

4

Algoritmo

Dado um disco compressor (ou *nulógono*) para $\Lambda(\mathcal{E}) - H_0$ o procedimento descrito em [40] que acha $\mathcal{E}'$ é, naturalmente, algorítmico. Para completar um algoritmo que, de $\Lambda(\mathcal{E})$, produza uma tal laminação incompressível $\Lambda(\mathcal{E}'')$, precisamos de um procedimento que ache um disco compressor, se algum existir, e que identifique os casos já incompressíveis.

A procura por um disco compressor é teoricamente simples. Para descrevê-la, lembramos que a propriedade de f ser expansor determina uma exaustão f -equivariante

$$H_0 \subsetneq H_1 \subsetneq H_2 \dots$$

tal que $\mathring{H} = \bigcup_{i \geq 0} H_i$. Assim, um disco compressor para $\Lambda - H_0$ está contido em algum $H_k \subseteq H$ donde a procura sucessiva em $H_1, H_2, H_3 \dots$ fatalmente o encontrará (em tempo finito). Esse processo, porém, esbarra em dificuldades fundamentalmente práticas. Na Seção 4.1 abaixo discutimos como encaminhar a procura em alguns exemplos, propondo idéias que devem torná-la mais eficiente. Mas o princípio básico é essencialmente o mesmo: se não achamos um disco compressor em H_i o procuramos em H_{i+1} .

Se o processo de procura que conduziremos dá a certeza de achar um disco compressor, não há nenhuma estimativa óbvia de quando isso ocorrerá. É, portanto, necessário saber identificar os casos em que a laminação já é incompressível, caso contrário o procedimento de procura pode nunca parar. O resultado principal da Seção 4.2 abaixo (Teorema 4.15) realiza essa tarefa, determinando um critério de parada.

4.1

A procura por um nulógono.

Seja $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_m\}$ um sistema de discos determinando uma estrutura de alças para H . Nossa meta é achar um inteiro $k > 0$ tal que

$(\Lambda \cap H_k) - \mathring{H}_0$ seja compressível em $H_k - H_0$. É claro que isso é equivalente a dizer que, para algum $E_i \in \mathcal{E}$, sua imagem $f^k(E_i) - \mathring{H}_0$ é compressível em $H_k - H_0$. Aplicando f^{-k} a $f^k(E_i)$ e a H_0 , a questão se torna equivalente à procura de $-k < 0$ tal que, para algum $E_i \in \mathcal{E}$, o complemento $E_i - \mathring{H}_{-k}$ é compressível. Aqui estamos, novamente, privilegiando o automorfismo contrator $h = f^{-1}$ em vez de f . Isso traz algumas vantagens de ordem prática, como veremos a seguir (no Exemplo 3.10 mesmo já seguimos essa abordagem). Além disso, essa abordagem apresenta clara semelhança com as técnicas desenvolvidas por Bestvina e Handel em [2], [3] para o estudo de automorfismos de grupos livres (ver Seção 2.6). Em [3] essas técnicas são usadas para se estudar automorfismos de superfícies com grande sucesso. Nossa abordagem pode ser vista como uma generalização de [3] embora, no caso de automorfismos de handlebodies, o poder dessas ferramentas se mostre bem mais limitado. De qualquer forma, nos permitirão achar, em um sentido bem concreto, compressões, nossa meta agora.

Propomos então que, por exemplo, em vez de considerar H_0 em $H_1 = f(H_0)$, olhemos para $H_{-1} = h(H_0) = f^{-1}(H_0)$ em H_0 . Aquela alternativa precisa que achemos $f(\mathcal{E})$, o que pode ser trabalhoso (especialmente se tomamos potências altas) e de difícil visualização e representação. Em nossa proposta podemos ver H_0 como uma vizinhança do grafo Γ associado a estrutura de alças, donde H_{-1} é tão somente uma vizinhança de $h(\Gamma)$, que é mais fácil de se achar e, especialmente, de se representar, enquanto o sistema de discos fica inalterado.

Seguindo [2], orientamos as arestas $e_1, \dots, e_m$ de Γ arbitrariamente e tomamos a projeção p de H_0 em Γ que colapsa as 1-alças e 0-alças nas respectivas arestas e vértice: nesse caso $\Gamma \xrightarrow{h^n} h^n(\Gamma) \xrightarrow{r} \Gamma$ se torna uma equivalência de homotopia de grafos.

Seja V o conjunto dos vértices de Γ e consideremos um caminho $\sigma: I \rightarrow \Gamma$. Dizemos que σ é *gráfico* se $\sigma(\partial I) \subseteq V$, $\sigma^{-1}(V)$ for discreto e se σ for localmente injetivo em $I - \sigma^{-1}(V)$. Uma equivalência de homotopia $\gamma: \Gamma \rightarrow \Gamma$ é *gráfica* se γ for gráfico em cada aresta de Γ .

Se a equivalência de homotopia $\bar{h} = (r \circ h)|_{\Gamma}: \Gamma \rightarrow \Gamma$ que definimos acima não for gráfica, podemos alterá-la por uma isotopia que a torne gráfica, o que vamos supor de agora em diante.

Podemos associar à imagem $\bar{h}(e_i)$ de uma aresta e_i de Γ uma palavra nas letras $e_1^{\pm}, \dots, e_m^{\pm}$, sem realizar cancelamentos (um elemento do semi-grupo livre em $2k$ geradores). Essa palavra é, essencialmente, construída seguindo as arestas orientadas de Γ por onde o caminho $\bar{h}(e_i)$ passa. Mais precisamente, a construímos da seguinte forma: as componentes de

$(\bar{h})^{-1}(V)$ são arcos α_j levados nas arestas de Γ . Como $\bar{h}$ é gráfico, as orientações nas arestas de Γ induzem por $(\bar{h})^{-1}$ uma orientação em cada α_j . Mas α_j tem orientação herdada de e_i . Se $\bar{h}(\alpha_j) \subseteq e_l$ associamos à α_j a letra e_l^+ ou e_l^- , dependendo de as duas orientações coincidirem ou não. Construímos a palavra seguindo os arcos α_j (ordenados pela orientação de e_i) e concatenando as respectivas letras.

Essa palavra determina, a menos de homotopia, um caminho em Γ , que usamos para representar $\bar{h}^n(e_i)$. Como em [3], usaremos essas palavras para detectar candidatos à compressão (ver Definição 4.3 e Lema 4.4 abaixo).

Exemplo 4.1. Voltamos ao Exemplo 3.10, onde o automorfismo é dado por $g: H \rightarrow H$. Consideramos $h = g^{-1}$. Lembramos que Γ tem duas arestas orientadas a, b duais aos discos $A, B \in \mathcal{E}$. Vemos, então, que $\bar{h}$ age nas arestas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a &\mapsto ab \\ b &\mapsto bab. \end{aligned}$$

Podemos aplicar $\bar{h}$ a um caminho em Γ , de forma que fica claro que $\bar{h}$ se comporta como um homomorfismo levando palavras em palavras. É bem claro também que $\overline{(\bar{h}^n)} = (\bar{h})^n$, que denotaremos por $\bar{h}^n$ sem perigo de ambiguidade.

Exemplo 4.2. Continuando o Exemplo 4.1, $\bar{h}^2$ é achado por iteração:

$$\begin{array}{ccccc} \bar{h} & & \bar{h} & & \\ a & \mapsto & ab & \mapsto & abbab \\ b & \mapsto & bab & \mapsto & bababbab. \end{array}$$

Definição 4.3. Dizemos que um caminho gráfico *regride* (ou é *retrógrado*) se não for localmente injetivo.

Usamos a falta de caminhos retrógrados para identificar incompressibilidade, como no Lema 4.4 abaixo. Precisaremos da seguinte notação: seja γ um caminho gráfico orientado em Γ . Segue que $\bar{h}^n(\gamma)$ também é caminho gráfico, com orientação herdada de γ . Seguindo [2], definimos $D\bar{h}^n(\gamma) = e$, onde e é a primeira aresta de Γ que $\bar{h}^n(\gamma)$ cruza.

Lema 4.4. Se $\Lambda - \mathring{H}_0$ for compressível em $H_n - \mathring{H}_0$ então,

- ou existe aresta e_i de Γ tal que $\bar{h}^n(e_i)$ regride,
- ou existe vértice v de Γ e aresta orientada e_j tais que, para toda aresta orientada e_i saindo de v , $D\bar{h}^n(e_i) = e_j$.

De qualquer forma, existe m e aresta e_k tais que $\bar{h}^m(e_k)$ regride.

Observação. O lema é bem ao estilo da teoria de Bestvina-Handel. De fato, a conclusão final segue dela: se nenhum $\bar{h}^m(e_k)$ regride então $\bar{h}$ é um *train-track map* ([2]) e, portanto, o fator de crescimento de $M(\Gamma)$ é o fator de crescimento do grupo fundamental de H , donde $\lambda(\mathcal{E}) = \lambda(\pi_1)$. Se $\Lambda - H_0$ fosse compressível então poderíamos reduzir $\lambda(\mathcal{E})$ (pelo Teorema 2.28), uma contradição com a Proposição 3.9. O Exemplo 4.1 é caso particular disso (ver Exemplo 4.5 abaixo). A seguir daremos uma demonstração mais geométrica para as outras conclusões do lema.

Demonstração. Como vem sendo padrão nessa seção, consideramos $h = f^{-1}$. Se $\Lambda - \mathring{H}_0$ é compressível em $H_n - \mathring{H}_0$ então, para algum disco $E_j \in \mathcal{E}$, $E_j - h^n(\mathring{H}_0)$ é compressível em H_0 . Seja D um disco compressor, contido na 0-alça V . Tal D borda com um disco $D' \subseteq E_j$ uma bola $B \subseteq V$. Consideremos uma componente α de $B \cap h^n(\Gamma)$ (que não é vazio). Se α não contiver um vértice de $h^n(\Gamma)$ então α está contida no interior de alguma aresta $h^n(e_i)$ e é fácil ver que $\bar{h}^n(e_i)$ regride: $\partial\alpha \subseteq D' \subseteq E_j$ donde $h^n(e_i)$ vem de e vai para a 1-alça associada à E_j , provando que $\bar{h}^n(e_i)$ não é injetiva na vizinhança do ponto de $h^{-n}(\alpha)$ que é mapeado no vértice v associado à 0-alça V .

Se a componente α de $B \cap h^n(\Gamma)$ contiver algum vértice $h^n(v)$, prosseguimos de forma similar ao caso anterior e concluimos que todas as arestas $h^n(e_i)$ saindo de $h^n(v)$ seguem na direção de E_j , donde $D\bar{h}^n(e_i) = e_j$. $\square$

Exemplo 4.5. Voltando aos Exemplos 3.10, 4.1, a equivalência de homotopia $\bar{h}$ aplicada às arestas a, b de Γ produz palavras com potências somente positivas portanto, iterando, as palavras $\bar{h}^n(a), \bar{h}^n(b)$ apresentam somente expoentes positivos, mostrando que não regridem, confirmando que $\Lambda - H_0$ é incompressível (ver Exemplo 3.10).

De fato, os Exemplos 3.10, 4.1 já tinham fator de crescimento minimal logo $\Lambda - H_0$ tinha que ser incompressível.

Exemplo 4.6. Voltamos aos Exemplos 3.10, 4.1 e consideramos o mesmo automorfismo $g: H \rightarrow H$ onde H tem a mesma estrutura de alças dada por $\mathcal{E} = \{A, B\}$. Aqui, porém, vamos usar um outro representante da classe de g , de forma que $g^{-1}(\Gamma)$ seja como na Figura 4.1.

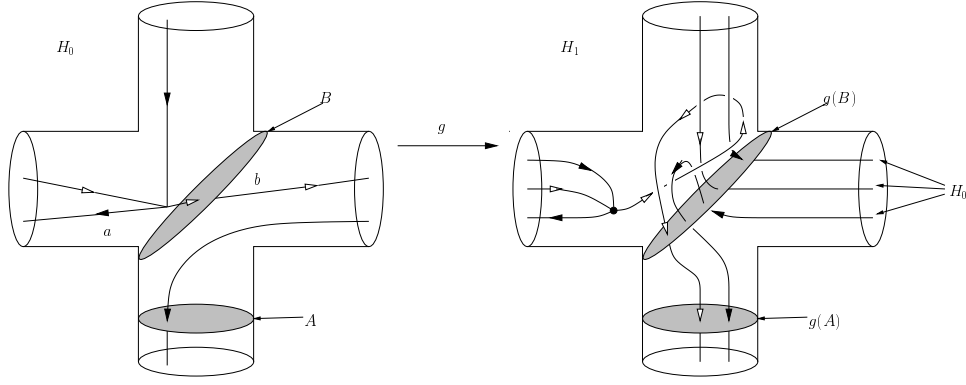


Figura 4.1: Um novo representante para g , produzindo um fator de crescimento que não é minimal.

Verificamos facilmente que $\bar{h}$ é dada por:

$$a \mapsto b^{-1}bab$$

$$b \mapsto bab.$$

Para essa escolha de g (na classe de isotopia) a matriz de incidência é

$$M(\mathcal{E}) = M(\Gamma)^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

cujo fator de crescimento é

$$\lambda(\mathcal{E}) = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Como λ não é minimal há possibilidade de $\Lambda - H_0$ ser compressível. De fato o é, como veremos mais adiante (Exemplo 4.12). Pelo momento notamos que o caminho $\bar{h}(a) = \mathbf{b}^{-1}\mathbf{b}ab$ regride, como previsto pelo Lema 4.4. Em verdade as regressões que realmente nos interessam para achar uma compressão são:

$$\bar{h}^2(a) = [b^{-1}a^{-1}b^{-1}] [ba\mathbf{b}] [\mathbf{b}^{-1}bab] [bab]$$

$$\bar{h}^2(b) = [ba\mathbf{b}] [\mathbf{b}^{-1}bab] [bab],$$

como veremos no Exemplo 4.12 abaixo.

Antes de desenvolvermos mais o Exemplo 4.6 acima, voltamos a fazer considerações gerais. Em [40], Oertel desenvolve seu procedimento para reduzir o fator de crescimento à partir de um nulógono. Em nossa proposta, que privilegia Γ e suas imagens por f^{-1} , é mais natural considerarmos monógonos. O motivo básico é que a dualização de monógono produz um

caminho regressor. A recíproca não é verdadeira: há caminhos regressores cuja dualização não produz monógonos.

Exemplo 4.7. Continuando o Exemplo 4.6, relembramos que o caminho $\bar{h}(a) = b^{-1}bab$ regride. Voltamos ao quadro dual e consideramos a construção da superfície ramificada B a partir das imagens $g(\mathcal{E}) \subseteq H_1$ interceptando H_0 nas suas 1-alças. Devemos então ver a Figura 4.1 representando H_1 com o sistema de discos $g(\mathcal{E})$ enquanto H_0 é uma vizinhança do grafo. Não fosse pelo caminho $\bar{h}(b)$, que se entrelaça com a parte de $\bar{h}(a)$ que regride, teríamos um monógono em H_1 . O entrelaçamento, porém, obstrui o monógono.

Vemos, então, que nem todo caminho regressor é interessante.

Definição 4.8. Dizemos que um caminho regressor $\bar{h}^n(e_i)$ é *livre* se não estiver entrelaçado, i.e., se houver um meio-disco (D, β_0, β_1) tal que $D \cap h^n(\Gamma) = \beta_0$, $D \cap \mathcal{E} = \beta_1$. Dizemos que um tal disco é um *monógono* para $h^n(e_i)$. Se não houver monógonos para $h^n(e_i)$ dizemos que o caminho está *obstruído*.

Observação. A necessidade dessa definição captura a diferença entre automorfismos de grupos livres ([2]) ou automorfismos de superfícies ([3]) e os automorfismos de cubos com alças. Nem em [2], onde se lidam com classes de homotopia, nem em [3], situação semelhante a nossa mas em dimensão 2, os caminhos regressores obstruídos são relevantes. Essa diferença é fundamental: em um certo sentido esse é o motivo pelo qual os automorfismos de cubos com alças são mais ricos e difíceis de se estudar. Certamente esse é o motivo pelo qual essas técnicas permitem sucesso bem mais limitado em nosso caso.

É claro que há uma associação bijetora entre monógonos para B (ver Seção 2.7.2) e caminhos regressores livres (o que justifica nossa definição de monógono acima). Em [40] se demonstra que a existência de um monógono (logo de um caminho livre) implica a existência de um nulógono (logo a laminação não goza da propriedade de incompressibilidade). Mostraremos abaixo que a recíproca é verdadeira se supomos que $\Lambda - \mathring{H}_0$ é incompressível em $H_1 - \mathring{H}_0$, de forma que a teoria de [40] pode ser desenvolvida considerando caminhos regressores livres e monógonos em vez de nulógonos. Devemos notar, porém, que tal exigência é naturalmente satisfeita: sempre precisamos “calcular” ao menos um iterado de h , de forma que $\Lambda \cap (H_1 - \mathring{H}_0)$ deve ser, sempre, bem entendido. De agora em diante suporemos essa hipótese nessa seção.

Lema 4.9. *Suponha que $\Lambda - \mathring{H}_0$ seja incompressível em H_1 . Se $\Lambda - \mathring{H}_0$ for compressível então algum $\bar{h}^n(e_i)$ será caminho regressor livre.*

Demonstração. Como no Lema 4.4 temos uma bola B bordada pelo disco compressor D e um disco $D' \subseteq E_j \in \mathcal{E}$ tal que $B \cap h^n(\Gamma)$ contém um arco α que não contém nenhum vértice de Γ (ver Figura 4.2). Esse arco é usado para se achar a regressão: provamos no Lema 4.4 que $\alpha \subseteq h^n(e_l)$ implica que $\bar{h}^n(e_l)$ regride. Vamos mostrar que $\bar{h}^n(e_l)$ é caminho regressor livre.

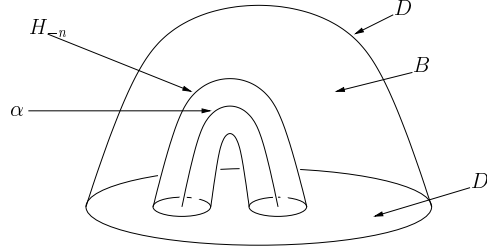


Figura 4.2: A existência de um disco compressor implica que há um caminho regressor livre.

Consideremos $M = B - H_{-n}$, lembrando que H_{-n} deve ser visto como uma vizinhança de $h^n(\Gamma)$. Seja $A \subseteq (\partial H_{-n} \cap B)$ a componente que borda a vizinhança de α . É claro que A é um anel. Aceitemos temporariamente o seguinte fato:

Afirmção 4.10. *A superfície A é ∂ -compressível em B por um meio-disco (Δ, α', β) tal que $\Delta \cap H_{-n} = \alpha' \subseteq A$.*

Da afirmação tomamos o meio-disco (Δ, α', β) ∂ -compressor para A , com $\alpha' \subseteq A$ e $\beta \subseteq \partial B - H_{-n}$. Mas $\partial B = D \cup D'$ e, como D' é um disco, podemos alterar Δ por uma isotopia de tal forma que $\beta \cap D' = \emptyset$, donde $\beta \subseteq D - \mathring{H}_{-n}$ (ver Figura 4.3). Agora fica simples achar um monógono para α usando Δ : α é isotópico à α' .

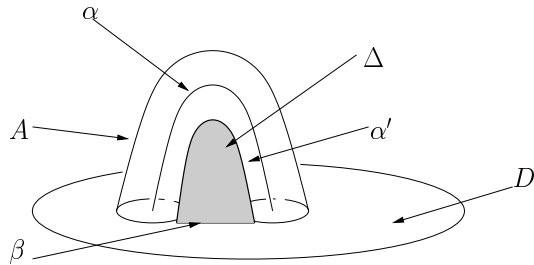


Figura 4.3: O meio-disco compressor (Δ, α', β) .

□

A Afirmção 4.10 seguirá facilmente do seguinte lema técnico mais geral:

Lema 4.11. *Suponha que $\Lambda - \mathring{H}_0$ seja incompressível em $H_1 - \mathring{H}_0$. Se C é uma componente de $\widehat{H_n - \Lambda}$ então, para todo arco essencial $\alpha \subseteq \partial H_0 \cap C$, existe meio-disco (Δ, α, β) tal que $\Delta \subseteq C - \mathring{H}_0$ e $\Delta \cap (\partial H_0 \cap C) = \alpha$.*

Demonstração. Mostraremos, inicialmente, o lema no caso $n = 1$, i.e., quando C é uma componente de $\widehat{H_1 - \Lambda}$. Nossa meta será consuir uma estrutura de produto $S_0 \times I$ em $C - \mathring{H}_0$ de tal forma que:

- $\partial H_0 \cap C \subseteq S_0 \times \{0\}$,
- toda componente de $(S_0 \times \{0\}) - \partial H_0$ intercepta $\partial(S_0 \times \{0\})$.

Assim, dado um arco essencial $\alpha \subseteq (\partial H_0) \cap C$, ele pode ser estendido para um arco α' propriamente mergulhado em $S_0 \times \{0\}$ de forma que $\alpha' \cap (\partial H_0) \cap C = \alpha$. É claro, então, que $\Delta = \alpha' \times I$ satisfaz as propriedades desejadas.

Começamos estudando o caso de C estar contida em uma 1-alça de H_1 . Nessa situação, a estrutura de produto da alça restringe a uma estrutura de produto em $(C - \mathring{H}_0) \simeq S_0 \times I$ onde $S_0 \times \{0\}$ é uma folha de bordo de $\Lambda \cap (H_1 - \mathring{H}_0)$. Nessa estrutura de produto $(\partial H_0) \cap C$ consiste de uma união de anéis verticais, componentes de $(\partial S_0) \times I$. É claro que $(\partial H_0) \cap C$ é isotópico, por uma isotopia ambiente, a uma superfície em $S_0 \times \{0\}$. Usamos tal isotopia para alterar a estrutura de produto em $C - \mathring{H}_0$. É fácil ver que $\partial H_0 \cap C \subseteq S_0 \times \{0\}$ satisfaz as propriedades desejadas.

O outro caso, mais trabalhoso, ocorre quando C é uma 0-alça de H_1 . A idéia será, grosseiramente, a de começar com a estrutura produto canônica em uma vizinhança de $(\partial H_1) \cap C$ e usá-la para construir estruturas produto em $C - \mathring{H}_t$ quando t decresce, até chegar a $t = 0$. Aqui será importante que as folhas de $\Lambda \cap (C - \mathring{H}_0)$ estejam em posição de Morse (sem centros) em relação a estrutura de produto canônica em $H_1 - \mathring{H}_0$. Enquanto t não cruzar um valor singular, podemos descer a estrutura de produto sem problemas. Quando t cruzar um valor singular significará que ∂H_t cruzou uma sela de Λ , sendo necessárias algumas operações para construir uma estrutura de produto em $C - \mathring{H}_t$. O argumento será, essencialmente, um argumento indutivo. Alertamos o leitor para o seguinte inconveniente técnico: $\Lambda \cap H_1$ tem uma infinidade de folhas mas que estão sujeitas a uma relação de equivalência com finitas classes (uma para cada disco de $f(\mathcal{E})$). Se o argumento será conduzido utilizando Λ , as idéias podem ficar mais simples se o leitor identificar essas folhas, imaginando $f(\mathcal{E})$ em vez de Λ .

Introduzimos a seguinte definição: seja P uma variedade compacta de dimensão 3, com bordo, e seja $S \subseteq \partial P$. Suponhamos que P admita uma estrutura de produto $P \simeq S' \times I$ tal que

1. $S \subseteq S' \times \{0\}$ e que
2. toda componente de $(S' \times \{0\}) - S$ intercepta $\partial(S' \times \{0\})$.

Então dizemos que o par (P, S) admite uma *estrutura de produto conveniente*.

Seja $C_t = C - \mathring{H}_t$, $0 \leq t < 1$. Nossa meta será achar, para uma 0-alça C e cada valor regular $t \in [0, 1)$, uma estrutura de produto conveniente em $(C_t, (\partial H_t) \cap C)$.

Conforme esboçamos, consideraremos a estrutura de produto padrão em $H_1 - \mathring{H}_0$, o que determina uma função altura $h: (H_1 - \mathring{H}_0) \rightarrow I$ por projeção. Vamos considerar $f(\mathcal{E}) - \mathring{H}_0$ em $(H_1 - \mathring{H}_0)$, que pode ser colocado em posição de Morse de forma que os pontos críticos sejam todos selas e em alturas distintas. Como $\Lambda \cap (H_1 - \mathring{H}_0)$ está de forma natural em uma vizinhança $N(f(\mathcal{E}))$, um ponto de sela p_i de $f(\mathcal{E})$ em altura s_i determina uma família a um parâmetro de selas de Λ . Vamos supor que famílias distintas estão em intervalos de alturas disjuntos. Mais precisamente, da família associada a p_i , seja p_i^- a mais baixa de todas as selas e p_i^+ a mais alta, donde a família está em altura $V_i = [v_i^-, v_i^+] = [h(p_i^-), h(p_i^+)]$, que chamamos de o *intervalo singular* da família. Vamos supor que, se p_i, p_j são selas distintas de $f(\mathcal{E})$, então $V_i \cap V_j = \emptyset$. Mencionamos que há uma quantidade finita de tais famílias.

Fixada uma família de selas de índice i , consideramos os seguintes objetos (representados na Figura 4.4): sejam $\mathcal{F}$ a folheação produto de $H_1 - \mathring{H}_0$ por superfícies (com orientação transversal induzida por I) e U_i a carta folheada contendo p_i^+ . Podemos supor que $p_i^- \in U_i$. As coordenadas de Morse locais em p_i^- determinam o arco canônico σ^- (na folha L^- que contém p_i^-) curvando para baixo. Similarmente, temos um arco canônico σ^+ (na folha L^+ contendo p_i^+) curvando para cima. Consideramos também um arco $\gamma_i: I \rightarrow U_i$ transversal a $\mathcal{F}$ (seguindo a orientação transversal) passando por todas as selas da família i , com $\gamma(0) = p_i^-$ e $\gamma(1) = p_i^+$. Usaremos essas construções logo adiante.

Diremos que um valor regular t é *livre* se $t \notin V_i$ para todo intervalo singular V_i . Caso contrário é dito *cercado*.

Se um valor regular livre $t < 1$ estiver suficientemente próximo de 1 então não há valores singulares em $[t, 1]$, portanto $\Lambda \cap (H_1 - \mathring{H}_0)$ consiste de anéis isotópicos a anéis verticais, donde C_t admite uma estrutura de produto. É bem claro que, nesse caso, $(C_t, (\partial H_t) \cap C)$ admite uma estrutura de produto conveniente.

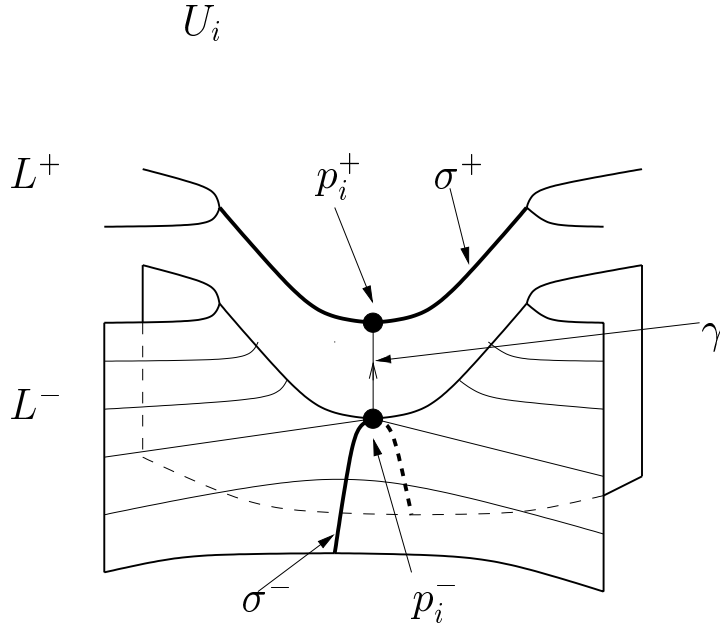


Figura 4.4: A família de sela de índice i na carta folheada U_i .

Passamos a demonstração do passo de indução. Suponha que t é valor regular e que $(C_t, (\partial H_t) \cap C)$ admita uma estrutura de produto conveniente. Vamos mostrar que, se $t' < t$ também for regular com $[t', t]$ interceptando exatamente uma extremo v_i^+ , V_i^- de um intervalo singular V_i , então $(C_{t'}, (\partial H_{t'}) \cap C)$ também admite uma estrutura de produto conveniente. Há dois casos a serem considerados:

1. t é valor regular livre.

Seja V_i o intervalo singular abaixo de t que seja mais alto (i.e., se v é um valor crítico e $v > v_i^+$ então $v > t$). Se $V_i = \emptyset$ não existe valor singular em $[0, t]$ e, portanto, $(C_0, (\partial H_0) \cap C)$ admite estrutura de produto conveniente, completando a demonstração no caso $n = 1$. Suponha, então, que $V_i \neq \emptyset$ e seja $t' \in V_i$ um valor regular cercado. Vamos mostrar que $(C_{t'}, (\partial H_{t'}) \cap C)$ admite uma estrutura de produto conveniente.

Inicialmente, consideramos toda a construção feita na carta folheada U_i . Podemos supor que $\partial\sigma^+ \subseteq \partial H_t$. Notamos, também, que se $0 < s < 1$ então $\gamma_i(s) \notin C$: de fato, $\gamma_i(s)$ pertence ao interior de uma 1-alça de H_1 , que não intercepta C (estamos supondo que C é uma 0-alça). Há dois sub-casos a serem considerados:

- (a) $\gamma(1) \notin C$

Nesse caso a família de selas não alterará a topologia de $(C_t, (\partial H_t) \cap C)$: podemos supor que $(\Lambda \cap h^{-1}[t', t]) - U$ é vertical na

estrutura de produto, donde a estrutura de produto conveniente em $(C_t, (\partial H_t) \cap C)$ induz estrutura de produto conveniente em $(C_{t'}, (\partial H_{t'}) \cap C)$

(b) $\gamma(1) \in C$

Nesse caso, $C_{t'}$ é homeomorfo a C_t mas o mesmo não se aplica a $(\partial H_{t'}) \cap C$ e $(\partial H_t) \cap C$. Na verdade $(\partial H_{t'}) \cap C$ é homeomorfo a seguinte superfície $S \subseteq (\partial H_t) \cap C$: seja σ o arco obtido projetando σ^+ verticalmente em ∂H_t . Definimos $S = (\partial H_t) \cap C_t - N(\sigma)$. É claro que o par (C_t, S) também admite estrutura de produto conveniente. Mas (C_t, S) é homeomorfo a $(C_{t'}, (\partial H_{t'}) \cap C)$, induzindo neste uma estrutura de produto conveniente.

Isso completa o estudo do caso em que t é valor regular livre.

2. t é valor regular cercado.

Seja V_i tal que $t \in V_i$. Existe $t' < v_i^-$ valor regular livre com $[t', t]$ contendo exatamente um valor extremo de algum intervalo singular V_j (exatamente v_i^-). Consideramos nossa construção na carta folheada U_i e podemos supor que $\partial\sigma^- \subseteq \partial H_{t'}$. Nesse caso, também, se $0 < s < 1$ então $\gamma_i(s) \notin C$ (o argumento é o mesmo do outro caso). Há, novamente, dois sub-casos a serem considerados:

(a) $\gamma(0) \notin C$

Segue como em 1.(a).

(b) $\gamma(0) \in C$

Nesse caso C_t e $C_{t'}$ não são homeomorfos: seja σ o arco obtido pela projeção de σ^- em $\partial H_{t'}$. Consideramos o meio-disco vertical $(\Delta, \sigma^-, \sigma)$. É claro que $(\Delta, \partial\Delta) \subseteq (C_{t'}, \partial C_{t'})$. Consideramos $M = C_{t'} - \overset{\circ}{N}(\Delta)$ e a superfície $S \subseteq \partial M$ definida por $S = (\partial H_{t'}) \cap C - \overset{\circ}{N}(\sigma)$. Segue que (M, S) é isotópico a $(C_t, (\partial H_t) \cap C)$, donde (M, S) admite estrutura de produto conveniente.

Mas podemos dar a $N(\Delta)$ uma estrutura de 1-alça (de dimensão 3), que restringe a uma estrutura de 1-alça (de dimensão 2) em $N(\sigma) \subseteq \partial N(\Delta)$. Segue que $(C_{t'}, (\partial H_{t'}) \cap C)$ é obtido de (M, S) pela adição do par de 1-alças $(N(\Delta), N(\sigma))$.

Agora damos a $N(\Delta)$ uma estrutura extra de produto $N(\Delta) \simeq N(\sigma) \times I$ (onde identificamos $N(\sigma) \times \{0\}$ com $N(\sigma) \subseteq \partial N(\Delta)$). Podemos, talvez modificando a estrutura de produto em M , supor que a adição de $(N(\Delta), N(\sigma))$ respeita essa estrutura,

determinando estrutura de produto em $C_{t'} \simeq S_{t'} \times I$ (onde $S_{t'}$ é obtida de S_t pela adição de $N(\sigma)$). É imediato pela construção que

$$(\partial H_{t'}) \cap C \subseteq S_{t'} \times \{0\}.$$

É fácil, também, verificar que toda componente de $S_{t'} \times \{0\} - \partial H_{t'}$ intercepta $\partial(S_{t'} \times \{0\})$, donde $(C_{t'}, (\partial H_{t'}) \cap C)$ admite estrutura de produto conveniente.

Isso completa a análise de casos, que usamos para mostrar que $(C_0, (\partial H_0) \cap C)$ admite estrutura de produto conveniente: podemos tomar uma sequência $1 > t_1 > t_2 > \dots > t_k > 0$ onde t_i alterna entre ser valor regular livre e valor regular cercado. Se tomamos uma tal sequência de maior tamanho possível então terá exatamente um termo em cada intervalo singular e em cada intervalo complementar. O estudo dos casos acima mostra como passar de t_i para t_{i+1} , donde todo $(C_{t_i}, (\partial H_{t_i}) \cap C)$ admite estrutura de produto conveniente, em particular quando $i = k$. Mas, conforme já argumentamos no caso 1, isso implica que $(C_0, (\partial H_0) \cap C)$ admite estrutura de produto conveniente.

Isso completa a demonstração do lema no caso de $n = 1$.

Provamos o caso geral por indução. Suponhamos que o lema vale para n . Sejam C uma componente de $\widehat{H_{n+1}} - \Lambda$ e α um arco essencial em $(\partial H_0) \cap C$. Por hipótese existe meio-disco (Δ, α, β) tal que:

$$(\Delta, \partial\Delta) \subseteq (C - \mathring{H}_0, \partial(C - \mathring{H}_0)),$$

com $\partial\Delta \cap \partial H_0 = \alpha$.

Mas, a menos de isotopia, $\beta \cap ((\partial H_n) \cap C)$ consiste de arcos α_i essenciais em $(\partial H_n) \cap C$. Aplicando f^{-n} obtemos $f^{-n}(\alpha_i)$ uma coleção de arcos essenciais em $(\partial H_0) \cap f^{-n}(C)$. Mas $f^{-n}(C)$ é uma componente de $\widehat{H_1} - \Lambda$, onde já provamos o lema. Portanto, para cada $f^{-n}(\alpha_i)$, construímos o respectivo meio-disco Δ_i em $f^{-n}(C)$. Por corte e colagem padrão, podemos supor que os Δ_i são disjuntos dois-a-dois. Levamos os meio-discos para $H_{n+1} - \mathring{H}_n$, tomando $f^n(\Delta_i)$. Por construção, o disco $\Delta' = \Delta \cup_i f^n(\Delta_i)$ é um meio-disco com as propriedades desejadas, completando a demonstração para $n + 1$.

□

Observação. Demonstramos o lema acima para completar a prova do Lema 4.9. Ressaltamos, porém, que seu interesse é mais geral: ele descreve como ∂H_m intercepta uma 0-alça de H_n para $m < n$, mostrando que essa

interseção é muito bem comportada. De fato, voltaremos a recorrer à essa descrição mais adiante na dissertação (Seção 4.2).

Demonstração da Afirmação 4.10. Seja $\alpha' \subseteq A$ qualquer arco propriamente mergulhado e essencial e aplicamos o Lema 4.11 $\square$

A motivação dos últimos resultados foi o estudo de caminhos regressores livres. Mostramos, no Lema 4.9, que a laminação Λ não goza da propriedade de incompressibilidade se e somente se existem caminhos regressores livres. Concentraremos, então, nossa atenção à procura de tais caminhos.

Exemplo 4.12. No Exemplo 4.7 vimos que o caminho regressor $\bar{h}(a) = b^{-1}bab$ não é livre, de forma que, para acharmos um monógono, devemos considerar iterados maiores de $\bar{h}$. No Exemplo 4.6 achamos as palavras

$$\begin{array}{ccc} \bar{h} & & \bar{h} \\ a \longmapsto & b^{-1}\mathbf{b}ab & \longmapsto [b^{-1}a^{-1}b^{-1}][ba\mathbf{b}][\mathbf{b}^{-1}bab][bab] \\ b \longmapsto & \mathbf{b}ab & \longmapsto [ba\mathbf{b}][\mathbf{b}^{-1}bab][bab], \end{array}$$

onde destacamos as sequências de letras que serão relevantes para se achar um monógono. Na Figura 4.5 podemos identificar os arcos de $h(a)$, $h(b)$ que são levadas à regressão de $h^2(a)$, $h^2(b)$ (ver também a Figura 4.1).

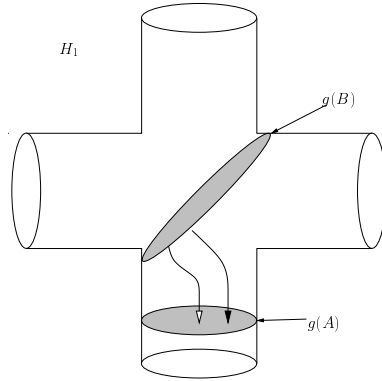


Figura 4.5: A representação, em H_1 , dos trechos de 1-alças de H_0 que, em H_2 , determinarão uma compressão.

De fato, se consideramos os caminhos $h^2(a)$, $h^2(b)$ em uma vizinhança de $h(\Gamma)$, é fácil de se ver que as regressões destacadas são livres (ver Figura 4.6).

Observação. Aqui precisamos tomar cuidado com a forma como identificamos a 0-alça de H_0 com a 0-alça de H_{-1} . Nossa escolha de representação, respeitando a estrutura de produto de H (ver Exemplos 3.1, 3.10) garante que a Figura 4.6 é fiel.

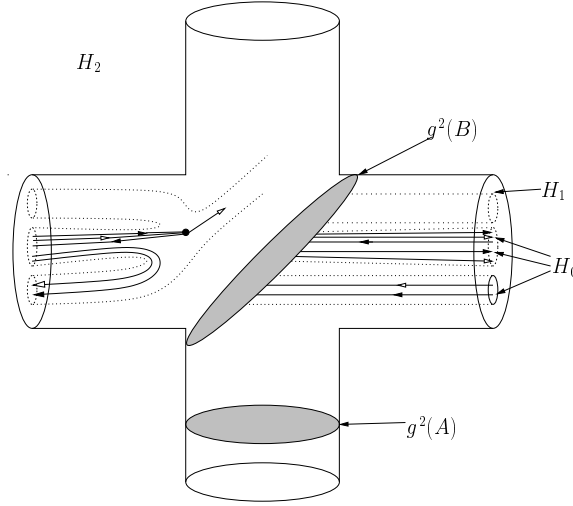


Figura 4.6: O disco $g^2(B)$ é compressível em $H_2 - H_0$.

Gostaríamos de poder realizar o cancelamento sugerido pelas regressões livres com uma isotopia (no quadro dual das figuras, isso é equivalente a realizar um desvio, vide Seção 2.7). Porém, elas só aparecem se consideramos h^2 . Isso é um inconveniente: qualquer operação que realizemos deve ser equivariante. Nossa meta será, então, modificar Γ de forma a obter uma regressão livre em um único passo, permitindo que uma isotopia de h realize o cancelamento sugerido pela regressão de forma equivariante, reduzindo o fator de crescimento.

Observação. A existência do caminho regressor livre implica a existência de uma disco compressor para Λ . Esse quadro é exatamente o dual e equivariância traz o mesmo problema. As técnicas desenvolvidas em [40] visam modificar o sistema $\mathcal{E}$ de forma que uma compressão apareça em $H_1 - H_0$, portanto uma isotopia equivariante pode ser realizada, reduzindo o fator de crescimento. Em verdade, as técnicas que usamos aqui são duais às técnicas de [40]. Notamos que as semelhanças com as técnicas de [2, 3] são claras se seguimos nossa abordagem.

Continuamos subdividindo as arestas $a, b \in \Gamma$, introduzindo um novo vértice em cada uma conforme descreveremos: seja v o vértice de Γ . Notamos que $\bar{h}^{-1}(v)$ consiste de 6 pontos: o próprio vértice v , 3 pontos no interior da aresta a e dois no interior da aresta b . Seguindo a orientação de a , consideramos o primeiro tal ponto e o acrescentamos como vértice, dividindo a aresta em duas outras, que denominaremos por c e a' , nessa ordem, como mostra a Figura 4.7 b).

Representaremos essa divisão por $a = ca'$. Pela escolha do vértice, c é levada por $\bar{h}$ em b^{-1} e $a' \mapsto bab$. Similarmente, subdividimos a aresta b , acrescentando o último ponto da imagem inversa, obtendo $b = b'd$. É fácil

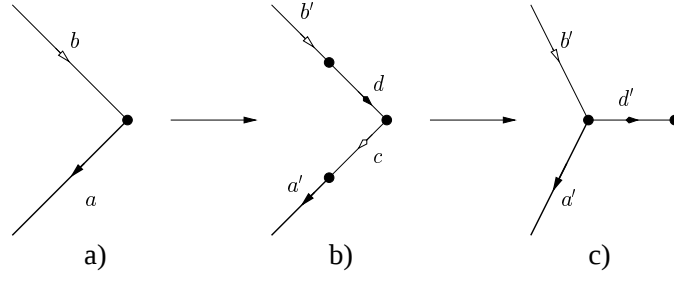


Figura 4.7: O processo de dobra: a) o grafo original Γ ; b) por subdivisão das arestas obtém-se Γ' ; c) a dobra é realizada identificando c^{-1} com d , obtendo-se Γ'' .

ver que $\bar{h}$ age como $b' \mapsto ba$ e $d \mapsto b$. Temos, em resumo, um novo grafo Γ' com arestas a' , b' , c e d , com $\bar{h}$ agindo nelas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a' &\mapsto bab = b'dca'b'd \\ b' &\mapsto ba = b'dca' \\ c &\mapsto b^{-1} = d^{-1}(b')^{-1} \\ d &\mapsto b = b'd. \end{aligned}$$

Como c^{-1} e d são levados por $\bar{h}$ ao mesmo caminho $b'd$, podemos identificar essas duas arestas por uma *dobra*, obtendo da identificação uma única aresta d' , como indica a Figura 4.7 c).

Observação. No quadro dual de [40] isso corresponde a realizar um *down-move*.

Assim obtemos um novo grafo Γ'' com três arestas a' , b' e d' , nas quais $\bar{h}$ age da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a' &\mapsto b'd'(\mathbf{d}')^{-1}a'b'd' \\ b' &\mapsto b'd'(\mathbf{d}')^{-1}a' \\ d' &\mapsto b'd'. \end{aligned}$$

Pelos argumentos já dados anteriormente, as regressões destacadas são livres e podemos realizar o cancelamento:

$$\begin{aligned} a' &\mapsto b'a'b'd' \\ b' &\mapsto b'a' \\ d' &\mapsto b'd'. \end{aligned}$$

Observação. No quadro dual a subdivisão corresponde a um *split* e a dobra corresponde a se tomar a “band sum” dos discos A , B , obtendo um novo disco que denominamos D' (ver Figura 4.8). Renomeamos os discos A , B

como A' , B' e temos $\mathcal{E}' = \{A', B', D'\}$, duais às respectivas arestas de Γ'' . Assim, vemos na figura que, após realizadas essas operações, $g(\mathcal{E}') - H_0$ não é mais incompressível em H_1 .

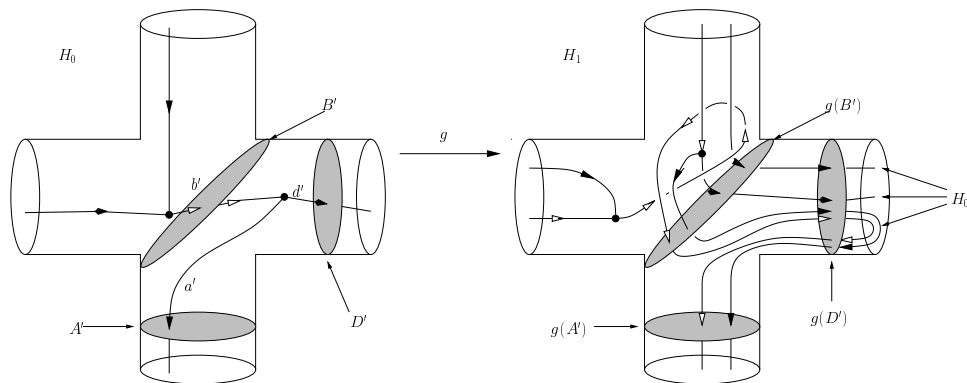


Figura 4.8: O quadro dual: depois de realizado o down-move vemos que a laminação é compressível em $H_1 - H_0$.

A Figura 4.9 mostra a situação final, depois de realizada o desvio.

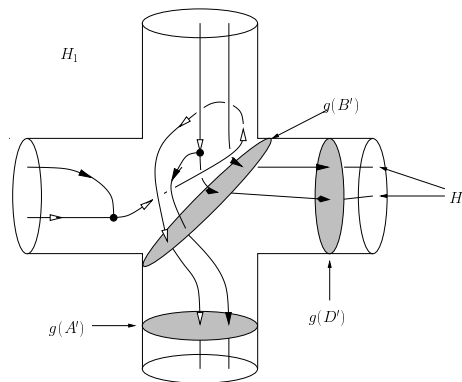


Figura 4.9: Após realizada a diversion.

Voltando à nossa abordagem notamos que, como no Exemplo 4.5, as palavras produzidas por $\bar{h}$ apresentam somente potências positivas de a' , b' e d' , portanto nenhum iterado $\bar{h}^n$ produzirá caminhos regressores, implicando a incompressibilidade de Λ . Observamos que a matriz de incidência de $\mathcal{E}$ é dada por:

$$M(\mathcal{E}) = M(\Gamma)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

cujo fator de crescimento é

$$\lambda(\mathcal{E}) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

que, como já vimos, é o fator de crescimento minimal de $g: H \rightarrow H$ (Exemplo 3.10).

4.2

A parada: o primeiro nulógono de uma laminação compressível não pode ser muito alto.

Nos exemplos analisados na Seção 4.1, concluimos que as respectivas laminações gozavam da propriedade de incompressibilidade por características especiais: seus fatores de crescimento eram mínimos, dados pelo fator de crescimento de π_1 pela inversa ou, analogamente, os respectivos $\bar{h}^n$ não produziam caminhos regressores. Isso não é regra geral (Exemplo 3.16).

Como garantir que uma laminação goza da propriedade de incompressibilidade? Nessa seção mostramos que, se $\Lambda - \mathring{H}_0$ for compressível em $H - \mathring{H}_0$, então existe um $n \in \mathbb{N}$ (dependendo somente do gênero de H e do número de discos em $\mathcal{E}$) tal que $\Lambda - \mathring{H}_0$ é compressível em $H_n - \mathring{H}_0$. A procura por nulógonos se torna, então, um processo finito.

Para enunciar esse resultado, o principal dessa seção, precisamos de duas definições sobre superfícies em H .

Definição 4.13. Seja $F \subseteq H$ uma superfícies mergulhada. A *altura* $h(F) \in [0, \infty]$ de F é o número de ∂H_i distintos que F intercepta.

A definição de complexidade de uma superfície dada abaixo é bastante primitiva mas boa o suficiente para superfícies planares. Ela será usada para se achar um disco compressor (Lemas 4.27, 4.31 e 4.32).

Definição 4.14. Seja F uma superfície compacta e planar. A *complexidade* $\mathcal{C}(F)$ de F é definida como:

$$\mathcal{C}(F) = (\# \text{ componentes do bordo de } F) - 2(\# \text{ componentes de } F).$$

Agora já estamos equipados para enunciar o resultado principal dessa seção:

Teorema 4.15. Se $\Lambda - H_0$ é compressível em $H - H_0$ então há um disco compressor D satisfazendo:

$$h(D) \leq \mathcal{C}(T) + 1,$$

onde a superfície planar T é definida como $T = \partial H - \mathring{N}(\mathcal{E})$.

A Proposição 4.15 determina, portanto, uma condição de parada para a procura por nulógonos: se nenhum disco compressor for achado em H_n para $n \leq \mathcal{C}(T) + 2$ então não há nenhum tal disco em H .

A seguir daremos um esboço da prova do teorema.

A variedade ambiente será o complemento de $\mathring{H} - \Lambda$,

$$M = \widehat{\mathring{H} - \Lambda},$$

que é, essencialmente, $\mathring{H} - \Lambda$ unido com o conjunto $\hat{\Lambda}$ das folhas de bordo de Λ (vide Seção 2.2). Portanto, M é f -invariante, não é compacta e $\partial M = \hat{\Lambda}$. A pergunta sobre a incompressibilidade de $\Lambda - H_0$ se traduz diretamente como a questão da existência de discos compressores para $\partial M = \hat{\Lambda}$ em $M - H_0$.

A ideia da prova é, grosseiramente, a seguinte: suponhamos que há discos compressores e escolhamos um, diga-se D . Se $h(D) \leq \mathcal{C}(T) + 1$, o teorema está provado. Se não, usamos D para realizar cirurgias em $\partial H_i \cap M$:

1. começamos com $F^0 = \bigcup_{i \geq 0} \partial H_i \cap M$;
2. se $F^j \cap D \neq \emptyset$ então, por uma isotopia de D , podemos supor que F^j corta D em meio-discos. Escolhemos Δ um tal meio-disco que seja mais interno;
3. realizamos uma compressão ao bordo em F^j ao longo de Δ de forma equivariante obtendo F^{j+1} ;
4. se necessário realizamos uma isotopia em D de forma que este intercepte F^{j+1} essencialmente;
5. voltamos ao passo 2, substituindo F^j por F^{j+1} .

Enquanto F^j interceptar D (passo 2) continuamos realizando as cirurgias descritas no passo 3, obtendo F^{j+1} de F^j (veja Figura 4.10).

Cada cirurgia reduzirá a complexidade das superfícies, que, em algum momento, chegará a -1 . Isso implica que alguma componente conexa dessas superfícies é um disco (Lema 4.27). Como todas as operações são feitas de forma equivariante, podemos escolher o primeiro tal disco que não intercepta H_0 . Se formos cuidadosos, podemos provar que esse disco é essencial em $M - H_0$, sendo, portanto, um disco compressor de ∂M . Vamos manter estimativas das alturas das superfícies ao longo do processo, de forma que, quando acharmos esse disco compressor, teremos um limite superior para sua altura.

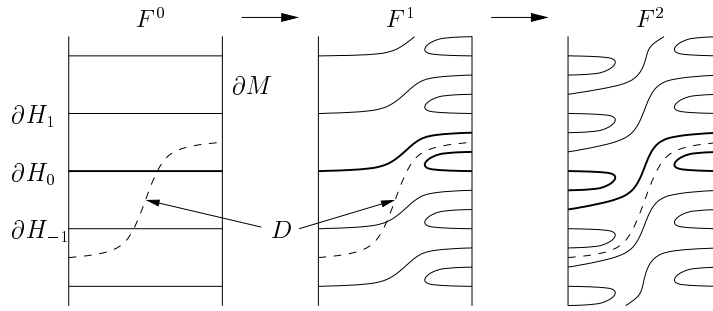


Figura 4.10: O procedimento das cirurgias. Cada seta representa uma compressão ao bordo realizada ao longo de um meio-disco cortado de D . As compressões são realizadas de forma equivariante

Essa descrição é bastante simplificada, há varios detalhes dos quais precisaremos cuidar. Mantendo a estratégia geral em mente, adiantamos que uma boa parte do trabalho terá uma das duas seguintes funções:

1. descrever as propriedades boas de F^0 que são preservadas pelas cirurgias;
2. controlar as alturas das superfícies intermediárias e o quão perto estão de ter um disco como componente.

No espírito do item 1 acima, discutiremos brevemente como H_i intercepta M . Começamos introduzindo a seguinte definição.

Definição 4.16. Um subconjunto $A \subseteq M$ é *limitado* se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $A \subseteq (H_k \cap M)$. Caso contrário ele é dito *ilimitado*.

É imediato que $H_i \cap M$ é limitado. É fácil ver, também, que $H_i \cap M$ tem uma infinidade de componentes compactas, quase todas da forma $D \times I$ (onde D é um disco, $D \times \{0, 1\} \subseteq \partial M$ e $(\partial D) \times I \subseteq \partial H_i$), sendo as excessões em número finito. Além disso, cada uma das componentes é uma bola topológica fechada.

Analogamente, $\partial H_i \cap M$ é uma superfície propriamente mergulhada e limitada. Tem uma infinidade de componentes, todas compactas e, a menos de uma quantidade finita, todas anéis. Podemos, portanto, generalizar a definição de complexidade de uma superfície (definição 4.14, que pede que a superfície seja compacta) para se aplicar à $\partial H_i \cap M$: complexidade é aditiva com união disjunta e anéis têm complexidade zero.

Quando demos o esboço da estratégia, começamos considerando $\bigcup_{i \geq 0} \partial H_i \cap M$. Na verdade, se trabalhamos com $F^0 = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \partial H_i \cap M$, que é mais simétrico, a notação e argumentos ficam mais leves e claros. É claro que $f(F^0) = F^0$, motivando a seguinte definição mais geral.

Definição 4.17. Uma *superfície equivariante* F em M é uma sequência com dois fins $F = (\dots, F_{-1}, F_0, F_1, \dots)$ de superfícies propriamente mergulhadas, limitadas e disjuntas dois a dois $F_i \subseteq M$ tais que:

$$F_{i+1} = f(F_i).$$

Cada F_i é um *nível* de F e poderemos nos referir à F_i como o *nível* i de F .

Dizemos que F é *planar* se F_i o for. Podemos estender a noção de complexidade para se aplicar às superfícies equivariantes planares definindo $\mathcal{C}(F) = \mathcal{C}(F_i)$ (notamos novamente que faz sentido considerar $\mathcal{C}(F_i)$ desde que, a menos uma quantidade finita, todas as componentes de F_i sejam anéis).

Abaixo estendemos a definição de superfície incompressível para uma superfície equivariante F . Alertamos o leitor para um abuso de notação: quando nos referimos à F como um conjunto queremos dizer $\bigcup_i F_i$.

Definição 4.18. Uma superfície equivariante $F = (\dots, F_{-1}, F_0, F_1, \dots)$ em M é *incompressível* se, para todo disco mergulhado $D \subseteq M$ com $D \cap F = \partial D$, existir um disco $D' \subseteq F$ tal que $\partial D' = \partial D$.

Observação. Notamos que F pode ser incompressível em M mesmo com suas componentes F_i sendo compressíveis: um disco compressor D para F_i pode deixar de determinar um disco compressor para F se interceptar uma infinidade de outros F_j (de forma que não exista uma curva fechada em $D \cap F$ que seja mais ou interior: veja Figura 4.11).

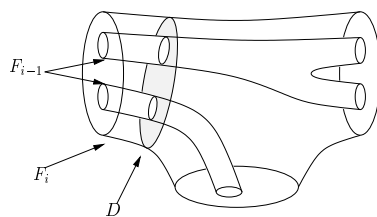


Figura 4.11: Um disco compressor D para F_i que não é compressor para F

Todas as superfícies equivariantes com as quais lidaremos serão planares e incompressíveis. Seja então F uma tal superfície equivariante. Suponhamos também que cada F_i intercepte todas as componentes de M . Como F_i é limitada ela está contida em algum H_k . Seja S uma componente de F_i contida em uma componente B de $H_k \cap M$. Essa componente B é uma bola, portanto S a separa. Isto é verdade para qualquer valor de k arbitrariamente grande então, em verdade, S separa uma componente de M . Seja

C o fecho de uma componente de $M - F_i$ (alertamos que esse fecho deve ser tomado em M , não em H). Algumas tais componentes C são limitadas e outras não. A união das ilimitadas será um subconjunto de M fechado e ilimitado, chamado de *exterior de F_i* , denotado por $Out(F_i)$. O fecho de seu complemento $M - Out(F_i)$ é um subconjunto limitado chamado de *interior de F_i* , denotado por $In(F_i)$.

Lema 4.19. *Se M' for uma componente de M então $Out(F_i) \cap M'$ é fechado, conexo e ilimitado.*

Isso dá uma caracterização de $Out(F_i) \cap M'$: se o fecho C de uma componente de $M' - F_i$ for ilimitado então $C = Out(F_i) \cap M'$.

Demonstração. O que não é imediato da definição é somente que $Out(F_i) \cap M'$ é conexo.

Por F_i ser limitada ela está contida em algum H_n e, assim, $M' - H_n \subseteq Out(F_i)$. Além disso qualquer componente de $Out(F_i)$ deve interceptar $M' - H_n$ (já que $Out(F_i)$ é ilimitado). Mas $M' - H_n = (M - H_n) \cap M'$ é conexo, portanto $Out(F_i) \cap M'$ também o é.

A conclusão final segue imediatamente. $\square$

Grande parte da regularidade das superfícies equivariantes que serão consideradas é descrita pela definição abaixo.

Definição 4.20. Seja $F = (\dots, F_i, F_{i+1}, \dots)$ uma superfície equivariante planar. Suponha que, a menos de uma quantidade finita, as componentes de cada F_i são anéis. Se, para $i < k$, as seguintes condições forem satisfeitas:

1. as componentes de $In(F_i)$ são bolas,
2. encadeamento: $In(F_i) \subseteq In(F_k)$ (que é equivalente a $Out(F_k) \subseteq Out(F_i)$),
3. $In(F_i)$ intercepta todas as componentes de $In(F_k)$,
4. $F_i = In(F_i) \cap Out(F_i)$,

então dizemos que F é *regular*.

Relembrando o esboço da demonstração, usaremos um disco compressor da laminação para realizar compressões ao bordo de forma equivariante em uma superfície equivariante. Isso nos leva à seguinte definição. Remetemos o leitor à Seção 2.1 para a definição de meio-disco e meio-disco bordo-compressor.

Definição 4.21. Dada uma superfície equivariante $F = (\dots, F_i, F_{i+1}, \dots)$, um *meio-disco bordo-compressor equivariante* para F em M é uma sequência com dois fins $\Delta = (\dots, \Delta_i, \Delta_{i+1}, \dots)$ de meio-discos disjuntos dois a dois satisfazendo:

1. $\Delta_i \cap F = \alpha_i \subseteq F_i$ e $\Delta_i \cap \partial M = \beta_i$,
2. $\Delta_{i+1} = f(\Delta_i)$ e
3. Δ_i é meio-disco ∂ -compressor para $F = \bigcup_i F_i$.

Podemos nos referir à α como o *bordo superior* de Δ_i e à β como o seu *bordo inferior*.

Uma *bordo-compressão equivariante* de F ao longo de Δ é uma nova superfície equivariante $F' = (\dots, F'_i, F'_{i+1}, \dots)$, onde cada F'_i é obtido de F_i por uma ∂ -compressão ao longo de Δ_i (é claro que F' é, de fato, uma superfície equivariante).

Considere um meio-disco ∂ -compressor Δ_i para F_i . Dizemos que Δ_i é *bom* se:

- $\Delta_i \subseteq \text{In}(F_i)$ ou
- $\Delta_i \subseteq \text{Out}(F_i)$ e Δ_i não separa $\text{Out}(F_i)$.

Caso o contrário, se $\Delta_i \subseteq \text{Out}(F_i)$ e Δ_i separar $\text{Out}(F_i)$, dizemos que Δ_i é *ruim*. Um meio-disco ∂ -compressor equivariante Δ é dito *bom* ou *ruim* quando Δ_i for, respectivamente, bom ou ruim.

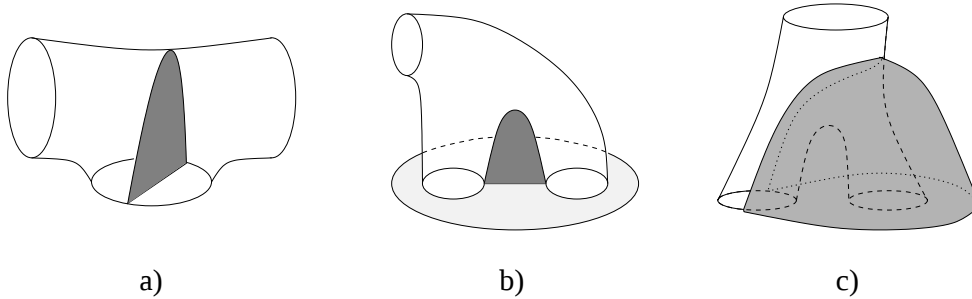


Figura 4.12: a) e b) típicos discos bons; c) típico disco ruim.

A distinção entre meio-discos bons e ruins é natural em nosso quadro. Se for bom, a respectiva ∂ -compressão preservará várias propriedades boas da superfície equivariante. O lema seguinte exemplifica isso.

Lema 4.22. *Sejam F , F' superfícies equivariantes, F' obtida de F por uma bordo-compressão equivariante ao longo de um bom meio-disco bordo-compressor equivariante.*

- Se $\Delta_i \subseteq \text{In}(F_i)$ então:

$$\begin{aligned} \text{In}(F'_i) &= \text{In}(F_i) - \overset{\circ}{N}(\Delta_i), \\ \text{Out}(F'_i) &= \text{Out}(F_i) \cup N(\Delta_i). \end{aligned}$$

- Se $\Delta_i \subseteq \text{Out}(F_i)$ e Δ_i não separa $\text{Out}(F_i)$ então:

$$\begin{aligned} \text{In}(F'_i) &= \text{In}(F_i) \cup N(\Delta_i), \\ \text{Out}(F'_i) &= \text{Out}(F_i) - \overset{\circ}{N}(\Delta_i); \end{aligned}$$

Se F for ainda regular e incompressível então F' também é regular e incompressível.

Demonstração. Dividimos a prova em dois casos como no enunciado:

- $\Delta_i \subseteq \text{In}(F_i)$.

Provamos inicialmente as equações que dão $\text{In}(F'_i)$ e $\text{Out}(F'_i)$ a partir de F e Δ_i .

Considere uma componente M' de M . Se $\Delta_i \not\subseteq M'$ então $F'_i \cap M' = F_i \cap M'$ e a situação é idêntica em F e F' : $\text{In}(F'_i) \cap M' = \text{In}(F_i) \cap M'$ e $\text{Out}(F'_i) \cap M' = \text{Out}(F_i) \cap M'$. Consequentemente so precisamos considerar o caso em que $\Delta_i \subseteq M'$. A Figura 4.13 o representa esquematicamente.

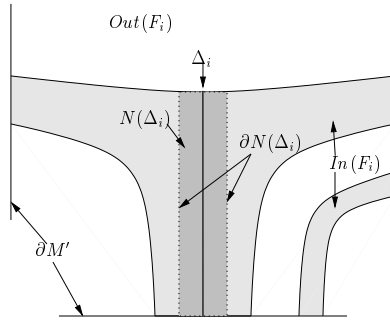


Figura 4.13: O caso em que $\Delta_i \subseteq \text{In}(F_i)$

Notamos que $(\text{Out}(F_i) \cup N(\Delta_i)) \cap M'$ é o fecho de uma componente de $M' - F'_i$ e, já que contém o conjunto ilimitado $\text{Out}(F_i)$, é, por sua vez, ilimitado também. Concluimos, pelo Lema 4.19, que

$$\text{Out}(F'_i) = \text{Out}(F_i) \cup N(\Delta_i).$$

Da equação acima e da definição de $In(F'_i)$ conclui-se que

$$In(F'_i) = In(F_i) - \overset{\circ}{N}(\Delta_i).$$

Se F for incompressível, provamos que F' também o é observando que bordo-compressões preservam incompressibilidade. A demonstração desse fato segue de forma idêntica a do fato análogo para a definição usual de incompressibilidade: se D' for um candidato a disco compressor para F' , podemos aplicar uma isotopia à D' de forma que o disco não intercepte a cópia de Δ_i em F_i . Podemos, agora, desfazer a bordo-compressão e ter D' como candidato a disco compressor para F . Como F é incompressível, existe um disco $D \subseteq F_i$ com $\partial D = \partial D'$ e $D \cap \partial \Delta_i = \emptyset$. Mas $D \subseteq F'_i$, mostrando que D' não é disco compressor.

Continuamos supondo que F é regular e verificando cada uma das condições de regularidade para F' .

A primeira segue facilmente da equação $In(F'_i) = In(F_i) - \overset{\circ}{N}(\Delta_i)$ demonstrada acima: Δ_i é disco propriamente mergulhado em $In(F_i)$, portanto $N(\Delta_i)$ separa a componente de $In(F_i)$ que a contém (que é uma bola) em duas bolas.

Suponhamos de agora em diante que $i < k$.

Para a segunda condição, $In(F_i) \subseteq In(F_k)$ e $\Delta_k \cap F_i = \emptyset$ implicam que

$$In(F'_i) = In(F_i) - \overset{\circ}{N}(\Delta_k) \subseteq In(F_i) \subseteq In(F_k) - \overset{\circ}{N}(\Delta_k) = In(F'_k),$$

provando encadeamento.

Para a terceira condição usamos, novamente, que $In(F_k)$ é união disjunta de bolas e que Δ_k separa a componente que intercepta em duas componentes de $In(F'_k)$. Seja B (o fecho de) uma dessas componentes e S a componente de F'_k que está contida em ∂B (i.e. $S = \overline{\partial B} - \partial \overline{M}$). Se F for um disco então B tem que interceptar $In(F_i)$ (para algum $i < k$) porque Δ_k é um meio-disco bordo-compressor.

Porém $In(F'_i) \subseteq In(F_i)$, donde B deve interceptar, portanto conter, alguma componente de $In(F'_i)$. Isso pode ser generalizado facilmente para qualquer $l < k$ por uso da segunda condição de regularidade (encadeamento). Se S não for um disco então existe um laço não trivial $\gamma \subseteq S$ bordando um disco mergulhado $D \subseteq B$. Como F' é incompressível, esse disco deve interceptar algum F'_l . Em verdade,

deve interceptar qualquer F'_l (para $l < k$): se F'_l fosse minimal com a propriedade $D \cap F'_l \neq \emptyset$ então F'_l seria compressível, mostrando que não existe tal nível minimal. Novamente pela segunda condição de regularidade, segue que D intercepta todo F'_l (para $l < k$).

Finalmente, a quarta condição de regularidade para F' segue diretamente da mesma condição para F e da forma de se obter F'_i de F_i :

$$F'_i = \left(F_i - \overset{\circ}{N}(\Delta_i) \right) \cup \partial N(\Delta_i),$$

onde $\partial N(\Delta_i) = \{0, 1\} \times \Delta_i$ na estrutura de produto de $N(\Delta_i)$ (veja Figura 4.13).

– $\Delta_i \subseteq \text{Out}(F_i)$ e Δ_i não separa $\text{Out}(F_i)$.

Como no caso anterior, para se obter $\text{In}(F'_i)$ e $\text{Out}(F'_i)$ de F e Δ_i , precisamos somente considerar a componente M' de M que contém Δ_i .

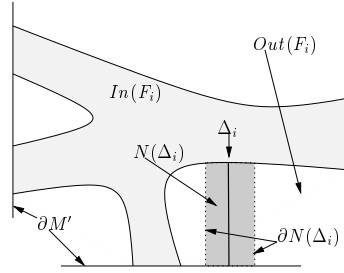


Figura 4.14: $\Delta_i \subseteq \text{Out}(F_i)$

O Lema 4.19 nos diz que $\text{Out}(F_i) \cap M'$ é conexo, fechado e ilimitado. Como $N(\Delta_i)$ é uma bola compacta, segue que $\left(\text{Out}(F_i) - \overset{\circ}{N}(\Delta_i) \right) \cap M'$ é conexo, fechado e ilimitado. Pelo Lema 4.19, novamente:

$$\begin{aligned} \text{Out}(F'_i) &= \text{Out}(F_i) - \overset{\circ}{N}(\Delta_i) \text{ e então} \\ \text{In}(F'_i) &= \text{In}(F_i) \cup N(\Delta_i). \end{aligned}$$

Se F for incompressível, a prova da incompressibilidade de F' é a mesma do caso anterior.

Supomos agora que F é regular e provamos a mesma propriedade para F' .

Como $\text{In}(F_i)$ e $N(\Delta_i)$ são bolas se interceptando em um disco em seus bordos, sua união $\text{In}(F_i) \cup N(\Delta_i) = \text{In}(F'_i)$ também é uma bola, mostrando a primeira condição.

Para mostrar a segunda condição de regularidade, supomos que $i < k$ e notamos que $In(F_k) \subseteq In(F'_k)$. Mas $In(F_i) \subseteq In(F_k)$ por hipótese e, também, $\Delta_i \subseteq In(F_k)$, implicando que

$$In(F'_i) = In(F_i) \cup N(\Delta_i) \subseteq In(F_k) \subseteq In(F'_k),$$

mostrando encadeamento.

Continuamos provando a terceira condição: cada componente de $In(F'_k)$ contém uma componente de $In(F_k)$ que, por sua vez, contém uma componente de qualquer $In(F_i)$ para $i < k$. Mas, porque $\Delta_i \subseteq In(F_k)$, podemos concluir que cada componente de $In(F_k)$ contém uma componente de $In(F'_i)$ e, consequentemente, cada componente de $In(F'_k)$ contém uma componente de $In(F'_i)$.

A quarta condição segue como no caso anterior.

□

Lema 4.23. *Suponhamos que F seja uma superfície equivariante em M e que $D \subseteq M$ seja um disco propriamente mergulhado interceptando F transversalmente em arcos. Seja Δ um bom meio-disco bordo-compressor equivariante para F e seja F' a compressão de F ao longo de Δ . Suponhamos ainda que essa ∂ -compressão elimina a interseção de D com algum nível, i.e., existe um nível k tal que $D \cap F_k \neq \emptyset$ mas $D \cap F'_k = \emptyset$.*

- Se $\Delta_i \subseteq In(F_i)$ então k deve ser o nível mais baixo que D intercepta (i.e., se $i < k$ então $D \cap F_i = \emptyset$);
- Se Δ_i está contido em e separa $Out(F_i)$ então K deve ser o nível mais alto que D intercepta (i.e., se $i > k$ então $D \cap F_i = \emptyset$).

Em todos os casos, D deve interceptar F' em, no máximo, um nível a menos que F .

Demonstração. Consideramos os dois casos como no enunciado:

- Se $\Delta_i \subseteq In(F_i)$:

Seja m o índice maximal tal que $D \cap F_m \neq \emptyset$ mas $D \cap F'_m = \emptyset$. Então ou $D \subseteq In(F'_m)$ ou $D \subseteq Out(F'_m)$. O que de fato acontece é o último, porque D intercepta $Out(F_m) \subseteq Out(F_m) \cup N(\Delta_m) = Out(F'_m)$ (a última igualdade vindo do Lema 4.22).

Mas $Out(F'_m)$ não intercepta F_i quando $i < m$ (porque nem $Out(F_m)$ nem $N(\Delta_m)$ interceptam) portanto $D \cap F_i = \emptyset$. Segue então que m é o nível mais baixo de F que D intercepta.

- Se Δ_i está contido em e separa $Out(F_i)$:

O argumento é análogo ao caso anterior: seja m o índice minimal tal que $D \cap F_m \neq \emptyset$ mas $D \cap F'_m = \emptyset$. Então $D \subseteq In(F'_m)$. Mas $In(F'_m)$ não intercepta F_i quando $i > m$ portanto m é o nível mais alto de F que D intercepta.

A conclusão final é imediata. $\square$

As definições e lemas a seguir serão usadas para se obter controle sobre as alturas das superfícies e para obter condições suficientes para que elas tenham um disco como componente.

Definição 4.24. O *índice de interseção* de uma superfície equivariante F com um disco D (denotado por $I(F, D)$), é o número de níveis distintos de F que interceptam D .

Definição 4.25. Se F é uma superfície equivariante, $d(F)$ (de *down*) é o menor inteiro tal que, para todo $k > d(F)$,

$$F_i \cap \partial H_{(i-k)} = \emptyset.$$

Similarmente, seja $u(F)$ (de *up*) o menor inteiro tal que, para todo $k < u(F)$,

$$F_i \cap \partial H_{(i+k)} = \emptyset.$$

Observamos que essas definições não dependem de i .

Lema 4.26. Se F for uma superfície equivariante então, para qualquer i :

1. $h(F_i) = d(F) + u(F) + 1$;
2. $\partial H_{(i-1-d(F))} \subseteq In(F_i)$ e $\partial H_{(i+1+u(F))} \subseteq Out(F_i)$.

Demonstração. Segue diretamente da definição. $\square$

Lema 4.27. Seja S uma união disjunta de superfícies compactas planares e suponhamos que somente uma quantidade finita dessas não são anéis (fazendo, então, sentido considerar $\mathcal{C}(S)$). Se $\mathcal{C}(S) < 0$ então uma componente de S é um disco.

Demonstração. Pelo menos uma componente deve ter menos que duas (portanto uma) componentes de bordo. $\square$

Finalmente, completando a preparação para o argumento, definimos o que entendemos por um disco *interceptar uma superfície de forma essencial*. Sejam D um disco limitado e propriamente mergulhado em M e F uma superfície equivariante. Consideremos $D \cap F$ e seja C_0 o fecho de uma componente de $D - F$ (não necessariamente mais ao interior). Suponhamos que C_0 é paralela a uma subsuperfície $C_1 \subseteq F_i$ por um produto $P = C \times I \subseteq M$ com $C \times \{0\} = C_0$ e $C \times \{1\} = C_1$. Se P está contida no fecho de uma componente de $M - F$ então podemos aplicar uma isotopia à D ao longo de P e simplificar $|D \cap F|$.

Definição 4.28. Um disco propriamente mergulhado e limitado D intercepta uma superfície equivariante de forma *essencial* se $D \cap F$ não pode ser simplificado pela operação descrita acima.

Podemos agora voltar à estratégia geral da prova do Teorema 4.15 e fazê-la precisa.

Seja D um disco compressor para ∂M em $M - \mathring{H}_0$. Inicialmente, realizamos uma isotopia em D a fim de que intercepte $(\cup_i \partial H_i) \cap M$ de forma essencial. Em particular tal interseção consiste de arcos. Lembramos que $T = \partial H - \mathring{N}(\mathcal{E})$ e que o Teorema 4.15 enuncia que há um disco cuja altura é menor que ou igual à $\mathcal{C}(T) + 1$. Se $h(D) \leq \mathcal{C}(T) + 1$ então a demonstração termina, portanto supomos que $h(D) \geq \mathcal{C}(T) + 2$.

Seja $F^0 = (\dots, F_{-1}^0, F_0^0, F_1^0, \dots)$ a superfície equivariante definida por

$$F_i^0 = \partial H_i \cap M, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Começando em F^0 , usaremos D para realizar bordo-compressões em F^j , obtendo F^{j+1} . Podemos precisar aplicar uma isotopia à D para que este intercepte F^{j+1} de forma essencial, por isso introduziremos discos isotópicos D^{j+1} .

Um argumento indutivo garantirá algumas propriedades à j , F^j e D^j , listadas abaixo.

- a) F^j é uma superfície equivariante planar;
- b) F^j é regular e incompressível;
- c) $d(F^0) + u(F^0) = 0$ e $d(F^j) + u(F^j) \leq (j - 1)$ para $j \geq 1$;
- d) $\mathcal{C}(F^j) = \mathcal{C}(F^0) - j$;
- e) $I(F^j, D^j) \geq h(D) - j$;

f) D^j intercepta F^j de forma essencial.

Suponhamos, então, que j , F^j e D^j satisfaçam todas as propriedades a) a f) e que $I(F^j, D^j) \geq 1$ (logo $F^j \cap D^j \neq \emptyset$). Consideremos um arco $\gamma \subseteq F^j \cap D^j$ mais interno em D^j . Ele borda com ∂D^j um disco mais interno $D' \subseteq D^j$. Seja $F_{i_0}^j$ o nível onde D' intercepta F^j i.e., $D' \cap F^j = \gamma \subseteq F_{i_0}^j$. Tal D' é um meio-disco bordo-compressor pela propriedade f). Queremos escolher um tal meio-disco que seja bom. Se nenhum meio-disco mais ao interior for bom então aplicamos uma isotopia à D^j usando a seguinte afirmação.

Afirmção 4.29. *Se um disco mais interno $D' \subseteq D^j$ com respeito à $F^j \cap D^j$ for um meio-disco bordo-compressor ruim (significando que separa $\text{Out}(F_i^j)$) então D^j é isotópico a um disco $\hat{D}$ que tem um disco mais ao interior que é bom. Além disso $\hat{D}$ pode ser escolhido interceptando F^j de forma essencial e tal que $I(F^j, \hat{D}) = I(F^j, D^j)$.*

Se aceitarmos temporariamente a afirmação (sua demonstração será dada ao final da seção) substituímos D^j por $\hat{D}$ sem perda das propriedades a) a f). Podemos então supor que o disco mais ao interior D' é bom, o que faremos daqui em diante.

Consideremos $\Delta_i = f^{(i-i_0)}(D')$, $i \in \mathbb{Z}$.

Lema 4.30. *A sequência $\Delta = (\dots, \Delta_i, \Delta_{i+1}, \dots)$ é um bom meio-disco equivariante bordo-compressor F^j .*

Demonstração. Verificamos inicialmente que os Δ_i são disjuntos dois a dois. Seja $i < k$ e suponhamos que $\Delta_i \subseteq \text{In}(F_i^j)$. Como $\Delta_k \cap F_i^j = \emptyset$ então $\Delta_k \cap \text{In}(F_i^j) = \emptyset$, implicando que $\Delta_k \cap \Delta_i = \emptyset$. O caso em que $\Delta_i \subseteq \text{Out}(F_i^j)$ é completamente análogo.

Cada Δ_i é claramente um meio-disco; $\Delta_{i+1} = f(\Delta_i)$ por definição; e a propriedade f) garante que cada meio-disco é bordo-compressor.

É bom pela escolha de D' . □

Se realizamos uma bordo-compressão equivariante em F^j ao longo de Δ obtemos uma nova superfície equivariante F^{j+1} . Mostraremos adiante por indução que F^{j+1} satisfaz todas as propriedades a) a f). Portanto podemos continuar aplicando o argumento enquanto $F^j \cap D \neq \emptyset$, quando faz sentido a definição de Δ . Mas a meta é achar um disco compressor logo devemos interromper o processo indutivo se F_i tiver algum disco como componente. Dizemos então que o processo pára se $F^j \cap D = \emptyset$ ou se algum F_i^j tem disco como componente.

Lema 4.31. *O processo indutivo pára em algum passo $l \leq \mathcal{C}(T) + 1$ e F_i^l tem uma componente que é um disco.*

Demonstração. Cada boa bordo-compressão reduz a complexidade de F^j : se o meio-disco separa $In(F_i^j)$ então a compressão aumenta tanto o número de componentes quanto de componentes de bordo em 1, enquanto se não separa $Out(F_i^j)$ aumenta o número de componentes de bordo sem mudar o número de componentes. Em todo caso a complexidade cai em 1 após cada compressão, em algum momento chegando a -1 , implicando que F_i^j tem um disco como componente (Lema 4.27). Logo o processo pára, diga-se no passo l . Então F^{l-1} satisfaz todas as propriedades a) a f) e $F^{l-1} \cap D^{l-1} \neq \emptyset$. Novamente segue do Lema 4.27 que $\mathcal{C}(F_i^{l-1}) \geq 0$ porque F_i^{l-1} não pode ter nenhum disco como componente. Pela propriedade d):

$$l - 1 \leq \mathcal{C}(F^0) = \mathcal{C}(T),$$

mostrando que $l \leq \mathcal{C}(T) + 1$.

Pela propriedade e) e a desigualdade acima

$$I(F^l, D^l) \geq h(D) - l \geq \mathcal{C}(T) + 2 - l \geq 1,$$

implicando que $F^l \cap D^l \neq \emptyset$. Portanto quando o processo parar no passo l cada F_i^l tem uma componente que é um disco. $\square$

Lema 4.32. *Suponha que j e F^j satisfaçam as propriedades a) a f) acima e que F_i^j tenha um disco como componente. Então há um disco compressor para $\hat{\Lambda} - H_0$ em $M - H_0$ cuja altura é menor que ou igual a j .*

Demonstração. Consideremos $D_i \subseteq F_i^j$ uma componente de F_i^j que seja um disco. Escolhemos i o menor inteiro tal que $D_i \cap H_0 = \emptyset$ (mais precisamente, $i = d(F^j) + 1$). Lema 4.26 e a propriedade c) implicam que

$$h(D_i) \leq h(F_i^j) \leq j.$$

Verificamos agora que D_i é um disco compressor. Ele é paralelo a um disco $D' \subseteq \partial M$ (porque $\partial M = \hat{\Lambda}$ é união de discos) e $D_i \cup D'$ borda uma bola compacta $B \subseteq In(F_i^j)$. É suficiente provar que $B \cap H_0 \neq \emptyset$. Isto porque $D_i \cap H_0 = \emptyset$ portanto uma componente de $H_0 \cap M$ que intercepte B deve estar contida nela. Segue então que $D' \cap H_0 \neq \emptyset$ (novamente pois $D_i \cap H_0 = \emptyset$) e então que $\partial D'$ não é contrátil em $\partial M - H_0$.

Mostramos agora que $B \cap H_0 \neq \emptyset$. Considere uma componente C de $In(F_i^j)$ contendo B . Se $B \subsetneq C$ então $D_i \not\subseteq F_i^j$, contradizendo regularidade.

Portanto B é componente de $In(F_i^j)$ e então, por regularidade de F^j , B deve conter uma componente de $In(F_k^j)$ para todo $k < i$. Mas há um valor para k tal que $In(F_k^j) \subseteq H_0$ (tome $k \leq -1 - u(F^j)$) portanto $B \cap H_0 \neq \emptyset$, completando a demonstração. $\square$

Demonstração do Teorema 4.15. Lema 4.31 acima garante que em algum passo $l \leq \mathcal{C}(T) + 1$ os F_i^l têm uma componente que é um disco. Mas o Lema 4.32 mostra então que há um disco compressor para $\hat{\Lambda} - H_0$ cuja altura é menor que ou igual a $l \leq \mathcal{C}(T) + 1$, completando a demonstração se aceitamos o argumento de indução e a Afirmação 4.29. $\square$

Passamos agora à demonstração do argumento de indução. Ainda supomos a Afirmação 4.29.

Demonstração do argumento de indução. Começamos verificando as propriedades para F^0 e $D^0 = D$:

- a) é claro;
- b) segue facilmente de $In(F_i^0) = H_i \cap M$;
- c) $d(F^0) = u(F^0) = 0$;
- d) óbvio;
- e) $I(F^0, D^0) = h(D)$;
- f) $D^0 = D$ foi escolhido para satisfazer essa propriedade logo no início.

Precisamos agora de verificar o passo de indução. Supomos que $j \leq \mathcal{C}(T)$ (o que implica que $D^j \cap F^j \neq \emptyset$) e que F^j satisfaz todas as propriedades a) a f). A interseção $D^j \cap F^j$ determina Δ , o qual supomos ser bom pela Afirmação 4.29. Usamos Δ para obter F^{j+1} (bordo-compressão equivariante). Se D^j intercepta F^{j+1} de forma essencial então $D^{j+1} = D^j$, caso contrário aplicamos isotopia à D^j para obter D^{j+1} interceptando F^{j+1} de forma essencial. Há dois casos a serem considerados:

- $\Delta_i \subseteq In(F_i^j)$ e
- $\Delta_i \subseteq Out(F_i^j)$ e Δ_i não separa $Out(F_i^j)$.

Mostraremos que F^{j+1} satisfaz todas as propriedades em cada caso.

- $\Delta_i \subseteq In(F_i^j)$.
 - a) segue da definição de bordo-compressão equivariante (Definição 4.21);

b) Lema 4.22;

c) aqui $u(F^{j+1}) = u(F^j)$. Suponha que $k < i$ e que $j = 0$. Então $\partial H_k = F_k^0$ e logo $\Delta_i \cap \partial H_k = \emptyset$. Portanto $F_i^0 \cap \partial H_k = \emptyset$ donde $d(F^1) = 0$.

Agora supomos que $k = i - 1$. Em geral, para qualquer j , $\Delta_i \cap F_{(i-1)}^j = \emptyset$ e então $\Delta_i \cap \text{In}(F_{(i-1)}^j) = \emptyset$. Logo do Lema 4.26.2 vemos que $\Delta_i \cap \partial H_{(i-2-d(F^j))} = \emptyset$ e portanto $F_i^{j+1} \cap \partial H_{(i-2-d(F^j))} = \emptyset$. Observamos que $F_i^{j+1} \cap \partial H_{(i-d(F^j))} \neq \emptyset$ então $d(F^{j+1})$ é igual ou a $d(F^j)$ ou a $d(F^j) + 1$, dependendo se $\Delta_i \cap \partial H_{(i-1-d(F^j))}$ for vazio ou não. De qualquer forma $u(F^j) + d(F^j)$ aumenta em no máximo 1.

d) como a componente de $\text{In}(F_i^j)$ que contém Δ_i é uma bola, Δ_i a separa. Logo Δ_i separa a componente S de F_i^j que intercepta, produzindo duas componentes S' , S'' de F_i^{j+1} . Portanto $F_i^{j+1} = (F_i^j - S) \cup (S' \cup S'')$ e então

$$\mathcal{C}(F_i^{j+1}) = \mathcal{C}(F_i^j) - \mathcal{C}(S) + \mathcal{C}(S' \cup S'').$$

Mas $S' \cup S''$ tem uma componente e uma componente de bordo a mais que S , donde $\mathcal{C}(S' \cup S'') = \mathcal{C}(S) - 1$. Segue que

$$\mathcal{C}(F_i^{j+1}) = \mathcal{C}(F_i^j) - 1.$$

e) lembramos que se D^j não interceptar F^{j+1} de forma essencial então obtemos outro D^{j+1} com essa propriedade por isotopia de D^j .

Como D^j intercepta F^j de forma essencial então $I(F^j, D^{j+1}) \geq I(F^j, D^j)$. Lema 4.23 diz que $I(F^{j+1}, D^{j+1}) \geq I(F^j, D^{j+1}) - 1$, mostrando que

$$I(F^{j+1}, D^{j+1}) \geq I(F^j, D^j) - 1.$$

f) segue da escolha de D^{j+1} .

– $\Delta_i \subseteq \text{Out}(F_i^j)$ e Δ_i não separa $\text{Out}(F_i^j)$;

Quase todos os argumentos nesse caso são essencialmente os mesmo usados no anterior (podemos precisar trocar direções: acima por abaixo, interior por exterior, etc). Em tais situações evitaremos detalhes, que podem ser facilmente preenchidos seguindo os argumentos do caso anterior.

- a) direto da definição.
- b) direto do Lema 4.22;
- c) aqui $d(F^{j+1}) = d(F^j)$. O resto do argumento segue de forma análoga ao caso anterior: se $j = 0$ então $u(F^1) = 0$. Para um j genérico, $\Delta_i \cap \text{Out}(F_{(i+1)}^j) = \emptyset$ e Lema 4.26.2 implica que $\Delta_i \cap \partial H_{(i+2+u(F^j))} = \emptyset$. Mas $\Delta_i \cap \partial H_{(i+u(F^j))} \neq \emptyset$ logo $u(F^{j+1}) = u(F^j)$ ou $u(F^{j+1}) = u(F^j) + 1$ dependendo de $\Delta_i \cap \partial H_{(i+1+u(F^j))}$ ser vazio ou não. Novamente $u(F^j) + d(F^j)$ aumenta em no máximo 1.
- d) Como Δ_i não separa $\text{Out}(F_i^j)$ então também não separa a componente $S \subseteq F_i^j$ que intercepta, produzindo uma componente $S' \subseteq F_i^{j+1}$. Portanto $F_i^{j+1} = F_i^j - S \cup S'$ e então

$$\mathcal{C}(F_i^{j+1}) = \mathcal{C}(F_i^j) - \mathcal{C}(S) + \mathcal{C}(S').$$

Mas tanto S quanto S' são conexos e S' tem uma componente de bordo a menos que S donde $\mathcal{C}(S') = \mathcal{C}(S) - 1$ e novamente

$$\mathcal{C}(F_i^{j+1}) = \mathcal{C}(F_i^j) - 1.$$

- e) mesmo argumento do caso anterior;
- f) escolha de D^{j+1} .

□

O objetivo final é demonstrar a Afirmação 4.29. Antes provamos o seguinte lema.

Lema 4.33. *Se um meio-disco bordo-compressor $(\Delta_i, \alpha_i, \beta_i)$ para F_i^j for ruim então existe uma subsuperfície $S_i \subseteq F_i^j$ que não é um disco tal que $S_i \cap \Delta_i = \alpha_i$ e tal que a superfície $S'_i = S_i \cup \Delta_i$ goza da seguinte propriedade: para todo arco essencial $\alpha \subseteq S'_i$, existe meio-disco bordo-compressor (Δ, α, β) em M .*

Demonstração. Começamos escolhendo H_n tal que $F_i^j \cup \Delta_i \subseteq H_n \cap M$. Lembramos que F_i^j é obtido de $F_i^0 = \partial H_i \cap M$ por compressões ao bordo. Seja $j = 0$. Pelo Lema 4.11, para todo arco essencial $\alpha \subseteq F_i^j \cap M$ existe meio-disco $(\Delta, \alpha\beta)$, onde $\Delta \subseteq (\text{Out}(F_i^j) \cap H_n) \cap M$ e $\beta \subseteq \partial(H_n \cap M)$. Essa propriedade é preservada por ∂ -compressões boas: supondo que vale para F_i^j , seja $(\Delta', \alpha', \beta')$ um meio-disco bom, que usamos para obter F_i^{j+1}

(lembramos que $F_i^{j+1} = (F_i^j - \overset{\circ}{N}(\Delta')) \cup (\Delta'_0 \cup \Delta'_1)$, onde $\Delta'_0, \Delta'_1 \subseteq \partial N(\Delta')$ são cópias paralelas de Δ' em $N(\Delta') \simeq \Delta' \times I$). Seja $\alpha \subseteq F_i^{j+1}$ um arco essencial. Por uma isotopia, podemos supor que α não intercepta as cópias $\Delta'_0, \Delta'_1 \subset F_i^{j+1}$ de Δ' , donde $\alpha \subseteq F_i^j$. Como α é essencial em F_i^{j+1} também o é em F_i^j donde, por hipótese, existe meio-disco ∂ -compressor (Δ, α, β) em $(\text{Out}(F_i^j) \cap H_n) \cap M$. Podemos supor que $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$ por cirurgias de corte e colagem padrão: se $\Delta \cap \Delta' \neq \emptyset$ eliminamos inicialmente todas as curvas fechadas da interseção por isotopias. Se $\Delta \cap \Delta'$ contiver arcos, tomamos γ um mais ao bordo em Δ' , separando um disco $D' \subseteq \Delta'$. Notamos que, como $\alpha \cap \alpha' = \emptyset$, $\gamma \cap (\alpha \cup \alpha') = \emptyset$. Mas $\gamma \subseteq \Delta$ separa um disco $D'' \subseteq \Delta$. Modificamos Δ trocando D'' por D' , afastando D' levemente de D e suavizando as quinas. Tal cirurgia reduz $|\Delta \cap \Delta'|$ donde, após uma sequência finita de tais operações, podemos supor que $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$. Notamos que α permanece inalterado.

Como $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$ podemos supor que $\Delta \cap N(\Delta') = \emptyset$, donde (Δ, α, β) é um disco ∂ -compressor para F_i^{j+1} em $H_n \cap M$. Além disso, é claro que $\Delta \subseteq \text{Out}(F_i^{j+1})$.

Provamos, portanto, que, para todo j e para todo arco essencial $\alpha \subseteq F_i^j \cap M$, existe meio-disco (Δ, α, β) , onde $\Delta \subseteq (\text{Out}(F_i^j) \cap H_n) \cap M$ e $\beta \subseteq \partial(H_n \cap M)$.

Voltamos à situação descrita no enunciado e seja, como de costume, M' a componente de M que contém Δ_i . Pelo menos uma componente de $(\text{Out}(F_i^j) - \Delta_i) \cap M'$ é ilimitada: $\text{Out}(F_i^j) \cap M'$ é ilimitada e $N(\Delta_i) \subseteq M'$ é limitada. Por outro lado um argumento como o usado no Lema 4.19 garante que não há mais do que uma componente ilimitada logo $(\text{Out}(F_i^j) - \Delta_i) \cap M'$, que tem exatamente duas componentes, tem uma componente ilimitada e uma limitada, o fecho desta denotado por M_i (veja Figura 4.15).

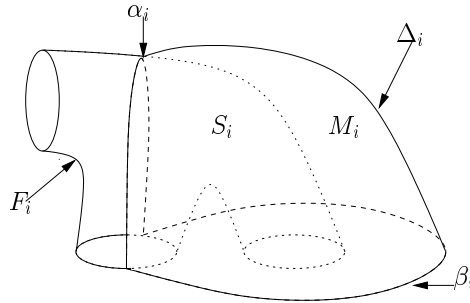


Figura 4.15: O meio-disco Δ_i separando $\text{Out}(F_i)$

É bem claro que $\partial M_i \subseteq \partial \text{Out}(F_i^j) \cup \Delta_i$. Já que $\partial \text{Out}(F_i^j) - \partial M$ é F_i^j vemos que $\overline{\partial M_i} - \partial M \subseteq F_i^j \cup \Delta_i$. Mas $F_i^j \cup \Delta_i \subseteq \text{Out}(F_i^j) - \text{Out}(F_{i+1}^j)$

portanto $M_i \subseteq \text{Out}(F_i^j) - \text{Out}(F_{i+1}^j)$ (porque M_i é limitado). Em particular $M_i \cap F_k^j = \emptyset$ para $k \neq i$, donde $M_i \cap F^j \subseteq F_i^j$.

Seja agora $S_i = \overline{\partial M_i - \partial M}$. É claro que $S_i \subsetneq F_i^j$ porque o bordo superior α_i de Δ_i separa uma componente de F_i^j . Também é claro que $\partial M_i \subseteq F_i^j \cup \Delta_i \cup \partial M$ e que $\Delta_i \subseteq \partial M_i$, implicando que o fecho de $\partial M_i - \partial M$ é $S_i \cup \Delta_i$. Além disso $S_i \cap \Delta_i \subseteq F_i^j \cap \Delta_i = \alpha_i$. Como $S_i \cap \Delta_i \neq \emptyset$ então $S_i \cap \Delta_i = \alpha_i$. Fica fácil ver então que se S_i fosse um disco então, como $\overset{\circ}{M}_i \cap F^j = \emptyset$, Δ_i seria paralelo à S_i por M_i , contrariando a hipótese de que é meio-disco bordo-compressor.

Seja $S'_i = S_i \cup \Delta_i$ que, portanto, também não é um disco.

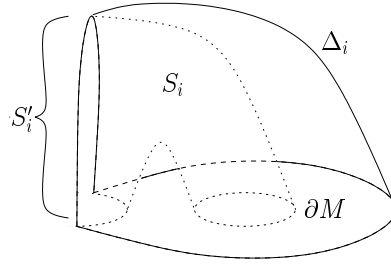


Figura 4.16: $S'_i = S_i \cup \Delta_i$

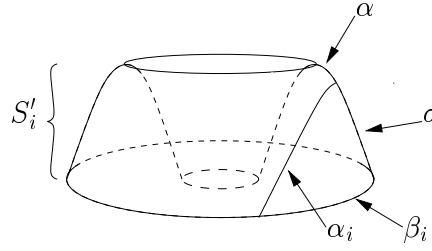
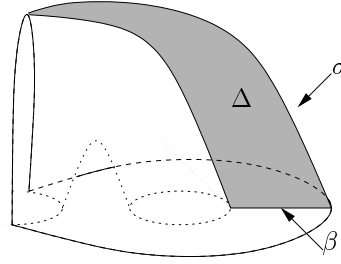
Consideramos, agora, $S'_i \subseteq H_n \cap M'$ e seja $\alpha \subseteq S'_i$ um arco essencial. Seguindo um argumento como o dado no início da prova, podemos supor que $\alpha \subseteq S_i \subseteq F_i^j$, donde existe meio-disco (Δ, α, β) tal que: $\Delta \subseteq \text{Out}(F_i^j)$, $\Delta \cap \Delta_i = \emptyset$, $\beta \subseteq \partial M' \cup \partial H_n$. Segue que $\Delta \subseteq M_i$ e, como $M_i \cap H_n = \emptyset$, $\beta \cap \partial H_n = \emptyset$, donde $\beta \subseteq \partial M'$, de forma que (Δ, α, β) é meio-disco bordo compressor para S'_i em M .

□

Demonstração da Afirmação 4.29. Seja F_i^j o nível de F^j que intercepta D' e defina $\alpha_i = D' \cap F_i^j$. Aplicamos o Lema 4.33 para $\Delta_i = D'$, α_i e $\beta_i = \overline{\partial D' - \alpha}$. Consideramos a superfície S'_i e $\Delta_i \subseteq S'_i$ (ver Figura 4.16). É claro que existe um arco $\alpha \subseteq S'_i$ ligando $\beta_i \subseteq \partial S'_i$ a alguma outra componente de $\partial S'_i$ tal que $\alpha \cap \Delta_i$ consiste de um único arco $\sigma \subseteq \alpha$ ligando β_i a α_i (ver Figura 4.17). Ainda usando o Lema 4.33, obtemos um meio-disco (Δ, α, β) (Figura 4.18).

Notamos, agora, que $D^j \cap \Delta = \sigma$. Podemos tomar uma isotopia de D^j ao longo de Δ levando o arco σ um pouco além de $\overline{\alpha - \sigma}$, obtendo um disco $\hat{D}$.

Considerando $\hat{D} \cap F^j$ vemos que há um disco mais ao interior D'' cujo bordo superior consiste da união de um arco do bordo superior α_i de Δ_i com um arco contido em S_i . Além disso o bordo inferior é um arco β' em ∂M

Figura 4.17: A escolha do arco α .Figura 4.18: Preparando a isotopia de D^j .

isotópico à β e, portanto, ligando duas componentes distintas de ∂S_i . Logo o bordo superior não separa F_i^j , donde D'' não separa $Out(F_i^j)$, implicando que D'' é um bom meio-disco ∂ -compressor.

Finalizando, observamos que a obtenção de $\hat{D}$ preserva as propriedades desejadas que D^j tinha: $\hat{D}$ intercepta exatamente os mesmos níveis de F^j que D^j (logo tem a mesma altura); por D^j interceptar F^j de forma essencial e por F^j ser incompressível, segue que $\hat{D}$ intercepta F^j de forma essencial. $\square$

Exemplo 4.34. Voltamos ao Exemplo 3.8 e testaremos a propriedade de incompressibilidade para uma certa laminação $\Lambda(\mathcal{A})$. Começamos escolhendo a estrutura de alças para H . Consideramos o sistema de discos $\mathcal{E} = \{A, B, C, D\}$ para $H_0 = S \times I$, onde a, b, c e d são os arcos mostrados na Figura 3.4 e $A = a \times I$, $B = b \times I$, $C = c \times I$ e $D = d \times I$. Do sistema de discos, construímos o grafo dual $\Gamma = \Gamma(\mathcal{E})$, cujas arestas denominamos a, b, c e d e consideramos a respectiva estrutura de alças $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{E})$. A Figura 4.19, à esquerda, mostra o grafo Γ em H_0 , onde $H_0 = S \times I$ deve ser visto “de cima”, e devemos pensar que $\Gamma \subseteq S \times \{1/2\}$.

Vamos, agora, escolher um representante na classe de isotopia de f e estudar a laminação associada. Como de costume, para visualizar H_0 em H_1 consideramos uma vizinhança de $f^{-1}(\Gamma)$ em H_0 . Temos que $f^{-1} = T_{\Delta}^{-1} \circ (\hat{\varphi})^{-1}$ e a Figura 4.19 à direita mostra $\Gamma' = (\hat{\varphi})^{-1}(\Gamma)$. Precisamos, então, achar $T_{\Delta}^{-1}(\Gamma')$. A Figura 4.20 – à direita – mostra essa imagem, determinando como devemos ver Γ em $H_1 = f(H_0)$.

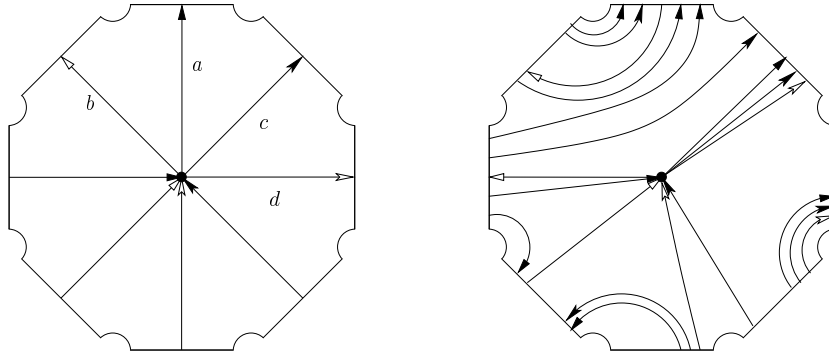


Figura 4.19: O grafo $\Gamma \subseteq H_0$ e $(\hat{\varphi})^{-1}(\Gamma) \subseteq H_0$.

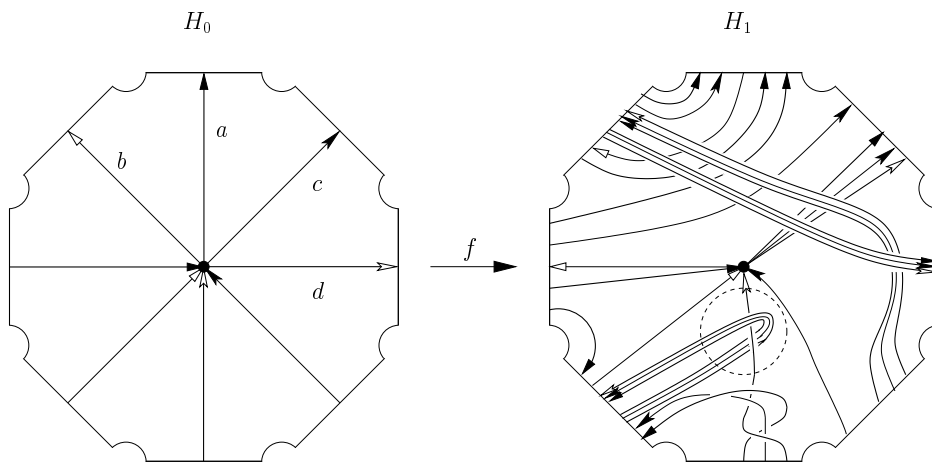


Figura 4.20: O grafo $\Gamma \subseteq H_0$ e $\Gamma \subseteq H_1$.

Queremos testar a propriedade de incompressibilidade de $\Lambda(\mathcal{A})$. Como fizemos na Seção 4.1, procuraremos por caminhos regressores livres. Pela figura, já podemos ver que $\bar{h}$ apresenta caminhos regressores. Sendo cuidadosos temos que $\bar{h}$ é dado por:

$$\begin{aligned} a &\mapsto cbb^{-1}db^{-1}aab^{-1}a \\ b &\mapsto a^{-1}b \\ c &\mapsto cbb^{-1}db^{-1}ac \\ d &\mapsto cbb^{-1}d, \end{aligned} \tag{4-1}$$

de fato apresentando regressões.

Não é difícil ver que as três regressões acima são obstruídas, o que mostraremos para $\bar{h}(a)$ a seguir.

Começamos denominando por $\hat{V}$ a 0-alça de H_1 e por $\alpha \subseteq a$ a componente de $a \cap \hat{V}$ que regride. Denominamos por B^{-1} o último (segundo a orientação da alça) disco dual à 1-alça b de H_1 . Tal disco está em

$\partial\hat{V}$ (diremos que B^{-1} é a *direção de* b^{-1}). É bem claro que $\partial\alpha \subseteq B^{-1}$. Queremos ver que qualquer candidato a monógono para α intercepta Γ . Mais precisamente, queremos mostrar que se $(\Delta, \delta_0, \delta_1)$ for um meio-disco com $\delta_0 = \alpha$ e $\delta_1 \subseteq B^{-1}$ então $\mathring{\Delta} \cap \Gamma \neq \emptyset$, falhando em ser monógono. Isso é equivalente a se mostrar que, para qualquer caminho $\delta_1 \subseteq (B^{-1} - \Gamma)$, o laço $\alpha\delta_1$ não é trivial em $(\hat{V} - \Gamma) \cup \alpha$ – escolhendo como ponto base um ponto de $\partial\alpha$.

Consideremos as direções D^{-1} e C de $\hat{V}$. Pela figura é bem claro que existe um arco $\gamma \subseteq \Gamma$ saindo de D^{-1} e indo para C , passando pelo final da aresta d e seguindo pelo começo da aresta c . Vamos considerar $\hat{V}' = \hat{V} - \gamma$ e mostrar que, para qualquer caminho $\delta_1 \subseteq B^{-1}$, o laço $\alpha\delta_1$ não é trivial em $\pi_1(V')$. É bem claro que tal conclusão implicará a inexistência de monógonos.

De fato, $\hat{V}'$ retrai para $\partial\hat{V} - N(\gamma)$, que é uma esfera menos 2 discos portanto $\pi_1(\hat{V}')$ é o grupo livre em 1 gerador. Fixamos um caminho $\delta_1 \subseteq B^{-1}$ e consideramos $\alpha\delta_1 \in \pi_1(V')$, ficando claro que $\alpha\delta_1$ não é trivial.

Isso completa a demonstração de que a aresta $a \subseteq \Gamma$ em H_1 regride mas é bloqueada. É bem claro que o mesmo argumento se aplica também à c e d .

Tal argumento mostra que não há monógonos em $H_1 - H_0$. Mostramos que a existência de nulógonos implica a existência de monógonos (Lema 4.9) mas o primeiro monógono pode, em princípio, ser mais alto que o primeiro nulógono (por exemplo, o primeiro nulógono poderia estar em H_1 enquanto o primeiro monógono poderia aparecer somente em H_2). Isso somente pode acontecer se, para algum n e algum vértice $v \in \Gamma$, todas as arestas saindo de v fossem para a mesma direção na respectiva 0-alça de H_n (ver Lemas 4.4 e 4.9). Esse fenômeno é fácil de ser verificado usando $\bar{h}^n$ e considerando somente a primeira letra de cada iterado de cada aresta orientada. Voltando ao nosso exemplo:

	$\bar{h}$		$\bar{h}$
a	$\mapsto c \dots$	$\mapsto$	$c \dots$
a^{-1}	$\mapsto a^{-1} \dots$	$\mapsto$	$a^{-1} \dots$
b	$\mapsto a^{-1} \dots$	$\mapsto$	$a^{-1} \dots$
b^{-1}	$\mapsto b^{-1} \dots$	$\mapsto$	b^{-1}
c	$\mapsto c \dots$	$\mapsto$	$c \dots$
c^{-1}	$\mapsto c^{-1} \dots$	$\mapsto$	$c^{-1} \dots$
d	$\mapsto c \dots$	$\mapsto$	$c \dots$
d^{-1}	$\mapsto d^{-1} \dots$	$\mapsto$	$d^{-1} \dots$

que claramente estabiliza, mostrando que, independente de n , há arestas de Γ indo para direções distintas da 0-alça de H_n .

Vemos então que, nesse exemplo, haverá um nulógono em H_n se e somente se houver monógono em H_n . Já vimos que não há monógono em H_1 . Se houver algum em H o Teorema 4.15 dá um limite para a altura do primeiro: a superfície T do enunciado é, nesse exemplo, uma esfera menos 8 discos, portanto sua complexidade é dada por $\mathcal{C}(T) = 6$ donde o primeiro monógono deve aparecer em H_8 . Nesse exemplo vamos conseguir mostrar que a respectiva laminação goza da propriedade de incompressibilidade sem precisar considerar tantos passos. Notamos, porém, que esse limite é completamente tratável.

Voltamos a considerar a aresta a e o arco $\alpha \subseteq a$ tal que $\partial\alpha \subseteq B^{-1}$, onde B^{-1} é a direção do regresso na 0-alça de H_1 . Para cada H_n , o arco α se estende a um arco $\alpha_n \supseteq \alpha$ que regressa em H_n . Abusando da notação, denominaremos todos os tais arcos por α . Similarmente, o caminho $\gamma \subseteq \Gamma$ passando pelo final de d e início de c que usamos acima denotará o respectivo arco para todo n .

Sabemos que α é bloqueado em H_1 , porém poderia ser livre em algum $n > 1$. Para ver que isso não acontece, notamos pelo estudo das direções, feito acima (ver 4.34), que as direções de cada uma das arestas b^{-1} , d^{-1} e c , em qualquer H_n , são distintas. Assim, o mesmo argumento que demos para $n = 1$ se aplica a qualquer n , mostrando que α é bloqueado em qualquer H_n . Isso dá conta de todos os regressos obtidos de bb^{-1} em $\bar{h}(a)$ por iteração:

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{h} & & & \bar{h} & & & \bar{h} \\ a & \longmapsto & c\mathbf{b}\mathbf{b}^{-1}db^{-1}aab^{-1}a & \longmapsto & \dots bb^{-1} \dots & \longmapsto & \dots \end{array}$$

Há um outro tipo de regresso associado ao mesmo α que pode aparecer quando consideramos potências arbitrárias de $\bar{h}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{h} & & & \bar{h} & & & \bar{h} \\ a & \longmapsto & cbb^{-1}db^{-1}\mathbf{a}ab^{-1}a & \longmapsto & \dots c\mathbf{b}\mathbf{b}^{-1}db^{-1}aab^{-1}a \dots & \longmapsto & \dots \end{array}$$

Tais arcos regressores podem ser visto da seguinte forma: seja α_0 a vizinhança fibrada de α na 1-alça a de H_0 . Então $\alpha_1 = f(\alpha_0)$ é parte de uma 1-alça de H_1 cujos discos duais extremos estão ambos na mesma direção da 0-alça de H_2 . Segue, portanto, que qualquer arco β de $\Gamma \cap \alpha_1$ é regressor. O arco associado à regressão bb^{-1} em $\bar{h}^2(a)$ que vemos acima é de tal tipo.

Essecialmente o mesmo argumento que já usamos anteriormente funciona para mostrar que tais arcos são, também, bloqueados. Consideremos o

mesmo arco $\gamma \subseteq \Gamma$ passando pelo final da aresta d e início da aresta c e seja γ_0 a vizinhança de γ obtida tomando suas vizinhanças fibradas nas arestas c, d e as unindo com a 0-alça de H_0 . Segue que γ_0 só intercepta as direções D^{-1} e C da 0-alça de H_0 donde, em H_1 , $\gamma_1 = f(\gamma_0)$ só intercepta as direções D^{-1} e C da 0-alça de H_1 . Mas $\gamma \subseteq \gamma_1$ e, pelo estudo das direções, γ vai da direção D^{-1} de H_1 à C . Podemos dar à γ_1 uma estrutura de vizinhança fibrada de γ por discos. Voltamos a considerar o arco regressor $\beta \subseteq \Gamma \cap \alpha_1$. Essencialmente o mesmo argumento que demos anteriormente mostra que um monógono Δ para β deve interceptar γ_1 . Se Δ não interceptasse γ então poderíamos usar uma dilatação radial ψ em uma vizinhança de $\gamma_1 - \gamma$ tal que $\psi(\gamma_1 - \gamma) \cap \gamma_1 = \emptyset$ para construir um meio-disco $\psi(\Delta)$ que não interceptaria γ_1 . Segue que $\Delta \cap \gamma \neq \emptyset$ donde β é bloqueado.

Os argumentos dados acima podem ser imediatamente generalizados para mostrar que o mesmo arco γ bloqueia todos os arcos regressores obtidos de α das duas formas descritas acima. É fácil ver também que os mesmos argumentos se aplicam não somente à a mas também à c e à d .

Para finalizar a prova de que a laminação $\Lambda(\mathcal{A})$ associada à essa estrutura goza da propriedade de incompressibilidade verificamos que todas as regressões são dos tipos discutidos acima e, portanto, bloqueadas. Consideramos então todos os pares de letras que podem ser obtidos de a, b, c e d por iteração de $\bar{h}$:

$$\begin{array}{llll}
 cb & \longmapsto & \dots ca^{-1} \dots & \longmapsto & \dots ca^{-1} \dots \\
 bb^{-1} & \longmapsto & \dots bb^{-1} \dots & \longmapsto & \dots \\
 b^{-1}d & \longmapsto & \dots ac \dots & \longmapsto & \dots ac \dots \\
 db^{-1} & \longmapsto & \dots db^{-1} \dots & \longmapsto & \dots \\
 b^{-1}a & \longmapsto & \dots ac \dots & \longmapsto & \dots ac \dots \\
 aa & \longmapsto & \dots ac \dots & \longmapsto & \dots ac \dots \\
 ab^{-1} & \longmapsto & \dots ab^{-1} \dots & \longmapsto & \dots
 \end{array}$$

Observando que os pares $a^{-1}b = (b^{-1}a)^{-1}$ e ac estão representados acima vemos que as únicas regressões que aparecem são dos tipos que já analisamos e, portanto, bloqueadas. Concluimos então que a laminação $\Lambda(\mathcal{A})$ associada tem a propriedade de incompressibilidade.

Notamos que a prova que demos de que Λ goza da propriedade de incompressibilidade foi direta, ao contrário dos exemplos anteriores onde a conclusão seguia do fato de que $\lambda(\mathcal{A})$ era igual à $\lambda(f_*^{-1})$ e, portanto, minimal (Proposição 3.9). Nesse exemplo temos $\lambda(f_*^{-1}) < \lambda(\mathcal{A})$: em π_1 devemos realizar os cancelamentos que são bloqueados. Abaixo desenvolvemos essa

computação.

Voltamos à regra que define $\bar{h}$ dada em 4-1 e construímos a matriz de incidência $M(\mathcal{A})$:

$$M(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

cujo autovalor é, com precisão de até 3 casas decimais,

$$\lambda(\mathcal{A}) = 4.987.$$

Já para $f_*^{-1}: \pi_1(H) \rightarrow \pi_1(H)$ temos a seguinte matriz de incidência (nos geradores dados pelas arestas a, b, c, d de Γ):

$$M(f_*^{-1}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

cujo autovalor, também dado com precisão de 3 casas, é:

$$\lambda(f_*^{-1}) = 4.390.$$

Dado que $\lambda(f_*^{-1}) < \lambda(\mathcal{A})$ faz sentido perguntar se $\lambda(\mathcal{A})$ é o autovalor minimal na classe de f . Veremos, mais adiante no Capítulo 5, que a resposta é não.