

## 2 Orbifolds

Uma orbifold é um espaço topológico localmente dado pelo quociente de  $\mathbb{R}^n$  (ou aberto de  $\mathbb{R}^n$ ) pela ação de um grupo finito. Trata-se de uma generalização do conceito de variedade. Neste capítulo estudaremos as orbifolds com ênfase no caso bi-dimensional. Orbifolds de dimensão dois aparecem como o espaço de fibras, ou seja, o espaço obtido quando identificamos cada fibra a um ponto, de um fibrado de Seifert de dimensão três, conforme veremos no capítulo seguinte. Nosso trabalho será basicamente entender os tipos de orbifold de dimensão dois e estender, a orbifolds em geral, alguns conceitos topológicos: espaços de recobrimento, grupo fundamental, característica de Euler e fibrados. Começaremos por uma breve revisão de ações de grupos.

## 2.1

### Preliminares

**Definição 2.1.1** Um grupo  $G$  é dito um grupo topológico se tem uma estrutura de espaço topológico tal que

$$\phi : G \times G \rightarrow G$$

$$(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2^{-1}$$

é uma aplicação contínua. Se, além disso,  $G$  possuir uma estrutura de variedade (suave) tal que  $\phi$  é suave,  $G$  é dito um grupo de Lie.

**Definição 2.1.2** Sejam  $G$  um grupo topológico e  $X$  um espaço topológico. Uma ação de  $G$  em  $X$  é uma aplicação contínua

$$G \times X \rightarrow X$$

$$(g, x) \mapsto g \cdot x$$

onde, para cada  $g \in G$ ,  $x \mapsto g \cdot x$  é um homeomorfismo de  $X$  e, para todo  $g_1, g_2 \in G$  e para todo  $x \in X$ , vale:

$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$$

$$e_G \cdot x = x$$

Se  $G$  é um grupo de Lie e  $X$  é uma variedade (suave), exigimos também que as aplicações acima sejam suaves.

Seja  $x \in X$ . A órbita de  $x$  é o conjunto

$$O_x = \{g \cdot x \in X; g \in G\} \subset X.$$

O estabilizador ou grupo de isotropia de  $x$  é o grupo

$$G_x = \{g \in G; g \cdot x = x\} \subset G.$$

Dizemos que  $x$  é um ponto fixo pela ação de  $G$ , se  $G_x = G$  ou, equivalentemente,  $O_x = \{x\}$ . Dizemos que  $x$  é um ponto regular da ação se possui uma vizinhança  $U$  tal que, para todo  $y \in U$ , existe um  $g \in G$  tal que  $G_x < g G_y g^{-1}$ . Um ponto que não é regular é dito um ponto singular.

*Notação:* Se  $g \in G$ ,  $Y \subset X$ ,  $g \cdot Y = \{g \cdot x \in X; x \in Y\}$

Seja  $Hom(X)$  o grupo de todos os homeomorfismos do espaço topológico localmente compacto  $X$ . Então  $Hom(X)$  admite uma topologia chamada compacto-aberta. As intersecções finitas de conjuntos do tipo  $V_C = \{g \in G; g \cdot C \subset V\} \subset Hom(X)$ , onde  $C \subset X$  é compacto e  $V \subset X$  é aberto, formam uma base para essa topologia.

Se  $M$  é uma variedade riemanniana,  $Isom(M)$ , o grupo de todas as isometrias de  $M$ , age em  $M$  e admite uma estrutura de grupo de Lie. Este resultado é conhecido como o *Teorema de Myers-Steenrod*. O que precisamos saber é que a topologia de  $Isom(M)$  é a topologia compacto-aberta.

**Definição 2.1.3** *Seja  $G$  um grupo topológico agindo em um espaço topológico  $X$ . Dizemos que a ação é:*

- transitiva: se  $\forall x, y \in X, \exists g \in G$  tal que  $g \cdot x = y$ ;
- simplesmente transitiva: se  $\forall x, y \in X, \exists! g \in G$  tal que  $g \cdot x = y$ ;
- efetiva: se  $g \cdot x = x, \forall x \in X \Rightarrow g = e_G$ ;
- discreta: se  $G$  é discreto com a topologia compacto-aberta;
- livre: se o único  $g \in G$  que admite  $x \in X$  tal que  $g \cdot x = x$  é  $e_G$ ;
- propriamente descontínua: se, para todo compacto  $C \subset X$ , o conjunto  $\{g \in G; C \cap g \cdot C \neq \emptyset\}$  é finito.

Concluimos esta seção relembrando o conceito de pull-back de uma forma bilinear por uma aplicação suave.

**Definição 2.1.4** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades,  $f : M \rightarrow N$  uma função suave e  $x$  um ponto de  $M$ . Seja  $H$  uma forma bilinear em  $T_y N$ , onde  $y = f(x)$ . Então o pull-back de  $H$  por  $f$  é a forma bilinear  $f_* H$  em  $T_x M$  dada por*

$$f_* H(u, v) = H(df_x(u), df_x(v))$$

para todo  $u, v \in T_x M$ .

## 2.2

### Definições básicas

**Definição 2.2.1** Uma orbifold  $O$  de dimensão  $n$  é um espaço topológico  $X_O$ , dito o espaço subjacente de  $O$ , juntamente com uma cobertura  $\{U_i\}_{i \in I}$ ,  $I$  conjunto de índices, por abertos de  $X_O$ , e um conjunto de pares  $(U_i, \phi_i)$ ,  $i \in I$ , ditos cartas de  $O$ , onde

$$\phi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i/\Gamma_i$$

é homeomorfismo entre o aberto  $U_i \subset X_O$  e o quociente  $\tilde{U}_i/\Gamma_i$ ,  $\Gamma_i$  grupo finito agindo no aberto  $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^n$ . Além disso,  $\{U_i\}_{i \in I}$  é fechado para intersecções finitas e o conjunto  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ , dito um atlas de  $O$ , tem a seguinte propriedade: sempre que  $U_i \subset U_j$ ,  $i, j \in I$ , existe um homomorfismo injetor

$$\psi_{ij} : \Gamma_i \rightarrow \Gamma_j$$

e um mergulho

$$\tilde{\varphi}_{ij} : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{U}_j$$

eqüivariante em relação a  $\psi_{ij}$ , ou seja,

$$\tilde{\varphi}_{ij}(\gamma \cdot u) = \psi_{ij}(\gamma \cdot \tilde{\varphi}_{ij}(u)), \quad \forall \gamma \in \Gamma_i, \forall u \in \tilde{U}_i$$

e o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U}_i & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{ij}} & \tilde{U}_j \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{U}_i/\Gamma_i & \xrightarrow{\phi_{ij} = \tilde{\varphi}_{ij}/\Gamma_i} & \tilde{U}_j/\psi_{ij}(\Gamma_i) \\
 \uparrow \phi_i & & \downarrow \\
 U_i & \xrightarrow{i} & U_j \\
 & & \uparrow \phi_i \\
 & & \tilde{U}_j/\Gamma_i
 \end{array}$$

onde  $i : U_i \rightarrow U_j$  é a inclusão.

Se todos os mergulhos  $\varphi_{ij}$  forem suaves, a orbifold é dita suave. Um ponto  $p \in O$  é dito um ponto singular ou uma singularidade de  $O$  se existe  $i \in I$  tal que  $p = \phi_i^{-1}(x_i)$ , onde  $x_i$  é uma singularidade da ação de  $\Gamma_i$  em  $\tilde{U}_i$ . Caso contrário,  $p$  é dito um ponto regular de  $O$ .

Para definir uma orbifold com bordo, permitimos simplesmente que cada  $\tilde{U}_i$  seja aberto de  $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$ . O bordo da orbifold  $O$  é definido por

$$\partial O = \{p \in O; \exists i \in I \text{ t.q. } p = \phi_i^{-1}(x_i), x_i \in \tilde{U}_i \cap \partial \mathbb{H}^n\}.$$

Abertos e fechados de uma orbifold são abertos e fechados do seu espaço subjacente. Logo uma orbifold é compacta ou conexa quando o seu espaço subjacente assim o for. Uma orbifold sem bordo (mas possivelmente com espaço subjacente com bordo), compacta e conexa é dita fechada.

*Convenção:* Suporemos todas as orbifolds conexas e suaves.

**Definição 2.2.2** *Sejam  $O$  e  $O'$  orbifolds. Uma aplicação suave, ou simplesmente uma aplicação, entre  $O$  e  $O'$  é uma aplicação contínua*

$$f : X_O \rightarrow X_{O'}$$

entre seus espaços subjacentes tal que, dado  $x \in X_O$ , existem vizinhanças  $U_x \subset X_O$ , de  $x$ , e  $U'_y \subset X_{O'}$ , de  $y = f(x)$ , com a seguinte propriedade. Existem cartas  $(U_x, \phi_x)$ ,

$$\phi_x : U_x \rightarrow \tilde{U}_x / \Gamma_x,$$

do atlas de  $O$ , onde  $\Gamma_x$  é um grupo finito agindo no aberto  $\tilde{U}_x \subset \mathbb{R}^n$ , e  $(U'_y, \phi'_y)$ ,

$$\phi'_y : U'_y \rightarrow \tilde{U}'_y / \Gamma'_y,$$

do atlas de  $O'$ , onde  $\Gamma'_y$  é um grupo finito agindo no aberto  $\tilde{U}'_y \subset \mathbb{R}^m$ , um homomorfismo injetivo

$$\psi_{xy} : \Gamma_x \rightarrow \Gamma'_y$$

e uma aplicação suave

$$\tilde{f}_{xy} : \tilde{U}_x \rightarrow \tilde{U}'_y$$

equivariante com relação a  $\psi_{xy}$ , ou seja,

$$\forall u \in \tilde{U}_x, \forall \gamma \in \Gamma_x, \tilde{f}_{xy}(\gamma \cdot u) = \psi_{xy}(\gamma) \cdot \tilde{f}_{xy}(u)$$

tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U}_x & \xrightarrow{\tilde{f}_{xy}} & \tilde{U}'_y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{U}_x/\Gamma_x & \xrightarrow{f_{xy}=\tilde{f}_{xy}/\Gamma_x} & \tilde{U}'_y/\psi_{xy}(\Gamma_x) \\
 \uparrow \phi_x & & \downarrow \\
 U_x & \xrightarrow{f|_{U_x}} & U'_y \\
 & & \uparrow \phi'_y \\
 & & \tilde{U}'_y/\Gamma'_y
 \end{array}$$

Se a aplicação  $f$  acima for um difeomorfismo,  $f$  é dito um isomorfismo e  $O$  e  $O'$  são ditas isomorfas. Daqui em diante, orbifolds serão sempre consideradas a menos de isomorfismo.

Qualquer variedade tem estrutura de orbifold sem singularidades. Para entendermos melhor a *Definição 2.2.1* consideremos o seguinte exemplo:

**Exemplo 2.2.3** *Seja inteiro  $r > 1$ . A gota de lágrima (de ordem  $q$ ) é uma orbifold com espaço subjacente  $S^2$  e um atlas como se segue. Fixe um ponto  $p \in S^2$ . Cubra  $S^2$  com abertos  $U_1, \dots, U_4$  conforme a Figura 2.1. Considere  $U_{ij} = U_i \cap U_j$  e  $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$ , sempre que essas intersecções forem não vazias. Temos então um atlas com cartas*

$$\begin{aligned}
 \phi_i &: U_i \rightarrow \tilde{U}_i/\Gamma_i \\
 \phi_{ij} &: U_{ij} \rightarrow \tilde{U}_{ij}/\Gamma_{ij}, \quad i < j \\
 \phi_{ijk} &: U_{ijk} \rightarrow \tilde{U}_{ijk}/\Gamma_{ijk}, \quad i < j < k
 \end{aligned}$$

onde todos os  $\tilde{U}_i$ 's,  $\tilde{U}_{ij}$ 's e  $\tilde{U}_{ijk}$ 's são discos e todos os  $\Gamma_i$ 's,  $\Gamma_{ij}$ 's e  $\Gamma_{ijk}$ 's são grupos triviais exceto  $\Gamma_1$ , que é o grupo  $\mathbb{Z}_q$ , gerado por uma rotação, pelo ângulo  $2\pi/q$ , em torno de  $\phi_1^{-1}(p) \in \tilde{U}_1$ . A Figura 2.2 ilustra o diagrama da Definição 2.2.1 para  $U_{12} \subset U_1$  no caso  $q = 4$ . Observe que  $p$  é uma singularidade dessa orbifold. Trataremos das singularidades das orbifolds de dimensão dois na próxima seção.

**Proposição 2.2.4** *Seja  $M^n$  uma variedade e seja  $\Gamma$  um grupo agindo propriamente descontinuamente em  $M$ . Então, o quociente  $M/\Gamma$  tem estrutura de orbifold.*

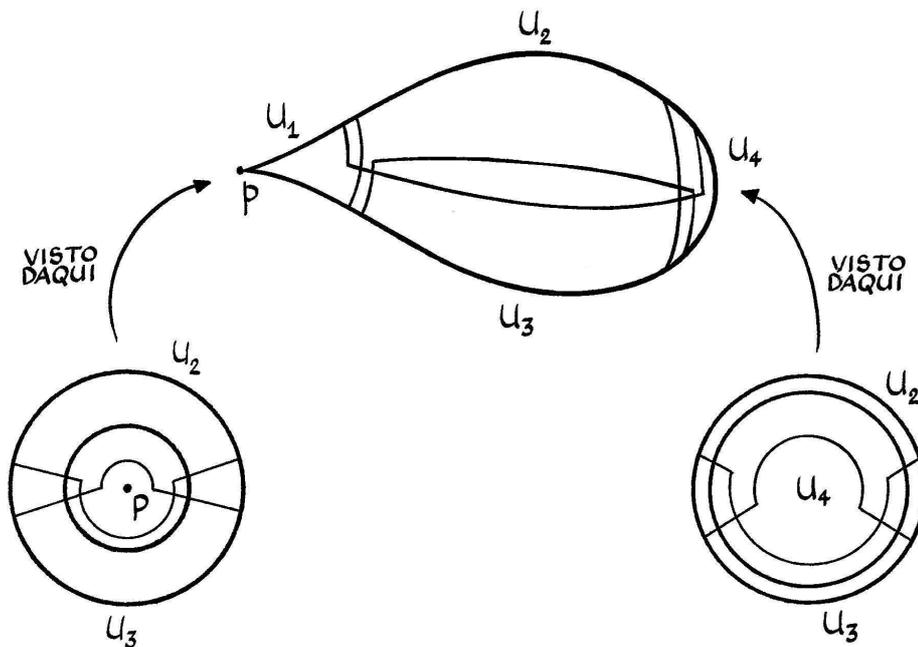


Figura 2.1: Abertos do atlas da gota de lágrima.

*Demonstração:* Encontraremos um atlas de orbifold para  $M/\Gamma$ . Para cada  $x \in M$ , escolha  $\tilde{U}_x$  vizinhança de  $x$  invariante pela ação de  $\Gamma_x < \Gamma$ , o estabilizador de  $x$ , que é finito, e tal que  $\tilde{U}_x \cap \gamma \cdot \tilde{U}_x = \emptyset, \forall \gamma \in \Gamma - \Gamma_x$ . Suponha também que cada  $\tilde{U}_x$  é homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . Então,  $\{U_x\}_{x \in M}$ , onde  $U_x = \tilde{U}_x/\Gamma_x$ , é cobertura de  $M/\Gamma$  por abertos. Inclua nessa cobertura as intersecções finitas  $U_{x_1 \dots x_k} = U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_k}$ , sempre que estas forem não vazias. Observe que  $U_{x_1 \dots x_k} \neq \emptyset$  se e só se existem  $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Gamma$  tais que  $\gamma_1 \cdot \tilde{U}_{x_1} \cap \dots \cap \gamma_k \cdot \tilde{U}_{x_k} \neq \emptyset$ . Nesse caso, tome  $\tilde{U}_{x_1 \dots x_k} = \gamma_1 \cdot \tilde{U}_{x_1} \cap \dots \cap \gamma_k \cdot \tilde{U}_{x_k}$ . O grupo  $\Gamma_{x_1 \dots x_k} = \gamma_1 \Gamma_{x_1} \gamma_1^{-1} \cap \dots \cap \gamma_k \Gamma_{x_k} \gamma_k^{-1}$  age em  $\tilde{U}_{x_1 \dots x_k}$ . Assim, temos cartas

$$\phi_{x_1 \dots x_k} : U_{x_1 \dots x_k} \rightarrow \tilde{U}_{x_1 \dots x_k} / \Gamma_{x_1 \dots x_k},$$

$k \geq 1$ , determinando um atlas de orbifold em  $M/\Gamma$ .  $\square$

**Exemplo 2.2.5** Se  $M$  é uma variedade com bordo, podemos considerar a variedade  $DM$  definida como  $M$  dobrada ao longo do seu bordo. Assim,  $M = DM/\mathbb{Z}_2$  admite uma estrutura de orbifold.

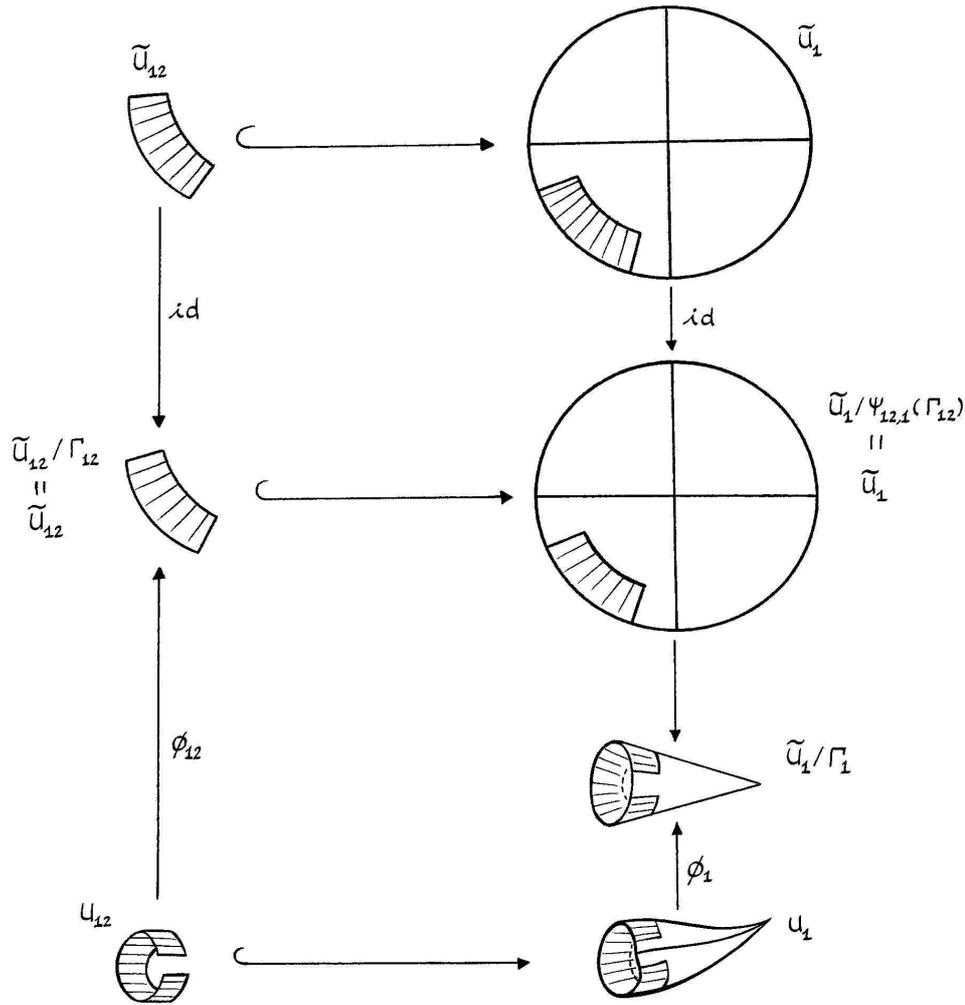


Figura 2.2: Troca de cartas do Exemplo 2.2.3.

### 2.3 Singularidades de orbifolds de dimensão dois

Seja  $O^n$  uma orbifold e seja  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ ,  $\phi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i/\Gamma_i$ , um atlas de  $O$ . Usando o fato de  $\Gamma_i$  ser um grupo finito, pelo visto na demonstração da Proposição 2.2.4, podemos sempre supor que cada  $\Gamma_i$  fixa um ponto  $x_i \in \tilde{U}_i$ . Além disso, podemos supor também que cada  $\tilde{U}_i$  é um disco. Como  $\Gamma_i$  é um grupo finito, temos uma forma bilinear simétrica em  $T_{x_i}\tilde{U}_i$ , invariante pela ação de  $\Gamma_i$ , dada por

$$H(u, v) = \frac{1}{|\Gamma_i|} \sum_{\gamma \in \Gamma_i} Q(\gamma_*u, \gamma_*v),$$

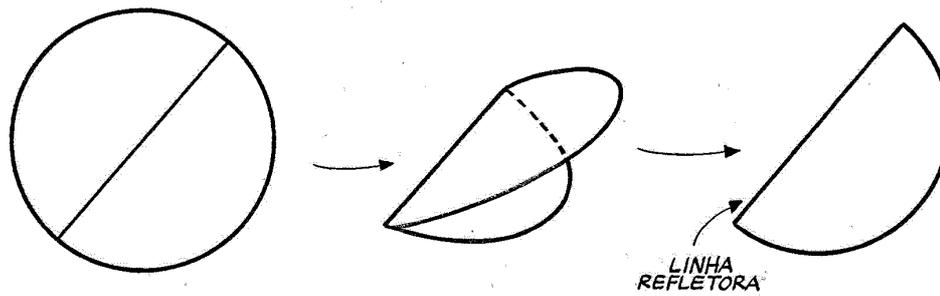


Figura 2.3: A identificação que resulta numa linha refletora.

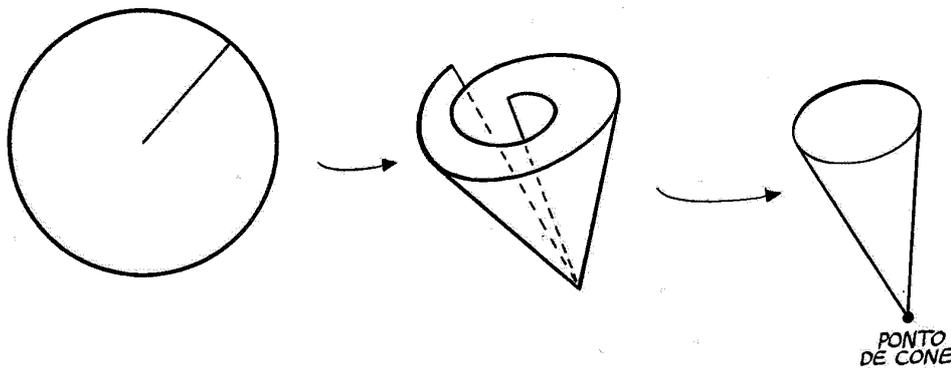


Figura 2.4: A identificação que resulta num ponto de cone.

onde  $Q$  é uma forma bilinear simétrica qualquer em  $T_{x_i} \tilde{U}_i$  e  $|\Gamma_i|$  é a ordem de  $\Gamma_i$ . Então,  $\Gamma_i$  é um subgrupo finito de  $O(n)$ . Se  $n = 2$  podemos descrever facilmente todos os tipos de singularidades de  $O$ . Como  $\Gamma_i$  é subgrupo finito de  $O(n)$ , temos quatro possibilidades para  $\tilde{U}_i/\Gamma_i$ :

1.  $\Gamma_i = \{e\}$ , o grupo trivial. Nesse caso,  $\tilde{U}_i/\Gamma_i$  é o próprio disco  $\tilde{U}_i$ ;
2.  $\Gamma_i = \mathbb{Z}_2$ , grupo gerado por uma reflexão em um segmento  $l \subset \tilde{U}_i$  contendo  $x_i$ . Nesse caso, dizemos que  $l$  é uma linha refletora (Figura 2.3);
3.  $\Gamma_i = \mathbb{Z}_q$ , grupo gerado por uma rotação de  $2\pi/q$ ,  $q > 0$  inteiro, em torno de  $x_i$ . Nesse caso, dizemos que  $x_i$  é um ponto de cone de ordem  $q$  (Figura 2.4);
4.  $\Gamma_i = D_{2q}$ , o grupo diedral de ordem  $2q$ , gerado por uma reflexão em linha  $l \subset \tilde{U}_i$ ,  $x_i \in l$ , e por uma rotação de  $2\pi/q$ ,  $q > 0$  inteiro, em torno de  $x_i$ . Nesse caso,  $l$  também é dita uma linha refletora e  $x_i$  é dito um refletor de quina de ordem  $2q$  (Figura 2.5);

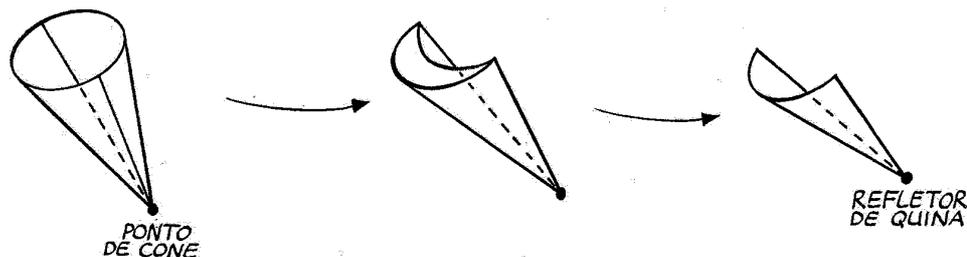


Figura 2.5: A identificação que resulta num refletor de quina.

**Definição 2.3.1** Uma linha refletora em uma orbifold  $O$  de dimensão dois é uma componente conexa da união dos pontos  $x \in O$  tal que existe  $i \in I$  tal que  $x = \phi_i^{-1}(x_i)$ , onde  $x_i$  pertence a linha refletora em  $\tilde{U}_i/\Gamma_i$ . Um ponto de cone de ordem  $q$  em  $O$  é um ponto  $x \in O$  tal que existe  $i \in I$  tal que  $x = \phi_i^{-1}(x_i)$ , onde  $x_i$  é ponto de cone de ordem  $q$  em  $\tilde{U}_i/\Gamma_i$ . De forma análoga define-se um refletor de quina de ordem  $2q$  em  $O$ . Um cone de ordem  $q$  em  $O$  é um disco aberto contendo um ponto de cone de ordem  $q$  como única singularidade em seu interior.

A gota de lágrima de ordem  $q$  (Exemplo 2.2.3) é uma orbifold com espaço subjacente  $S^2$  e um ponto de cone de ordem  $q$  como única singularidade. De forma geral, podemos construir orbifolds  $S^2(q_1, \dots, q_r)$  com espaço subjacente  $S^2$  e  $r \geq 1$  pontos de cone de ordens  $q_1, \dots, q_r > 1$  como únicas singularidades.

## 2.4

### Recobrimientos

**Definição 2.4.1** Sejam  $O$  e  $\tilde{O}$  duas orbifolds com espaços subjacentes  $X_O$  e  $X_{\tilde{O}}$  respectivamente. Dizemos que  $(\tilde{O}, p)$  é um recobrimento de  $O$  se  $p : X_{\tilde{O}} \rightarrow X_O$  é uma aplicação contínua tal que cada  $x \in X_O$  tem uma vizinhança  $U$  da seguinte forma. Se  $V$  é uma componente de  $p^{-1}(U)$ , existem cartas  $(U, \phi)$ ,

$$\phi : U \rightarrow \tilde{U}/\Gamma,$$

do atlas de  $O$ , onde  $\Gamma$  é um grupo finito agindo no aberto  $\tilde{U}$  de  $\mathbb{R}^n$  (ou de  $\mathbb{H}^n$ , se  $O$  tem bordo), e  $(V, \psi)$ ,

$$\psi : V \rightarrow \tilde{U}/\Gamma',$$

do atlas de  $O'$ , onde  $\Gamma' < \Gamma$ , e difeomorfismo  $\tilde{p}_V : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$  tal que

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{p}_V} & \tilde{U} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{U}/\Gamma' & \xrightarrow{p_V = \tilde{p}_V/\Gamma'} & \tilde{U}/\Gamma' \\
 \uparrow \psi & & \downarrow \\
 V & \xrightarrow{p|_V} & U \\
 & & \uparrow \phi \\
 & & \tilde{U}/\Gamma
 \end{array}$$

comuta.

O recobrimento  $p : \tilde{O} \rightarrow O$  é dito um recobrimento por  $d$  folhas se, para cada  $y$  ponto regular de  $O$ ,  $p^{-1}(y)$  é um conjunto finito de  $d$  elementos.

Se  $\Gamma$  é um grupo agindo propriamente descontinuamente em uma variedade  $M$  e  $\Gamma'$  é um subgrupo de  $\Gamma$ , então a orbifold  $M/\Gamma'$  recobre a orbifold  $M/\Gamma$ . Para qualquer inteiro  $r > 0$ ,  $S^2(p)$  recobre  $S^2(rp, r) = S^2(p)/\mathbb{Z}_r$  por  $r$  folhas, mas não possui recobrimento próprio. Da mesma forma  $S^2(p, q)$ ,  $p$  e  $q$  primos entre si, recobre  $S^2(rp, rp) = S^2(p, q)/\mathbb{Z}_r$  por  $r$  folhas, para qualquer inteiro positivo  $r$ , e também não possui recobrimento próprio. Veremos adiante que  $S^2(p)$  e  $S^2(p, q)$ ,  $p$  e  $q$  primos entre si, juntamente com as superfícies simplesmente conexas, são as únicas orbifolds (sem bordo) de dimensão dois que não possuem recobrimento próprio.

**Definição 2.4.2** *Seja  $G$  um grupo topológico agindo em um espaço topológico  $X$ . Uma região fundamental de  $G$  é um subconjunto fechado  $F \subset X$  tal que*

$$\bigcup_{g \in G} g \cdot F = X$$

e

$$\overset{\circ}{F} \cap g \cdot \overset{\circ}{F} = \emptyset,$$

onde  $\overset{\circ}{F}$  é o interior de  $F$ , e o fecho de  $\overset{\circ}{F}$  é  $F$ .

**Lema 2.4.3** *Sejam inteiros  $p, q, r > 1$ . Então,  $S^2(p, q, r)$  possui recobrimento próprio.*

*Demonstração:* Temos três casos possíveis:

1.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$

Nesse caso é possível encontrar retas  $\gamma_1, \gamma_2$  e  $\gamma_3$  em  $\mathbb{R}^2$  determinando um triângulo com ângulos internos  $\pi/p, \pi/q$  e  $\pi/r$ . Seja  $\Gamma$  o grupo gerado por reflexões em cada uma dessas três retas. A ação de  $\Gamma$  em  $\mathbb{R}^2$  nos dá uma triangulação de  $\mathbb{R}^2$  por triângulos euclidianos congruentes como mostra a *Figura 2.6*. Cada um desses triângulos é uma região fundamental de  $\mathbb{R}^2/\Gamma$ . Se  $\Gamma' < \Gamma$  é o subgrupo dos elementos que preservam orientação, então qualquer união de dois triângulos com um lado em comum é uma região fundamental de  $\mathbb{R}^2/\Gamma'$  (*Figura 2.6*). É fácil ver que  $\mathbb{R}^2/\Gamma' = S^2(p, q, r)$ . Na realidade os únicos valores possíveis para  $(p, q, r)$  nesse caso são  $(3, 3, 3)$ ,  $(2, 3, 6)$  e  $(2, 4, 4)$ .

2.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$

Nesse caso, é possível encontrar três geodésicas de  $S^2$  determinando um triângulo com ângulos internos  $\pi/p, \pi/q$  e  $\pi/r$ . Essas geodésicas são círculos máximos de  $S^2$ . Seja  $\Gamma$  o grupo gerado por reflexões em cada uma dessas três geodésicas, que são isometrias de  $S^2$  (trataremos da geometria da esfera na *Seção 4.3*). O processo agora é análogo ao caso anterior e escrevemos  $S^2/\Gamma' = S^2(p, q, r)$ , onde  $\Gamma' < \Gamma$  é o subgrupo dos elementos que preservam orientação. Os únicos valores possíveis para  $(p, q, r)$  nesse caso são  $(2, 2, n)$ , para qualquer inteiro positivo  $n$ ,  $(2, 3, 3)$ ,  $(2, 3, 4)$  e  $(2, 3, 5)$ ; o grupo  $\Gamma$  em cada caso é, respectivamente, o grupo diedral de ordem  $2n$ , e

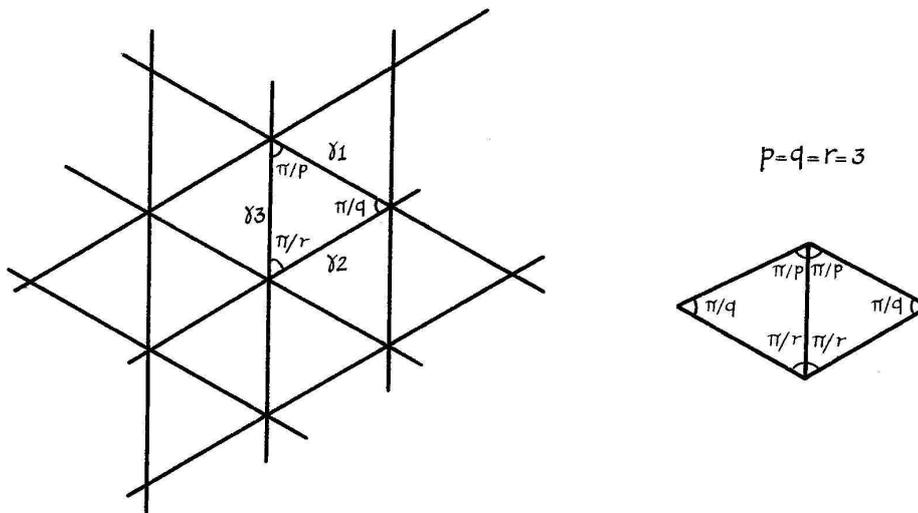


Figura 2.6: À esquerda, um ladrilhamento de  $\mathbb{R}^2$ . À direita, uma região fundamental do quociente  $\mathbb{R}^2/\Gamma'$ .

os grupos de simetrias do tetraedro, do cubo (ou do octaedro) e do dodecaedro (ou do icosaedro) (vide [13], p.412).

$$3. \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$$

Nesse caso, é possível encontrar três geodésicas de  $H^2$ , o plano hiperbólico, determinando um triângulo com ângulos internos  $\pi/p$ ,  $\pi/q$  e  $\pi/r$ . Seja  $\Gamma$  o grupo gerado por reflexões por cada uma dessas três geodésicas, que são isometrias de  $H^2$  (trataremos da geometria hiperbólica na *Seção 4.4*). Agora, escrevemos  $H^2/\Gamma' = S^2(p, q, r)$ , onde  $\Gamma' < \Gamma$  é o subgrupo dos elementos que preservam orientação.

□

**Teorema 2.4.4** *As únicas orbifolds (sem bordo) de dimensão dois que não admitem recobrimento próprio são:*

- (i)  $S^2$ ;
- (ii)  $S^2(p)$ ;
- (iii)  $S^2(p, q)$ ,  $p$  e  $q$  primos entre si;
- (iv)  $\mathbb{R}^2$ .

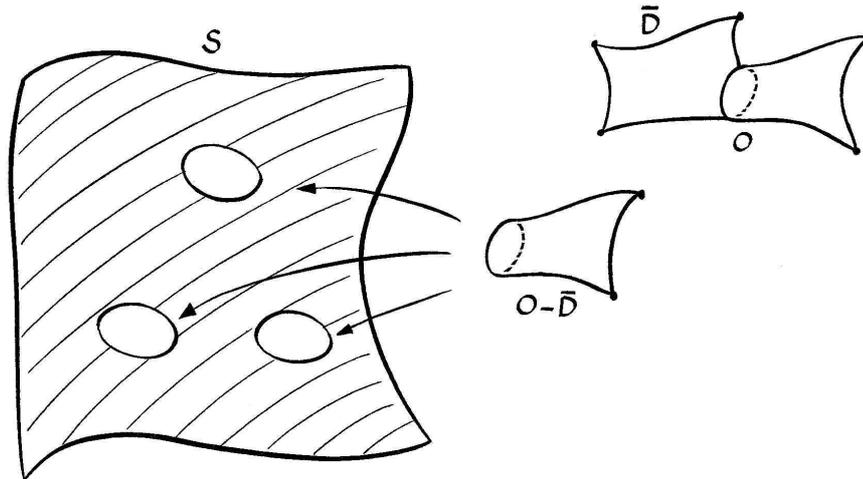


Figura 2.7: Recobrimo uma orbifold com três ou mais pontos de cone.

*Demonstração:* Seja  $O$  uma orbifold que não admite recobrimento próprio. É claro que  $O$  não possui linha refletora pois, caso contrário, essa linha seria bordo de  $X_O$ . Poderíamos então dobrar  $X_O$  ao longo do seu bordo, obtendo um recobrimento duplo  $DX_O$  de  $X_O$ . Esse recobrimento induziria um recobrimento de  $O$  por uma orbifold com espaço subjacente  $DX_O$ , conforme o *Exemplo 2.2.5*.

Se  $O$  possuir três pontos de cone ou mais, considere  $\bar{D} \subset O$  um disco fechado contendo três pontos de cone em seu interior e mais nenhum outro ponto de cone em  $\bar{D}$ . Observe que  $\bar{D}$  é isomorfo a  $S^2(p, q, r)$  menos um disco aberto que não contém ponto de cone. Já vimos que  $S^2(p, q, r)$  pode ser recoberta por  $E^2$ ,  $S^2$  ou  $H^2$ . Assim  $\bar{D}$  pode ser recoberto por  $E^2$ ,  $S^2$  ou  $H^2$  menos uma quantidade enumerável de discos abertos que não contém ponto de cone. Seja  $S$  uma tal superfície que recobre  $\bar{D}$ . Colando uma cópia de  $O - \bar{D}$  em cada componente de bordo de  $S$ , temos uma orbifold  $\tilde{O}$  que recobre propriamente  $O$  (*Figura 2.7*). Logo,  $O$  contém no máximo dois pontos de cone. Além disso,  $X_O$  é simplesmente conexo, sendo portanto  $S^2$  ou  $\mathbb{R}^2$ . Se  $X_O = S^2$ , então  $O$  é  $S^2$ ,  $S^2(p)$  ou  $S^2(p, q)$ . Se  $O = S^2(p, q)$ , então  $p$  e  $q$  são primos entre si pois, caso contrário, teríamos um inteiro  $r$  que divide  $p$  e  $q$ , e  $S^2(p/r, q/r)$  recobriria  $S^2(p, q)$ , como já observamos. Se  $X_O = \mathbb{R}^2$ , é fácil encontrar um recobrimento próprio de  $O$  caso esta possua algum ponto de cone. Portanto, os únicos casos possíveis para  $O$  são os quatro do enunciado.  $\square$

O *recobrimento universal* de uma orbifold é definido da mesma forma que para um espaço topológico qualquer: é um recobrimento  $(\tilde{O}, p)$  de  $O$ , tal

que se  $(\tilde{O}', p')$  é outro recobrimento de  $O$ , então  $(\tilde{O}, p)$  pode ser levantado a  $(\tilde{O}', p')$ , ou seja, existe aplicação

$$\phi : \tilde{O} \rightarrow \tilde{O}'$$

tal que

$$\begin{array}{ccc} \tilde{O} & \xleftarrow{\phi} & \tilde{O}' \\ & \searrow p' & \downarrow p \\ & & O \end{array}$$

comuta.

**Teorema 2.4.5** *Toda orbifold possui um recobrimento universal.*

Daremos a seguir uma demonstração desse teorema para dimensão dois, que é o objeto de nosso interesse. O caso geral é um pouco mais trabalhoso e é feito em [18], *Seção 13*.

*Demonstração para dimensão dois:* Suponha inicialmente que  $O$  tenha  $r$  pontos de cone de ordens  $n_1, \dots, n_r$  como únicas singularidades. Vamos construir o recobrimento universal  $(\tilde{O}, p)$  de  $O$ . Remova de  $X_O$   $r$  discos abertos disjuntos, contendo, cada um, somente um ponto de cone, obtendo assim uma variedade  $N$  cujo bordo é uma união de círculos  $C_1, \dots, C_r$ . Sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  os elementos de  $\pi_1(N)$  representados por  $C_1, \dots, C_r$  respectivamente. Se  $G = \langle \pi_1(N); \alpha_i^{n_i} = 1, i = 1, \dots, r \rangle$ , então o núcleo  $K$  da projeção natural  $\pi_1(N) \rightarrow G$  é um subgrupo normal de  $\pi_1(N)$  gerado por todos os conjugados de elementos  $\alpha_i^{n_i}, i = 1, \dots, r$ . Assim, podemos encontrar um recobrimento  $(\tilde{N}, p)$  de  $N$  (no sentido usual), tal que  $p_*\pi_1(\tilde{N}) = K$  (vide [4], p.175). Colando cones apropriados nas componentes do bordo de  $\tilde{N}$ , temos um recobrimento  $(\tilde{O}, p)$  de  $O$ , onde estamos usando  $p$  tanto para a aplicação definida em  $\tilde{N}$  quanto para a sua extensão a  $\tilde{O}$ .

Se  $(\tilde{O}', p')$  é outro recobrimento de  $O$ , então cada círculo  $C_i$  em  $X_O$  é levantado a curvas fechadas em  $X_{\tilde{O}'}$ . Seja  $\tilde{N}' = p'^{-1}(N)$ . Então  $p'_*\pi_1(\tilde{N}') \supset K$ , de forma que  $(\tilde{N}, p)$  é levantado a  $(\tilde{N}', p')$  ([4], p.159). Vê-se facilmente que esse levantamento pode ser estendido a um levantamento de  $(\tilde{O}, p)$  a  $(\tilde{O}', p')$ . Logo,  $(\tilde{O}, p)$  é recobrimento universal de  $O$ .

Se  $O$  possuir uma linha refletora  $l$ , considere  $(O_2, q)$  o recobrimento por duas folhas de  $O$  obtido dobrando-se  $X_O$  ao longo do seu bordo. Afirmamos que se  $(\tilde{O}_2, p)$  é recobrimento universal de  $O_2$ , então  $(\tilde{O}_2, q \circ p)$  é recobrimento universal de  $O$ . Seja  $(\tilde{O}', q')$  outro recobrimento de  $O$ .

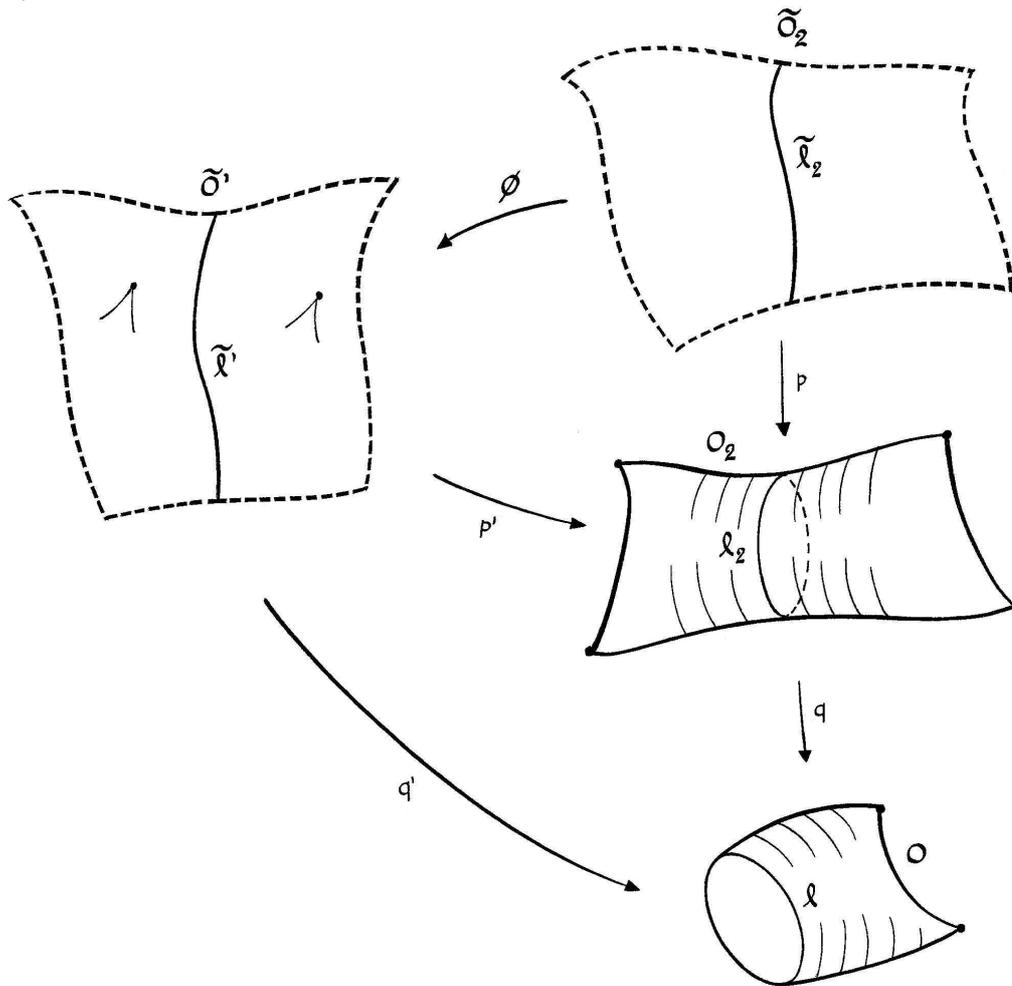


Figura 2.8: O recobrimento universal de uma orbifold com linha refletora.

Queremos encontrar levantamento

$$\phi : \tilde{O}_2 \rightarrow \tilde{O}'$$

de  $(\tilde{O}_2, q \circ p)$  a  $(\tilde{O}', q')$ . Podemos supor que  $\tilde{O}'$  não possui linha refletora. Seja  $\tilde{l}' \subset \tilde{O}'$  uma componente de  $q'^{-1}(l)$ . Não é difícil ver que  $\tilde{l}'$  divide  $\tilde{O}'$  em duas componentes homeomorfas. Logo, temos recobrimento  $(\tilde{O}', p')$  de  $O_2$  tal que  $q \circ p' = q'$ . Mas, por hipótese, existe levantamento

$$\phi : \tilde{O}_2 \rightarrow \tilde{O}'$$

de  $(\tilde{O}_2, p)$  a  $(\tilde{O}', p')$  (Figura 2.8). Como  $q \circ p' = q'$ ,  $\phi$  é levantamento de  $(\tilde{O}_2, q \circ p)$  a  $(\tilde{O}', q')$ .  $\square$

Qualquer orbifold de dimensão dois, sem bordo, tem como recobrimto universal uma das orbifolds (i), (ii), (iii) ou (iv) do *Teorema 2.4.4*. Uma orbifold é dita boa se é recoberta por uma variedade e má caso contrário. Assim, as duas proposições anteriores nos levam ao seguinte corolário:

**Corolário 2.4.6** *As únicas orbifolds de dimensão dois, más, sem bordo são:*

$$(i) S^2(p), p > 1;$$

$$(ii) S^2(p, q), p \neq q;$$

$$(iii) D^2(p), p > 1;$$

$$(iv) D^2(p, q), p \neq q;$$

onde  $D^2(p)$  é  $D^2$  com um refletor de quina de ordem  $2p$  e  $D^2(p, q)$  é  $D^2$  com dois refletores de quina com ordens  $2p$  e  $2q$  cada um.

*Demonstração:* Essas são as únicas orbifolds de dimensão dois recobertas pelas orbifolds (ii) e (iii) do *Teorema 2.4.4*.  $\square$

## 2.5

### O grupo fundamental

**Definição 2.5.1** *Seja  $(\tilde{O}, p)$  um recobrimento da orbifold  $O$ . Dizemos que uma aplicação suave  $T : \tilde{O} \rightarrow \tilde{O}$  é uma transformação de recobrimento de  $(\tilde{O}, p)$  se  $p = p \circ T$ .*

Lembremos que no caso de espaços topológicos temos uma definição análoga. Além disso, o grupo fundamental de um espaço topológico é isomorfo ao grupo das transformações de recobrimento do seu recobrimento universal. Daremos então a seguinte definição:

**Definição 2.5.2** *O grupo fundamental,  $\pi_1(O)$ , de uma orbifold  $O$  é o grupo das transformações de recobrimento do recobrimento universal de  $O$ .*

Logo, as orbifolds (i), (ii), (iii) e (iv) do Teorema 2.4.4 têm grupo fundamental trivial. Um cone  $C_q$  de ordem  $q$  tem um disco  $D$  como recobrimento universal e  $\mathbb{Z}_q$  como grupo fundamental já que  $D/\mathbb{Z}_q = C_q$ . O produto  $I \times \mathbb{R}$ ,  $I$  intervalo aberto, é recobrimento universal de uma vizinhança de uma linha refletora. Se essa linha refletora não for fechada, a respectiva vizinhança tem grupo fundamental  $\mathbb{Z}_2$ . Se for fechada, tem grupo fundamental  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ .

Assim como fazemos para espaços topológicos, podemos dar uma interpretação para o grupo fundamental em termos de classes de homotopia de laços com um ponto base. Um laço em uma orbifold  $O$ , com ponto base o ponto regular  $x_0$  de  $O$ , é entendido como uma curva fechada em  $X_O$ , com ponto base  $x_0$ , que é a imagem por  $p$  de uma curva em  $X_{\tilde{O}}$ , onde  $(\tilde{O}, p)$  é o recobrimento universal de  $O$ . Dois laços são ditos homotópicos em  $O$  se são imagens respectivas de curvas em  $X_{\tilde{O}}$  homotópicas entre si, no sentido usual de homotopia em espaços topológicos. O conjunto  $G$  de classes de equivalência de homotopia de laços com um ponto base  $x_0$  regular em  $O$  tem uma operação produto análoga ao caso de espaços topológicos, dada por

$$[\alpha][\beta] := [\alpha * \beta],$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são laços com ponto base  $x_0 \in X_O$  e  $*$  é a operação produto de laços usual de espaços topológicos. Temos um isomorfismo

$$G \rightarrow \pi_1(O)$$

$$[\alpha] \mapsto T_\alpha,$$

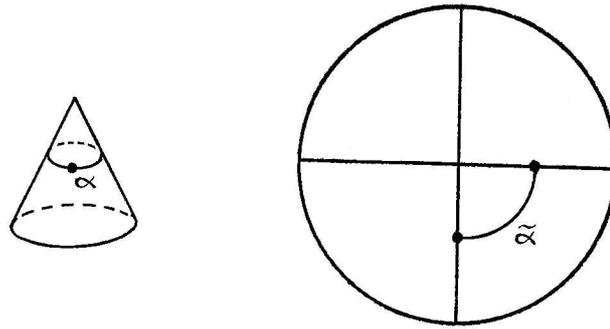


Figura 2.9: Interpretação em termos de laços para o grupo fundamental de um cone.

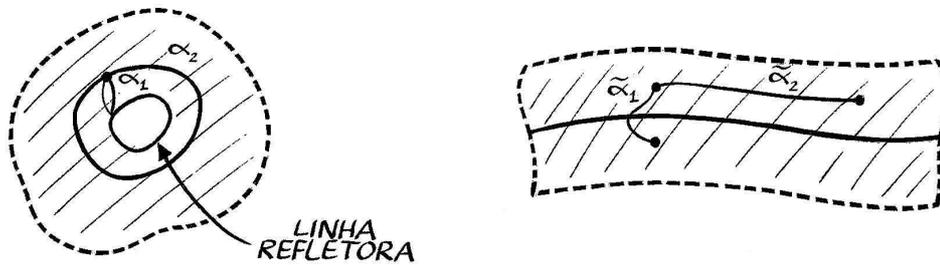


Figura 2.10: Interpretação em termos de laços para o grupo fundamental de uma vizinhança de uma linha refletora fechada.

onde  $T_\alpha$  é a transformação de recobrimento de  $\tilde{O}$  que leva o ponto inicial de  $\alpha$  no ponto final de  $\alpha$ .

As Figuras 2.9 e 2.10 ilustram o caso bi-dimensional da definição em termos de laços. Na Figura 2.9, temos um cone de ordem 4 com laço  $\alpha$  tal que  $[\alpha]$  gera  $\mathbb{Z}_4$ . Na Figura 2.10, temos uma vizinhança de uma linha refletora fechada com laços  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  tais que  $[\alpha_1]$  e  $[\alpha_2]$  geram  $\mathbb{Z}_2$  e  $\mathbb{Z}$  respectivamente. O exercício seguinte garante que a definição do grupo fundamental em termos de laços é boa.

**Exercício:** Mostre que se  $x_0$  é um ponto regular de  $O$  e  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(O) \subset \tilde{O}$ , então existe uma única transformação de recobrimento que leva  $\tilde{x}_1$  em  $\tilde{x}_2$ .

Com essa interpretação para  $\pi_1(O)$  em termos de laços, observa-se que o teorema de Van Kampen ([1], p.138 e [4], pp.113-122) também vale para orbifolds:

**Teorema 2.5.3** *Seja  $O$  uma orbifold. Sejam  $U_1$  e  $U_2$  dois abertos de  $O$  tais*

que  $U_1 \cup U_2 = O$  e  $U_1 \cap U_2$  é conexo. Então  $\pi_1(O)$  é obtido adicionando-se ao produto livre  $\pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)$  as relações  $\iota_1 * (z) = \iota_2 * (z)$ ,  $\forall z \in \pi_1(U_1 \cap U_2)$ , onde  $\iota_1 : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_1$  e  $\iota_2 : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_2$  são as inclusões.

**Exemplo 2.5.4** Seja  $O$  a orbifold com espaço subjacente  $X_O = T^2 - D$ , onde  $T^2$  é o toro e  $D$  é um disco aberto, e tal que  $\partial\bar{D}$  é um círculo refletor, ou seja, uma linha refletora fechada. Seja  $O_1 \subset O$  uma orbifold cujo espaço subjacente  $X_{O_1}$  é uma vizinhança produto de  $\partial\bar{D}$ , conexa e aberta. Assim  $O_1$  tem grupo fundamental

$$\pi_1(O_1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 = \langle d, e; e^2 = 1, [d, e] = 1 \rangle .$$

Seja  $O_2 = O - \partial\bar{D}$ . Logo,

$$\pi_1(O_2) = \langle a, b, c; [a, b] = c \rangle .$$

Usando o teorema de Van Kampen, identificando  $c$  com  $d$ , temos  $\pi_1(O) = \langle a, b, c, e; [a, b] = c, [c, e] = 1, e^2 = 1 \rangle$ . De forma simplificada,

$$\pi_1(O) = \langle a, b, e; [[a, b], e] = 1, e^2 = 1 \rangle .$$

## 2.6

### A Característica de Euler

Outro invariante de espaços topológicos que é estendido para orbifolds é a característica de Euler. Seja  $O$  uma orbifold e  $X_O$  seu espaço subjacente. Triangule  $X_O$  por simplexes  $C_i$ ,  $i \in I$ ,  $I$  conjunto de índices, de tal forma que o grupo associado a cada ponto de um dado simplexo é constante em seu interior. Essa triangulação é um homeomorfismo entre  $X_O$  e um complexo simplicial (vide [1], p.121).

**Definição 2.6.1** A característica de Euler de uma orbifold  $O$  é dada por

$$\chi(O) = \sum_{i \in I} \frac{(-1)^{\dim(C_i)}}{|\Gamma(C_i)|},$$

onde  $|\Gamma(C_i)|$  é a ordem do grupo  $\Gamma(C_i)$  associado ao simplexo  $C_i$ .

Diferentemente do caso para espaços topológicos, a característica de Euler de uma orbifold pode não ser um inteiro.

**Exemplo 2.6.2** Se  $\gamma_1, \gamma_2$  e  $\gamma_3$  são retas em  $E^2$  que formam um triângulo com todos os ângulos internos iguais a  $\pi/3$ , e  $\Gamma$  é o grupo gerado pelas reflexões nessas retas,  $\Delta_{3,3,3} = E^2/\Gamma$  é uma orbifold que admite a triangulação da Figura 2.11, onde  $V_1, V_2$  e  $V_3$  são simplexes de dimensão zero com grupo diedral  $D_6$  associado, por serem pontos de quina,  $A_1, A_2$  e  $A_3$  são simplexes de dimensão um com grupo  $\mathbb{Z}_2$  associado, por serem linhas refletoras, e  $F$  é um simplexo de dimensão dois com o grupo trivial associado. Logo, pela proposição seguinte,

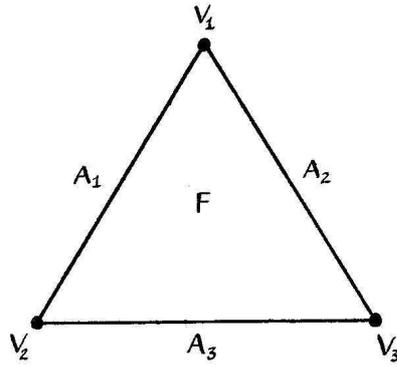
$$\chi(\Delta_{3,3,3}) = 3 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0$$

Observando a demonstração do Lema 2.4.3, vemos que essa orbifold é recoberta por  $S^2(3, 3, 3)$  por duas folhas. Logo, pela proposição seguinte,

$$\chi(S^2(3, 3, 3)) = 0$$

**Proposição 2.6.3** Se  $(\tilde{O}, p)$  é um recobrimento por  $d$  folhas de uma orbifold  $O$ , então  $\chi(\tilde{O}) = d\chi(O)$ .

*Demonstração:* Triangule  $X_O$  por simplexes  $C_i$ ,  $i \in I$ . Assim, se  $C_i$  é um simplexo em  $X_O$ , sua pré-imagem é uma união de simplexes  $\tilde{C}_i^1, \dots, \tilde{C}_i^{r_i} \subset X_{\tilde{O}}$

Figura 2.11: Triangulando a orbifold  $\Delta_{3,3,3}$ .

de mesma dimensão e disjuntas. Isso, feito para todo simplexo em  $X_O$ , determina uma triangulação em  $X_{\tilde{O}}$ . Observe que

$$d = \sum_{j=1}^{r_i} \frac{|\Gamma(C_i)|}{|\Gamma(\tilde{C}_i^j)|} \quad \therefore \quad d|\Gamma(C_i)|^{-1} = \sum_{j=1}^{r_i} |\Gamma(\tilde{C}_i^j)|^{-1}$$

para cada simplexo  $C_i$  em  $X_O$ . Assim,

$$\chi(\tilde{O}) = \sum_{i \in I} (-1)^{\dim(C_i)} \sum_{j=1}^{r_i} |\Gamma(\tilde{C}_i^j)|^{-1} = d\chi(O). \quad \square$$

Usando este resultado, podemos obter uma fórmula geral para a característica de Euler de orbifolds fechadas de dimensão dois. Observe que  $\chi(D^2) = 1$ ,  $\chi(S^1) = 0$  e que a característica de Euler de um cone de ordem  $q$  é  $1/q$ . Assim, se  $O$  é uma orbifold cujas únicas singularidades são  $n$  pontos de cone de ordens  $q_1, \dots, q_n$  cada um, então

$$\chi(O) = \chi(X_O) - n + \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} = \chi(X_O) - \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{q_i}\right).$$

Se, além desses pontos de cone,  $O$  possuir  $m$  refletores de quina de ordens  $2r_1, \dots, 2r_m$ , então

$$\begin{aligned} \chi(O) &= \frac{1}{2} \left( 2\chi(X_O) - 2n + 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} - m + \sum_{j=1}^m \frac{1}{r_j} \right) = \\ &= \chi(X_O) - \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{1}{r_j}\right), \end{aligned}$$

que é conhecida como *Fórmula de Riemman-Hurwitz*. Essa forma é facilmente obtida a partir da anterior dobrando-se  $X_O$  ao longo do bordo, aplicando a *Proposição 2.6.3* e observando-se que os  $m$  refletores de quina tornam-se  $m$  pontos de cone enquanto que os  $n$  pontos de cone tornam-se  $2n$  pontos de cone.

Dizemos que uma orbifold  $O^n$  possui estrutura parabólica, elíptica ou hiperbólica se  $O$  pode ser escrita com o quociente de, respectivamente,  $E^n$ ,  $S^n$  ou  $H^n$  por um grupo de isometrias. O seguinte teorema, devido a W.Thurston ([18], *Seção 13*), é uma extensão do teorema de Gauss-Bonnet para superfícies:

**Teorema 2.6.4** *Seja  $O$  uma orbifold de dimensão dois fechada. Então,*

- $O$  é boa  $\Leftrightarrow O$  possui estrutura elíptica, parabólica ou hiperbólica;
- $\chi(O) < 0 \Leftrightarrow O$  tem estrutura hiperbólica;
- $\chi(O) = 0 \Leftrightarrow O$  tem estrutura parabólica;
- $\chi(O) > 0 \Leftrightarrow O$  é má ou tem estrutura elíptica.

O que é feito é classificar uma a uma as orbifolds  $O$  fechadas com  $\chi(O) \geq 0$  e encontrar estruturas parabólicas e elípticas para elas. Se  $\chi(O) < 1$ , é construída uma estrutura hiperbólica para  $O$ .

Outro resultado interessante e útil é o seguinte:

**Teorema 2.6.5** *Toda orbifold boa, fechada e de dimensão dois, é finitamente recoberta por uma superfície.*

Em [13], p.426, encontram-se indicações da prova deste teorema.

## 2.7

### Fibrados sobre orbifolds

**Definição 2.7.1** Um fibrado é uma estrutura composta por uma variedade  $E$ , dita o espaço total, uma variedade  $B$ , dita o espaço base, e uma aplicação suave

$$\eta : E \rightarrow B,$$

dita a projecção, juntamente com os seguintes objetos: uma variedade  $F$ , dita a fibra, uma cobertura  $\{U_j\}_{j \in J}$  por abertos de  $B$ , onde  $J$  é um conjunto de índices, e, para cada  $j \in J$ , um difeomorfismo

$$\phi_j : \eta^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F$$

tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} U_j \times F & \xleftarrow{\phi_j} & \eta^{-1}(U_j) \\ & \searrow & \downarrow \eta \\ & & U_j \end{array}$$

Cada par  $(U_j, \phi_j)$ ,  $j \in J$ , é dito uma trivialização, ou uma carta trivializadora, de  $E$ . O conjunto  $\{(U_j, \phi_j)\}_{j \in J}$  é dito um atlas de trivializações de  $E$ . Se  $u \in U_j$ ,  $\eta^{-1}(u)$  é a fibra sobre  $u$  e é claramente difeomorfa a  $F$  por  $\phi_j|_{\eta^{-1}(u)}$ . Representamos um tal fibrado por  $(E, B, \eta)$  ou simplesmente  $\eta$ . Podemos generalizar esta definição a orbifolds como se segue:

**Definição 2.7.2** Um fibrado sobre uma orbifold é uma estrutura composta por uma orbifold  $O_E$ , dita o espaço total, uma orbifold  $O_B$ , dita o espaço base, e uma aplicação suave

$$\eta : O_E \rightarrow O_B,$$

dita a projecção, juntamente com os seguintes objetos: uma variedade  $F$ , dita a fibra, uma cobertura  $\{U_j\}_{j \in J}$  por abertos de  $O_B$ , onde  $J$  é um conjunto de índices e  $U_j$  é difeomorfo, por carta  $(U_j, \phi_j)$  do atlas de  $O_B$ , a  $\tilde{U}_j/\Gamma_j$ ,  $\Gamma_j$  grupo finito agindo no aberto  $\tilde{U}_j \subset \mathbb{R}^n$ , e, para cada  $j \in J$ , um difeomorfismo

$$\psi_j : \eta^{-1}(U_j) \rightarrow (\tilde{U}_j \times F)/\Gamma_j,$$

onde a ação de  $\Gamma_j$  em  $\tilde{U}_j \times F$  é equivariante com relação à projeção

$$p_j : \tilde{U}_j \times F \rightarrow \tilde{U}_j,$$

ou seja,

$$p_j(\gamma \cdot (u, x)) = \gamma \cdot p_j(u, x) = \gamma \cdot u, \quad \forall (u, x) \in \tilde{U}_j \times F,$$

e tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{U}_j \times F & \longrightarrow & (\tilde{U}_j \times F)/\Gamma_j & \xleftarrow{\psi_j} & \eta^{-1}(U_j) \\ p_j \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \eta \\ \tilde{U}_j & \longrightarrow & \tilde{U}_j/\Gamma_j & \xleftarrow{\phi_j} & U_j \end{array}$$

Cada par  $(U_j, \psi_j)$ ,  $j \in J$ , é dito uma trivialização, ou uma carta trivializadora, de  $O_E$ . O conjunto  $\{(U_j, \psi_j)\}_{j \in J}$  é dito um atlas de trivializações de  $O_E$ . Se  $u \in U_j$ ,  $\eta^{-1}(u)$  é a fibra sobre  $u$ , e é difeomorfa ao quociente de  $F$  por um grupo finito, sendo portanto uma orbifold. Representamos um tal fibrado por  $(O_E, O_B, \eta)$  ou simplesmente  $\eta$ .