4
Transição entre Guias de Onda Superquadráticos

Este capítulo é dedicado ao estudo da matriz de espalhamento de descontinuidades em guias de onda superquadráticos através do método do casamento de modos [21].

Os campos modais em guias de onda superquadráticos foram determinados no Capítulo 3 utilizando o método variacional de Rayleigh-Ritz com funções de base trigonométricas. A aplicação deste tipo de função de base apresenta duas vantagens ao cômputo da matriz de espalhamento:

1. Permite computar um grande número de modos no guia;
2. Reduz o tempo de execução do programa, visto que a integração dupla inerente ao método do casamento de modos é resolvida analiticamente em uma das dimensões.

O estudo dos guias de onda superquadráticos resulta em um eficiente algoritmo que pode ser aplicado à análise e projeto de diversos dispositivos de microondas como, por exemplo, transições entre guias de diferentes seções.

Uma breve discussão do método do Casamento de Modos será apresentada a seguir.

4.1.
O Método do Casamento de Modos

Seja uma descontinuidade entre dois guias de onda mostrada na figura 4.1. A região à esquerda da descontinuidade, será denominada região I, seção S_{I}, e a região à direita, região II, seção S_{II}. Considera-se S_{I} contida em S_{II}.

O procedimento para determinação da matriz de espalhamento da descontinuidade é apresentado em [21], e será detalhado abaixo.

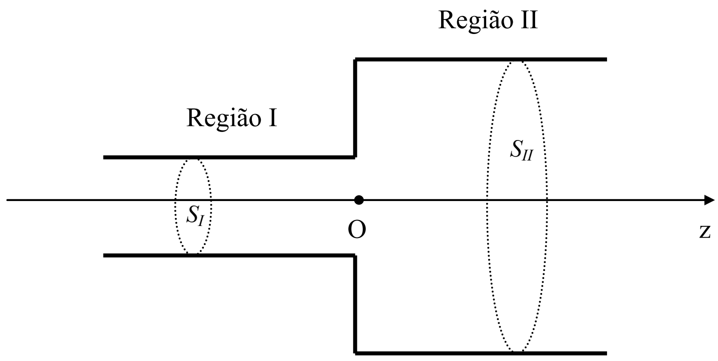

Figura 4.1 – Seção longitudinal de uma descontinuidade entre guias.

Uma onda eletromagnética, composta por um somatório de modos TE e TM, com amplitudes conhecidas, incide na estrutura através da região I ou da II, propagando-se ao longo do eixo dos z, e incidindo na descontinuidade. Deseja-se determinar os campos espalhados (refletidos e transmitidos).

Os campos elétricos e magnéticos transversais, nas regiões I e II, em $z = 0^-$ e $z = 0^+$, serão expressos através de suas expansões modais:

$$\vec{E}_I = \sum_{j=1}^{J} \left(A_{jI} + B_{jI}\right)\vec{e}_{jI} \tag{4.1a}$$

$$\vec{H}_I = \sum_{j=1}^{J} \left(A_{jI} - B_{jI}\right)\vec{h}_{jI} \tag{4.1b}$$

$$\vec{E}_{II} = \sum_{i=1}^{I} \left(A_{iII} + B_{iII}\right)\vec{e}_{iII} \tag{4.2a}$$

$$\vec{H}_{II} = \sum_{i=1}^{I} \left(A_{iII} - B_{iII}\right)\vec{h}_{iII} \tag{4.2b}$$

onde os índices j e i estão associados aos pares ordenados (m_1,n_1) e (m_2,n_2), que caracterizam os modos $\left(TE/TM\right)_{m_1n_1}$ e $\left(TE/TM\right)_{m_2n_2}$, nas regiões I e II, respectivamente. $\vec{e}_{jI}$, $\vec{h}_{jI}$, $\vec{e}_{iII}$, e $\vec{h}_{iII}$ são as componentes transversais dos campos modais nas regiões I e II; A_{jI} e A_{iII}, são as amplitudes dos campos incidentes e B_{jI} e B_{iII} são as amplitudes dos campos espalhados.

As condições de contorno em z = 0 (continuidade dos campos elétrico e magnético transversais) impõem:

Para pontos no interior de S_I $\begin{cases} \vec{E}_I = \vec{E}_{II} & (4.3a) \\ \vec{H}_I = \vec{H}_{II} & (4.3b) \end{cases}$

Para pontos no interior de S_{II} - S_I $\begin{cases} \vec{E}_I = \vec{E}_{II} = 0 & (4.4a) \\ \vec{H}_I = 0 & (4.4b) \end{cases}$

Combinando-se as equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) resulta:

- Para pontos no interior de S_I:

$$\sum_{j=1}^{J} \left(A_{jI} + B_{jI}\right)\vec{e}_{jI} = \sum_{i=1}^{I} \left(A_{iII} + B_{iII}\right)\vec{e}_{iII} \tag{4.5a}$$

$$\sum_{j=1}^{J} \left(A_{jI} - B_{jI}\right)\vec{h}_{jI} = \sum_{i=1}^{I} \left(B_{iII} - A_{iII}\right)\vec{h}_{iII} \tag{4.5b}$$

- Para pontos no interior de S_{II} - S_I:

$$\vec{e}_{jI} = \sum_{i=1}^{I} \left(A_{iII} + B_{iII}\right)\vec{e}_{iII} = 0 \tag{4.6a}$$

$$\vec{h}_{jI} = \sum_{i=1}^{I} \left(B_{iII} - A_{iII}\right)\vec{h}_{iII} = 0 \tag{4.6b}$$

Multiplicando-se vetorialmente ambos os membros de (4.5a) e (4.6a) por $\vec{h}_{iII}$, $i = 1, 2, ..., I$, integrando-se sobre a superfície S_{II}, e lembrando-se que: $\int_{S_{II}} \vec{e}_{i1_{II}} \times \vec{h}_{i2_{II}} \cdot d\vec{s} = 0$, se $i_1 \neq i_2$ (propriedade de ortogonalidade dos modos), obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{J} p_{ij}\left(A_{jI} + B_{jI}\right) = q_{ii}\left(A_{iII} + B_{iII}\right) \qquad i = 1, 2, ..., I \tag{4.7}$$

onde,

$$p_{ij} = \int_{S_I} \vec{e}_{jI} \times \vec{h}_{iII} \cdot d\vec{s} \tag{4.8}$$

$$q_{ii} = \int_{S_{II}} \vec{e}_{iII} \times \vec{h}_{iII} \cdot d\vec{s} \tag{4.9}$$

De forma análoga, multiplicando-se vetorialmente ambos os membros de (4.5b) e (4.6b) por $\vec{e}_{jI}$, j = 1, 2, ..., J, e integrando-se sobre a superfície S_I, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{I} (A_{iII} - B_{iII}) p_{ij} = r_{jj} (B_{jI} - A_{jI}) \qquad j = 1,2,...,J \tag{4.10}$$

onde,

$$r_{jj} = \int_{S_I} \vec{e}_{jI} \times \vec{h}_{jI} \cdot d\vec{s} \tag{4.11}$$

As equações (4.7) e (4.10) formam um sistema de $J+I$ equações com $J+I$ incógnitas, que sob a forma matricial é expresso por:

$$[P]\{[A_I]+[B_I]\} = [Q]\{[A_{II}]+[B_{II}]\} \tag{4.12a}$$

$$[P]^T \{[B_{II}]-[A_{II}]\} = [R]\{[A_I]-[B_I]\} \tag{4.12b}$$

onde,

- $[A_I]$ e $[B_I]$ são matrizes colunas *J x 1* contendo os coeficientes $A_{j\text{I}}$ e $B_{j\text{I}}$;
- $[A_{II}]$ e $[B_{II}]$ são matrizes colunas *I x 1* contendo os coeficientes $A_{i\text{II}}$ e $B_{i\text{II}}$;
- $[P]$ é uma matriz *I x J*, com elementos p_{ij} definidos em (4.8);
- $[Q]$ é uma matriz diagonal *I x I*, com elementos q_{ii} definidos em (4.9);
- $[R]$ é uma matriz diagonal *J x J*, com elementos r_{jj} definidos em (4.11).

O sistema definido em (4.12) pode ser reescrito sob a forma:

$$[P][B_I] - [Q][B_{II}] = -[P][A_I] \tag{4.13a}$$

$$[R][B_I]+[P]^T[B_{II}]=[R][A_I] \tag{4.13b}$$

que resolvido resulta em:

$$[B]=[S][A] \tag{4.14}$$

onde,

$$[B]=\begin{bmatrix}[B_I]\\ [B_{II}]\end{bmatrix},\ [A]=\begin{bmatrix}[A_I]\\ [A_{II}]\end{bmatrix}\ \text{e}\ [S]=\begin{bmatrix}[S11] & [S12]\\ [S21] & [S22]\end{bmatrix}$$

sendo [S] a matriz de espalhamento desejada.

Após manipulações algébricas nas equações (4.13a) e (4.13b), obtém-se:

$$[S11]=\left\{[R]+[P]^T[Q]^{-1}[P]\right\}^{-1}\left\{[R]-[P]^T[Q]^{-1}[P]\right\} \tag{4.15a}$$

$$[S12]=2\left\{[R]+[P]^T[Q]^{-1}[P]\right\}^{-1}[P]^T \tag{4.15b}$$

$$[S21]=2\left\{[Q]+[P][R]^{-1}[P]^T\right\}^{-1}[P] \tag{4.15c}$$

$$[S22]=-\left\{[Q]+[P][R]^{-1}[P]^T\right\}^{-1}\left\{[Q]-[P][R]^{-1}[P]^T\right\} \tag{4.15d}$$

Dessa forma, para o cálculo da matriz [S] basta que se determinem os elementos das matrizes [R], [Q] e [P], e se aplique às expressões (4.15a) a (4.15d).

4.2. Obtenção das Matrizes [*P*], [*Q*] e [*R*]

Nesta seção serão calculados os elementos das matrizes [P], [Q] e [R], para o caso em que os guias das regiões I e II são superquadráticos, como representado na figura 4.2.

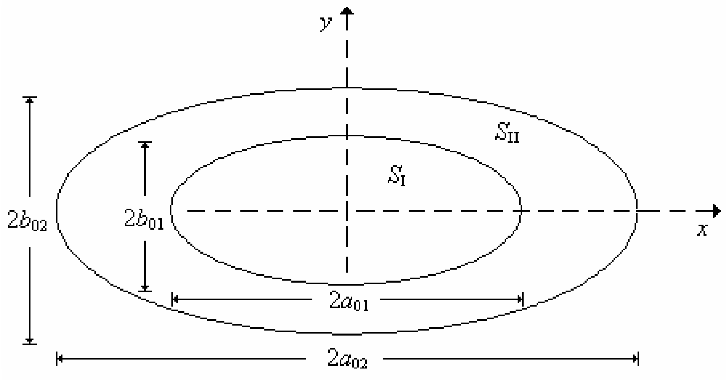

Figura 4.2 – Seção transversal de uma descontinuidade entre guias de onda superquadráticos e sistema de coordenadas utilizado.

4.2.1. Determinação dos Campos Modais

As expressões para os campos modais nas regiões I e II, a serem utilizadas no cálculo das matrizes [*R*], [*Q*] e [*P*], são obtidas através dos potencias vetores elétrico e magnético.

Para a região I, os potenciais vetores elétrico e magnético, ψ_{jI}^{TE} e ψ_{jI}^{TM}, que são obtidos a partir das equações (3.3) e (3.7), respectivamente, são dados por:

$$\psi_{jI}^{TE} = \sum_{m_1=1}^{M_{max}} \sum_{n_1=0}^{N_{max}} C_{m_1 n_1}^{TE_{jI}} sen\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1}\right) cos\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1}\right) e^{-j\beta_{jI}^{TE} z} \quad (4.16a)$$

$$\psi_{jI}^{TM} = \sum_{m_1=0}^{M_{max}} \sum_{n_1=1}^{N_{max}} C_{m_1 n_1}^{TE_{jI}} \left[\left(\frac{x}{a_{01}}\right)^{\gamma_1} + \left(\frac{y}{b_{01}}\right)^{\gamma_1} - 1\right] cos\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1}\right) sen\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1}\right) e^{-j\beta_{jI}^{TM} z} \quad (4.16b)$$

M_{max} e N_{max}, são os valores máximos dos índices m_1 e n_1, respectivamente; γ_1 é o parâmetro γ relativo ao primeiro guia (seção S_I). $\beta_{jI}^{TE} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_{cTE_{jI}}^2}$ e $\beta_{jI}^{TM} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_{cTM_{jI}}^2}$, sendo ω a freqüência angular em rad/s; μ_0 e ε_0 são a permeabilidade e permissividade do vácuo, respectivamente.

Os números de onda de corte dos modos TE (TM), $k_{cTE_{jI}}$ ($k_{cTM_{jI}}$), e os coeficientes $C_{m_1 n_1}^{TE_{jI}}$ e $C_{m_1 n_1}^{TM_{jI}}$, são obtidos através do método de Rayleigh-Ritz (Capítulo 3). Observa-se que o índice j corresponde ao par ordenado (m_1,n_1).

A partir das equações (4.16a) e (4.16b), de acordo com [23], obtém-se as componentes dos campos modais transversais na região I.

- **Modos TE**

$$e_{x_{jI}}^{TE} = -\frac{\partial \psi_{jI}^{TE}}{\partial y} \tag{4.17a}$$

$$e_{y_{jI}}^{TE} = \frac{\partial \psi_{jI}^{TE}}{\partial x} \tag{4.17b}$$

$$h_{x_{jI}}^{TE} = \left(-\frac{\beta_{jI}^{TE}}{\omega \mu_0} \right) e_{y_{jI}}^{TE} \tag{4.17c}$$

$$h_{y_{jI}}^{TE} = \left(\frac{\beta_{jI}^{TE}}{\omega \mu_0} \right) e_{x_{jI}}^{TE} \tag{4.17d}$$

Substituindo-se a expressão de ψ_{jI}^{TE} dada em (4.16a) nas equações (4.17a) e (4.17b), e efetuando-se as diferenciações indicadas, obtém-se o seguinte conjunto de equações:

$$e_{x_{jI}}^{TE} = \sum_{m_1=1}^{M_{max}} \sum_{n_1=0}^{N_{max}} C_{m_1 n_1}^{TE_{jI}} \left(\frac{n_1 \pi}{2b_1} \right) sen\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1} \right) sen\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1} \right) e^{-j\beta_{jI}^{TE} z} \tag{4.18a}$$

$$e_{y_{jI}}^{TE} = \sum_{m_1=1}^{M_{max}} \sum_{n_1=0}^{N_{max}} C_{m_1 n_1}^{TE_{jI}} \left(\frac{m_1 \pi}{2a_1} \right) cos\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1} \right) cos\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1} \right) e^{-j\beta_{jI}^{TE} z} \tag{4.18b}$$

$$h_{x_{jI}}^{TE} = \left(-\frac{\beta_{jI}^{TE}}{\omega \mu_0} \right) \sum_{m_1=1}^{M_{max}} \sum_{n_1=0}^{N_{max}} C_{m_1 n_1}^{TE_{jI}} \left(\frac{m_1 \pi}{2a_1} \right) cos\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1} \right) cos\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1} \right) e^{-j\beta_{jI}^{TE} z} \tag{4.18c}$$

$$h_{y_{jI}}^{TE} = \left(\frac{\beta_{jI}^{TE}}{\omega \mu_0} \right) \sum_{m_1=1}^{M_{max}} \sum_{n_1=0}^{N_{max}} C_{m_1 n_1}^{TE_{jI}} \left(\frac{n_1 \pi}{2b_1} \right) sen\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1} \right) sen\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1} \right) e^{-j\beta_{jI}^{TE} z} \tag{4.18d}$$

- **Modos TM**

$$e_{x_{jI}}^{TM} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\frac{\partial^2\psi_{jI}^{TM}}{\partial x\partial z} \tag{4.19a}$$

$$e_{y_{jI}}^{TM} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\frac{\partial^2\psi_{jI}^{TM}}{\partial y\partial z} \tag{4.19b}$$

$$h_{x_{jI}}^{TM} = \left(-\frac{\omega\varepsilon_0}{\beta_{jI}^{TM}}\right)e_{y_{jI}}^{TM} \tag{4.19c}$$

$$h_{y_{jI}}^{TM} = \left(\frac{\omega\varepsilon_0}{\beta_{jI}^{TM}}\right)e_{x_{jI}}^{TM} \tag{4.19d}$$

Substituindo-se a expressão de ψ_{jI}^{TM} dada em (4.16b) nas equações (4.19a) e (4.19b), e efetuando-se as diferenciações indicadas, obtém-se o seguinte conjunto de equações:

$$e_{x_{jI}}^{TM} = \left(\frac{\beta_{jI}^{TM}}{\omega\varepsilon_0}\right)\sum_{m_1=0}^{M_{max}}\sum_{n_1=1}^{N_{max}} C_{m_1n_1}^{TM\,jI}\left\{\frac{\gamma_1}{a_{01}}\left(\frac{x}{a_{01}}\right)^{\gamma_1-1} cos\left(\frac{m_1\pi x}{2a_1}\right)sen\left(\frac{n_1\pi y}{2b_1}\right)- \right.$$
$$\left. -\left(\frac{m_1\pi}{2a_1}\right)\left[\left(\frac{x}{a_{01}}\right)^{\gamma_1}+\left(\frac{y}{b_{01}}\right)^{\gamma_1}-1\right]sen\left(\frac{m_1\pi x}{2a_1}\right)sen\left(\frac{n_1\pi y}{2b_1}\right)\right\}e^{-j\beta_{jI}^{TM}z}$$

(4.20a)

$$e_{y_{jI}}^{TM} = \left(-\frac{\beta_{jI}^{TM}}{\omega\varepsilon_0}\right)\sum_{m_1=0}^{M_{max}}\sum_{n_1=1}^{N_{max}} C_{m_1n_1}^{TM\,jI}\left\{\frac{\gamma_1}{b_{01}}\left(\frac{y}{b_{01}}\right)^{\gamma_1-1} cos\left(\frac{m_1\pi x}{2a_1}\right)sen\left(\frac{n_1\pi y}{2b_1}\right)+ \right.$$
$$\left. +\left(\frac{n_1\pi}{2b_1}\right)\left[\left(\frac{x}{a_{01}}\right)^{\gamma_1}+\left(\frac{y}{b_{01}}\right)^{\gamma_1}-1\right]cos\left(\frac{m_1\pi x}{2a_1}\right)cos\left(\frac{n_1\pi y}{2b_1}\right)\right\}e^{-j\beta_{jI}^{TM}z}$$

(4.20b)

$$h_{x_{jI}}^{TM} = \sum_{m_1=0}^{M_{max}}\sum_{n_1=1}^{N_{max}} C_{m_1n_1}^{TM\,jI}\left\{\frac{\gamma_1}{b_{01}}\left(\frac{y}{b_{01}}\right)^{\gamma_1-1} cos\left(\frac{m_1\pi x}{2a_1}\right)sen\left(\frac{n_1\pi y}{2b_1}\right)+ \right.$$
$$\left. +\left(\frac{n_1\pi}{2b_1}\right)\left[\left(\frac{x}{a_{01}}\right)^{\gamma_1}+\left(\frac{y}{b_{01}}\right)^{\gamma_1}-1\right]cos\left(\frac{m_1\pi x}{2a_1}\right)cos\left(\frac{n_1\pi y}{2b_1}\right)\right\}e^{-j\beta_{jI}^{TM}z}$$

(4.20c)

$$h_{y_{jI}}^{TM} = \sum_{m=0}^{M_{max}} \sum_{n=1}^{N_{max}} C_{m_1 n_1}^{TM_{jI}} \left\{ \frac{\gamma_1}{a_{01}} \left(\frac{x}{a_{01}} \right)^{\gamma_1 - 1} cos\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1} \right) sen\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1} \right) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{m_1 \pi}{2a_1} \right) \left[\left(\frac{x}{a_{01}} \right)^{\gamma_1} + \left(\frac{y}{b_{01}} \right)^{\gamma_1} - 1 \right] sen\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1} \right) sen\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1} \right) \right\} e^{-j\beta_{jI}^{TM} z} \tag{4.20d}$$

Para a região II, segue-se o mesmo procedimento realizado para a região I, levando-se em consideração as dimensões do segundo guia, conforme ilustrado na figura 4.2.

O cálculo dos cálculo dos elementos das matrizes [R], [Q] e [P] será apresentado a seguir.

4.2.2.
Cálculo dos Elementos da Matriz [R]

A integração descrita na equação (4.11) é realizada na região à esquerda da descontinuidade, guia I, e envolve os campos elétrico e magnético da região I, seção S_I, conforme mostrado na figura 4.2.

- **Modos TE**

De acordo com a equação (4.11):

$$r_{jj}^{TE} = \int_{S_I} \vec{e}_{jI}^{\,TE} \times \vec{h}_{jI}^{\,TE} \cdot d\vec{s} \tag{4.21}$$

que pode ser reescrita como [22]:

$$r_{jj}^{TE} = \frac{\beta_{jI}^{TE} k_{cTE_{jI}}^2}{\omega \mu_0} \int_{S_I} \psi_{jI}^{TE^2} \, ds \tag{4.22}$$

Substituindo-se em (4.22) a expressão de ψ_{jI}^{TE} dada em (4.16a), resulta:

$$r_{jj}^{TE} = \frac{\beta_{jI}^{TE} k_{cTE_{jI}}^2}{\omega\mu_0} \sum_{m_1 n_1} \sum_{m_2 n_2} C_{m_1 n_1}^{TE_{jI}} C_{m_2 n_2}^{TE_{jI}} \int_{x=0}^{a_{01}} sen\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1}\right) sen\left(\frac{m_2 \pi x}{2a_1}\right) \cdot \int_{y=0}^{f_I(x)} cos\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1}\right) cos\left(\frac{n_2 \pi y}{2b_1}\right) dy\ dx \tag{4.23}$$

onde $f_I(x) = b_{01}\left[1 - (x/a_{01})^{\gamma_1}\right]^{1/\gamma_1}$.

- Modos TM

$$r_{jj}^{TM} = \int_{S_I} \vec{e}_{jI}^{\,TM} \times \vec{h}_{jI}^{\,TM} \cdot d\vec{s} = \frac{\beta_{jI}^{TM} k_{cTM_{jI}}^2}{\omega\varepsilon_0} \int_{S_I} \psi_{jI}^{TM\,2}\ ds \tag{4.24}$$

Substituindo-se em (4.24) a expressão de ψ_{jI}^{TM} dada em (4.16b), resulta:

$$r_{jj}^{TM} = \frac{\beta_{jI}^{TM} k_{cTM_{jI}}^2}{\omega\mu_0} \sum_{m_1 n_1} \sum_{m_2 n_2} C_{m_1 n_1}^{TM_{jI}} C_{m_2 n_2}^{TM_{jI}} \int_{x=0}^{a_{01}} cos\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1}\right) cos\left(\frac{m_2 \pi x}{2a_1}\right) \cdot \int_{y=0}^{f_I(x)} \left[\left(\frac{x}{a_{01}}\right)^{\gamma_1} + \left(\frac{y}{b_{01}}\right)^{\gamma_1} - 1\right]^2 sen\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1}\right) sen\left(\frac{n_2 \pi y}{2b_1}\right) dy\ dx \tag{4.25}$$

4.2.3.
Cálculo dos Elementos da Matriz [*Q*]

De forma análoga a efetuada para o cálculo da matriz [*R*], com mudanças apenas nas dimensões do guia, tem-se:

- Modos TE

$$q_{ii}^{TE} = \frac{\beta_{iII}^{TE} k_{cTE_{iII}}^2}{\omega\mu_0} \sum_{m_1 n_1} \sum_{m_2 n_2} C_{m_1 n_1}^{TE_{iII}} C_{m_2 n_2}^{TE_{iII}} \int_{x=0}^{a_{02}} sen\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_2}\right) sen\left(\frac{m_2 \pi x}{2a_2}\right) \cdot \int_{y=0}^{f_{II}(x)} cos\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_2}\right) cos\left(\frac{n_2 \pi y}{2b_2}\right) dy\ dx \tag{4.26}$$

onde $f_{II}(x) = b_{02}\left[1-(x/a_{02})^{\gamma_2}\right]^{1/\gamma_2}$, sendo γ_2 o parâmetro γ relativo ao segundo guia (seção S_{II}).

- **Modos TM**

$$q_{ii}^{TM} = \frac{\beta_{iII}^{TM} k_{cTM_{iII}}^2}{\omega\mu_0} \sum_{m_1 n_1}\sum_{m_2 n_2} C_{m_1 n_1}^{TM_{iII}} C_{m_2 n_2}^{TM_{iII}} \int_{x=0}^{a_{02}} cos\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_2}\right) cos\left(\frac{m_2 \pi x}{2a_2}\right) \cdot$$

$$\cdot \int_{y=0}^{f_{II}(x)} \left[\left(\frac{x}{a_{02}}\right)^{\gamma_2} + \left(\frac{y}{b_{02}}\right)^{\gamma_2} - 1\right]^2 sen\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_2}\right) sen\left(\frac{n_2 \pi y}{2b_2}\right) dy\ dx$$

(4.27)

4.2.4. Cálculo dos Elementos da Matriz [*P*]

A integração descrita na equação (4.8) é realizada na região à esquerda da descontinuidade, guia I, e envolve o campo elétrico da região I, seção S_I, e o campo magnético da região II, seção S_{II}, conforme mostrado na figura 4.2.

- **Para modos TE no primeiro guia e modos TE no segundo guia**

De acordo com a equação (4.8), os elementos p_{ij} são dados por:

$$p_{ij}^{TE/TE} = \int_{S_I} \vec{e}_{jI}^{\,TE} \times \vec{h}_{iII}^{\,TE} \cdot d\vec{s} \tag{4.28}$$

Para os modos TE, os campos elétrico e magnético transversais podem ser expressos como [22]:

$$\vec{H}_T = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} \nabla_T \psi_T^{TE} \tag{4.29a}$$

$$\vec{E}_T = -\frac{\omega\mu_0}{\beta} \vec{a}_z \times \vec{H}_T = \vec{a}_z \times \nabla_T \psi_T^{TE} \tag{4.29b}$$

Substituindo-se (4.29a) e (4.29b) em (4.28), obtém-se:

$$p_{ij}^{TE/TE} = -\frac{\beta_{iII}^{TE}}{\omega\mu_0}\int_{S_I}\left[\left(\vec{a}_z \times \nabla_T\,\psi_{T_{jI}}^{TE}\right)\times \nabla_T\,\psi_{T_{iII}}^{TE}\right]\cdot \vec{a}_z\ ds \qquad (4.30)$$

Aplicando-se a propriedade vetorial $\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C} = \vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$ na equação (4.30), resulta:

$$p_{ij}^{TE/TE} = \frac{\beta_{iII}^{TE}}{\omega\mu_0}\int_{S_I}\left[\vec{a}_z\left(\nabla_T\,\psi_{T_{jI}}^{TE}\cdot\nabla_T\,\psi_{T_{iII}}^{TE}\right) - \nabla_T\,\psi_{T_{jI}}^{TE}\left(\vec{a}_z\cdot\nabla_T\,\psi_{T_{iII}}^{TE}\right)\right]\cdot\vec{a}_z\ ds \qquad (4.31)$$

A segunda parcela da integral é nula, e a equação (4.31) é reduzida a seguinte expressão:

$$p_{ij}^{TE/TE} = -\frac{\beta_{iII}^{TE}}{\omega\mu_0}\int_{S_I}\nabla_T\,\psi_{T_{jI}}^{TE}\cdot\nabla_T\,\psi_{T_{iII}}^{TE}\ ds \qquad (4.32)$$

Da primeira identidade de Green [23], tem-se:

$$\int_S \nabla_T\psi_{T_{jI}}^{TE}\cdot\nabla_T\psi_{T_{iII}}^{TE}\ ds = -\int_S \psi_{T_{iII}}^{TE}\nabla^2\psi_{T_{jI}}^{TE}\ ds + \oint_C \psi_{T_{iII}}^{TE}\frac{\partial\psi_{T_{jI}}^{TE}}{\partial n}\ ds \qquad (4.33)$$

As condições de contorno do problema impõem que $\frac{\partial\psi_{T_{jI}}^{TE}}{\partial n} = 0$. Combinando-se as equações (4.33) e (4.32), resulta:

$$p_{ij}^{TE/TE} = -\frac{\beta_{iI}^{TE}}{\omega\mu_0}\int_{S_I}\psi_{T_{iII}}^{TE}\,\nabla^2\psi_{T_{jI}}^{TE}\ dx\,dy \qquad (4.34)$$

mas $\nabla^2\psi_{T_{jI}}^{TE} + k_{cTE_{jI}}^2\psi_{T_{jI}}^{TE} = 0$ e, em conseqüência, a equação (4.34) assume a seguinte forma:

$$p_{ij}^{TE/TE} = \frac{\beta_{iII}^{TE}\, k_{cTE_{jI}}^{2}}{\omega\mu_0} \int_{S_I} \psi_{T_{iII}}^{TE}\, \psi_{T_{jI}}^{TE}\ dx\,dy \tag{4.35}$$

Substituindo-se a expressão do potencial dada em (4.16a) em (4.35), levando-se em consideração as dimensões do guia, obtém-se:

$$p_{ij}^{TE/TE} = \frac{\beta_{iII}^{TE}\, k_{cTE_{jI}}^{2}}{\omega\mu_0} \sum_{m_1 n_1}\sum_{m_2 n_2} C_{m_1 n_1}^{TE_{jI}}\, C_{m_2 n_2}^{TE_{iII}} \int_{x=0}^{a_{01}} sen\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1}\right) sen\left(\frac{m_2 \pi x}{2a_2}\right) \cdot$$
$$\cdot \int_{y=0}^{f_I(x)} cos\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1}\right) cos\left(\frac{n_2 \pi y}{2b_2}\right) dy\ dx \tag{4.36}$$

- **Para modos TM no primeiro guia e modos TM no segundo guia**

Segundo a equação (4.8), os elementos p_{ij} são dados por:

$$p_{ij}^{TM/TM} = \int_{S_I} \vec{e}_{jI}^{\,TM} \times \vec{h}_{iII}^{\,TM} \cdot d\vec{s} \tag{4.37}$$

O procedimento para determinação dos elementos $p_{ij}^{TM/TM}$ é análogo ao realizado anteriormente para os elementos $p_{ij}^{TE/TE}$. Dessa forma, obtém-se a seguinte expressão:

$$p_{ij}^{TM/TM} = \frac{\beta_{jI}^{TM}\, k_{cTM_{iII}}^{2}}{\omega\varepsilon_0} \int_{S_I} \psi_{T_{jI}}^{TM}\, \psi_{T_{iII}}^{TM}\ dx\,dy \tag{4.38}$$

Substituindo-se a expressão do potencial dada em (4.16b) em (4.38), levando-se em consideração as dimensões dos guias, obtém-se:

$$p_{ij}^{TM/TM} = \frac{\beta_{jI}^{TM}\, k_{cTM_{iII}}^{2}}{\omega\varepsilon_0} \sum_{m_1 n_1}\sum_{m_2 n_2} C_{m_1 n_1}^{TM_{jI}}\, C_{m_2 n_2}^{TM_{iII}} \int_{x=0}^{a_{01}} cos\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1}\right) cos\left(\frac{m_2 \pi x}{2a_2}\right) \cdot$$
$$\cdot \int_{y=0}^{f_I(x)} \left[\left(\frac{x}{a_{01}}\right)^{\gamma_1} + \left(\frac{y}{b_{01}}\right)^{\gamma_1} - 1\right]\left[\left(\frac{x}{a_{02}}\right)^{\gamma_2} + \left(\frac{y}{b_{02}}\right)^{\gamma_2} - 1\right] sen\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1}\right) sen\left(\frac{n_2 \pi y}{2b_2}\right) dy\ dx$$
$$\tag{4.39}$$

- **Para modos TE no primeiro guia e modos TM no segundo guia**

De acordo com a equação (4.8), os elementos p_{ij} são dados por:

$$p_{ij}^{TE/TM} = \int_{S_I} \vec{e}_{jI}^{\,TE} \times \vec{h}_{iII}^{\,TM} \cdot d\vec{s} = \int_{S_I} \left(e_{x_{jI}}^{TE} h_{y_{iII}}^{TM} - e_{y_{jI}}^{TE} h_{x_{iII}}^{TM} \right) dx\, dy \tag{4.40}$$

Substituindo-se em (4.40) as expressões das componentes transversais dos campos elétrico e magnético dadas no conjunto de equações (4.18) e (4.20), levando-se em consideração as dimensões dos guias, resulta:

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{TE/TM} &= \sum_{m_1 n_1} \sum_{m_2 n_2} C_{m_1 n_1}^{TE_{jI}} C_{m_2 n_2}^{TM_{iII}} \Bigg\{ \\
&- \left(\frac{n_1 \pi}{2b_1}\right)\left(\frac{\gamma_2}{a_{02}}\right) \int_{x=0}^{a_{01}} sen\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1}\right) cos\left(\frac{m_2 \pi x}{2a_2}\right) \left(\frac{x}{a_{02}}\right)^{\gamma_2 - 1} \int_{y=0}^{f_I(x)} sen\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1}\right) sen\left(\frac{n_2 \pi y}{2b_2}\right) dy\; dx + \\
&+ \left(\frac{n_1 \pi}{2b_1}\right)\left(\frac{m_2 \pi}{2a_2}\right) \int_{x=0}^{a_{01}} sen\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1}\right) sen\left(\frac{m_2 \pi x}{2a_2}\right) \left[\left(\frac{x}{a_{02}}\right)^{\gamma_2} - 1\right] \int_{y=0}^{f_I(x)} sen\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1}\right) sen\left(\frac{n_2 \pi y}{2b_2}\right) dy\; dx + \\
&+ \left(\frac{n_1 \pi}{2b_1}\right)\left(\frac{m_2 \pi}{2a_2}\right) \int_{x=0}^{a_{01}} sen\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1}\right) sen\left(\frac{m_2 \pi x}{2a_2}\right) \int_{y=0}^{f_I(x)} \left(\frac{y}{b_{02}}\right)^{\gamma_2} sen\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1}\right) sen\left(\frac{n_2 \pi y}{2b_2}\right) dy\; dx _ \\
&- \left(\frac{m_1 \pi}{2a_1}\right)\left(\frac{\gamma_2}{b_{02}}\right) \int_{x=0}^{a_{01}} cos\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1}\right) cos\left(\frac{m_2 \pi x}{2a_2}\right) \int_{y=0}^{f_I(x)} \left(\frac{y}{b_{02}}\right)^{\gamma_2 - 1} cos\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1}\right) sen\left(\frac{n_2 \pi y}{2b_2}\right) dy\; dx - \\
&- \left(\frac{m_1 \pi}{2a_1}\right)\left(\frac{n_2 \pi}{2b_2}\right) \int_{x=0}^{a_{01}} \left[\left(\frac{x}{a_{02}}\right)^{\gamma_2} - 1\right] cos\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1}\right) cos\left(\frac{m_2 \pi x}{2a_2}\right) \int_{y=0}^{f_I(x)} cos\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1}\right) cos\left(\frac{n_2 \pi y}{2b_2}\right) dy\; dx - \\
&- \left(\frac{m_1 \pi}{2a_1}\right)\left(\frac{n_2 \pi}{2b_2}\right) \int_{x=0}^{a_{01}} cos\left(\frac{m_1 \pi x}{2a_1}\right) cos\left(\frac{m_2 \pi x}{2a_2}\right) \int_{y=0}^{f_I(x)} \left(\frac{y}{b_{02}}\right)^{\gamma_2} cos\left(\frac{n_1 \pi y}{2b_1}\right) cos\left(\frac{n_2 \pi y}{2b_2}\right) dy\; dx \Bigg\}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

- **Para modos TM no primeiro guia e modos TE no segundo guia**

$$p_{ij}^{TM/TE} = 0 \tag{4.42}$$

No cômputo dos elementos das matrizes [P], [Q] e [R], as integrais em relação a y são efetuadas analiticamente e as integrais em x numericamente.

4.3.
Resultados Numéricos

A formulação descrita anteriormente para o cálculo da matriz de espalhamento de descontinuidades entre guias superquadráticos de diferentes seções transversais foi implementada computacionalmente em linguagem FORTRAN.

Como primeira aplicação, considerou-se uma descontinuidade entre dois guias de onda circulares de raios 5 mm e 6 mm, respectivamente. A faixa de freqüências considerada é de 20 a 30 GHz, garantindo que apenas o modo TE_{11} se propaga. Considerou-se, em ambos os guias, o número de harmônicos das funções trigonométricas, M_{max} e N_{max}, iguais a 10.

A convergência do método, em função do número de harmônicos das funções de base ($M_{max} = N_{max}$), é mostrada na figura 4.3, onde estão indicados os valores do módulo, em dB, e da fase, em graus, do coeficiente de reflexão na porta I, para o modo fundamental, na freqüência de 20 GHz. Observa-se que 20 modos são suficientes para assegurar a convergência dos resultados.

Os valores de $|S11|$ e $|S21|$, para o modo fundamental, em função da freqüência, são apresentados nas figuras 4.4 e 4.5, respectivamente. Nestas figuras também estão indicados os valores calculados pela formulação dada em [21], que aplica o método do casamento de modos diretamente a guias circulares. Observa-se que, para valores do $|S11|$ acima de –30dB, as discrepâncias entre os dois métodos são menores do que 0,8 dB. As figuras 4.6 e 4.7 apresentam o comportamento das fases de $S11$ e $S21$, respectivamente, para o modo fundamental.

Como segundo exemplo, a transição entre um guia de onda retangular com seção transversal 19,05 mm x 9,525 mm para um guia circular de raio 19,05 mm, foi considerada. A convergência dos resultados, em função do número de modos utilizados, para a freqüência de 9 GHz, é mostrada na tabela 4.1.

A figura 4.8 apresenta os valores $|S11|$ e $|S21|$, para o modo fundamental, na faixa de freqüências de 8 a 15 GHz. Considerou-se, para o primeiro guia, o número de harmônicos das funções trigonométricas, M_{max} e N_{max}, iguais a 8, e para o segundo guia, 16. Nota-se que os valores computados utilizando o método proposto concordam satisfatoriamente com a solução apresentada em [18], apontando discrepâncias menores do que 0,4 dB. As fases de $S11$ e $S21$, para o modo fundamental, são mostradas na figura 4.9.

Como última aplicação, foi calculada a matriz de espalhamento de uma descontinuidade entre um guia de retangular maior para um guia circular menor. As dimensões transversais do guia de onda retangular são $2a$ = 22,86 mm e $2b$ = 10,16 mm. Foram feitas computações para três valores de raio do guia circular: 2,54 mm, 3,81mm e 5,08 mm. Na faixa de freqüências utilizada, o único modo propagante é o modo fundamental TE_{10} no guia retangular. Todos os modos do guia circular são evanescentes. A convergência dos resultados, em função do número de modos utilizados, para as freqüências de 8 GHz e 14 GHz, é mostrada na tabela 4.2.

A susceptância normalizada de uma descontinuidade pode ser determinada a partir de $S22_{11}$:

$$jB = \frac{1 - S22_{11}}{1 + S22_{11}} \tag{4.70}$$

onde B é a susceptância normalizada da descontinuidade e $S22_{11}$ é o elemento de $S22$ correspondente ao primeiro modo.

A figura 4.10 mostra a susceptância normalizada da descontinuidade, B, para três valores de raio do guia circular, em função de a/λ, onde λ é o comprimento de onda. Considerou-se, para o primeiro guia, o número de harmônicos das funções trigonométricas, M_{max} e N_{max}, iguais a 4, e para o segundo guia, 12. Na mesma figura são apresentados os valores obtidos de acordo com a formulação dada em [17]. Verifica-se que as discrepâncias entre os dois métodos são pequenas.

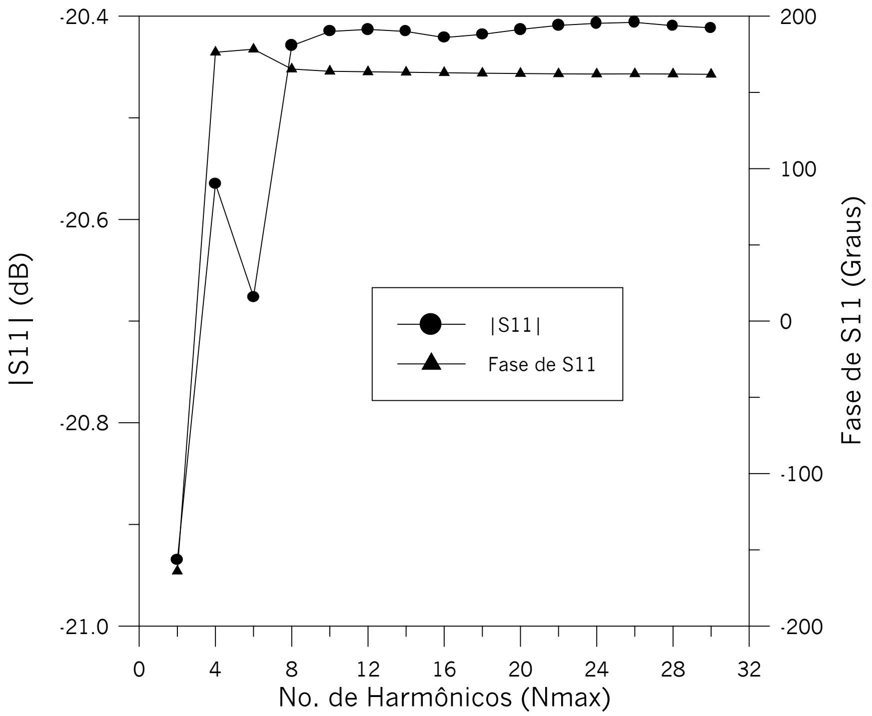

Figura 4.3 – Valores do módulo de $S11_{11}$ em dB e da fase em graus, em função do número de harmônicos das funções de base (N_{max}), para uma descontinuidade entre guias de onda circulares. Os raios do primeiro e segundo guia são 5 mm e 6 mm, respectivamente.

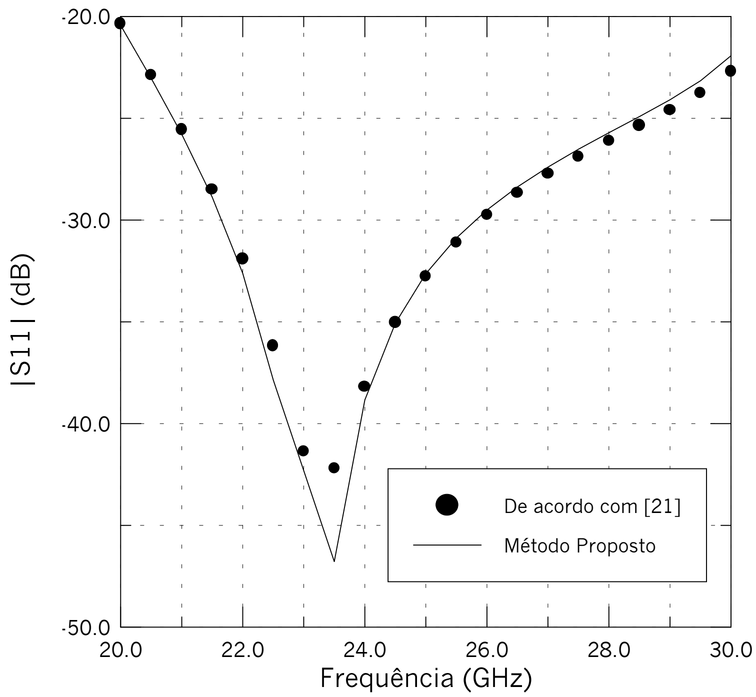

Figura 4.4 – Valores do módulo de $S11_{11}$ em dB, em função da freqüência em GHz, para uma descontinuidade entre guias de onda circulares. Os raios do primeiro e segundo guia são 5 mm e 6 mm, respectivamente.

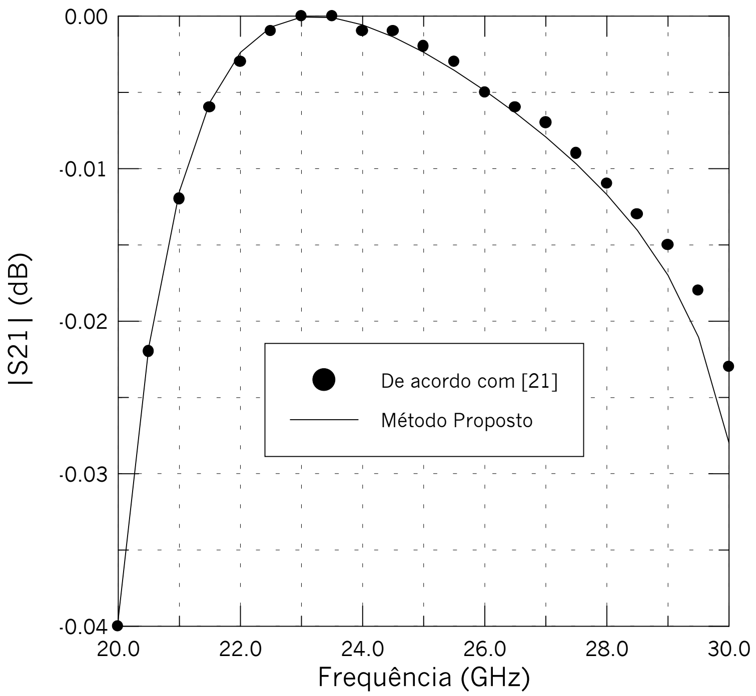

Figura 4.5 – Valores do módulo de $S21_{11}$ em dB, em função da freqüência em GHz, para uma descontinuidade entre guias de onda circulares. Os raios do primeiro e segundo guia são 5 mm e 6 mm, respectivamente.

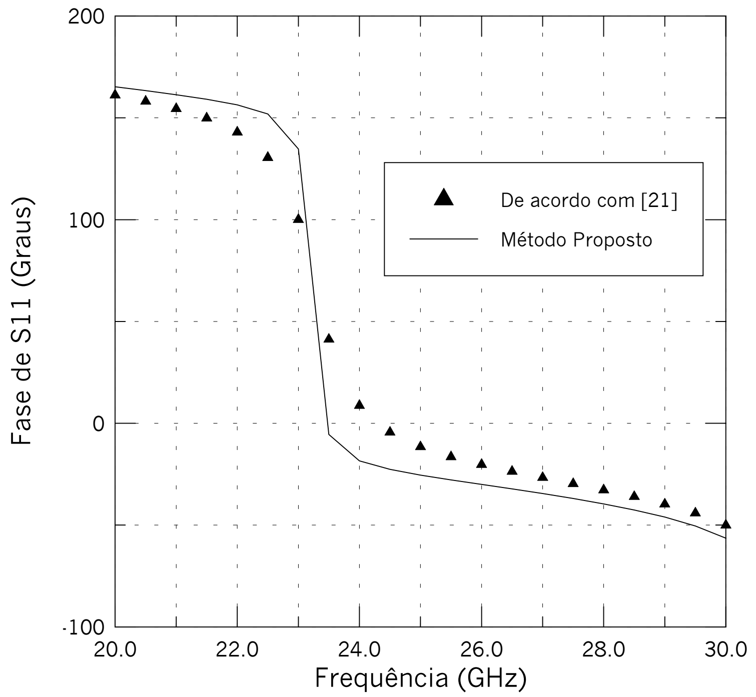

Figura 4.6 – Valores da fase de $S11_{11}$ em graus, em função da freqüência em GHz, para uma descontinuidade entre guias de onda circulares. Os raios do primeiro e segundo guia são 5 mm e 6 mm, respectivamente.

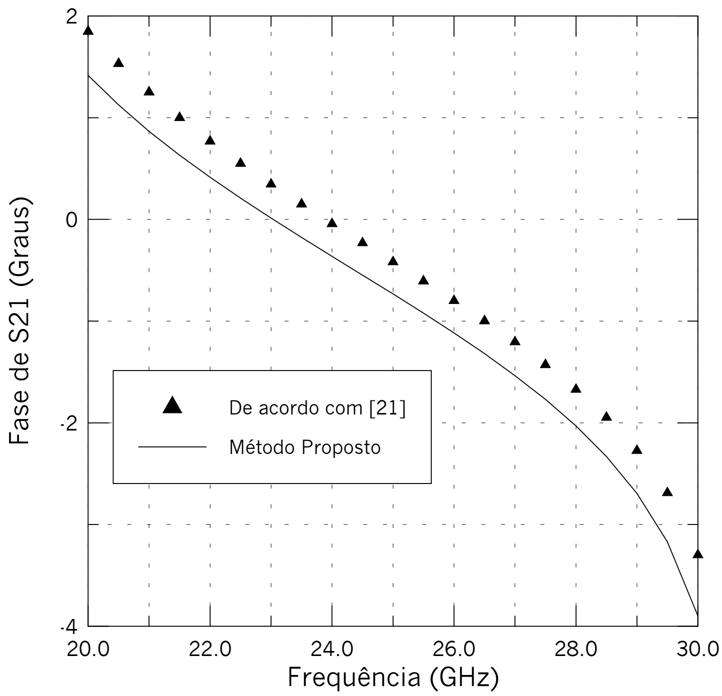

Figura 4.7 – Valores da fase de $S21_{11}$ em graus, em função da freqüência em GHz, para uma descontinuidade entre guias de onda circulares. Os raios do primeiro e segundo guia são 5 mm e 6 mm, respectivamente.

Número de Modos					
Guia Retangular		Guia Circular		$S11_{11}$	$S21_{11}$
TE	TM	TE	TM		
6	4	41	42	-0,127-j0,678	0,570-j0,446
9	6	63	64	-0,137-j0,678	0,566-j0,448
12	9	87	90	-0,133-j0,678	0,568-j0,448
16	12	116	121	-0,138-j0,678	0,566-j0,449
20	16	151	156	-0,136-j0,677	0,567-j0,448

Tabela 4.1 – Valores de $S11_{11}$ e $S21_{11}$ para uma descontinuidade entre um guia de onda retangular com seção transversal 19,05 mm x 9,525 mm e um guia circular de raio 19,05 mm, em função do número de modos utilizados, na freqüência de 9 GHz.

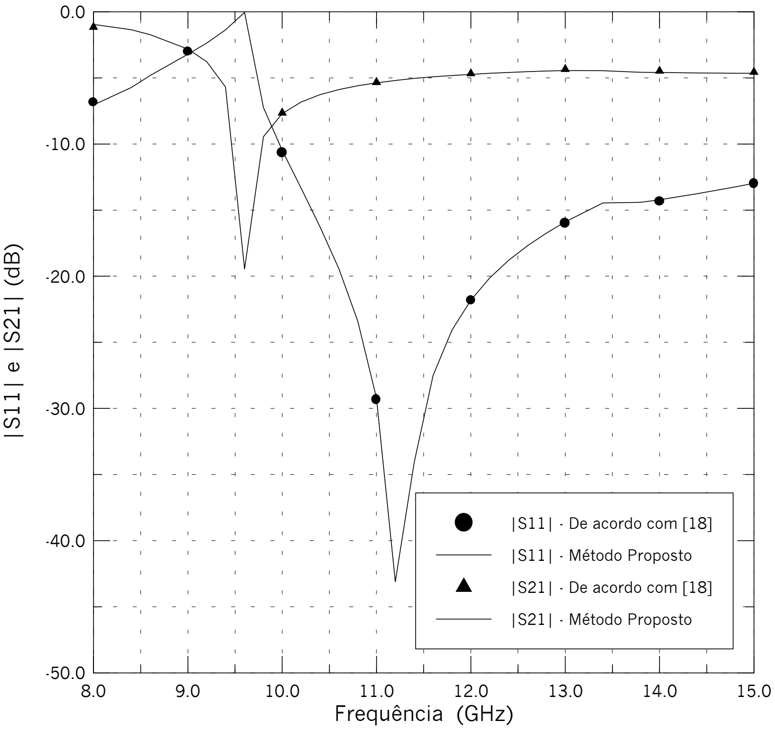

Figura 4.8 – Valores dos módulos de $S11_{11}$ e de $S21_{11}$ em dB, em função da freqüência em GHz, para uma descontinuidade entre um guia de onda retangular com seção transversal 19,05 mm x 9,525 mm e um guia circular de raio 19,05 mm.

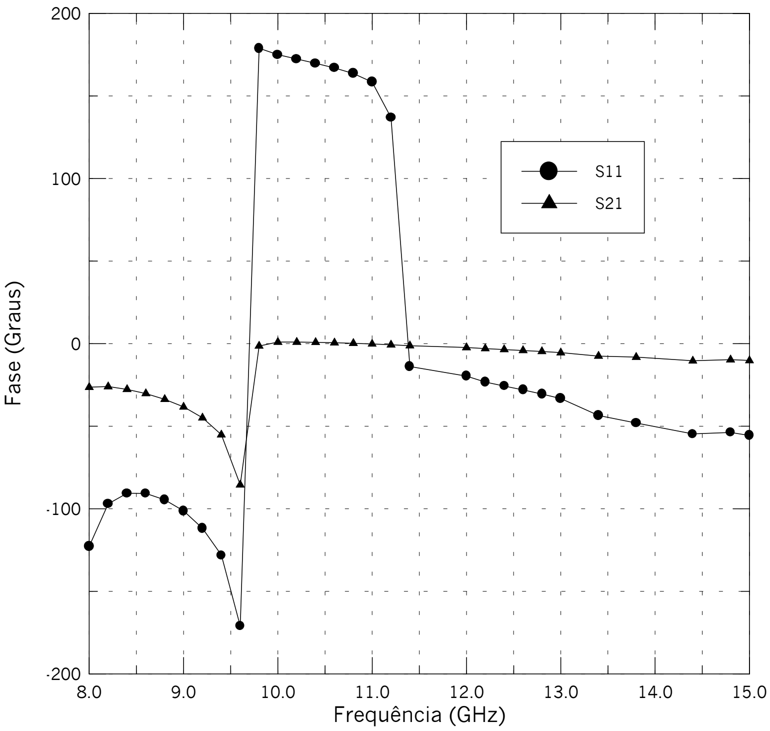

Figura 4.9 – Valores das fases de $S11_{11}$ e de $S21_{11}$ em graus, em função da freqüência em GHz, para uma descontinuidade entre um guia de onda retangular com seção transversal 19,05 mm x 9,525 mm e um guia circular de raio 19,05 mm.

Número de Modos					
Guia Circular		Guia Retangular		$S22_{11}$ em 8 GHz	$S22_{11}$ em 14 GHz
TE	TM	TE	TM		
6	6	42	36	-1,000+j0,027	-0,997+j0,080
9	9	64	56	-1,000+j0,027	-0,997+j0,080
12	12	90	81	-1,000+j0,027	-0,997+j0,079
16	16	121	110	-1,000+j0,027	-0,997+j0,079
20	20	156	144	-1,000+j0,027	-0,997+j0,079

Tabela 4.2 – Valores de $S22_{11}$ para uma descontinuidade entre um guia de onda circular de raio 2,54 mm e um guia retangular com seção transversal 22,86 mm x 10,16 mm, em função do número de modos utilizados, nas freqüências de 8 GHz e 14 GHz.

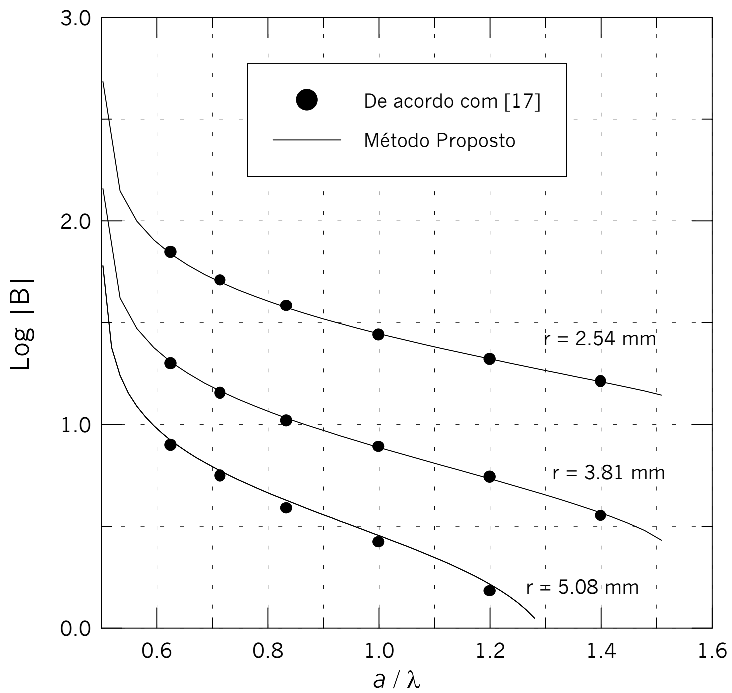

Figura 4.10 – Valores da susceptância de uma descontinuidade entre um guia de onda retangular e um guia circular, em função de *a*/λ, para três valores de raios, *r*, do guia circular. As dimensões transversais do guia retangular são: 2*a* = 22,86 mm e 2*b* = 10,16 mm.