

### 3 Polarimetria

Um instrumento capaz de medir o estado de polarização da luz é chamado de *polarímetro*. Essas medições são realizadas através da leitura de intensidades de luz após sua passagem por alguns dispositivos ópticos, de forma a obter não apenas o estado de polarização como também o grau de polarização da luz.

Os polarímetros disponíveis comercialmente nos dias de hoje são baseados na divisão do sinal luminoso em amostras no tempo ou no espaço. Cada uma dessas amostras passa através de polarizadores e de lâminas de quarto de onda de forma a determinar os parâmetros de Stokes do sinal. Esses modelos de polarímetro serão chamados daqui em diante de “tradicionalis”.

Este capítulo tem como objetivo não somente mostrar como funcionam os polarímetros tradicionais, mas também apresentar um novo modelo de polarímetro, baseado na utilização de lâminas piezoelétricas de birrefringência variável no lugar dos polarizadores e lâminas de quarto de onda. Em seguida, serão avaliadas as suas vantagens e desvantagens teóricas com relação aos modelos tradicionais.

#### 3.1 Polarímetros Tradicionais

Todos os modelos de polarímetro têm como objetivo a determinação dos parâmetros de Stokes do sinal de luz em questão. A expressão (2.30) traz a definição dos parâmetros de Stokes, reproduzida abaixo:

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x + I_y \\ I_x - I_y \\ I_{+45^\circ} - I_{-45^\circ} \\ I_E - I_D \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Essa definição nos diz que, se as intensidades das componentes do sinal luminoso  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{+45^\circ}$ ,  $I_{-45^\circ}$ ,  $I_E$  e  $I_D$  forem conhecidas, então o estado de polarização deste sinal pode ser determinado através de (3.1). Uma idéia mais básica de

polarímetro consistiria em, portanto, medir diretamente essas intensidades e a partir delas determinar os parâmetros de Stokes do sinal.

Para a medição dos três primeiros parâmetros, é necessária a utilização de polarizadores com eixos de transmissão nas direções  $x$ ,  $y$ ,  $+45^\circ$  e  $-45^\circ$ . O quarto parâmetro de Stokes, para ser medido sem a utilização de polarizadores circulares, necessita de duas lâminas de quarto de onda, além de polarizadores lineares. As intensidades são medidas, em todos os casos, através de fotodetectores.

Entretanto, as medições sugeridas acima não são todas necessárias para a determinação dos parâmetros de Stokes. A diferença entre os dois modelos tradicionais de polarímetro está na forma com que cada um deles mede as intensidades em (3.1). As seções a seguir explicam esses modelos.

### 3.1.1 O Polarímetro em Divisão no Espaço

A configuração mais simples de polarímetro é a da divisão no espaço. Ele se baseia no fato de que, como o parâmetro  $S_0$  é a intensidade total do sinal de luz  $I_0$ , isto é, ele é igual à soma das intensidades de quaisquer duas componentes ortogonais, é possível calcular intensidades em direções ortogonais sem a necessidade de medi-las. Por exemplo, pode-se escrever que:

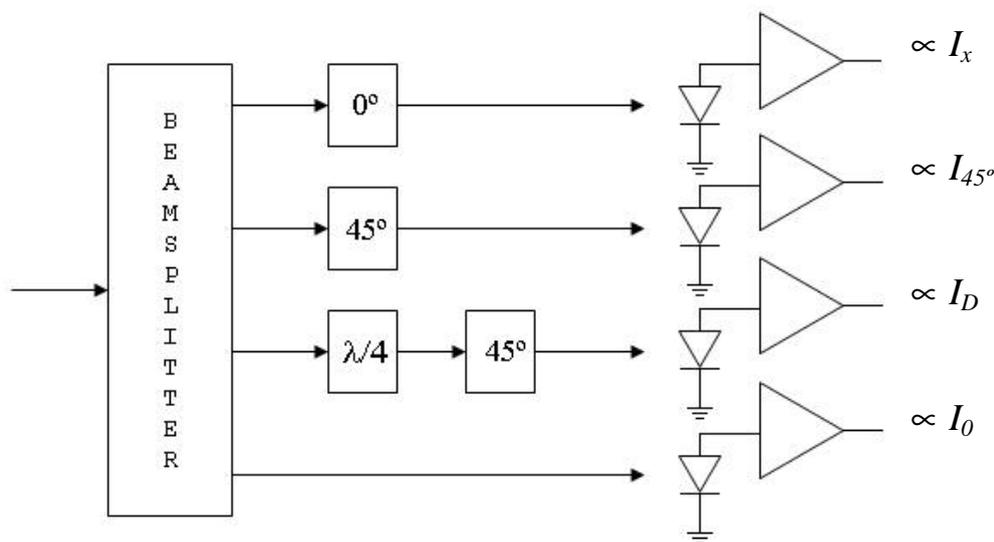
$$\begin{aligned} I_y &= I_0 - I_x \\ I_{-45^\circ} &= I_0 - I_{45^\circ} \\ I_E &= I_0 - I_D \end{aligned} \quad (3.2)$$

Portanto, para a determinação dos parâmetros de Stokes, só é necessário o conhecimento das intensidades  $I_x$ ,  $I_{+45^\circ}$  e  $I_D$ , além da intensidade total do sinal  $I_0$ , dada pelo parâmetro  $S_0$ . Substituindo (3.2) em (3.1), obtém-se:

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ 2I_x - I_0 \\ 2I_{+45^\circ} - I_0 \\ I_0 - 2I_D \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

No polarímetro em divisão no espaço, o sinal de luz a ser medido é dividido em 4 amostras idênticas, através de um *beamsplitter*, e cada uma das amostras é

utilizada para a determinação das 4 intensidades  $I_0$ ,  $I_x$ ,  $I_{+45^\circ}$  e  $I_D$ . A figura 8 ilustra essa idéia.



**Figura 1:** Polarímetro baseado em divisão no espaço. As intensidades lidas nos fotodetectores, à direita, são proporcionais às intensidades  $I_0$ ,  $I_x$ ,  $I_{+45^\circ}$  e  $I_D$ . Se o beamsplitter for ideal, a constante de proporcionalidade é igual a  $\frac{1}{4}$  em todos os casos.

Resta mostrar que  $I_D$  realmente pode ser calculada através de uma lâmina de quarto de onda em série com um polarizador linear a  $45^\circ$ . Para isso, considere que o estado de polarização da luz na entrada é circular à direita:

$$SOP_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Deseja-se associar uma lâmina de quarto de onda, de auto-estados nas direções  $x$  e  $y$ , com um polarizador de forma que a intensidade transmitida seja máxima quando a entrada for um estado de polarização da forma (3.4). Para o esquema da figura 8, o estado de polarização na entrada do fotodetector é encontrado utilizando-se (2.73) e (2.66) com  $q = 45^\circ$ :

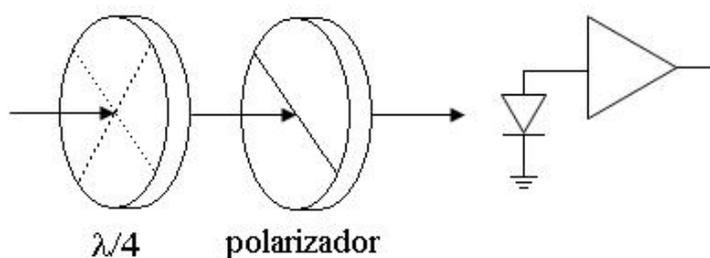
$$SOP_{out} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

É fácil ver que a intensidade de (3.5) é unitária, que é o maior valor possível para vetores de Jones normalizados. Note que, se a entrada fosse circularmente polarizada à esquerda, o vetor de Jones na entrada do fotodetector seria nulo.

A grande vantagem desse tipo de polarímetro é a rapidez com que o sinal é processado, já que as 4 intensidades medidas podem ser obtidas ao mesmo tempo. A grande desvantagem é o uso de 4 fotodetectores; na seção a seguir, será mostrado um polarímetro que só necessita de um fotodetector e de um menor número de polarizadores.

### 3.1.2 O Polarímetro em Divisão no Tempo

A idéia da divisão no tempo de um sinal de luz é um pouco mais sofisticada que a de divisão no espaço. São utilizados apenas um polarizador e uma lâmina de quarto de onda, além de um fotodetector; entretanto, é dada a liberdade de se *rodar* a lâmina e o polarizador em torno de um eixo, conforme ilustra a figura 9.



**Figura 2:** Polarímetro em divisão no tempo. A lâmina de quarto de onda e o polarizador linear podem girar em torno de seu eixo central.

As transformações introduzidas pela lâmina de quarto de onda e pelo polarizador podem ser obtidas, respectivamente, de (2.68) e (2.66):

$$M_{\lambda/4}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 + j \cos 2\mathbf{q} & j \sin 2\mathbf{q} \\ j \sin 2\mathbf{q} & 1 - j \cos 2\mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$M_{pol}(\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} \cos^2 \mathbf{j} & \frac{1}{2} \sin 2\mathbf{j} \\ \frac{1}{2} \sin 2\mathbf{j} & \sin^2 \mathbf{j} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

A grande diferença entre esse polarímetro e o modelo em divisão no espaço está na medida do parâmetro  $S_0$ . No caso anterior, era possível medi-lo diretamente, o que não ocorre nesse caso, pois a luz sempre passa por um

polarizador. Portanto, é necessário medir, além de  $I_x$ ,  $I_{+45^\circ}$  e  $I_D$ , pelo menos uma das três intensidades  $I_y$ ,  $I_{-45^\circ}$  e  $I_E$ .

Para se obter as intensidades desejadas, basta determinar-se dois valores distintos para  $\mathbf{q}$  e três valores distintos para  $\mathbf{j}$ . Os valores  $0^\circ$  e  $\pm 45^\circ$  podem ser escolhidos, de forma que as seguintes transformações sejam obtidas:

$$M_x = M_{pol}(0^\circ) \cdot M_{1/4}(0^\circ) = \left( \frac{1+j}{\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$M_y = M_{pol}(+45^\circ) \cdot M_{1/4}(0^\circ) = \left( \frac{1+j}{\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$M_{+45} = M_{pol}(+45^\circ) \cdot M_{1/4}(+45^\circ) = \left( \frac{1+j}{2\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$M_{-45} = M_{pol}(-45^\circ) \cdot M_{1/4}(+45^\circ) = \left( \frac{1+j}{2\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$M_E = M_{pol}(+45^\circ) \cdot M_{1/4}(0^\circ) = \left( \frac{1-j}{2\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} j & 1 \\ j & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$M_D = M_{pol}(-45^\circ) \cdot M_{1/4}(0^\circ) = \left( \frac{1-j}{2\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} j & -1 \\ -j & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Note que todas essas matrizes possuem um autovalor zero e um autovalor de norma 1; o autovetor associado ao autovalor de norma 1 é o estado de polarização cuja intensidade na entrada do fotodetector é máxima, ou seja, aquele cuja direção é a mesma do eixo de transmissão do polarizador.

Desta forma, escolhe-se 4 das 6 transformações; por exemplo, as transformações que geram as intensidades  $I_y$ ,  $I_{+45^\circ}$ ,  $I_{-45^\circ}$  e  $I_D$ , pois elas geram uma alternância dos ângulos  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{j}$  com a mesma periodicidade. Assim, os parâmetros de Stokes serão dados por:

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{+45^\circ} + I_{-45^\circ} \\ I_{+45^\circ} + I_{-45^\circ} - 2I_y \\ I_{+45^\circ} - I_{-45^\circ} \\ I_{+45^\circ} + I_{-45^\circ} - 2I_D \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Se outras intensidades forem escolhidas para serem medidas, basta alterar a equação (3.14) de forma que o parâmetro  $S_0$  sempre seja dado pela soma de quaisquer duas intensidades em direções ortogonais. No presente caso, para uma

onda luminosa entrando no dispositivo com estado de polarização  $SOP_{in}$ , as intensidades de (3.14) seriam dadas por:

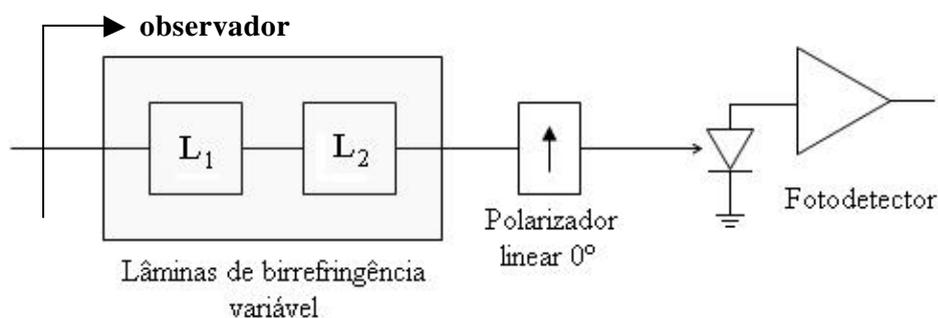
$$\begin{aligned} I_{+45^\circ} &= |M_{+45^\circ} \cdot SOP_{in}|^2 \\ I_{-45^\circ} &= |M_{-45^\circ} \cdot SOP_{in}|^2 \\ I_y &= |M_y \cdot SOP_{in}|^2 \\ I_D &= |M_D \cdot SOP_{in}|^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

A vantagem desse polarímetro é a utilização de poucos componentes, em comparação com o modelo de divisão no espaço; entretanto, as medições das intensidades não ocorrem ao mesmo tempo, e por esse motivo esse polarímetro é mais lento. A velocidade torna-se ainda mais limitada devido ao uso de motores para a rotação dos elementos, que geralmente são muito lentos.

### 3.2 Um Novo Modelo de Polarímetro

Essa dissertação tem como objetivo central propor um novo modelo de polarímetro, ou seja, uma configuração diferente das tradicionais. Embora esse modelo apresente muitas inovações, é possível classificá-lo como um polarímetro baseado na divisão no tempo do sinal luminoso.

A idéia que originou esse modelo surgiu de uma configuração usual de um dispositivo chamado de *controlador de polarização*, que se baseia na utilização de dispositivos de birrefringência variável, isto é, em lâminas birrefringentes de matriz de Jones da forma (2.68) em que a fase  $f$  inserida entre os auto-estados pode variar no tempo. A figura 10 mostra o diagrama de blocos do novo modelo.



**Figura 3:** Diagrama de blocos do novo modelo de polarímetro.

Observe que esse modelo se assemelha ao de um polarímetro em divisão no tempo, pelo fato de usar apenas um polarizador e um fotodetector. De fato, a idéia é variar no tempo a birrefringência das lâminas  $L_1$  e  $L_2$  e medir a intensidade na saída do polarizador com o fotodetector.

O objetivo dessa configuração é gerar birrefringências tais que, do ponto de vista do observador (ilustrado na figura 10), seja enxergado um polarizador cujo eixo de transmissão está alinhado com as direções de interesse em (3.1) onde são medidas as intensidades. As seções subsequentes tratam do desenvolvimento dessa idéia.

### 3.2.1 Configuração das Lâminas Birrefringentes

Nesse projeto, deseja-se utilizar um conjunto de lâminas de birrefringência variável que apresentem um efeito semelhante ao de rodar uma lâmina de quarto de onda e um polarizador em torno de um eixo, como é o caso de um polarímetro em divisão no tempo. Em outras palavras, é necessário que as lâminas consigam, juntamente com o polarizador, gerar transformações semelhantes às indicadas nas equações (3.8) a (3.13). Antes da discussão a respeito da configuração das lâminas, no entanto, é importante que as transformações por elas introduzidas sejam perfeitamente compreendidas.

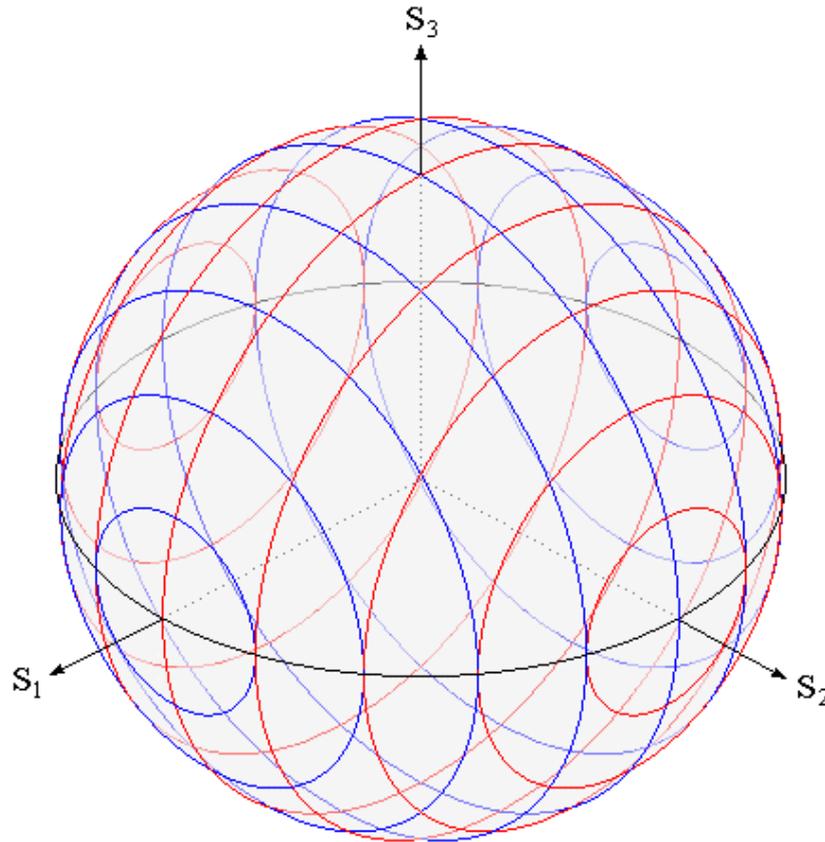
Conforme demonstrado na seção 2.4.3, uma lâmina birrefringente efetua uma transformação que pode ser geometricamente interpretada como uma *rotação em torno de um eixo* na esfera de Poincaré. Assim, a escolha da lâmina é totalmente determinada pela escolha do eixo de rotação. Por motivos de simplicidade, escolhemos esses eixos de forma que eles coincidam com os eixos  $S_1$  e  $S_2$ , que correspondem aos auto-estados lineares  $X/Y$  e  $+45^\circ/-45^\circ$ ; na verdade, quaisquer eixos poderiam ser escolhidos, desde que não fossem coincidentes.

Para essa escolha, obtém-se:

$$M_1(\mathbf{f}_1) = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{f}_1/2 + j \sin \mathbf{f}_1/2 & 0 \\ 0 & \cos \mathbf{f}_1/2 - j \sin \mathbf{f}_1/2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$M_2(\mathbf{f}_2) = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{f}_2/2 & j \sin \mathbf{f}_2/2 \\ j \sin \mathbf{f}_2/2 & \cos \mathbf{f}_2/2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Onde a matriz  $M_1$  representa a transformação introduzida pela lâmina  $L_1$  e a matriz  $M_2$  representa a lâmina  $L_2$ . A figura 11, abaixo, indica o efeito dessas transformações na esfera de Poincaré. Os círculos desenhados são subconjuntos invariantes pelas transformações das lâminas.



**Figura 4:** Transformações introduzidas pelas lâminas de birrefringência variável. A lâmina  $L_1$  efetua rotações em torno do eixo  $S_1$ , segundo os círculos azuis, enquanto a lâmina  $L_2$  efetua rotações em torno do eixo  $S_2$ , segundo os círculos vermelhos.

É importante ressaltar que as rotações acontecem sempre na mesma ordem: em primeiro lugar, o estado de polarização roda em torno do eixo  $S_1$ , para em seguida rodar em torno do eixo  $S_2$ . Evidentemente, se as lâminas  $L_1$  e  $L_2$  fossem trocadas de lugar uma com a outra, a ordem das rotações iria ser invertida, e essa inversão iria causar rotações completamente diferentes<sup>6</sup>. Por esta razão, a ordem das lâminas precisa ser muito bem definida.

---

<sup>6</sup> Observe que as matrizes  $M_1$  e  $M_2$  não comutam; logo, a transformação gerada pelo produto  $M_1M_2$  é diferente da transformação original  $M_2M_1$ .

O objetivo dessa configuração é permitir que pelo menos 4 dos 6 estados de polarização alinhados com os eixos  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ , que correspondem às direções de medida dos parâmetros de Stokes em (3.1), possam chegar ao fotodetector com intensidade máxima através da escolha adequada dos parâmetros  $f_1$  e  $f_2$  em (3.16) e (3.17). Desta forma, com o uso de um único polarizador, poderiam ser feitas todas as medidas necessárias para a determinação do estado de polarização da luz, da mesma forma que o polarímetro em divisão no tempo.

### 3.2.2 A Escolha do Polarizador

Conforme ilustrado na figura 10, o polarizador utilizado nesse modelo está alinhado com a direção  $x$  (linear  $0^\circ$ ). Essa escolha mostra-se fundamental para o funcionamento do dispositivo, com relação à configuração escolhida para as lâminas na seção anterior. O teorema abaixo resume esse fato.

***Teorema:** Os parâmetros de Stokes podem ser obtidos a partir da configuração da figura 10 se, e somente se, o polarizador estiver alinhado com o eixo da lâmina  $L_1$  na esfera de Poincaré.*

Traduzindo: o polarizador precisa ter um eixo de transmissão que coincida com uma das direções dos auto-estados da primeira lâmina birrefringente. Portanto, como foi escolhido o eixo  $S_1$  para a lâmina  $L_1$ , o polarizador só poderia ser linear  $0^\circ$  (direção  $x$ ) ou linear  $90^\circ$  (direção  $y$ ). A demonstração do teorema se divide em duas partes: a primeira, e mais simples, se resume em mostrar que um polarizador na direção do eixo  $x$  é *suficiente* para medir as intensidades que permitem calcular os parâmetros de Stokes<sup>7</sup>. A segunda parte da demonstração procura mostrar que, na verdade, o alinhamento do polarizador com o eixo de rotação de  $L_1$  é uma condição *necessária*.

#### Primeira Parte da Demonstração:

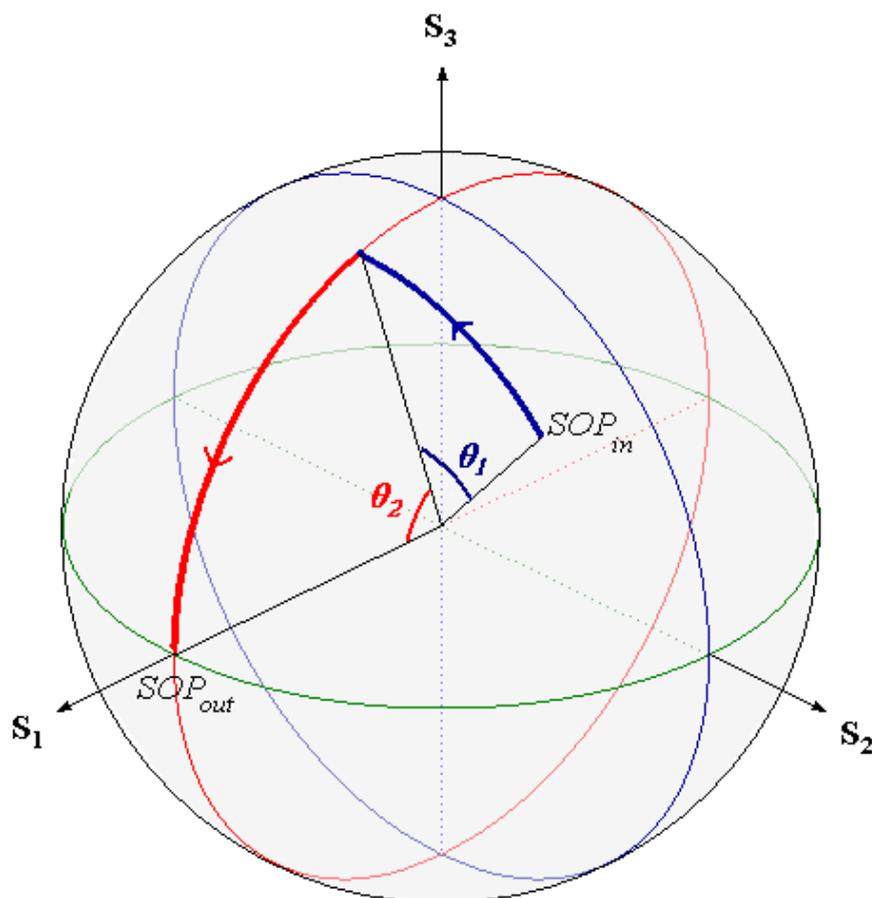
Considere que um estado de polarização genérico,  $SOP_{in}$ , esteja presente na entrada do dispositivo. Sejam, agora, as seguintes transformações introduzidas pelas lâminas de birrefringência variável:

---

<sup>7</sup> A demonstração para um polarizador na direção do eixo  $y$  é análoga e será omitida.

- 1) Rode esse estado de polarização em torno do eixo  $S_1$ , utilizando a lâmina  $L_1$ , ao longo de um círculo paralelo aos círculos azuis da figura 11, de forma a atingir o círculo vermelho que passa pelos pólos da esfera;
- 2) Com o auxílio da lâmina  $L_2$ , rode o estado de polarização obtido no passo 1 até que ele coincida com o eixo  $S_1$ . O estado de polarização obtido,  $SOP_{out}$ , estará alinhado com o polarizador.

Esses passos podem ser reescritos da seguinte forma: (1) Faça uma transformação ortogonal que anule a componente de  $SOP_{in}$  no eixo  $S_2$  e (2) Faça uma nova transformação ortogonal que anule a componente em  $S_3$  do novo estado de polarização, obtido no passo 1. O resultado obtido será um vetor alinhado ao eixo  $S_1$  e com a mesma norma do vetor original, como mostra a figura 12.



**Figura 5:** Procedimento para transformar um estado de polarização genérico no estado de polarização linear  $0^\circ$  (alinhado ao eixo  $x$ )

Comparando agora a figura 12 à figura 7, é possível perceber que o ângulo  $q_1$  corresponde ao complemento do ângulo  $d$  do vetor de Jones que representa  $SOP_{in}$ . O ângulo  $q_2$ , por sua vez, é o ângulo  $2c$  do estado de polarização intermediário. Essa observação permite chegar-se ao seguinte resultado:

$$SOP_{out} = M_2(-2c_{int}) \cdot M_1(d - p/2) \cdot SOP_{in} \quad (3.18)$$

Onde foi escolhida a seguinte notação para a polarização de entrada:

$$SOP_{in} = \begin{bmatrix} \cos c \cdot e^{-jd/2} \\ \sin c \cdot e^{jd/2} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Os ângulos em (3.18) são negativos pois as rotações se dão no sentido anti-horário. Para efetuar esse cálculo, comece a fazer as contas da direita para a esquerda, passo a passo. A primeira multiplicação resulta em:

$$SOP_{int} = \begin{bmatrix} \exp\left\{j\left(\frac{d-p}{2}\right)\right\} & 0 \\ 0 & \exp\left\{-j\left(\frac{d-p}{2}\right)\right\} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos c \cdot e^{-jd/2} \\ \sin c \cdot e^{jd/2} \end{bmatrix}$$

$$SOP_{int} = \begin{bmatrix} \cos c \cdot \exp\left\{j\left(-\frac{p}{4}\right)\right\} \\ \sin c \cdot \exp\left\{j\left(\frac{p}{4}\right)\right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos c \\ j \sin c \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Note, a partir de (3.20), que o ângulo  $c$  do estado de polarização intermediário é o mesmo  $c$  anterior. Logo, a próxima multiplicação resulta em:

$$SOP_{out} = \begin{bmatrix} \cos(-c) & j \sin(-c) \\ j \sin(-c) & \cos(-c) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos c \\ j \sin c \end{bmatrix}$$

$$SOP_{out} = \begin{bmatrix} \cos^2 c - j^2 \sin^2 c \\ -j \sin c \cos c + j \sin c \cos c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

O resultado obtido em (3.21) comprova que *é possível transformar qualquer estado de polarização  $SOP_{in}$  em um novo estado de polarização,  $SOP_{out}$ , que esteja alinhado com o polarizador.*

O leitor deve estar se perguntando de que forma isso está relacionado à demonstração original. Para isso, considere a transformação total efetuada pelo sistema:

$$M = P(0^\circ) \cdot M_2(-2\mathbf{c}) \cdot M_1\left(\mathbf{d} - \frac{\mathbf{p}}{2}\right) \quad (3.22)$$

Fazendo as contas, obtém-se a transformação:

$$M = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{c} \cdot e^{jd/2} & \sin \mathbf{c} \cdot e^{-jd/2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

O estado de polarização de entrada que resulta na máxima intensidade no fotodetector deve satisfazer a seguinte relação:

$$I_{out} = |M \cdot SOP_{in}|^2 = 1 \quad (3.24)$$

É fácil perceber que (3.19) é a única solução para (3.24), a menos de uma constante complexa de módulo unitário, que não faz diferença pois o vetor representaria o mesmo estado de polarização. Seja agora o vetor ortogonal a (3.19), dado por:

$$v = \begin{bmatrix} \sin \mathbf{c} \cdot e^{-jd/2} \\ -\cos \mathbf{c} \cdot e^{jd/2} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Também é fácil perceber que a intensidade na saída, para uma entrada dada por (3.25), é nula. Esse comportamento, de transmitir a máxima intensidade em uma polarização e bloquear totalmente a luz na polarização ortogonal, é típico de um polarizador. Isso significa que a matriz  $M$  apresenta o mesmo efeito de um polarizador elíptico cujo “eixo de transmissão” está na direção de (3.19). Uma forma mais impactante de enunciar esse mesmo resultado é: *para todo estado de polarização  $SOP_{in}$  na esfera de Poincaré, existem valores de  $\mathbf{f}_1$  e  $\mathbf{f}_2$  nas expressões (3.16) e (3.17) tais que o sistema  $M_1 + M_2 + P$  se comporta como um polarizador na direção de  $SOP_{in}$ .* Para uma polarização de entrada dada por (3.19), a solução é dada por:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = \mathbf{d} - \frac{\mathbf{p}}{2} \\ \mathbf{f}_2 = -2\mathbf{c} \end{cases} \quad (3.26)$$

Isso conclui a primeira parte da demonstração de uma forma muito mais forte que o desejado: não somente as intensidades nas direções dos 6 estados de polarização de (3.1) podem ser medidas, mas qualquer intensidade em *qualquer*

direção pode ser medida por esse polarímetro com a escolha de um polarizador alinhado à lâmina  $L_1$ .

### Segunda Parte da Demonstração:

Resta demonstrar que a escolha de um polarizador alinhado com o eixo de rotação da primeira lâmina birrefringente é, além de suficiente, necessária para que o esquema de figura 10 seja capaz de medir as intensidades desejadas. Para isso, é mais fácil demonstrar a contrapositiva: se o polarizador *não* estiver alinhado com a lâmina  $L_1$ , então *não* é possível medir as intensidades.

Considere, portanto, a seguinte situação: o polarizador se encontra formando um ângulo  $\mathbf{a}$  qualquer<sup>8</sup> (não múltiplo inteiro de  $\mathbf{p}$ ) com o eixo linear  $\mathcal{O}$ , que é o eixo de rotação da primeira lâmina, e o estado de polarização de entrada  $SOP_{in}$  é dado por:

$$SOP_{in} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Essa situação não permite que o polarímetro proposto da figura 10 consiga descobrir qual é o estado de polarização de entrada. De fato, foi escolhido um caso em que a luz na entrada do dispositivo está em uma polarização tal que a primeira lâmina não é capaz de realizar qualquer alteração: o vetor de (3.27) coincide, na esfera de Poincaré, com o eixo ao redor do qual a lâmina  $L_1$  efetua rotações. Assim, as únicas transformações possíveis são aquelas realizadas pela lâmina  $L_2$ . Uma análise atenta da figura 11 permite afirmar que o sistema só conseguirá rodar (3.27) para locais da esfera que se encontrem no grande círculo vermelho, isto é, que possuam o parâmetro  $S_2$  nulo. Os vetores de Jones que possuem  $S_2$  nulo são aqueles que satisfazem:

$$\mathbf{d} = \pm \frac{\mathbf{p}}{2} \quad (3.28)$$

Assim, a forma geral dos vetores de Jones que pertencem ao grande círculo vermelho é dada por:

---

<sup>8</sup> Como o polarizador é linear, a representação de seu eixo de transmissão na esfera de Poincaré se encontrará no equador; portanto,  $\mathbf{a}$  é um ângulo de elevação nula.

$$SOP = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{c} \\ \pm j \sin \mathbf{c} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Lembrando que o ângulo  $\mathbf{c}$  varia apenas entre 0 e  $\pi/2$  radianos. Seja agora a representação de Jones do eixo do polarizador escolhido, dada por:

$$P = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{a}/2) \\ \pm \sin(\mathbf{a}/2) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

A intensidade de luz transmitida através do polarizador será dada por:

$$I = |\langle SOP, P \rangle|^2 = [\cos \mathbf{c} \cos(\mathbf{a}/2)]^2 + [\sin \mathbf{c} \sin(\mathbf{a}/2)]^2 \quad (3.31)$$

Para que o sistema consiga representar polarizadores nas direções linear  $\mathcal{O}$  e linear  $90^\circ$ , é preciso obter valores de  $\mathbf{c}$  tais que (3.31) possa ser igual a 1 e igual a 0. No caso em que (3.31) é nulo, obtém-se:

$$\cos^2 \mathbf{c} \cos^2(\mathbf{a}/2) = -\sin^2 \mathbf{c} \sin^2(\mathbf{a}/2) \quad (3.32)$$

Note que trata-se de uma igualdade entre um valor não-negativo e um não-positivo, e por essa razão ambos os lados devem ser nulos para que haja solução. Como  $\mathbf{a}$  não é múltiplo de  $\pi$ , não há como o lado esquerdo de (3.32) ser nulo. Portanto, essa equação não possui solução.

Considere agora o caso em que (3.31) é igual a 1:

$$\cos^2 \mathbf{c} \cos^2(\mathbf{a}/2) + \sin^2 \mathbf{c} \sin^2(\mathbf{a}/2) = 1 \quad (3.33)$$

Utilizando algumas identidades trigonométricas, chega-se à expressão:

$$\cos^2 \mathbf{c} \sin^2(\mathbf{a}/2) = -\sin^2 \mathbf{c} \cos^2(\mathbf{a}/2) \quad (3.34)$$

Mais uma vez, essa equação só pode ter solução se ambos os lados forem nulos, o que é impossível pois  $\mathbf{a}$  não é múltiplo de  $\pi$ .

Esse raciocínio conclui a demonstração de que um polarizador que não esteja alinhado com o eixo  $S_1$  (ou seja, com  $\mathbf{a}$  não múltiplo de  $\pi$ ) não permite que o sistema seja capaz de representar um polarizador nas direções linear  $\mathcal{O}$  e linear  $90^\circ$ . Na realidade, essas não são as únicas polarizações que ele não consegue representar: qualquer estado de polarização de entrada linear que forme com o eixo  $S_1$  um ângulo menor que  $\mathbf{a}$ , por exemplo, não poderá ter as intensidades nas direções  $x$  e  $y$  medidas.

Com isso, conclui-se a demonstração do teorema. Isso significa que, nesse momento, sabemos que é possível medir os parâmetros de Stokes utilizando a configuração da figura 10. Resta, portanto, saber como isso será feito.

### 3.2.3 O Procedimento de Medida

A forma com que os parâmetros de Stokes serão medidos assemelha-se com o método do polarímetro em divisão no tempo: em intervalos de tempo regulares, varia-se a birrefringência das lâminas de forma que seja possível medir a intensidade da luz em um dos 6 estados de polarização de (3.1) a cada período. Sabemos, todavia, que é possível escolher apenas 4 estados distintos para a medida das intensidades, já que o número de parâmetros de Stokes é apenas 4. No exemplo de procedimento de medida que será fornecido nesse momento, os seguintes estados de polarização foram escolhidos:

- Linear  $0^\circ$
- Linear  $45^\circ$
- Circular à esquerda
- Linear  $-45^\circ$

A lista acima se encontra na ordem em que as respectivas intensidades serão medidas. É importante ressaltar que essa ordem é totalmente arbitrária. Portanto, para cada um dos itens da lista, serão realizados os seguintes procedimentos: (1) Gerar a birrefringência nas lâminas que simule um polarizador na direção desejada e (2) Medir, com o fotodetector, a intensidade transmitida.

Desta forma, o problema de medir os parâmetros de Stokes se resume em saber quais são as birrefringências necessárias para se medir as intensidades nas 4 direções listadas. O procedimento geral ilustrado na figura 12 pode ser utilizado para cada caso particular, resultando no algoritmo abaixo. O intervalo de tempo entre cada iteração dependerá da velocidade dos dispositivos eletrônicos utilizados, ou seja, de variáveis fora de nosso interesse no momento. Em seguida, após cada 4 medidas, os parâmetros de Stokes podem ser determinados através de uma expressão semelhante à encontrada em (3.14).

*1ª Iteração: medida de  $I_x$*

Como o polarizador já está alinhado com a direção  $x$ , não é necessário gerar nenhuma birrefringência. Assim, os ângulos nas matrizes (3.16) e (3.17) são:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = 0 \\ \mathbf{f}_2 = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

Observe que a substituição dos ângulos acima em (3.16) e (3.17) resulta, nos dois casos, na obtenção de matrizes identidade. Assim, a transformação total sofrida pelo sinal de luz nas lâminas é:

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

A transformação total do sistema lâminas + polarizador é, portanto,

$$T_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

*2ª Iteração: medida de  $I_{+45^\circ}$*

Para que um sinal de entrada cujo estado de polarização é linear  $45^\circ$  seja transmitido pelo polarizador com intensidade máxima, é preciso rodá-lo com a lâmina  $L_1$  até o pólo norte da esfera para, em seguida, trazê-lo de encontro ao polarizador pela lâmina  $L_2$ . Ambas as rotações são de ângulos de  $\pi/2$  no sentido anti-horário, como se pode observar na figura 11. Assim:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = -\mathbf{p} / 2 \\ \mathbf{f}_2 = -\mathbf{p} / 2 \end{cases} \quad (3.37)$$

A transformação total assim obtida é dada pelo produto das matrizes obtidas na substituição de (3.37) em (3.16) e (3.17), resultando em:

$$M_{+45^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{1-j}{2} & \frac{1-j}{2} \\ -\frac{1-j}{2} & \frac{1+j}{2} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

O sistema lâminas + polarizador efetua uma transformação, portanto, dada pela seguinte matriz:

$$T_{+45^\circ} = \frac{1-j}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Observe que esta não é a única forma de se obter essa transformação. Se os sinais dos dois ângulos fossem invertidos, o resultado final seria o mesmo. Essa observação também cabe nas iterações que serão descritas a seguir.

*3ª Iteração: medida de  $I_E$*

Essa transformação é exatamente igual à segunda rotação efetuada no caso anterior, ou seja, para levar o pólo norte da esfera ao polarizador basta rodar o vetor de um ângulo de  $\pi/2$  ao redor da lâmina  $L_2$  no sentido anti-horário. Logo, os ângulos envolvidos são dados por:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = 0 \\ \mathbf{f}_2 = -\mathbf{p} / 2 \end{cases} \quad (3.40)$$

A matriz que representa a transformação inserida pelas lâminas é, portanto, dada apenas pela matriz  $M_2$ . Substituindo (3.40) em (3.17), obtém-se:

$$M_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Incluindo a transformação do polarizador, a seguinte matriz é obtida:

$$T_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

*4ª Iteração: medida de  $I_{45^\circ}$*

A única diferença entre a transformação desse caso e da 2ª iteração está no sinal da primeira rotação: em vez de rodar a polarização de entrada de um ângulo de  $\pi/2$  no sentido anti-horário, dessa vez o sistema deverá efetuar a mesma rotação porém no sentido horário. Ou seja:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = +\mathbf{p} / 2 \\ \mathbf{f}_2 = -\mathbf{p} / 2 \end{cases} \quad (3.43)$$

Prosseguindo da mesma forma que nos passos anteriores, chega-se à seguinte matriz de transformação para as lâminas:

$$M_{-45^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{1+j}{2} & \frac{-1-j}{2} \\ \frac{1-j}{2} & \frac{1-j}{2} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Assim, a transformação total após a passagem pelo polarizador é dada por:

$$T_{-45^\circ} = \frac{1+j}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Após as 4 iterações, calcula-se os parâmetros de Stokes, da forma:

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{+45^\circ} + I_{-45^\circ} \\ 2I_x - I_{+45^\circ} - I_{-45^\circ} \\ I_{+45^\circ} - I_{-45^\circ} \\ 2I_E - I_{+45^\circ} - I_{-45^\circ} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Onde as intensidades são dadas por:

$$\begin{aligned} I_{+45^\circ} &= |T_{+45^\circ} \cdot SOP_{in}|^2 \\ I_{-45^\circ} &= |T_{-45^\circ} \cdot SOP_{in}|^2 \\ I_x &= |T_x \cdot SOP_{in}|^2 \\ I_E &= |T_E \cdot SOP_{in}|^2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Em geral, os polarímetros comerciais trabalham com parâmetros de Stokes normalizados, portanto os valores em (3.46) ainda podem ser divididos por  $S_0$ . Além disso, é muito comum que o grau de polarização (DOP) seja fornecido; a expressão (2.34) fornece o meio de calculá-lo.

Com isso, finalizamos a descrição do modelo de polarímetro criado. Apesar de não ser imprescindível, será mostrado na próxima seção que as transformações obtidas para medir as intensidades (3.47) estão absolutamente corretas.

### 3.2.4 Validação do Modelo

Esta seção buscará mostrar que o procedimento explicado na seção anterior, quando aplicado a um estado de polarização de entrada genérico, produzirá parâmetros de Stokes inteiramente de acordo com sua definição, que pode ser vista na expressão (3.41).

Para isso, seja o seguinte estado de polarização genérico:

$$SOP_{in} = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{c} \cdot e^{-jd/2} \\ \sin \mathbf{c} \cdot e^{+jd/2} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Substituindo (3.48) em cada uma das expressões de (3.47) e utilizando propriedades trigonométricas, chega-se aos valores das intensidades. Abaixo encontram-se as indicações dos cálculos<sup>9</sup>.

Ⓡ  $I_{+45^\circ}$ :

$$T_{+45^\circ} \cdot SOP_{in} = \frac{1-j}{2} \begin{bmatrix} \cos \mathbf{c} \cdot e^{-jd/2} + \sin \mathbf{c} \cdot e^{+jd/2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{+45^\circ} = |T_{+45^\circ} \cdot SOP_{in}|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 2\mathbf{c} \cos \mathbf{d} \quad (3.49)$$

Ⓡ  $I_{-45^\circ}$ :

$$T_{-45^\circ} \cdot SOP_{in} = \frac{1+j}{2} \begin{bmatrix} \cos \mathbf{c} \cdot e^{-jd/2} - \sin \mathbf{c} \cdot e^{+jd/2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{-45^\circ} = |T_{-45^\circ} \cdot SOP_{in}|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\mathbf{c} \cos \mathbf{d} \quad (3.50)$$

Ⓡ  $I_x$ :

$$T_x \cdot SOP_{in} = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{c} \cdot e^{-jd/2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_x = |T_x \cdot SOP_{in}|^2 = \cos^2 \mathbf{c} \quad (3.51)$$

Ⓡ  $I_E$ :

$$T_E \cdot SOP_{in} = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{c} \cdot e^{-jd/2} - j \sin \mathbf{c} \cdot e^{+jd/2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_E = |T_E \cdot SOP_{in}|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 2\mathbf{c} \sin \mathbf{d} \quad (3.52)$$

---

<sup>9</sup> Os cálculos, por serem muito extensos, foram omitidos. Todos eles, no entanto, seguiram o mesmo procedimento: escrever os números complexos na forma retangular para, em seguida, somar os quadrados das partes real e imaginária e aplicar identidades trigonométricas.

Tendo em mãos os valores das intensidades, basta utilizar (3.46) para obter-se os parâmetros de Stokes. Note que, como a intensidade de  $SOP_{in}$  é unitária, os valores calculados serão, também, os parâmetros de Stokes normalizados. Desta forma, substituindo (3.49) a (3.52) em (3.46), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\mathbf{c} \\ \sin 2\mathbf{c} \cos \mathbf{d} \\ \sin 2\mathbf{c} \sin \mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Comparando (3.53) com a expressão (3.41), que define os parâmetros de Stokes em função dos ângulos  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{d}$ , percebe-se que são idênticas. Isso conclui a validação do modelo de polarímetro desenvolvido. A última parte deste capítulo, a seguir, se preocupará pela primeira vez com aspectos práticos do dispositivo.

### 3.2.5 Expectativa de Desempenho

Toda a idéia por trás do modelo apresentado foi desenvolvida tendo em mente dois objetivos: construir um instrumento barato, ou seja, que utilize poucos componentes, o mais veloz possível (dentro das limitações dos dispositivos utilizados) e, por definição, sem partes que se movam e causem desgaste com o tempo, como é o caso dos motores dos polarímetros em divisão no tempo.

Essa dissertação busca encontrar uma resposta para as seguintes perguntas: esse novo modelo realmente funciona? E, caso funcione, apresenta uma velocidade suficiente para um polarímetro? Para evitar grandes surpresas nessa última pergunta, as lâminas de birrefringência variável utilizarão atuadores *piezoelétricos*, isto é, dispositivos que deformam a fibra de forma proporcional à tensão elétrica neles aplicada. Considerando que esses atuadores conseguem responder a frequências da ordem de 100kHz, o dispositivo construído com eles certamente apresentará um desempenho superior àqueles construídos com motores, que operam com frequências da ordem de algumas dezenas de Hertz. Por outro lado, é muito improvável que ele se mostre tão rápido quanto um polarímetro em divisão no espaço, já que este consegue medir as 4 intensidades necessárias ao mesmo tempo.

De qualquer forma, o quesito “preço” não depende de verificação experimental. Nesse ponto, já ficou bem claro que o dispositivo necessita apenas das lâminas, dos atuadores piezoelétricos, de um polarizador e de um único fotodetector, além de toda a eletrônica necessária para escrever as tensões nos atuadores e adquirir as leituras do fotodetector. Ou seja, um preço no mesmo patamar do polarímetro em divisão no tempo tradicional.

Outro parâmetro que é geralmente explorado em qualquer dispositivo óptico é a faixa de frequências no qual ele é capaz de funcionar. Nesse ponto, deve-se chamar a atenção para o fato de que a birrefringência gerada por placas que pressionam a fibra varia com o comprimento de onda da luz. Essa característica indica uma possível dificuldade de medir o estado de polarização de um sinal de luz cuja largura de linha seja muito grande, como por exemplo a luz de um LED.

Há um outro aspecto do modelo desenvolvido que também será avaliado: sua capacidade de auto-calibração. Se o polarímetro for capaz de ser calibrado sem a necessidade de um outro polarímetro de referência ou qualquer outro dispositivo, teremos mais um ponto a favor do novo modelo.

O próximo capítulo tratará exclusivamente de aspectos práticos, tendo em vista a montagem experimental do modelo desenvolvido. No final, será possível avaliar o quão eficiente esse polarímetro pode ser.