida no processo incremental, ou seja, em relação a um referencial que é atualizado a cada incremento de carga, conforme ilustrado na figura (2.8).

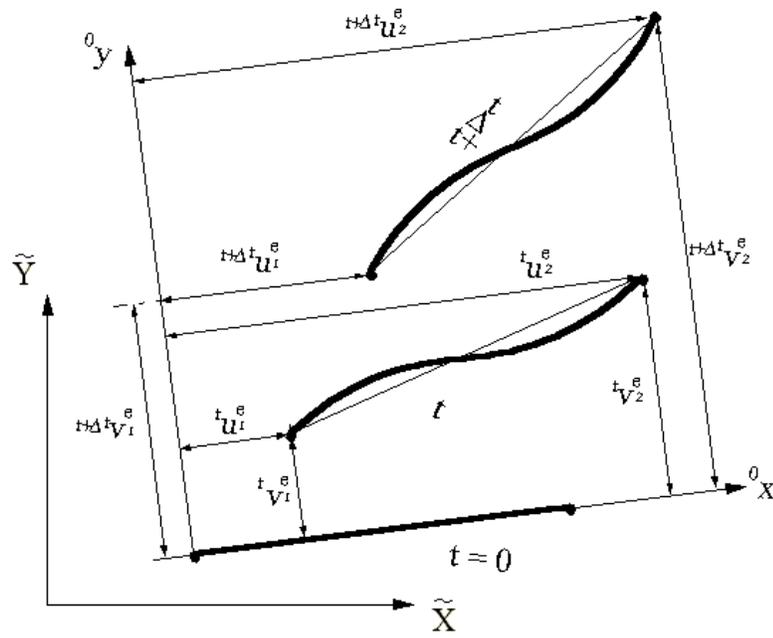


Figura 2.7 Referencial Lagrangeano total.

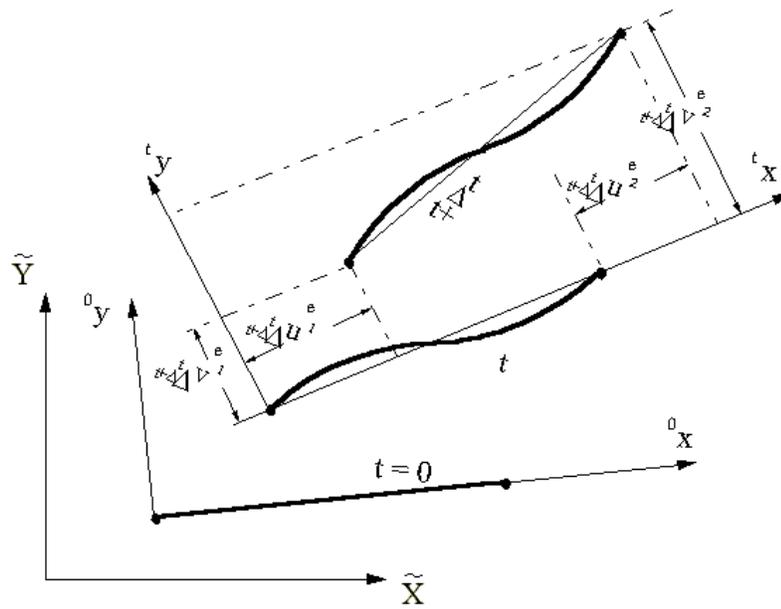


Figura 2.8 Referencial Lagrangeano atualizado.

2.7.2

Equação de Trabalho Virtual Incremental para a Formulação Lagrangeana Total

A Equação do princípio dos deslocamentos virtuais para a formulação lagrangeana total é

$$\int_{0_v} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} d^0 V = \int_{0_v} F_i \delta {}^{t+\Delta t} u_i d^0 V + \int_{0_s} T_i \delta {}^{t+\Delta t} u_i d^0 S \quad (2.42)$$

onde o termo à esquerda representa o trabalho interno e os termos à direita o trabalho das forças externas.

Na expressão acima a tensão e deformação são dadas por

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t S_{ij} + {}_0 S_{ij} \quad (2.43)$$

$${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = {}^t \epsilon_{ij} + {}_0 \epsilon_{ij} \quad (2.44)$$

Para a técnica RMDI a equação de trabalho virtual pode ser obtida levando em conta as componentes de tensão e deformação do elemento viga-duto. Isto poder ser expresso como:

$$\begin{aligned} & \int_{t_y} {}^{t+\Delta t} S_x \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_x d^t V + \int_{t_y} {}^{t+\Delta t} S_\theta \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_\theta d^t V + \\ & \int_{t_L} \left({}^{t+\Delta t} F_{BS} + {}^{t+\Delta t} F_{US} \right) \delta {}^{t+\Delta t} v_0 d^t x + \\ & \int_{t_L} {}^{t+\Delta t} F_{LS} \delta {}^{t+\Delta t} u_0 d^t x = \delta {}^{t+\Delta t} W_{ext} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Os dois primeiros termos representam o trabalho virtual das tensões do duto e os dois termos seguintes são o trabalho virtual das molas do solo.

A parte direita da equação é o trabalho virtual externo originado pela aplicação de carga. Considerando as seguintes relações:

$${}^{t+\Delta t} S_x = {}^t S_x + {}_t S_x \quad (2.46)$$

$${}^{t+\Delta t} S_\theta = {}^t S_\theta = \text{Constante} \quad (2.47)$$

$$\delta^{t+\Delta t} \varepsilon_x = \delta_t \varepsilon_x = \delta_t \varepsilon_x^L + \delta_t \varepsilon_x^{NL} \quad (2.48)$$

$$\delta^{t+\Delta t} \varepsilon_\theta = \delta_t \varepsilon_\theta = {}^t C_{\theta x} \delta_t \varepsilon_x \quad (2.49)$$

onde as equações (2.29), (2.12) e (2.30) são usadas para obter respectivamente as equações (2.47), (2.48) e (2.49), os dois primeiros termos na equação (2.45) resultam:

$$\begin{aligned} I + II = & \int_{t_v} {}^t S_x \delta_t \varepsilon_x^L d^t V + \int_{t_v} ({}^t S_x \delta_t \varepsilon_x^{NL} + {}^t C_{\theta x} {}^t S_\theta \delta_t \varepsilon_x^{NL}) d^t V + \\ & \int_{t_v} ({}^t S_x \delta_t \varepsilon_\theta^L + {}^t C_{\theta x} {}^t S_\theta \delta_t \varepsilon_x^L) d^t V + \int_{t_v} {}^t S_x \delta_t \varepsilon_x^{NL} d^t V \end{aligned} \quad (2.50)$$

Os algarismos romanos I e II representam os dois primeiros termos da equação (2.45). Substituindo as equações (2.17), (2.18) e (2.31) na equação anterior e integrando na seção transversal temos:

$$\begin{aligned} I + II = & \int_{t_L} (({}^t K_1 \varepsilon_\theta^L + {}^t K_3 \phi^L) \delta_t \varepsilon_0^L + ({}^t K_3 \varepsilon_\theta^L + {}^t K_2 \phi^L) \delta_t \phi^L) d^t x + \\ & \int_{t_L} ({}^t F_{eq} \delta_t \varepsilon_\theta^{NL} + {}^t M_{eq} \delta_t \phi^{NL}) d^t x + \int_{t_L} ({}^t F_{eq} \delta_t \varepsilon_\theta^L + {}^t M_{eq} \delta_t \phi^L) d^t x \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde os termos de mais alta ordem são ignorados, e as parcelas

$${}^t K_1 = \int_{t_A} {}^t C^{EP} d^t A \quad (2.52^a)$$

$${}^t K_2 = \int_{t_A} {}^t C^{EP} y^2 d^t A \quad (2.52^b)$$

$${}^t K_3 = -\int_{t_A} {}^t C^{EP} y d^t A \quad (2.52^c)$$

são os coeficientes da rigidez da seção transversal. As forças internas totais equivalentes no tempo t são definidas como

$${}^t F_{eq} = \int_{{}^t A} ({}^t S_x + {}^t C_{\theta x} + {}^t S_{\theta}) d{}^t A \quad (2.53a)$$

$${}^t M_{eq} = - \int_{{}^t A} ({}^t S_x + {}^t C_{\theta x} + {}^t S_{\theta}) y d{}^t A \quad (2.53b)$$

As forças internas totais equivalentes constam de uma contribuição de tensão axial e uma tensão circunferencial e são definidas com base no trabalho virtual equivalente. Considerando a equação (2.41) os dois termos seguintes da equação (2.45) tornam-se:

$$\begin{aligned} III + IV = & \int_{{}^t L} ({}^t K_{BS} \Delta_{BS} + {}^t K_{US} \Delta_{US}) \delta {}^t v_0 d{}^t x + \int_{{}^t L} {}^t K_{LS} \Delta_{LS} \delta {}^t u_0 d{}^t x + \\ & \int_{{}^t L} ({}^t F_{BS} + {}^t F_{US}) \delta {}^t v_0 d{}^t x + \int_{{}^t L} {}^t F_{LS} \delta {}^t u_0 d{}^t x \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde os algarismos romanos III e IV representam o terceiro e quarto termo da equação (2.45).

Substituindo as equações (2.51) e (2.54) na equação (2.45) temos:

$$\begin{aligned} & \int_{{}^t L} (({}^t K_{1t} \varepsilon_{\theta}^L + {}^t K_{3t} \phi^L) \delta {}^t \varepsilon_0^L + ({}^t K_{3t} \varepsilon_{\theta}^L + {}^t K_{2t} \phi^L) \delta {}^t \phi^L) d{}^t x + \\ & \int_{{}^t L} ({}^t F_{eq} \delta {}^t \varepsilon_{\theta}^{NL} + M_{eq} \delta {}^t \phi^{NL}) d{}^t x + \int_{{}^t L} (({}^t K_{BS} \Delta_{BS} + {}^t K_{US} \Delta_{US}) \delta {}^t v_0 + {}^t K_{LS} \Delta_{LS} \delta {}^t u_0) d{}^t x \quad (2.55) \\ & = \delta^{++\Delta} W_{ext} - \int_{{}^t L} ({}^t F_{eq} \delta {}^t \varepsilon_{\theta}^L + M_{eq} \delta {}^t \phi^L) d{}^t x - \int_{{}^t L} (({}^t F_{BS} + {}^t F_{US}) \delta {}^t v_0 + {}^t F_{LS} \delta {}^t u_0) d{}^t x \end{aligned}$$

Esta é a equação de trabalho virtual incremental para um elemento viga-duto baseado na técnica RMDI.

2.8

Discretização do Elemento Finito

Estabelecida a equação de trabalho incremental virtual na equação (2.55), a discretização do elemento finito pode ser desenvolvida. O procedimento de discretização inclui: interpolação de deslocamentos, expressões matriciais da relação deformação-deslocamento e relações constitutivas, expressões matriciais da relação deformação-deslocamento e força-deformação para molas,

a equação de equilíbrio para o elemento viga-duto com matrizes de rigidez e vetores de carga consistentes, e finalmente o equilíbrio para a estrutura.

2.8.1

Interpolação de Deslocamentos

Treliças, vigas retas e pórticos, em geral, são representados por seus eixos baricêntricos, que podem ser discretizados por um elemento finito unidimensional.

Considere-se o elemento de viga da figura (2.9) com três nós e o sistema de coordenadas naturais ξ definidas em relação ao sistema local do elemento como:

$${}^i\xi = \frac{2^i x}{{}^iL} \quad (2.56)$$

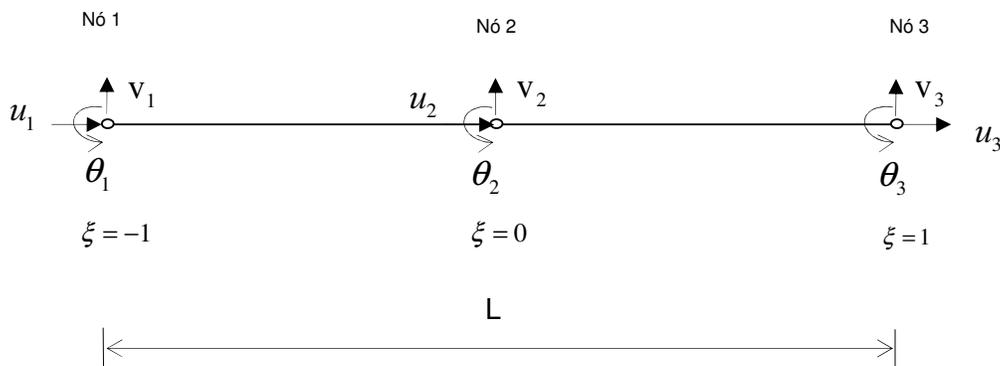


Figura 2.9 Elemento de viga com três nós.

Para o elemento acima são considerados três graus de liberdade por nó: deslocamento axial, deslocamento transversal e rotação de nó.

Dados u_1 , u_2 e u_3 , o deslocamento u em qualquer ponto do elemento finito fica determinado pela função aproximadora $u(\xi)$.

$$u({}^i\xi) = a_0 + a_1 {}^i\xi + a_2 {}^i\xi^2 \quad (2.57)$$

A partir desta função aproximadora obtêm-se as seguintes funções de interpolação.

$${}^1N_1 = \frac{1}{2} {}^1\xi (1 - {}^1\xi) \quad (2.58)$$

$${}^1N_4 = 1 - {}^1\xi^2 \quad (2.59)$$

$${}^1N_7 = \frac{1}{2} {}^1\xi (1 + {}^1\xi) \quad (2.60)$$

Dados os deslocamentos transversais v_1 , v_2 e v_3 , e as rotações θ_1 , θ_2 e θ_3 , o deslocamento v em qualquer ponto do elemento finito fica determinado pela função aproximadora $v(\xi)$.

$$v(\xi) = a_0 + a_1 {}^1\xi + a_2 {}^1\xi^2 + a_3 {}^1\xi^3 + a_4 {}^1\xi^4 + a_5 {}^1\xi^5 \quad (2.61)$$

A partir desta função aproximadora obtemos as seguintes funções de interpolação.

$${}^1N_2 = \frac{1}{4} {}^1\xi^2 (3 {}^1\xi + 4) (-1 + {}^1\xi)^2 \quad (2.62)$$

$${}^1N_3 = \frac{1}{8} {}^1\xi^2 L(1 + {}^1\xi) (-1 + {}^1\xi)^2 \quad (2.63)$$

$${}^1N_5 = (-1 + {}^1\xi)^2 (1 + {}^1\xi)^2 \quad (2.64)$$

$${}^1N_6 = \frac{1}{2} {}^1\xi L(-1 + {}^1\xi)^2 (1 + {}^1\xi)^2 \quad (2.65)$$

$${}^1N_8 = -\frac{1}{4} {}^1\xi^2 (3 {}^1\xi - 4) (1 + {}^1\xi)^2 \quad (2.66)$$

$${}^1N_9 = \frac{1}{8} {}^1\xi^2 L(-1 + {}^1\xi) (1 + {}^1\xi)^2 \quad (2.67)$$

Os deslocamentos incrementais no sistema local de coordenadas podem ser expressos como:

$$\begin{Bmatrix} {}_i u_0 \\ {}_i v_0 \end{Bmatrix} = [{}^i N] \{ {}_i u_e \} \quad (2.68a)$$

onde

$$[{}^i N] = \begin{bmatrix} {}^i N_1 & 0 & 0 & {}^i N_4 & 0 & 0 & {}^i N_7 & 0 & 0 \\ 0 & {}^i N_2 & {}^i N_3 & 0 & {}^i N_5 & {}^i N_6 & 0 & {}^i N_8 & {}^i N_9 \end{bmatrix} \quad (2.68b)$$

e

$$\{ {}_i u_e \} = \begin{Bmatrix} {}_i u_1 \\ {}_i v_1 \\ {}_i \theta_1 \\ {}_i u_2 \\ {}_i v_2 \\ {}_i \theta_2 \\ {}_i u_3 \\ {}_i v_3 \\ {}_i \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

Há seis componentes de deslocamentos associados com o deslocamento transversal e três associados com o deslocamento longitudinal. A interpolação é quadrática para o deslocamento longitudinal e de quinto grau para o deslocamento transversal.

Os deslocamentos nodais incrementais no sistema local de coordenadas podem ser obtidos pela seguinte transformação:

$$\{ {}_i u_e \} = \begin{bmatrix} [{}^i T] & 0 & 0 \\ 0 & [{}^i T] & 0 \\ 0 & 0 & [{}^i T] \end{bmatrix} \{ {}_i \tilde{u}_e \} \quad (2.70)$$

onde $\{ {}_i \tilde{u}_e \}$ é o vetor de deslocamentos incrementais nodais no sistema de coordenadas global, e

$$[{}^i T] = \begin{bmatrix} \cos' \alpha & \sin' \alpha & 0 \\ -\sin' \alpha & \cos' \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

com

$${}^i \alpha = \arcsin\left(\frac{{}^i y_3 - {}^i y_1}{{}^i L}\right) \quad (2.72)$$

Esta é a forma incremental para a orientação do elemento. A forma diferencial é definida na equação (2.5).

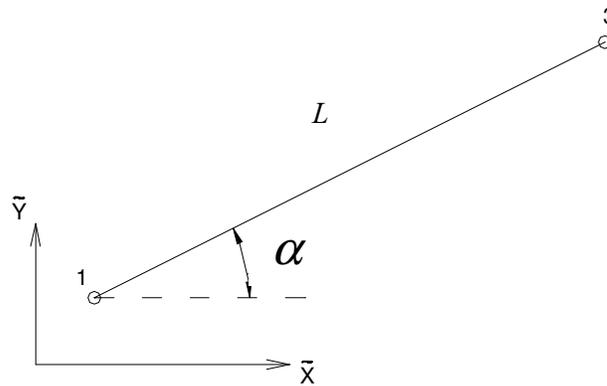


Figura 2.10 Orientação do elemento.

2.8.2

Matrizes de Deformação-Deslocamento

As deformações foram definidas na seção (2.3) e suas componentes lineares estão dadas pelas equações (2.9) e (2.10), As componentes não lineares são definidas nas equações (2.15) e (2.16). Substituindo os deslocamentos incrementais da equação (2.68) na equação (2.9) e (2.10) as componentes de deformação linear tornam-se:

$$\begin{Bmatrix} {}^t\boldsymbol{\varepsilon}_0^L \\ {}^t\boldsymbol{\phi}^L \end{Bmatrix} = [{}^tB^L] \{u_e\} \quad (2.73)$$

onde

$$[{}^tB^L] = \begin{bmatrix} {}^tN_1' & 0 & 0 & {}^tN_4' & 0 & 0 & {}^tN_7' & 0 & 0 \\ 0 & {}^tN_2'' & {}^tN_3'' & 0 & {}^tN_5'' & {}^tN_6'' & 0 & {}^tN_8'' & {}^tN_9'' \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

A linha simples e linha dupla na equação (2.74) representa a primeira e segunda derivada com respeito à coordenada ${}^t x$ local do elemento. Similarmente a deformação não-linear pode ser expressa como:

$${}^t\boldsymbol{\varepsilon}_0^{NL} = \frac{1}{2} \{u_e\}^T [{}^tB_1^{NL}]^T [{}^tB_1^{NL}] \{u_e\} \quad (2.75)$$

onde

$$[{}^tB_1^{NL}] = \begin{bmatrix} {}^tN_1' & 0 & 0 & {}^tN_4' & 0 & 0 & {}^tN_7' & 0 & 0 \\ 0 & {}^tN_2' & {}^tN_3' & 0 & {}^tN_5' & {}^tN_6' & 0 & {}^tN_8' & {}^tN_9' \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

A partir da equação (2.75), a variação de deformação incremental não-linear é:

$$\delta {}^t\boldsymbol{\varepsilon}_0^{NL} = \{\delta u_e\}^T [{}^tB_1^{NL}]^T [{}^tB_1^{NL}] \{u_e\} \quad (2.77)$$

A variação de curvatura incremental não-linear é obtida de (2.17) e (2.73) resultando:

$$\delta {}^t\boldsymbol{\phi}^{NL} = \{\delta u_e\}^T [{}^tB^L]^T [{}^tB_2^{NL}] \{u_e\} \quad (2.78)$$

onde

$$[{}^tB_2^{NL}] = \begin{bmatrix} 0 & {}^tN_2'' & {}^tN_3'' & 0 & {}^tN_5'' & {}^tN_6'' & 0 & {}^tN_8'' & {}^tN_9'' \\ {}^tN_1' & 0 & 0 & {}^tN_4' & 0 & 0 & {}^tN_7' & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

A deformação das molas de solo está definida na equação (2.40) e pode ser expressa em termos de deslocamentos incrementais nodais como:

$$\begin{Bmatrix} {}_t\Delta_{LS} \\ {}_t\Delta_{BS} \\ {}_t\Delta_{US} \end{Bmatrix} = [{}^tB^S] \{ {}_t u_e \} \quad (2.80)$$

onde

$$[{}^tB^S] = \begin{bmatrix} -{}^tN_1 & 0 & 0 & -{}^tN_4 & 0 & 0 & -{}^tN_7 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^tN_2(1-\eta) & -{}^tN_3(1-\eta) & 0 & -{}^tN_5(1-\eta) & -{}^tN_6(1-\eta) & 0 & -{}^tN_8(1-\eta) & -{}^tN_9(1-\eta) \\ 0 & -{}^tN_2\eta & -{}^tN_3\eta & 0 & -{}^tN_5\eta & -{}^tN_6\eta & 0 & -{}^tN_8\eta & -{}^tN_9\eta \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

O parâmetro η usado na equação acima é definido conforme o deslocamento transversal:

$$\eta = 0 \quad \text{se } {}_t v < 0 \quad (2.82a)$$

$$\eta = 1 \quad \text{se } {}_t v > 0 \quad (2.82b)$$

2.8.3

Equações de Equilíbrio para o Elemento Finito

De acordo com a discretização dos deslocamentos, das deformações do duto e dos deslocamentos das molas discretizados, a equação de trabalho incremental virtual resulta na equação matricial de equilíbrio do elemento finito. Substituindo as equações (2.68), (2.73), (2.77), (2.78), (2.80) e (2.81) na equação (2.55) tem-se.

$$\begin{aligned}
& \sum \int_{L_e} \{\delta u_e\}^T [{}^t B^L]^T [{}^t D^p] [{}^t B^L] \{u_e\} d^t x + \\
& \sum \int_{L_e} \{\delta u_e\}^T \left([{}^t B_1^{NL}]^T [{}^t \mathbf{F}] [{}^t B_1^{NL}] + [{}^t B^L]^T [{}^t \mathbf{M}] [{}^t B_2^{NL}] \right) \{u_e\} d^t x + \\
& \sum \int_{L_e} \{\delta u_e\}^T [{}^t N]^T [{}^t D^s] [{}^t B^s] \{u_e\} d^t x = \\
& \sum \left(\{\delta u_e\}^T \{P_{ext}^e\} - \int_{L_e} \{\delta u_e\}^T [{}^t B^L]^T \begin{Bmatrix} {}^t F \\ {}^t M \end{Bmatrix} d^t x - \int_{L_e} \{\delta u_e\}^T [{}^t N]^T \begin{Bmatrix} {}^t F_{LS} \\ {}^t F_{BS} + {}^t F_{US} \end{Bmatrix} d^t x \right)
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Nesta equação as matrizes de rigidez da seção transversal para o duto e molas do solo são definidas respectivamente como:

$$[{}^t D^p] = \begin{bmatrix} {}^t K_1 & {}^t K_3 \\ {}^t K_3 & {}^t K_2 \end{bmatrix} \tag{2.84}$$

$$[{}^t D^s] = \begin{bmatrix} {}^t K_{LS} & 0 & 0 \\ 0 & {}^t K_{BS} & {}^t K_{US} \end{bmatrix} \tag{2.85}$$

Os coeficientes ${}^t K_1$, ${}^t K_2$ e ${}^t K_3$ são obtidos por integração numérica da equação (2.52), conforme descrito na seção 2.5. As matrizes de força interna são definidas como:

$$[{}^t \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} {}^t F & 0 \\ 0 & {}^t F \end{bmatrix} \tag{2.86a}$$

$$[{}^t \mathbf{M}] = \begin{bmatrix} {}^t M & 0 \\ 0 & {}^t M \end{bmatrix} \tag{2.86b}$$

onde ${}^t F$ e ${}^t M$ são as forças internas totais equivalentes definidas na equação (2.53).

Finalmente a matriz de rigidez elasto-plástica, matriz de rigidez geométrica e matriz de rigidez das molas de solo ao nível de elemento são então calculadas através das equações como:

$$[{}^t K_{EP}^e] = \int_{L_e} [{}^t B^L]^T [{}^t D^p] [{}^t B^L] d^t x \tag{2.87a}$$

$$[{}^t K_G^e] = \int_{L_e} \left([{}^t B_1^{NL}]^T [{}^t F] [{}^t B_1^{NL}] + [{}^t B^L]^T [{}^t M] [{}^t B_2^{NL}] \right) d^t x \quad (2.87b)$$

$$[{}^t K_S^e] = \int_{L_e} [{}^t N]^T [{}^t D^S] [{}^t B^S] d^t x \quad (2.87c)$$

Os vetores de cargas internas ao nível de elemento, para o duto e molas de solo são definidos como:

$$\{{}^t Q_P^e\} = \int_{L_e} [{}^t B^L]^T \begin{Bmatrix} {}^t F \\ {}^t M \end{Bmatrix} d^t x \quad (2.88a)$$

$$\{{}^t Q_S^e\} = \int_{L_e} [{}^t N]^T \begin{Bmatrix} {}^t F_{LS} \\ {}^t F_{BS} + {}^t F_{US} \end{Bmatrix} d^t x \quad (2.88b)$$

Substituindo as equações (2.87) e (2.88) na equação (2.83) obtemos:

$$\sum \{\delta_{t u_e}\}^T \left([{}^t K_{EP}^e] + [{}^t K_G^e] + [{}^t K_S^e] \right) \{u_e\} = \sum \{\delta_{t u_e}\}^T \left(\{{}^t P_{ext}^e\} - \{{}^t Q_P^e\} - \{{}^t Q_S^e\} \right) \quad (2.89)$$

As transformações para elementos das matrizes de rigidez e vetores de carga, do sistema de coordenadas locais para o sistema de coordenadas globais são apresentadas como:

$$[{}^t \tilde{K}_{EP}] = \begin{bmatrix} [{}^t T] & 0 & 0 \\ 0 & [{}^t T] & 0 \\ 0 & 0 & [{}^t T] \end{bmatrix}^T [{}^t K_{EP}] \begin{bmatrix} [{}^t T] & 0 & 0 \\ 0 & [{}^t T] & 0 \\ 0 & 0 & [{}^t T] \end{bmatrix} \quad (2.90a)$$

e

$$[{}^t \tilde{Q}_P] = \begin{bmatrix} [{}^t T] & 0 & 0 \\ 0 & [{}^t T] & 0 \\ 0 & 0 & [{}^t T] \end{bmatrix}^T [{}^t Q_P^e] \quad (2.90b)$$

nas matrizes acima $[{}^t T]$ é definido na equação (2.71)

Após a aplicação do método da rigidez direta a equação de equilíbrio global incremental é dada por:

$$\left(\left[{}^t K_{EP}^{Ens} \right] + \left[{}^t K_G^{Ens} \right] + \left[{}^t K_S^{Ens} \right] \right) \{ {}^t u^{Ens} \} = \{ {}^t P_{ext}^{Ens} \} - \{ {}^t Q_P^{Ens} \} - \{ {}^t Q_S^{Ens} \} \quad (2.91)$$