

## 4

### Invariância discreta de escala

#### 4.1

##### Introdução

Sabe-se da *física de transição de fases* [82,83] que, uma substância no seu *ponto crítico*, apresenta internamente estrutura invariante por escala – fractal –, uma mesma estrutura podendo ser observada em diferentes escalas de observação. Tal sucede, por exemplo, nas transições do tipo metal paramagnético – metal ferromagnético.

Nota comum a todas estas mudanças qualitativas é que algum parâmetro externo (intensidade do campo magnético, no caso de metais) necessita ser convenientemente ajustado, de modo a se obter a resposta desejada.

Entretanto, conforme já se assinalou nos capítulos anteriores, determinados sistemas físicos fora do equilíbrio são levados espontaneamente a uma evolução temporal na fronteira entre ordem e caos, apresentando comportamento que em muito lembra o das transições de fase em equilíbrio acima referidas. Contudo, desta feita não há a obrigatoriedade de se “*sintonizar*” um dado parâmetro, já que o próprio sistema se encarrega de se colocar sempre no ponto crítico. Trata-se, portanto, de uma estruturação fractal gerada mais bem *dinâmica* que estaticamente, típica de sistemas que desenvolvem correlações espaciais e temporais de longo alcance, tais como aqueles descritos pela entropia de Tsallis (3.23).

Recentemente, no entanto, foram catalogadas outras características comuns a estes sistemas fora do equilíbrio. Observou-se, por exemplo, especialmente no mercado de bolsas de valores [84] e nos processos que conduzem à ruptura de materiais [85], que *estruturas hierárquicas* são espontaneamente formadas, a partir de meios inicialmente desprovidos de quaisquer padrões [86]. Assim, no decorrer de sua evolução temporal, no processo físico que levava à substituição de

um tipo de simetria (invariância translacional num meio euclidiano) por outro (invariância por dilatação), tais sistemas apresentavam a característica invariância de escala de uma forma nova, *discreta*, diferentemente da que ocorria com alguns sistemas SOC, que a tinham de forma *contínua*.

Este capítulo debruça-se sobre estes assuntos. O leitor será apresentado à riqueza e simplicidade conceituais da chamada invariância discreta de escala, e às amplas possibilidades de aplicações práticas por ela proporcionada.

Analisar-se-ão, igualmente, as condições necessárias ao seu aparecimento, bem como a sua aplicação ao estudo de processos multiplicativos, dentre os quais o regido pela função binomial multifractal.

## 4.2 Invariâncias de escala contínua e discreta, e sua formulação matemática

Especificamente, o conceito de *invariância contínua de escala* [87] está relacionado à reprodução de um mesmo padrão em escalas temporal e/ou espacial distintas. Portanto, se uma dada função  $f$  (ou propriedade observável do sistema) é invariante sob a transformação (*contínua*) de escala  $x \rightarrow x' = \lambda x$ , então haverá um número  $\mu(\lambda)$  tal que

$$f(x) = \mu f(x') = \mu f(\lambda x) \quad (4.1)$$

A equação acima define uma função *homogênea*, e aparece com frequência na teoria das transições de fase. Sua solução, como se viu no capítulo 1, é dada por

$$f(x) = Cx^\alpha \quad (4.2)$$

ou seja, é uma lei de potência.

Logo, segundo (4.1)

$$Cx^\alpha = \mu C \lambda^\alpha x^\alpha \quad (4.3)$$

e, conseqüentemente,

$$\lambda^\alpha \mu = 1 \quad (4.4)$$

com

$$\alpha = -\frac{\ln \mu}{\ln \lambda} \quad (4.5)$$

Leis de potência são características de fenômenos invariantes por escala, uma vez que, de (4.1) e (4.4), a razão

$$\frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^\alpha \quad (4.6)$$

*independe* de  $x$ , ou seja, o valor de uma dada propriedade observável em duas escalas distintas é função unicamente da razão desta propriedade nestas duas escalas. Esta é uma característica fundamental, que relaciona leis de potência, invariância de escala, auto-semelhança e criticalidade (i.é., ausência de uma escala característica).

Ressalte-se que os resultados anteriores não sofrerão qualquer modificação se o argumento da função em (4.2) tomar a forma  $(x_c - x)$  ou  $(x - x_c)$ , onde  $x_c$  é um dado valor crítico.

Por outro lado, a *invariância discreta de escala* [88] é uma forma *fraca* (mais *restritiva*) de invariância, em que o sistema (ou um observável do sistema) é invariante *apenas* para valores *específicos* de  $\lambda$  (ou  $\mu$ ), onde  $\lambda$  é uma *razão de escala fundamental*. Assim, a transformação *discreta* de escala  $x \rightarrow x' = \lambda_n x$  só fornecerá a reprodução exata de  $f(x)$  para valores específicos de  $\lambda_n$ .

A característica principal desta forma de invariância reside, como se verá a seguir, na presença de leis de potência com *expoentes  $\alpha$  complexos*, o que leva a *correções de escala log-periódicas*.

Observando-se que (4.4) também pode ser escrita como

$$\lambda^\alpha \mu = \exp(2\pi i)$$

ou, ainda,

$$\lambda^\alpha \mu = \exp(2\pi i n) \quad (4.7)$$

onde  $i$  é a unidade imaginária,  $\exp$  é a função exponencial e  $n \in \mathbb{I}$ , a expressão (4.5) pode ser posta sob a seguinte forma mais geral

$$\alpha_n = -\frac{\ln \mu}{\ln \lambda} + \frac{2\pi n}{\ln \lambda} i \quad (4.8)$$

Assim, a restrição imposta pela invariância discreta acarreta, necessariamente, o aparecimento do termo imaginário no expoente da função.

Ademais, (4.8) restitui (4.4) para  $n = 0$ , sugerindo que a invariância discreta de escala é uma *correção* no comportamento de escala fundamental (4.2).

Então, levando-se (4.8) em (4.2), e alterando o argumento da função, como acima se observou, vem que

$$f(x_c - x) = C(x_c - x)^{\frac{\ln \mu}{\ln \lambda}} (x_c - x)^{\frac{2\pi n}{\ln \lambda} i} \quad (4.9)$$

ou

$$f(x_c - x) = C(x_c - x)^{\frac{\ln \mu}{\ln \lambda}} e^{\frac{2\pi n}{\ln \lambda} \ln(x_c - x) i} \quad (4.10)$$

ou, ainda,

$$f(x_c - x) = C(x_c - x)^{\frac{\ln \mu}{\ln \lambda}} e^{\frac{2\pi n}{\ln \lambda} \ln(x_c - x) i} \quad (4.11)$$

Considerando-se que a expressão acima tomará diferentes valores quantos sejam os de  $n$  – ela é, na verdade, um somatório -, (4.11) pode ser reescrita como

$$f(x_c - x) = C(x_c - x)^{-\frac{\ln \mu}{\ln \lambda}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2\pi n}{\ln \lambda} \ln(x_c - x)} \quad (4.12)$$

Observando-se que o somatório anterior pode ser desenvolvido em *série de Fourier* de uma função *par*, e aplicando-se a *fórmula de Euler* ao termo exponencial, tem-se que

$$f(x_c - x) = C(x_c - x)^{-\frac{\ln \mu}{\ln \lambda}} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\ln \lambda} \ln(x_c - x)\right) \quad (4.13)$$

ou, separando o termo  $n = 0$  do restante do somatório,

$$f(x_c - x) = C(x_c - x)^{-\frac{\ln \mu}{\ln \lambda}} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\ln \lambda} \ln(x_c - x)\right) \right] \quad (4.14)$$

Efetuada-se a multiplicação e restringindo-se a  $n = 1$  o desenvolvimento subsequente, vem que

$$f(x_c - x) = B'(x_c - x)^{-\frac{\ln \mu}{\ln \lambda}} \left[ 1 + C' \cos\left(\frac{2\pi}{\ln \lambda} \ln(x_c - x)\right) \right] \quad (4.15)$$

Reescrevendo, em definitivo, a expressão anterior, tem-se que

$$f(x_c - x) = B'(x_c - x)^\alpha [1 + C' \cos(\omega \ln(x_c - x) + \phi)] \quad (4.16)$$

onde  $\alpha = -\frac{\ln \mu}{\ln \lambda}$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{\ln \lambda}$ ,  $\phi$  é uma fase arbitrária, e  $B'$  e  $C'$  são constantes.

A expressão acima tem sido empregada numa forma ainda mais geral, qual seja

$$f(x_c - x) = A + B(x_c - x)^\alpha [1 + C \cos(\omega \ln(x_c - x) + \phi)] \quad (4.17)$$

em que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes.

Como (4.17) é uma correção do comportamento em lei de potência, (4.2) poderá ser colocada da seguinte forma

$$f(x_c - x) = A_1 + B_1(x_c - x)^{\alpha_1} \quad (4.18)$$

sendo  $A_1$  e  $B_1$  constantes.

É importante, neste ponto, assinalar as conseqüências práticas decorrentes da utilização das expressões (4.17) e (4.18).

### 4.3

#### Aspectos preditivos das leis de potência pura e corrigida log-periodicamente

No que concerne ao *aspecto preditivo*, a utilização das expressões (4.17) e (4.18), com  $x$  sendo substituído pelo tempo  $t$ , requer algumas considerações.

Ambas as expressões apresentam um número elevado de parâmetros de ajuste – 4 (quatro) para a expressão (4.18), e 7 (sete), para a (4.17) -, o que, indubitavelmente, põe sob suspeita quaisquer considerações decorrentes de sua aplicação. Entretanto, estudos efetuados sobre a confiabilidade estatística [89] indicam que ambas as proposições produzem resultados verazes do ponto de vista científico, com vantagens para a expressão (4.17).

Mais pormenorizadamente, a aplicabilidade de (4.18) se restringe a situações em que o sistema, ou se situa rigorosamente no ponto crítico (de ruptura ou mudança qualitativa do sistema), ou muitíssimo próximo dele, razão pela qual seu emprego em previsões sobre dados experimentais tem deixado muito a desejar, não sendo, de todo, satisfatório.

Além disso, os ajustes dos dados experimentais nela baseados podem, principalmente na presença de *ruído*, levar a uma completa degeneração do comportamento em lei de potência pura.

Como o desejado, na verdade, é a previsão de bifurcações antes de sua ocorrência, bem como uma certa robustez no próprio procedimento de ajuste numérico, a expressão (4.18) acha-se, desta forma, limitada em sua faixa de aplicabilidade. No entanto, ela tem servido de base para métodos de previsão de terremotos propostos por Buffe e Varnes [90,91], e também por Voight

[92,93,94], este último no âmbito da reologia de materiais submetidos a creep terciário (i.é., não atenuado) [95].

Por seu turno, a expressão (4.17) é, como já se observou, uma correção de (4.18), em que esta última é afetada por parâmetros adicionais, possibilitando, desta forma, análises e considerações em regiões afastadas – mas não muito! - do ponto crítico. Neste sentido, ela é capaz de restringir sobremaneira, graças ao seu termo oscilatório, o comportamento futuro de um dado parâmetro, além de promover ajustes bastante robustos, quando em presença de dados experimentais portadores de ruídos.

A expressão log-periódica tem sido utilizada no estudo e previsão de comportamentos pré-bifurcações (*foreshocks*) e pós-bifurcações (*aftershocks*), modificando-se, para tanto, o seu argumento em  $|t-t_c|$  (módulo de  $(t-t)$ ), de modo a se permitir a aproximação do ponto crítico, tanto superior, como inferiormente.

Com este aspecto, (4.17) tem sido empregada amplamente - e, com muito sucesso -, especialmente na previsão de terremotos, rupturas em materiais heterogêneos e crashes em mercados financeiros.

O leitor poderá verificar, no decorrer deste trabalho, a capacidade preditiva de (4.17) no que concerne aos *processos multiplicativos (em cascata)* [14,96,97], que à continuação serão examinados, e, especificamente, à ruptura em materiais heterogêneos.

Valores típicos dos parâmetros que afetam a expressão (3.17) têm sido reportados na literatura, em particular para situações que envolvem previsão de crashes financeiros [98] e rupturas em materiais heterogêneos [99].

Assim, o expoente  $\alpha$  costuma tomar valores entre 0 e 1, assinalando-se, contudo, que, para expoentes muito pequenos, a aceleração em direção à singularidade, como se verá no tópico 4.6, ao se analisar a função binomial multifractal, faz-se repentinamente, já nas imediações do ponto crítico. Para valores de  $\alpha$  próximos da unidade, a aceleração deixa de existir por completo.

O parâmetro de escala fundamental  $\lambda$  costuma situar-se entre 1.5 e 3.5, ao passo que  $\omega$ , entre 5 e 15, sendo 7 um valor típico. Porém, caso este último parâmetro adquira magnitudes muito pequenas, oscilações log-periódicas serão em número extremamente reduzido, enquanto que, para valores muito elevados de

$\omega$ , numerosas oscilações estarão presentes, a expressão teórica (4.17) ajustando o ruído dos dados experimentais.

É importante assinalar quais parâmetros costumam ocupar o lugar da função  $f(x_c-x)$ , no que se refere à previsão de terremotos e rupturas em materiais heterogêneos. A literatura ([88,100], dentre outros) tem indicado a utilização de parâmetros que permitam retratar, ou o grau de degradação continuada do sistema, ou a proximidade de bifurcações.

Mais especificamente, o parâmetro acumulado  $\sum_{i=1}^{N(t)} E_i^\zeta$ , em que  $E_i$  é a energia liberada na  $i$ -ésima ruptura (ou sismo) e  $0 \leq \zeta \leq 1$ , tem sido reiteradamente sugerido. Os autores também enfatizam que o aludido parâmetro, utilizado com valores de  $\zeta$  iguais a 0 e 1, tende a conferir maior peso, respectivamente, aos eventos de pequena e de grande magnitude.

Quanto aos valores intermediários, contudo, o parâmetro atua como uma espécie de filtro, alterando a contribuição relativa da magnitude dos eventos. Em especial,  $\zeta = 2/3$  parece ser o valor que pondera de maneira equânime os dados experimentais.

Em função do que acima se assinalou, diferentes autores – Ben-Zion [100], Bowman [89], Jaumé [32], entre outros - têm proposto restrições no que concerne ao valor de  $\zeta$ . Neste sentido, a chamada *deformação de Benioff* ( $\zeta = 1/2$ ) e o *momento sísmico* ( $\zeta = 1$ ) têm sido os mais amplamente utilizados no ajuste de curvas pelas expressões (4.17) e (4.18).

Apesar das restrições, cabe ressaltar que o comportamento ditado por (4.18) tem sido proposto na análise de rupturas na engenharia civil, e, em particular, na geotecnia. Fukuzono [101,102] tem aconselhado a sua utilização na previsão de ruínas em encostas naturais, respaldado em que, de fato, evidências de campo [103] têm sugerido fortemente haver uma analogia entre os precursores de fenômenos crustais (terremotos) e certos tipos de instabilidades em taludes naturais.

O referido pesquisador parte da equação diferencial proposta por Voight [93], ou seja

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A \left( \frac{dx}{dt} \right)^m \quad (4.19)$$

onde  $x$  é o deslocamento superficial do talude,  $t$  é o tempo, e  $A$  e  $m$  são parâmetros experimentais.

Dependendo do valor do expoente  $m$ , a velocidade  $v$  (i.é., a integração de (4.19) uma única vez) pode adquirir 3 (três) formas básicas possíveis:

- Lei de potência em  $t$ , para  $0 < m < 1$ ;
- Lei exponencial em  $t$ , para  $m = 1$ ; e
- Lei de potência em  $(t_c - t)$ , para  $m > 1$ .

Segundo os dados experimentais do pesquisador japonês,  $m$  é superior à unidade em cerca de 80% dos deslocamentos superficiais dos deslizamentos estudados, e igual a 2 em, aproximadamente, 50% destas medições.

No caso de se ter  $m > 1$ , a velocidade toma a forma

$$v = a(t_c - t)^n \quad (4.20)$$

em que

$$a = [A(m-1)]^{\frac{1}{1-m}} \quad (4.21)$$

e

$$n = \frac{1}{1-m} \quad (4.22)$$

Cabe observar que a equação (4.19) e a expressão da velocidade de deslizamento (4.20) são estruturalmente muito semelhantes às expressões (3.32) e (3.34), derivadas no escopo da função de sensibilidade da forma entrópica não-extensiva de Tsallis.

Compreende-se, também, pelas razões expostas anteriormente, que (4.19) seja imprópria para se captar os sistemáticos desvios log-periódicos acima referidos, razão pela qual uma rápida observação dos dados empíricos ajustados,

não só pelo pesquisador japonês, mas igualmente por outros pesquisadores [104], permita perceber claramente a presença das aludidas oscilações.

Seja como for, o leitor deverá ter sempre em mente que ambas as expressões (4.17) e (4.18) têm, em virtude da finitude da região crítica, seu limite de validade, havendo, por conseguinte, restrições (*cut-offs*) abaixo e acima de uma dada escala, seja espacial ou temporal.

Por fim, os exemplos referidos na literatura, que levam ao surgimento da invariância discreta de escala, são bastante variados, podendo-se mencionar [86,88]:

- Hierarquia geométrica (embutida, de partida, no modelo);
- Teoria dos números;
- Difusão em meios randômicos anisotrópicos com desordem congelada (*quenched*);
- Processos de crescimento tipo *DLA* (*Diffusion Limited Agregation*);
- Rupturas em materiais desordenados;
- Cascatas de bifurcação sub-harmônicas em rotas de transição para o caos tipo Feigenbaum;
- Sistemas com desordem congelada;
- Terremotos e crashes nos mercados financeiros internacionais;
- Turbulência;
- Colapso gravitacional e formação de buracos negros;
- Taxa de escape de atratores estáveis no espaço de fase de sistemas dinâmicos não-lineares;
- Singularidade do estado de tensão na extremidade de fraturas localizadas na interface de materiais distintos;
- Autofunções da transformada de Laplace;
- Invariância conforme de escala;
- Teorias de campo não-unitárias.

O leitor desejoso de informações mais aprofundadas a respeito da invariância discreta de escala e suas áreas de aplicação deverá consultar, entre outros, [88].

O próximo tópico analisará um exemplo numérico esclarecedor e muito didático de invariância discreta de escala, acompanhada de sua respectiva divergência em lei de potência, esta última decorada pelas oscilações log-periódicas.

#### 4.4

#### Um exemplo de processo em cascata: a função binomial multifractal

De modo a se ilustrar o que se entende por um processo em cascata, o exemplo a seguir trata da *função binomial multifractal*, também conhecida por fractal de *de Wijs*, em homenagem ao mineralogista holandês, que a utilizou, pela primeira vez, no estudo da distribuição de minerais em rochas [105,106].

Suponha que um dado volume de rocha de massa  $M$  contenha um certo tipo de mineral. Se a rocha for dividida, cada parte de seu volume conterà  $bM$  e  $(1 - b)M$  minerais. Seccionando-se cada metade anterior da rocha mais uma vez, cada uma das 4 (quatro) partes restantes de igual volume conterà, desta feita,  $b^2M$ ,  $b(1 - b)M$ ,  $(1 - b)bM$  e  $(1 - b)^2M$  minerais, respectivamente. Ou seja, a cada bi-seção da rocha, a massa de mineral está sendo dividida na razão  $b : 1 - b$ .

A figura 4.1 mostra, geometricamente, o esquema do fractal de de Wijs. Observe-se que, para  $b = 0.5$ , o mineral se distribui uniforme e equitativamente em cada etapa. Experimentalmente, no entanto, comprovou-se que  $b \neq 0.5$ , tomando valores praticamente constantes e independentes da etapa de divisão [106].

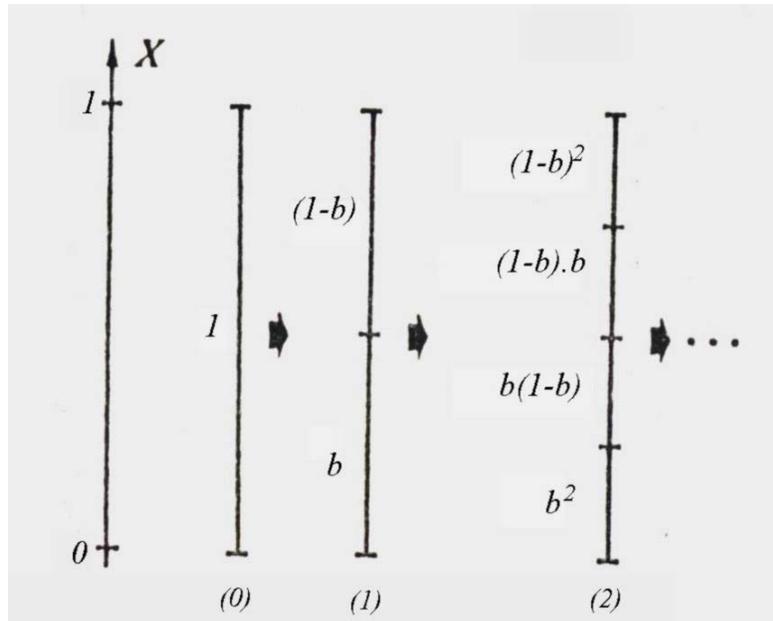


Figura 4.1 - Esquema multiplicativo da função binomial multifractal (fractal de *de Wijs*).

Os números que aparecem entre parênteses referem-se aos diferentes níveis hierárquicos em que a massa é distribuída [106].

O que, em suma, a função binomial modela é a transferência reiterada e sucessiva de uma dada grandeza por diferentes escalas de observação. Assim, esta função pode descrever, de forma bem simples, *processos multiplicativos em cascata diretos (top-down)* ou *inversos (bottom-up)*, caracterizados por *árvores fractais* [96] (figura 4.2), típicos de fenômenos relacionados à transferência de tensões e rupturas de materiais [107], modelagem de crashes no mercado de ações [108], modelagem de sistemas complexos na fisiologia e economia [109], dentre outros [110].

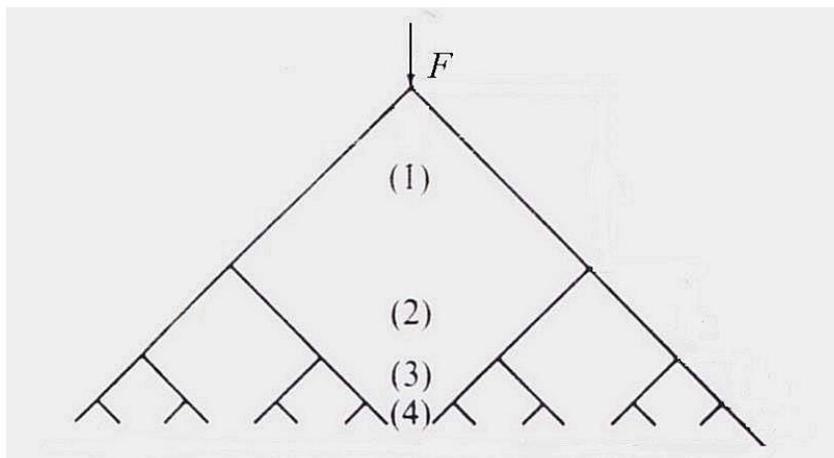


Figura 4.2 – Processo multiplicativo representado por uma árvore fractal. Como exemplo, a distribuição de uma força  $F$  por seus diversos níveis hierárquicos [96].

Este processo iterativo que, teoricamente, pode prosseguir até o infinito, é ilustrado abaixo, para um número muito grande de passos. Especificamente, os diferentes gráficos apresentam a aludida função sob as formas não-acumulada e acumulada, respectivamente.

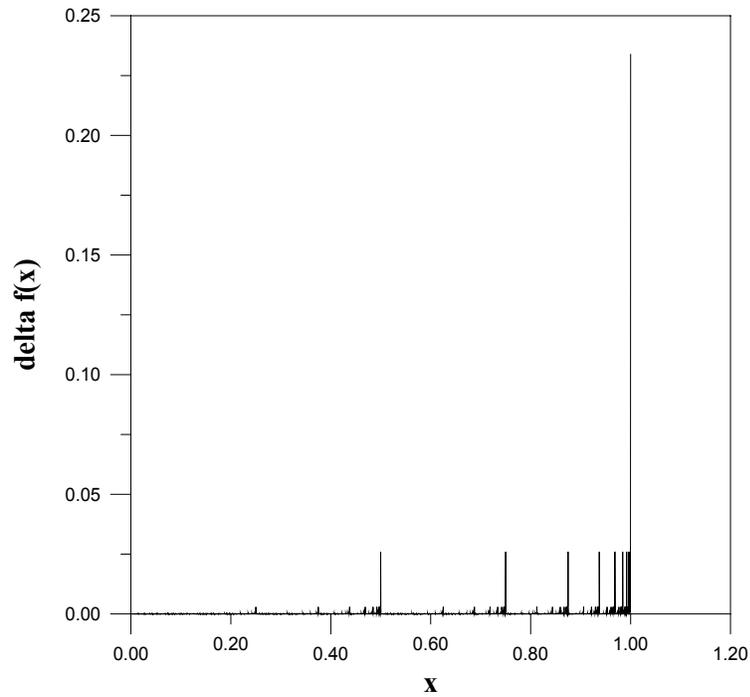


Figura 4.3 - Função binomial multifractal não-acumulada ( $b = 0.10$ ).

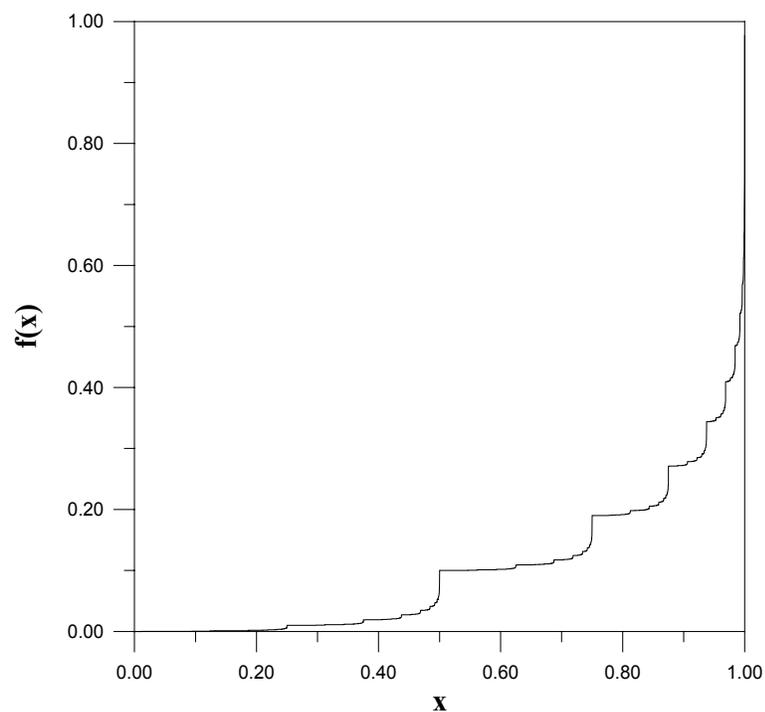


Figura 4.4 - Função binomial multifractal acumulada ( $b = 0.10$ ).

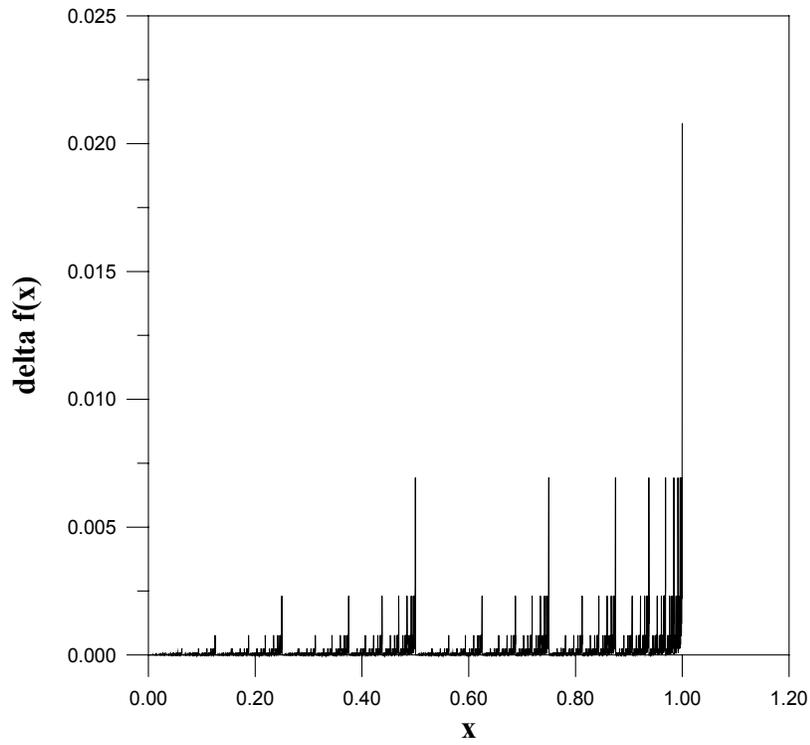


Figura 4.5 - Função binomial multifractal não-acumulada ( $b = 0.25$ ). Esta figura deve ser comparada com a figura 3.5.

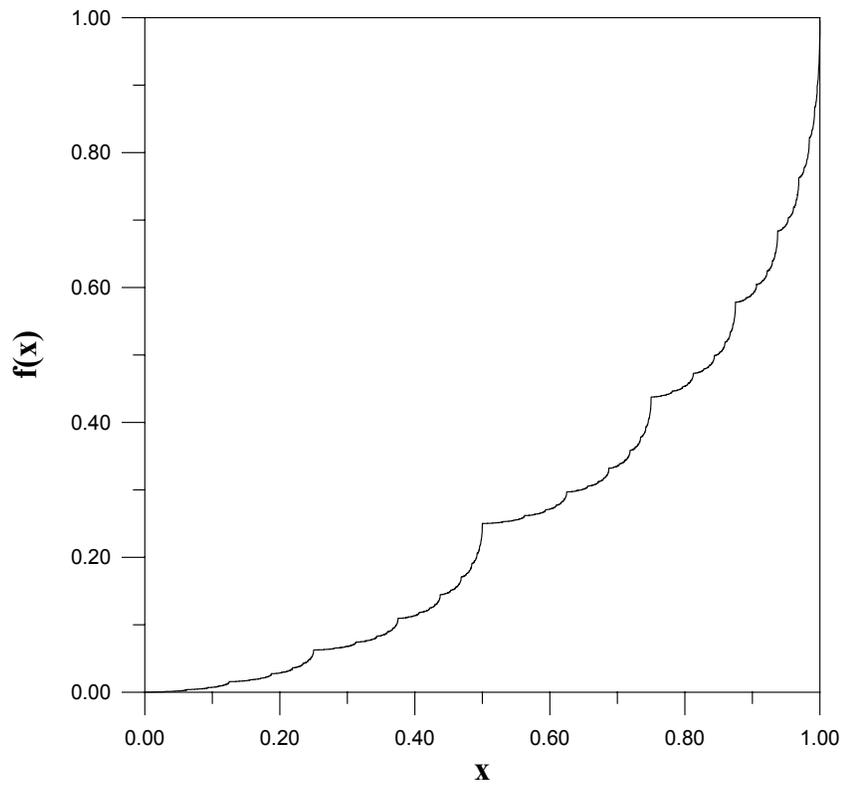


Figura 4.6 – Função binomial multifractal acumulada ( $b = 0.25$ ).

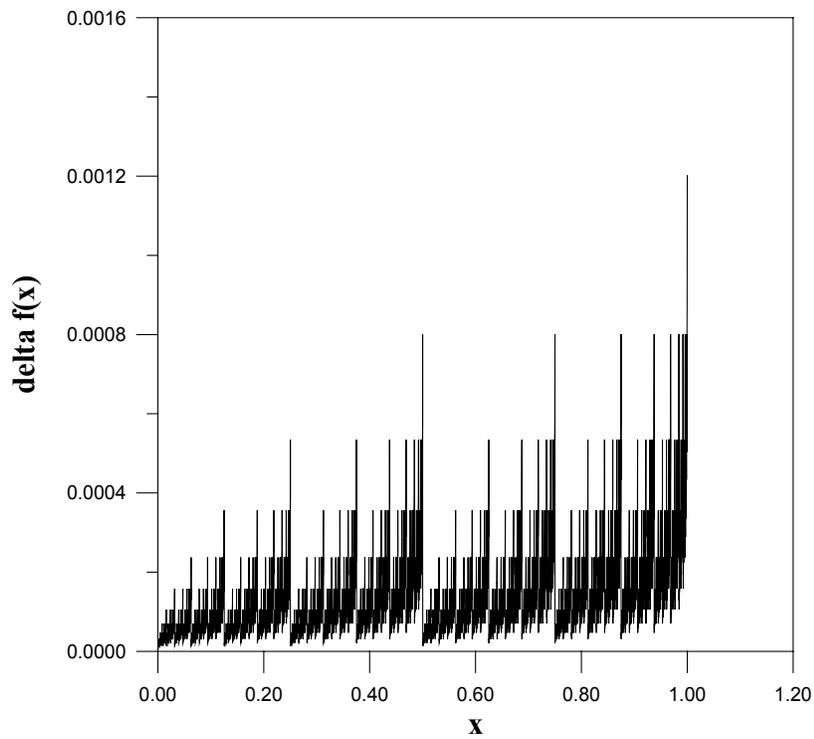


Figura 4.7 - Função binomial multifractal não-acumulada ( $b = 0.40$ ).

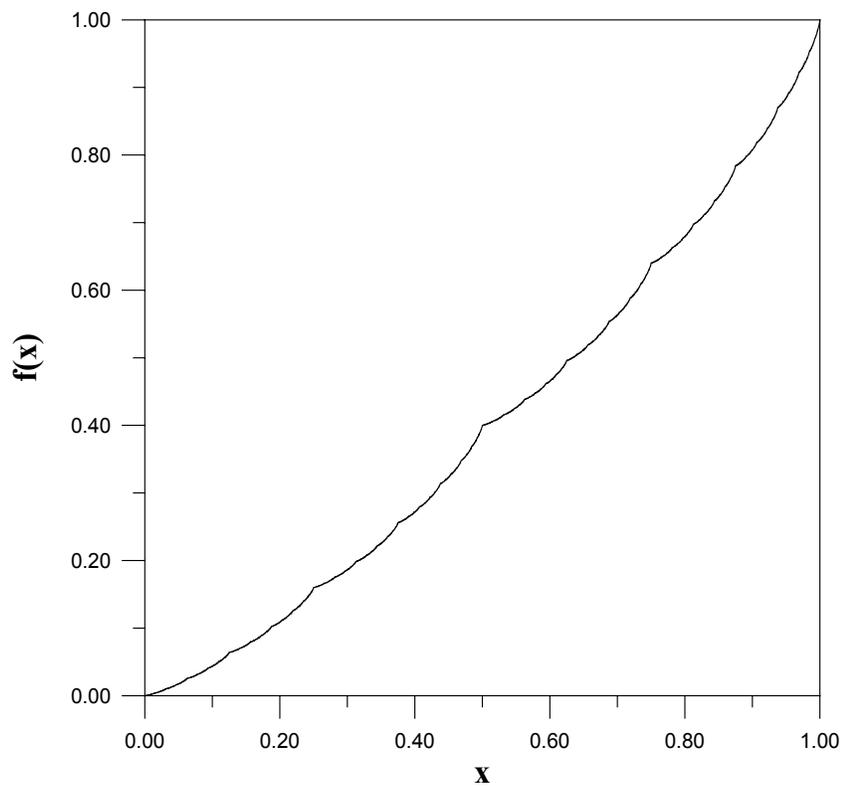


Figura 4.8 - Função binomial multifractal acumulada ( $b = 0.40$ ).

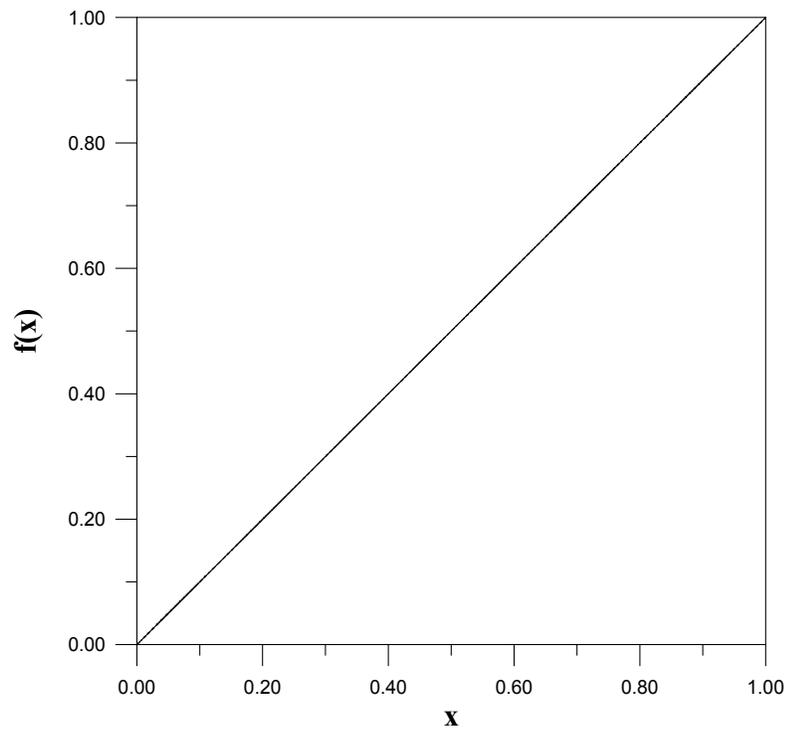


Figura 4.9 - Função binomial multifractal acumulada ( $b = 0.50$ ).

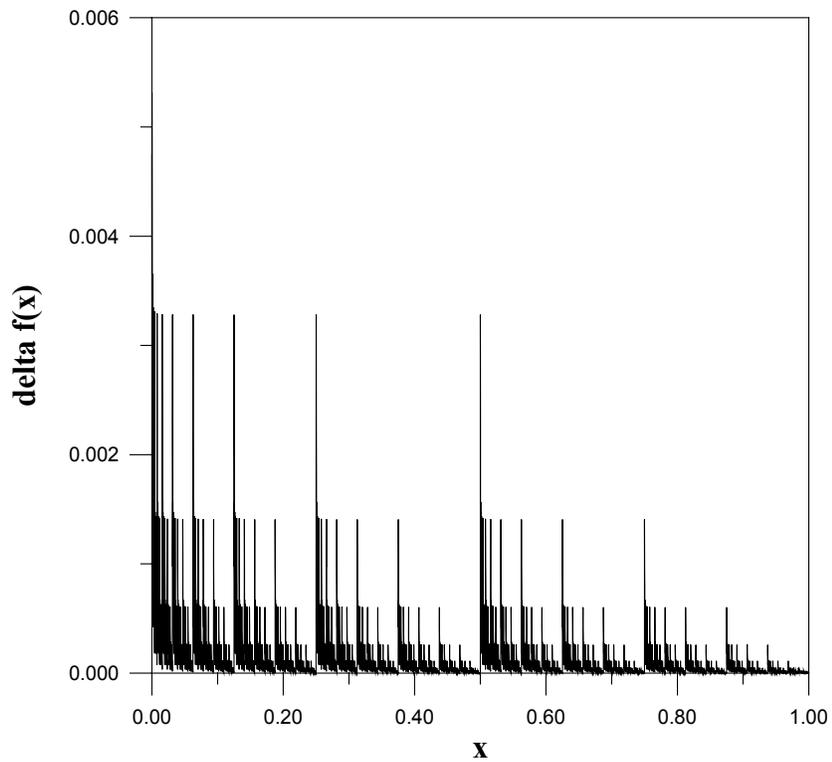


Figura 4.10 - Função binomial multifractal não-acumulada ( $b = 0.70$ ).

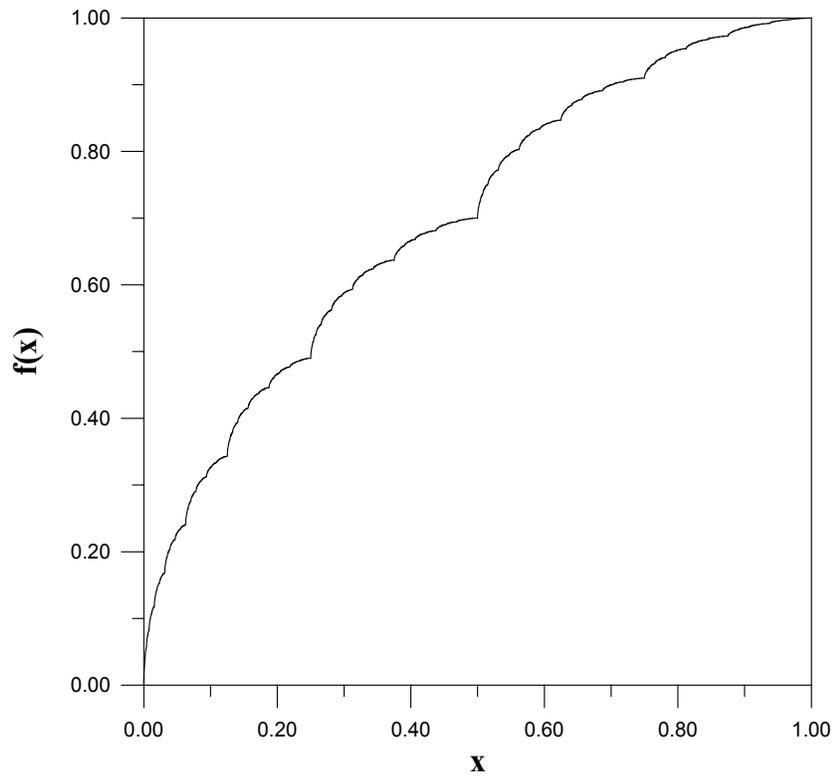


Figura 4.11 - Função binomial multifractal acumulada ( $b = 0.70$ ).

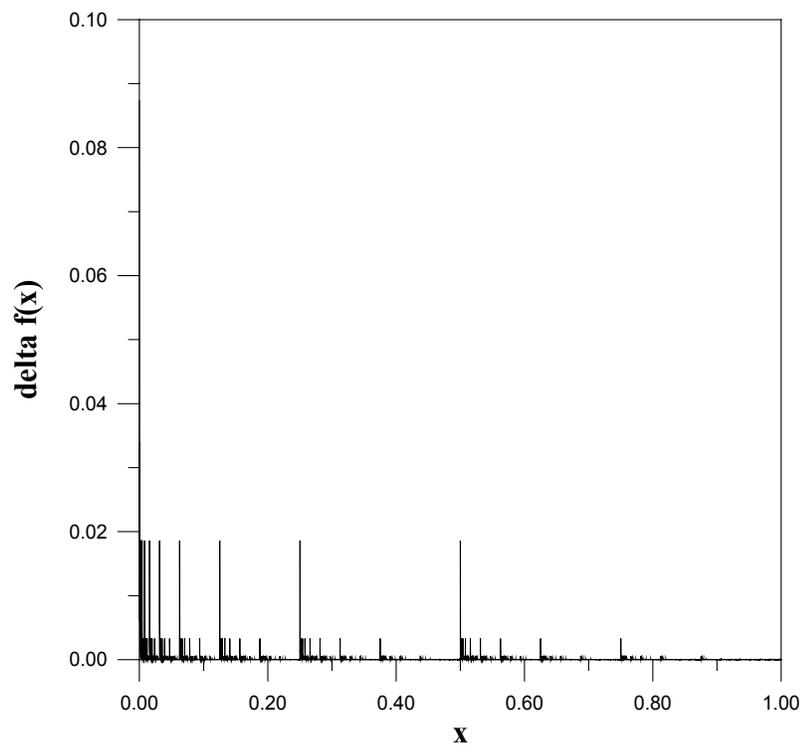


Figura 4.12 - Função binomial multifractal não-acumulada ( $b = 0.85$ ).

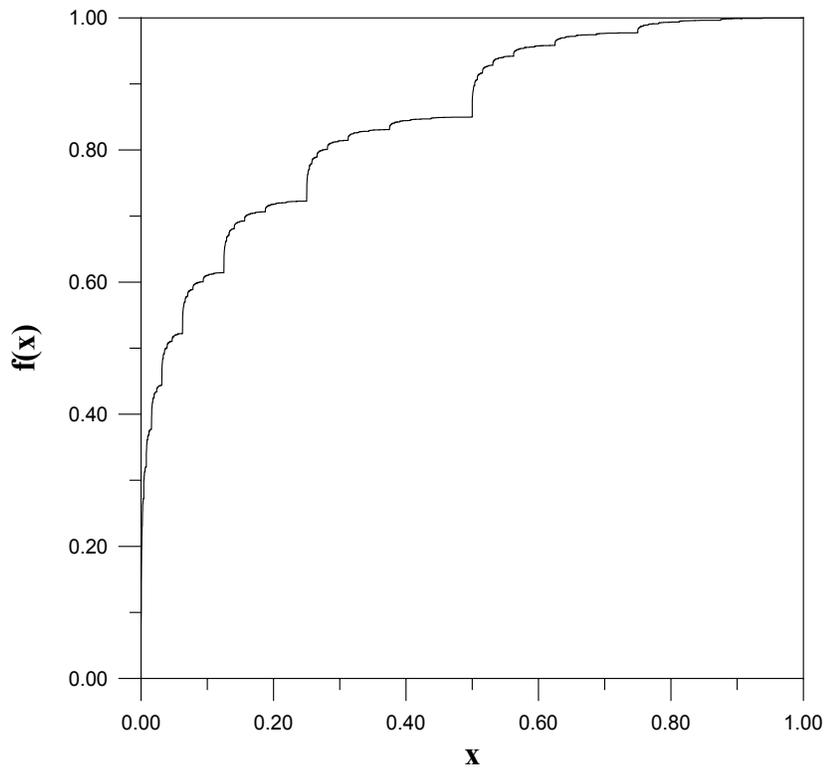


Figura 4.13 - Função binomial multifractal acumulada ( $b = 0.85$ ).

Observe-se que, à exceção da figura (4.9), as outras funções apresentadas acima são contínuas, porém não-diferenciáveis, razão pela qual não se pode definir para elas a operação de derivação nos moldes tradicionais, ou seja, a derivação com índices inteiros.

Ademais, cabe notar a extraordinária semelhança entre as figuras (4.5) e (3.5), ambas resultando de processos multiplicativos, pois, efetivamente, a figura (3.1), assim como a (4.2), *também é uma estrutura em árvore!!*

## 4.5 Processo em cascata e a entropia de Tsallis

É interessante notar ainda que a função binomial é exemplo de um fractal não-homogêneo ou *multifractal*, só passível de ser caracterizado integralmente por um número *infinito* de dimensões fractais  $D_q$ , ou pelo seu *espectro*  $f(\alpha)$  [87].

Ocorre que, para o fractal de de Wijs,  $D_q$ ,  $f(\alpha)$  e  $\alpha$  podem ser calculados exatamente, por intermédio das seguintes expressões [106]:

$$D_q = -\frac{1}{q-1} \log_2 [b^q + (1-b)^q] \quad (4.23)$$

$$\alpha = -\frac{b^q \log_2 b + (1-b)^q \log_2 (1-b)}{b^q + (1-b)^q} \quad (4.24)$$

$$f(\alpha) = q\alpha + \log_2 [b^q + (1-b)^q] \quad (4.25)$$

onde, como observado no capítulo 1,  $D_q$  é a dimensão fractal generalizada, i.é., dimensão de  $q$ -ésima ordem ( *este  $q$  não deve ser confundido com o parâmetro da entropia de Tsallis!!*). Portanto,  $D_0$  é a dimensão fractal usual, ao passo que  $D_1$  e  $D_2$  são as dimensões de informação e de correlação, respectivamente.

O espectro das dimensões generalizadas  $D_q$  é mostrado nas figuras 4.14, 4.15 e 4.16, para valores de  $b$  iguais a 0.10, 0.25 e 0.495.

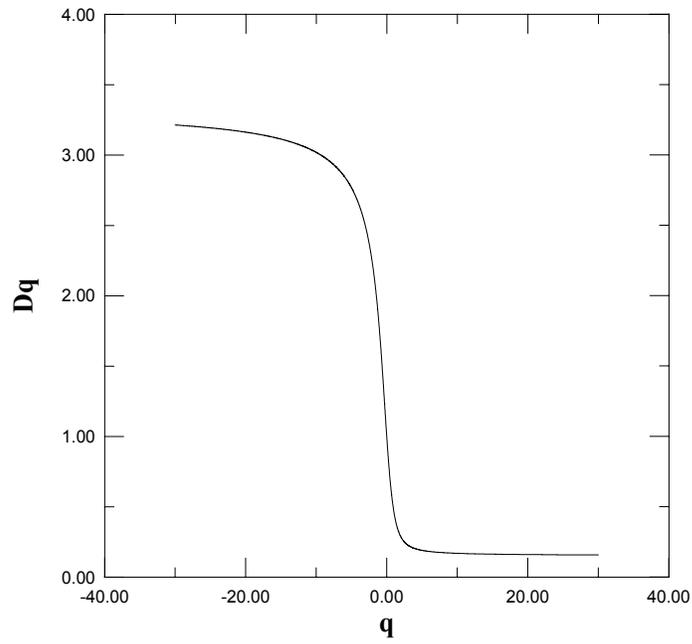


Figura 4.14 - Espectro de dimensões generalizadas da função binomial multifractal ( $b = 0.10$ ). Observar que, no extremo inferior direito, as dimensões são muito próximas a zero.

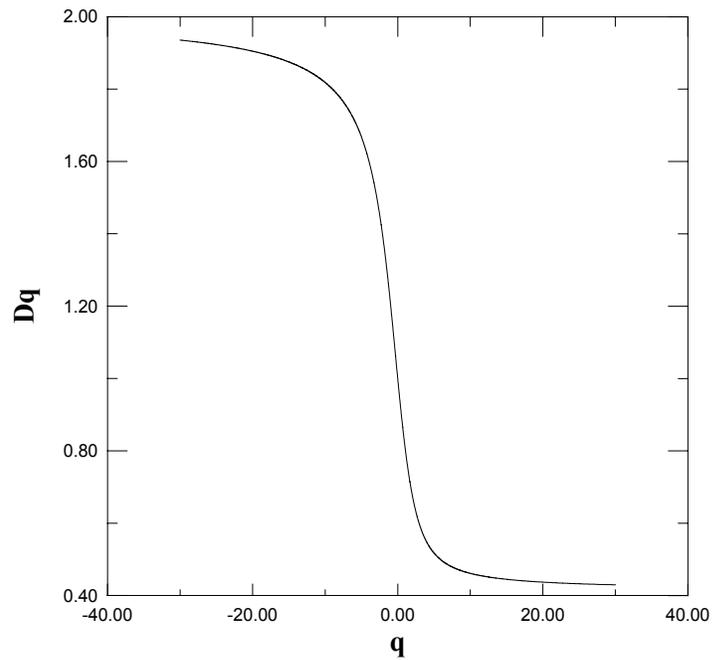


Figura 4.15 - Espectro de dimensões generalizadas da função binomial multifractal ( $b = 0.25$ ). Notar a magnitude dos valores situados no eixo das ordenadas.

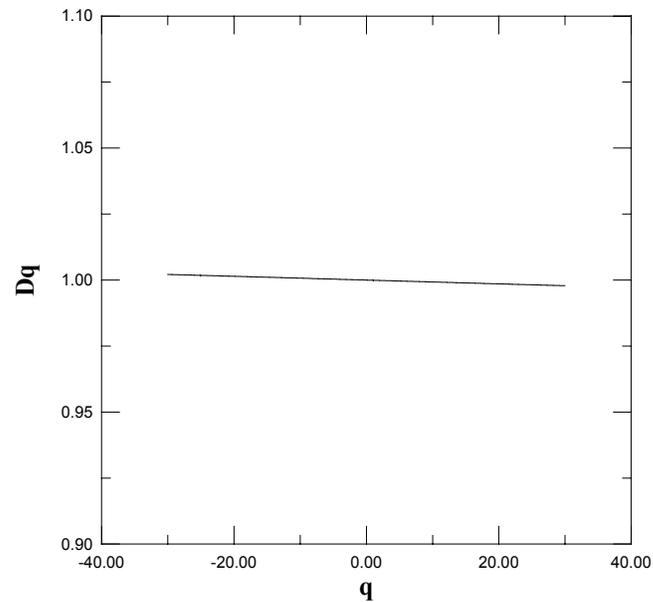


Figura 4.16 – Espectro de dimensões generalizadas da função binomial multifractal ( $b = 0.495$ ). Destruição gradual da multifractalidade (observar a magnitude dos valores do eixo das ordenadas).

Por outro lado, as figuras 4.17, 4.18 e 4.19 exibem o espectro de singularidades da função binomial - que vem a ser transformada de Legendre [87] do espectro de dimensões generalizadas - para diferentes valores de  $b$ .

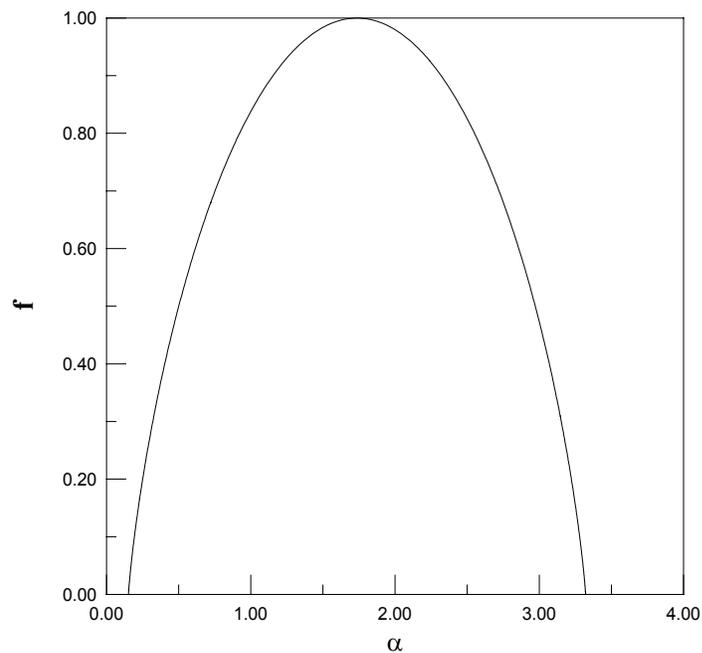


Figura 4.17 – Espectro de singularidade da função binomial multifractal ( $b = 0.10$ ). Notar o alfa mínimo próximo a zero.

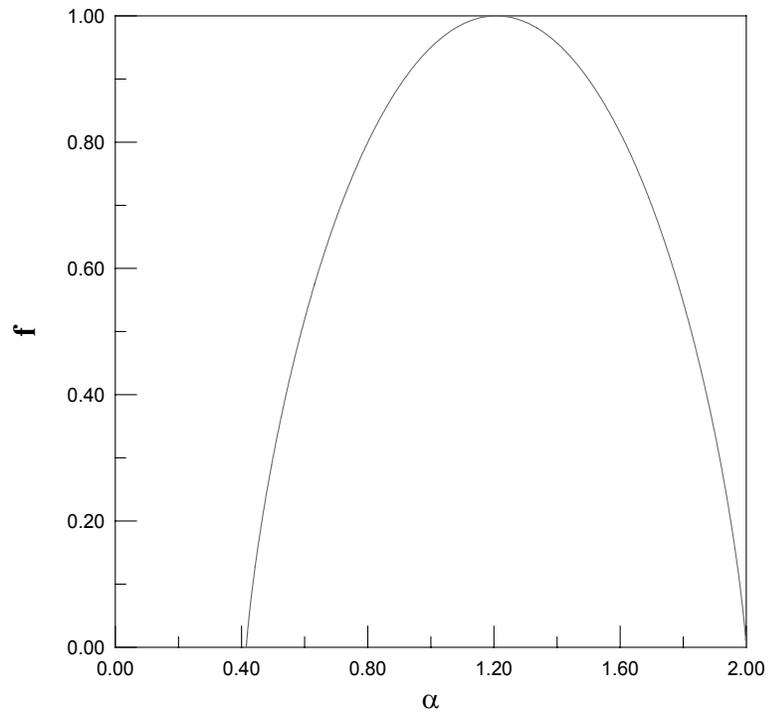


Figura 4.18 - Espectro de singularidade da função binomial multifractal ( $b = 0.25$ ).

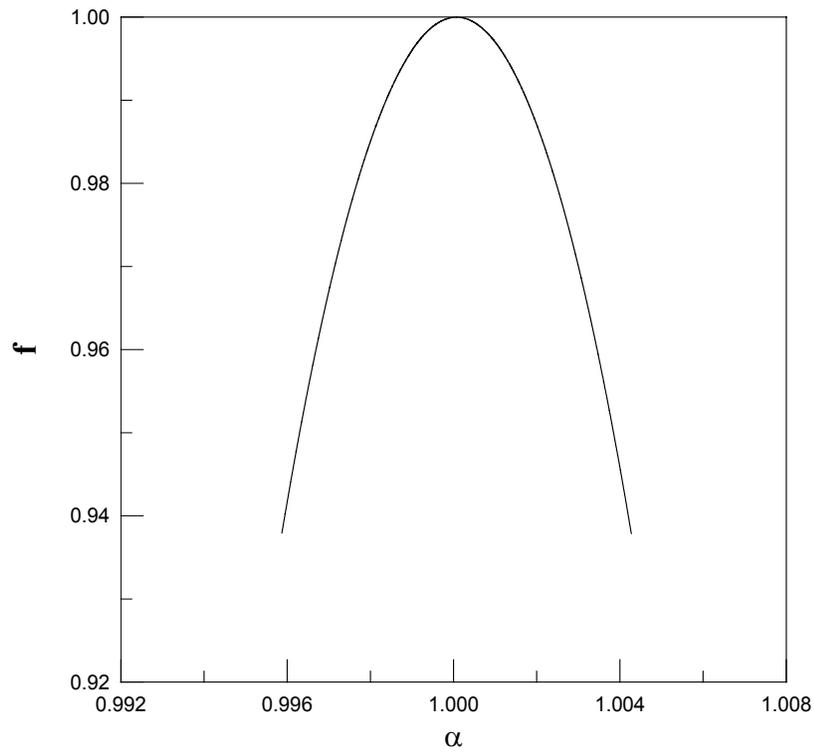


Figura 4.19 - Espectro de singularidade da função binomial multifractal ( $b = 0.495$ ). Notar a aproximação dos alfas máximo e mínimo, e a conseqüente destruição paulatina da multifractalidade.

Note-se que, para  $b = 0.10$ , seu extremo inferior esquerdo (i.é.,  $\alpha_{\min}$ ) se aproxima de zero, ao passo que, para  $b = 0.495$  (ou seja, para o valor que torna a repartição da massa quase equânime), os pontos extremos se aproximam, indicando a tendência do espectro a se reduzir a um único ponto (1,1), destruindo-se, portanto, a multifractalidade.

Como observado no capítulo precedente, uma vez de posse dos valores extremos do espectro de singularidade, é possível, utilizando-se a metodologia B (expressão 3.36), calcular-se o índice  $q$ .

A tabela 4.1 apresenta os valores de  $b$ ,  $\alpha_{\min}$ ,  $\alpha_{\max}$  e  $q$ , avaliados para o fractal de *de Wijs*.

Tabela 4.1 – Dados referentes à função binomial multifractal.

$b$	$\alpha_{\min}$	$\alpha_{\max}$	$q$
0.00	0.000	23.25	1.00
0.10	0.152	3.232	0.84
0.25	0.415	2.000	0.48
0.40	0.737	1.322	-0.67
0.50	1.000	1.000	$-\infty$
0.60	0.737	1.322	-0.67
0.75	0.415	2.000	0.48
0.90	0.152	3.232	0.84
1.00	0.000	23.25	1.00

A figura 4.19 ilustra o gráfico  $b$  vs  $q$ , em que se pode observar sua simetria em relação ao valor de  $b = 0.50$ . Para este valor, o gráfico mostra que o parâmetro entrópico diverge para  $-\infty$ .

Por outro lado, a medida em que o valor de  $b$  se aproxima da unidade,  $q$  passa a tomar o valor 1 (hum).

Observe-se, ainda, que a figura é perfeitamente simétrica em relação a um eixo vertical passando por 0.50.

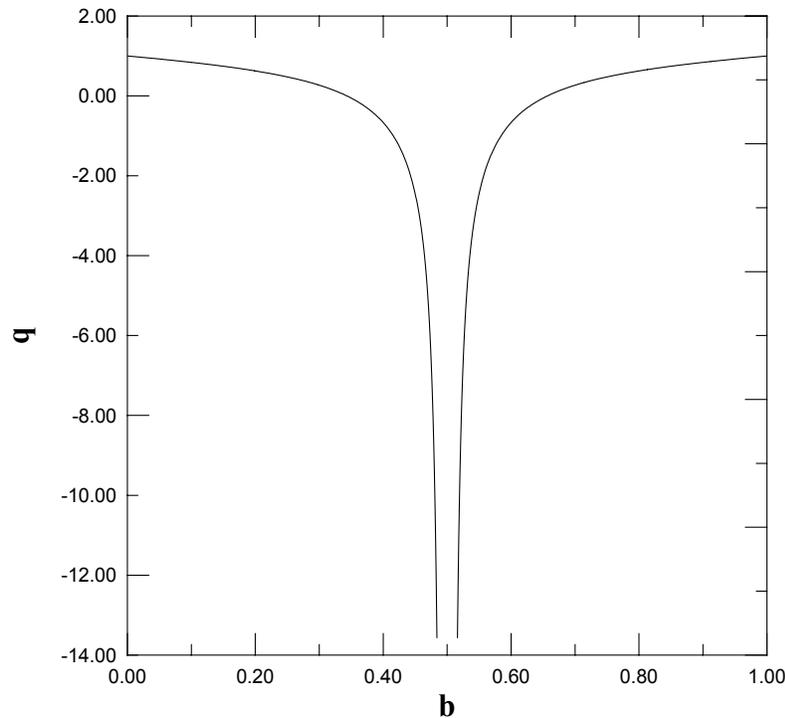


Figura 4.20 – Variação do índice entrópico de Tsallis com o parâmetro  $b$ . Observar que, para uma distribuição equitativa de massa ( $b = 0.50$ ), o índice tende para a infinidade negativamente. Por outro lado, para distribuições de massa cada vez mais heterogêneas, o índice se aproxima da unidade.

Portanto, há uma relação bastante estreita entre a não-extensividade termodinâmica e o processo em multiplicativo em cascata.

Mais exatamente, é possível associar-se a quantidade de informação que transita pelo sistema ascendente ou descendemente, dada pelo parâmetro entrópico  $q$ , e o valor de  $b$ , que controla a repartição de uma dada variável no processo em cascata.

Assim, quanto mais localizada (ou heterogênea) for a distribuição de massa (ou informação), mais o valor de  $q$  tenderá à unidade, ressaltando o caráter eminentemente local e concentrado da informação (não circula, verdadeiramente, nenhuma informação, fora de uma única região, em escalas inferiores!!).

Observe-se que este processo, absolutamente antidemocrático no trato da informação, se reflete, tanto no espectro de dimensões generalizadas, como na função  $f(\alpha)$ , pela tendência de *todas* as dimensões generalizadas superiores a  $D_0$  (i.é.,  $D_1, D_2, \dots, D_\infty$ ) e  $\alpha_{\min}$  adquirirem o valor nulo!

Por outro lado, a medida em que a distribuição de massa (ou informação) se torna cada vez mais não-localizada e homogênea (i.é.,  $b \rightarrow 0.5$ ),  $q \rightarrow -\infty$ , sugerindo que todas as escalas do processo em cascata captam a informação de forma cada vez mais democrática.

Neste sentido, é fácil intuir que, no caso em que se tenha estritamente  $b = 0.5$ , todos os elementos constituintes do processo em cascata em suas diferentes escalas de repartição se conhecerão mutuamente com a mesma intensidade, indicando tratar-se, efetivamente, de um fenômeno cuja correlação é de longuíssimo alcance.

Os físicos costumam referir-se a esta situação como uma *aproximação de campo médio* (*mean-field approximation*), fazendo crer que o efeito de qualquer grupo de elementos, em um dado nível hierárquico da árvore, poderá ser substituído, devido à sua homogeneidade, por um bloco equivalente, em que atua a *média* (daí o nome) dos elementos anteriormente substituídos.

## 4.6

### Processo em cascata e as invariâncias contínua e discreta de escala

Neste tópico, os dados experimentais, provenientes da função binomial multifractal para diferentes valores de  $b$ , foram ajustados, levando-se em conta as sistemáticas oscilações log-periódicas.

A literatura [88,98] tem sugerido, basicamente, três procedimentos de ajuste, quais sejam, *mínimos quadrados não-linear*, o método simplex tipo downhill (*downhill simplex method*) e *simulações estocásticas por termalização* (*simulated annealing*).

Aquele primeiro é constituído por diversos métodos [111], sendo o de *Levenberg-Marquardt* o mais conhecido. Possui o atrativo de reunir as vantagens dos procedimentos calcados em mínimos quadrados, muito embora apresente problemas quando a busca se localiza em mínimos muito próximos da degenerescência, i.é., muito rasos (*flat minimum*).

O segundo método [111], que não deve ser confundido com o seu homônimo da programação linear, possui a vantagem de requerer apenas a

avaliação de funções – muito embora o seu número possa ser um tanto excessivo -, dispensando-se do cálculo de suas derivadas.

O procedimento de termalização, tendo por base a analogia com o processo metalúrgico de *annealing*, distingue-se por ser um método global de extremização, caracterizado pela procura direta do mínimo (ou extremo) global, mesmo quando em presença de um grande número de mínimos (ou extremos) locais indesejáveis.

Neste sentido, a temperatura atua como uma autêntica fonte de estocasticidade, o que é extremamente conveniente, para o caso de um eventual desencalhe de um mínimo local.

O grande desafio que permeia este procedimento reside no abaixamento da temperatura o mais rapidamente possível, porém ainda guardando-se da possibilidade de um encalhe eventual em qualquer mínimo local.

Assim, a possibilidade de reconhecer a presença de mínimos locais e não se deixar por eles aprisionar constitui-se, verdadeiramente, na maior vantagem destes procedimentos de termalização estocásticos.

Como se sabe, o método tradicional [112], também conhecido como *simulação estocástica clássica (classical simulated annealing - CSA)* ou *máquina de Boltzmann (Boltzmann machine)*, baseia-se na forma entrópica clássica (3.15), em que a pesquisa do mínimo é eminentemente *local*.

Este trabalho utilizou a chamada *simulação estocástica generalizada (generalized simulated annealing - GSA)* [113], fundamentada na forma entrópica (3.23), que se caracteriza por possibilitar pesquisas de cunho *não-local*.

Embora ainda não haja consenso nem experiência suficiente quanto à utilização destes procedimentos globalizados no ajuste de curvas a dados experimentais, este autor considera que, em especial, a estratégia GSA forneceu resultados excelentes e buscas efetuadas com rapidez.

Cabe ressaltar que, nos ajustes subseqüentes, tratou-se de minimizar o erro, definido simplesmente como a diferença entre os valores experimentais e teóricos.

Ademais, os procedimentos de ajuste efetuados, tanto neste capítulo, como no capítulo 8, são normalmente denominados *paramétricos*, ou seja, efetuados com o auxílio da expressão (4.17).

Contudo, como a pouco se observou, os ajustes com base nesta expressão são questionáveis, em função do excessivo número de parâmetros envolvidos no

processo. Neste sentido, testes *não-paramétricos* têm sido utilizados como uma forma *adicional* de se avaliar o caráter log-periódico dos dados experimentais.

Um procedimento *não-paramétrico* bastante utilizado consiste em remover, da série temporal de dados, a tendência de crescimento em lei de potência, e conservar unicamente o resíduo oscilatório.

Posteriormente, este resíduo é investigado por análises espectrais, sendo o método do *periodograma de Lomb* [111] comumente empregado.

Inicialmente, decidiu-se avaliar a qualidade do ajuste em lei de potência pura aos dados empíricos.

As figuras 4.21, 4.22 e 4.23 mostram claramente a divergência potencial até a singularidade, localizada em  $x_c = 1$ . Neste caso, à exceção de um pequeno trecho inicial, a expressão (4.18) se ajusta muito bem aos dados do modelo.

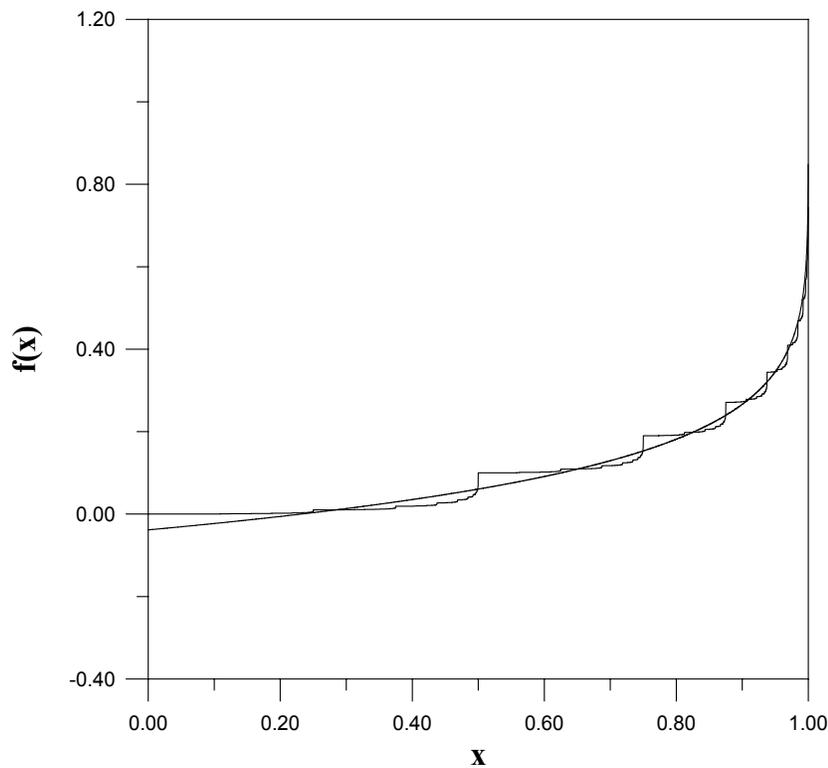


Figura 4.21 - Ajuste da função binomial ( $b = 0.10$ ) pela lei de potência pura (expressão 4.18).

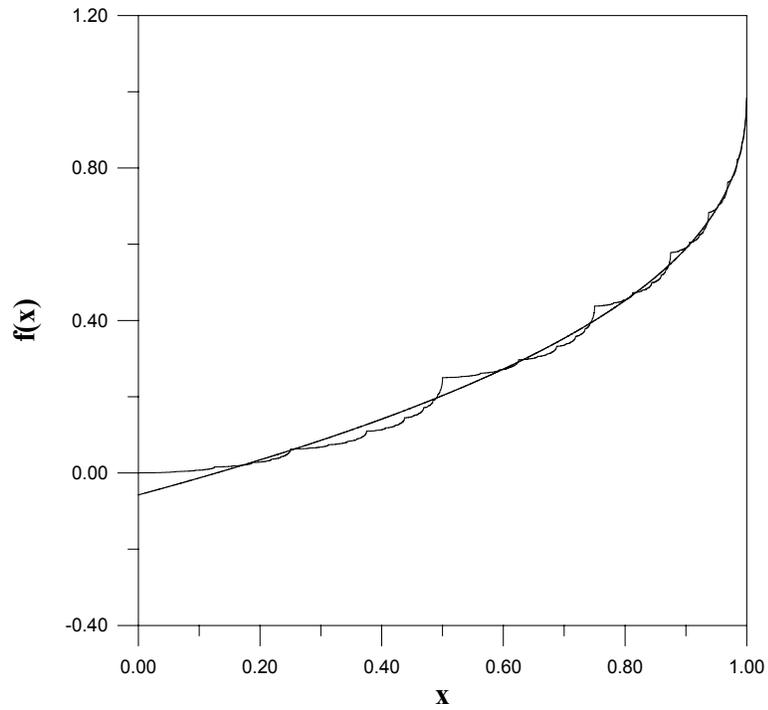


Figura 4.22 - Ajuste da função binomial ( $b = 0.25$ ) pela lei de potência pura (expressão 4.18).

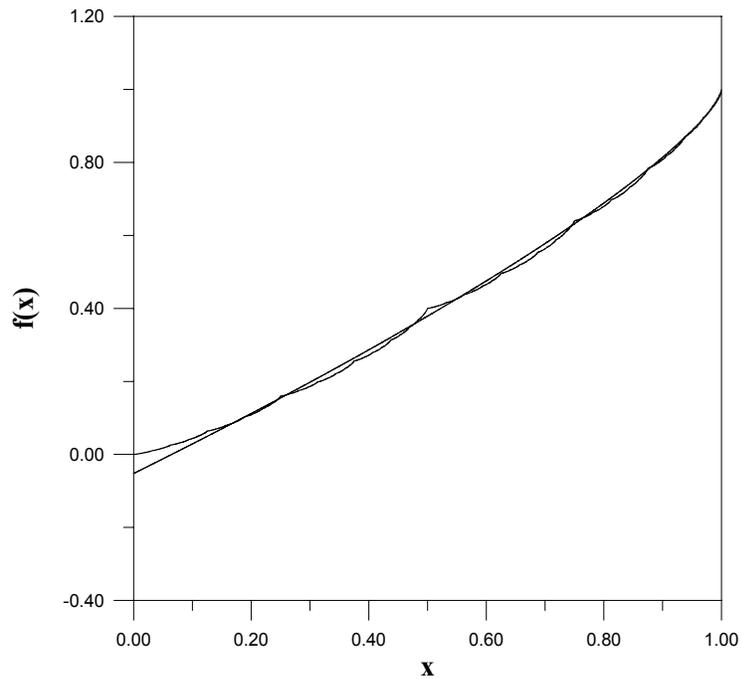


Figura 4.23 – Ajuste da função binomial ( $b = 0.40$ ) pela lei de potência pura (expressão 4.18).

Por seu turno, as oscilações log-periódicas, que decoram os ajustes em lei de potência anteriores, estão ilustradas nas figuras 4.24 4.25 e 4.26. De forma similar, exceto por um pequeno trecho inicial, o ajuste proporcionado pela

expressão (4.17) é magnífico, podendo-se notar que várias oscilações conseguem ser captadas pelo ajuste.

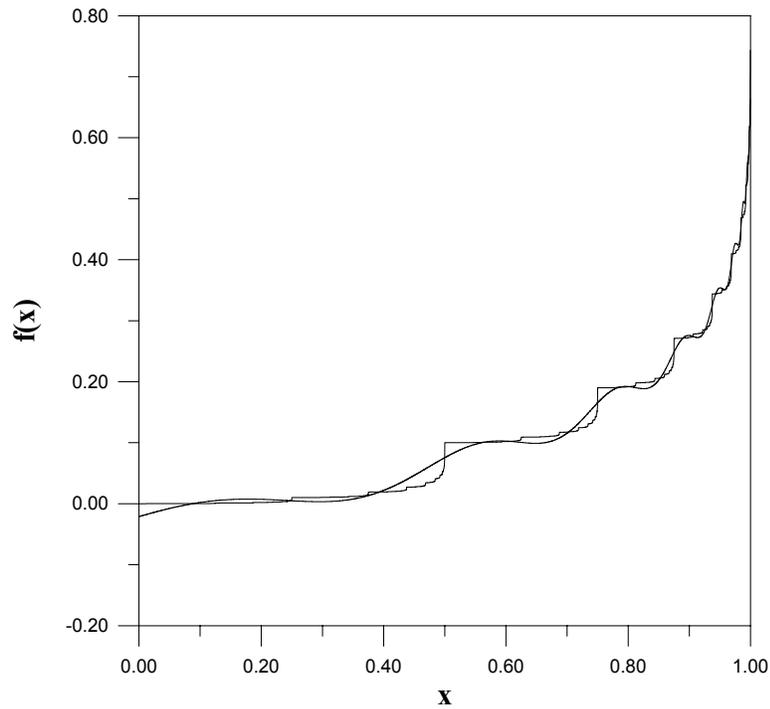


Figura 4.24 - Ajuste da função binomial ( $b = 0.10$ ) pela lei log-periódica (expressão 4.17).

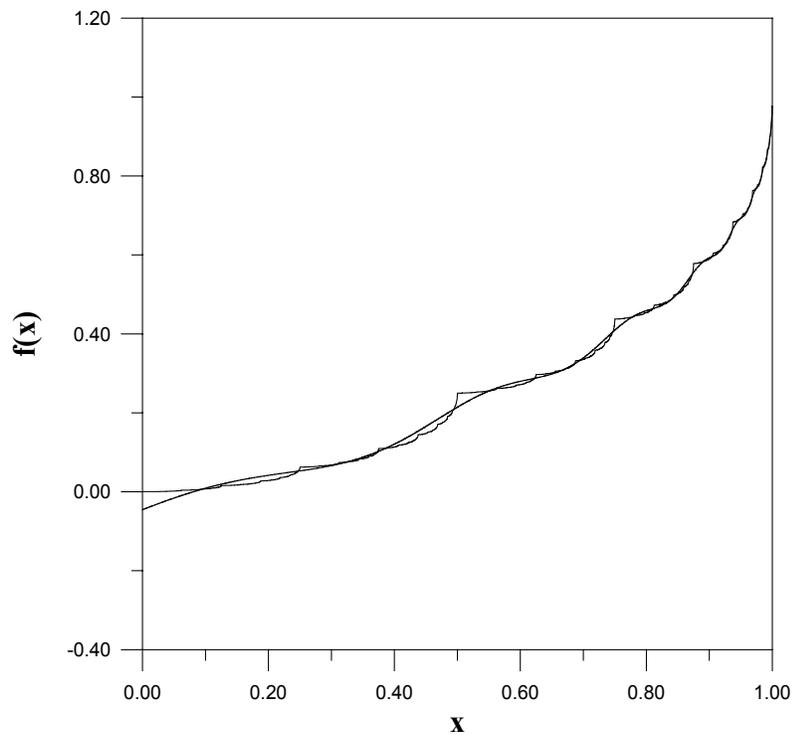


Figura 4.25 – Ajuste da função binomial ( $b = 0.25$ ) pela lei log-periódica (expressão 4.17).

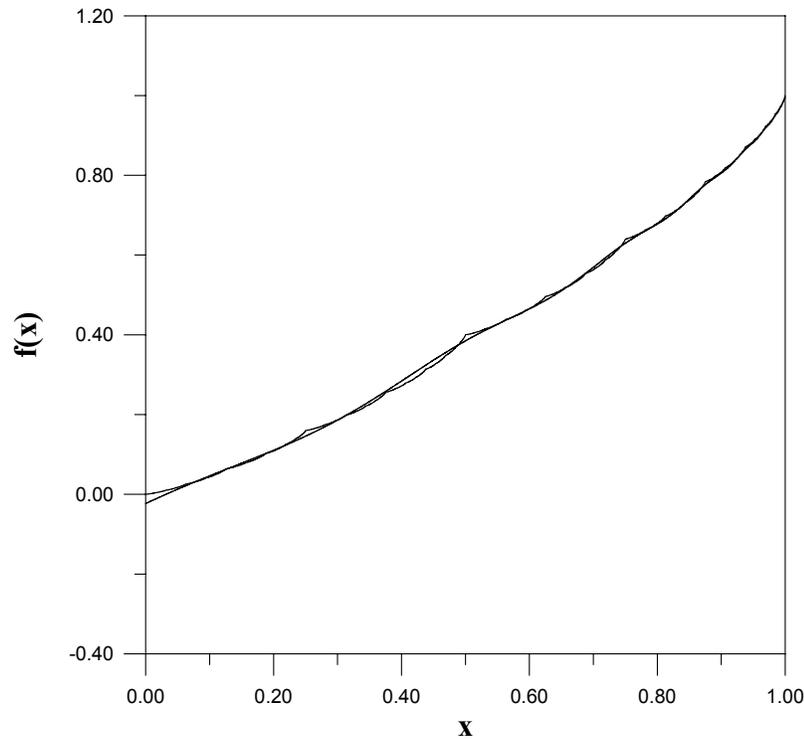


Figura 4.26 - Ajuste da função binomial ( $b = 0.40$ ) pela lei log-periódica (expressão 4.17).

Cabe observar que a qualidade dos ajustes dos dados disponíveis efetuados pela expressão (4.17) foi sistematicamente superior à fornecida pela lei de potência pura (4.18), apesar de o parâmetro  $x_c$  haver integrado o procedimento de ajuste de (4.17), diferentemente do que houve nas figuras 4.21, 4.22 e 4.23, em que tomou o valor fixo 1 (hum).

Observe-se, ainda, que, no caso de  $b = 0.50$  (ou seja, para uma repartição *homogênea, não desigual*, de massas – figura 4.9), as oscilações desaparecem por completo, restando unicamente a lei de potência com expoente unitário.

As tabelas 4.2 e 4.3 organizam os dados do modelo binomial multifractal ajustados pelas expressões (4.18) e (4.17), respectivamente.

Tabela 4.2 – Dados relativos ao ajuste em lei de potência pura (expressão 4.18).

$b$	$A_1$	$B_1$	$\alpha_1$	<i>Erro do ajuste</i>
0.10	1.4804	-1.5189	0.0971	1.7699
0.25	1.0116	-1.0692	0.4026	1.8464
0.40	0.9921	-1.0443	0.7674	1.2251
0.50	0.9992	-0.9987	1.0000	0.0333

Tabela 4.3 – Dados relativos ao ajuste segundo a lei log-periódica (expressão 4.17).

$b$	$A$	$B$	$x_c$	$\alpha$	$C$	$\lambda$	$\omega$	$\phi$	<i>Erro do ajuste</i>
0.10	1.4860	-1.5199	1.0017	0.0962	-0.0137	2.0019	9.0523	0.8875	0.9993
0.25	0.9956	-1.0584	0.9998	0.4140	-0.0259	2.0011	9.0575	0.8996	1.0544
0.40	0.9963	-1.0370	0.9996	0.7366	-0.0165	2.0006	9.0608	0.0007	0.5622
0.50	0.9992	-0.9987	0.9999	1.0000	4.8E-8	2.0000	9.0647	3.4E-4	0.0356

Assinale-se, contudo, que, a princípio, as oscilações log-periódicas de menor amplitude das figuras 4.24, 4.25 e 4.26 poderiam ter sido igualmente captadas se, porventura, na expressão 4.17, termos de ordem superior no desenvolvimento em série de Fourier tivessem sido embutidos, esperando-se, por conseguinte, um ajuste ainda mais preciso. Ocorre que a expressão teórica resultante apresentaria um número excessivamente grande de parâmetros, dificultando sobremaneira o processo de ajuste.

Muito a propósito, o grupo de pesquisa liderado por Sornette na UCLA [114,115,116,117] tem sugerido fortemente, no âmbito das análises de índices e previsão de crashes no mercado financeiro internacional, que oscilações log-

periódicas existentes em escalas menores poderiam ser captadas por intermédio de *funções fractais*, dentre as quais estariam as *funções generalizadas de Weierstrass* [87, 118]. Entretanto, no que diz respeito à sua utilização na previsão de rupturas em materiais, tal procedimento ainda permanece, ao que se saiba, inédito.

O processo em cascata, modelado de forma simplificada pela função binomial multifractal, indica, por conseguinte, haver uma estreita relação entre a quantidade de informação que percorre o sistema em seus vários níveis hierárquicos, e a existência ou não de oscilações log-periódicas.

Assim, caso o parâmetro entrópico  $q \rightarrow -\infty$ , a propagação da informação no sistema é feita, como já se observou, de forma cada vez mais democrática e homogênea, indicando uma total ausência daquelas oscilações.

Por outro lado,  $q \rightarrow 1$  sinaliza com a possibilidade da informação concentrar-se cada vez mais localmente, razão pela qual o comportamento oscilatório é gradativamente mais pronunciado.

O leitor verá, no momento oportuno, que estas mesmas conclusões podem ser aplicadas aos resultados fornecidos pelo modelo elasto-plástico descrito no próximo capítulo. Em particular, mostrar-se-á que os dados resultantes das simulações numéricas efetuadas em materiais heterogêneos, comumente apresentam invariância discreta de escala e não-extensividade do tipo Tsallis.