

## 4

### As Oito Geometrias

Mencionamos na introdução que cada uma das oito geometrias modelo é representada por uma variedade riemanniana simplesmente conexa (teorema de classificação de Thurston). Neste capítulo descrevemos brevemente cada uma destas oito variedades. Uma estrutura importante nesse estudo é a de uma conexão num fibrado principal. Conforme veremos na *Seção 4.1*, um fibrado principal é um fibrado cuja fibra é o grupo estrutural (*Definição 4.1.1*) e este age na fibra por multiplicação à esquerda. Uma conexão nesse fibrado (*Definição 4.1.9*) é um campo de planos transversos às fibras que, num certo sentido, é compatível com a ação do grupo estrutural. A curvatura de uma conexão é uma 2-forma diferencial definida na base do fibrado principal e com valores na álgebra de Lie do seu grupo estrutural. Esta 2-forma nos dá uma medida da não integrabilidade da conexão. Uma conexão é integrável, ou seja, é tangente a alguma folheação, se e só se a sua 2-forma curvatura é identicamente nula (*Proposição 4.1.13*).

## 4.1

### Fibrados $(G, X)$ e conexões

**Definição 4.1.1** *Seja  $G$  um grupo de Lie agindo em uma variedade  $X$ . Dizemos que  $G$  é grupo estrutural de um fibrado  $(E, B, \eta)$  com fibra  $X$ , se  $(E, B, \eta)$  tem um atlas de trivializações  $\{(U_j, \phi_j)\}_{j \in J}$ ,*

$$\phi_j : \eta^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times X,$$

tal que sempre que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  para  $i, j \in J$ ,

$$\psi_{ij} := \phi_i \circ \phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times X \rightarrow (U_i \cap U_j) \times X$$

é dado por

$$\psi_{ij}(u, x) = (u, \gamma_{ij}(u) \cdot x), \quad \forall x \in X, \forall u \in U_i \cap U_j$$

onde a aplicação

$$\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G,$$

é suave e chamada de aplicação de cociclo.

Se  $(E, B, \eta)$  tem fibra  $X$  e grupo estrutural  $G$ ,  $(E, B, \eta)$  é dito um fibrado  $(G, X)$ . Se  $(E, B, \eta)$  é também um fibrado  $(H, X)$ , onde  $H$  é um subgrupo de  $G$ , dizemos que este fibrado admite uma redução ao subgrupo  $H$ . Um fibrado  $(G, G)$ , onde  $G$  age por multiplicação à esquerda, é dito um fibrado principal  $G$ .

#### Exemplo 4.1.2 O Fibrado produto

Se  $G$  é um grupo de Lie agindo em  $X$  e  $B$  é uma variedade,  $(B \times X, B, \pi)$ , onde  $\pi$  é a projeção na primeira coordenada, é dito um fibrado produto.

#### Exemplo 4.1.3 A Faixa de Möbius

Seja  $I = [0, 1]$  e seja  $C_2 = \{id, \rho\}$  o grupo cíclico de ordem dois agindo não trivialmente em  $I$ . A faixa de Möbius é obtida do produto  $I \times I$  com identificação  $(1, t) \approx (0, \rho(t))$  e é um fibrado  $(C_2, I)$ .

**Definição 4.1.4** *Sejam  $X$  um espaço vetorial e  $GL(X)$  o grupo dos isomorfismos lineares de  $X$ . Um fibrado  $(GL(X), X)$  é dito um fibrado vetorial.*

*Notação:* Se  $X = \mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ),  $GL(X)$  é denotada por  $GL(n, \mathbb{R})$  (ou, respec.,  $GL(n, \mathbb{C})$ ).

**Exemplo 4.1.5 O Fibrado tangente**

O fibrado tangente,  $TM$ , de uma variedade  $M$  de dimensão  $n$  é um fibrado vetorial  $(GL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$  sobre  $M$ . A escolha de uma métrica riemanniana para  $M$  determina uma redução ao subgrupo  $O(n) < GL(n, \mathbb{R})$  dos isomorfismos lineares ortogonais. Se  $M$  tem uma métrica riemanniana,  $T^1M$ , o fibrado tangente unitário de  $M$ , é um fibrado  $(O(n), S^{n-1})$ , onde  $S^{n-1}$  é a esfera unitária com centro na origem de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 4.1.6** Sejam  $(E_1, B_1, \eta_1)$  e  $(E_2, B_2, \eta_2)$  dois fibrados  $(G, X)$ . Dizemos que  $(E_1, B_1, \eta_1)$  e  $(E_2, B_2, \eta_2)$  são isomorfos se existem difeomorfismos  $\tilde{f}: E_1 \rightarrow E_2$  e  $f: B_1 \rightarrow B_2$  tais que

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & E_2 \\ \downarrow \eta_1 & & \downarrow \eta_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

comuta e, se  $(U_1, \phi_1)$  e  $(U_2, \phi_2)$  são trivializações de  $E_1$  e  $E_2$  respectivamente, sempre que  $V_2 = f(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ ,  $V_1 = f^{-1}(V_2)$ , a aplicação

$$\phi_{1,2} := \phi_2 \circ \tilde{f} \circ (\phi_1^{-1}|_{V_1}) : V_1 \times X \rightarrow V_2 \times X$$

tem a forma

$$\phi_{1,2}(u, x) = (f|_{V_1}(u), \gamma(u) \cdot x),$$

onde  $\gamma: V_1 \rightarrow G$  é uma aplicação suave.

Uma tal  $\tilde{f}$  é dita um isomorfismo entre  $(E_1, B_1, \eta_1)$  e  $(E_2, B_2, \eta_2)$ .

**Exemplo 4.1.7 Fibrados de referenciais lineares**

O fibrado de referenciais lineares,  $L(M)$ , de uma variedade  $M$  é o fibrado principal com grupo estrutural  $GL(n, \mathbb{R})$  e projeção que leva cada referencial linear de  $T_xM$  em  $x$ . É fácil ver que  $GL(n, \mathbb{R})$  age simplesmente transitivamente em cada fibra de  $L(M)$ . Assim,  $L(M)$  é um fibrado principal  $GL(n, \mathbb{R})$  sobre  $M$ . Se  $M$  for uma variedade riemanniana, podemos analogamente considerar o fibrado de referenciais ortonormais,  $P(M)$ , que é um fibrado principal  $O(n)$ .

Se  $M$  for orientável,  $P(M)$  tem duas componentes isomorfas. Cada componente é um fibrado principal  $SO(n)$ , onde  $SO(n) < O(n)$  é o subgrupo dos elementos que preservam orientação.

**Definição 4.1.8** Um fibrado  $(G, X)$  sobre base  $B$  é dito um fibrado trivial se é isomorfo ao fibrado produto  $B \times X$ .

Seja  $(E^{n+m}, B^n, \eta)$  um fibrado  $(G, X)$ . Definiremos, a partir de agora, uma conexão neste fibrado. Seja  $\tau$  um campo de planos de dimensão  $n$  transverso às fibras. Seja  $a > 0$ . Considere a curva

$$\alpha : [0, a] \rightarrow B, \quad \alpha(0) = p, \alpha(a) = q.$$

É fácil ver que o fibrado  $(E|_{\eta^{-1}(\alpha([0, a])}), \alpha([0, a]), \eta|_{\eta^{-1}(\alpha([0, a])})})$  é trivial por ter como base um intervalo, sendo isomorfo ao fibrado produto  $[0, 1] \times X$ . Então  $\tau$  define em  $[0, 1] \times X$  um campo de retas transverso à folheação  $\{t\} \times X$ . Um fluxo desse campo define um difeomorfismo

$$f_\alpha : X_p \rightarrow X_q,$$

onde  $X_p$  e  $X_q$  são as fibras sobre  $p$  e  $q$  respectivamente. Sejam  $(U_i, \phi_i)$  e  $(U_j, \phi_j)$  trivializações de  $(E, B, \eta)$  tais que  $p \in U_i$  e  $q \in U_j$ . Se

$$H_\alpha = \phi_j \circ f_\alpha \circ \phi_i^{-1}|_{\{p\} \times X} : \{p\} \times X \rightarrow \{q\} \times X,$$

então  $h_\alpha$ , definido por

$$H_\alpha(p, x) = (q, h_\alpha(x)),$$

é um difeomorfismo da fibra  $X$ . Com essas notações temos:

**Definição 4.1.9** *Se, para toda a curva  $\alpha : [0, a] \rightarrow B$ ,  $h_\alpha$  é um elemento do grupo estrutural  $G$ , dizemos que  $\tau$  é uma conexão no fibrado  $(E, B, \eta)$ .*

Se  $v \in X_p$ ,  $f_\alpha(v)$  é dito o transporte paralelo de  $v$  ao longo da curva  $\alpha$ . O elemento  $h_\alpha \in G$  é chamado de holonomia da curva  $\alpha$ . É claro que a holonomia depende das trivializações escolhidas. Uma curva  $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow E$  é dita horizontal se é tangente à conexão em cada ponto e vertical se é tangente às fibras em cada ponto.

**Definição 4.1.10** *Seja  $TM$  o fibrado tangente de uma variedade  $M$ , com uma conexão. Uma curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  é dita uma geodésica, se para todo  $a \in (0, 1]$ , o transporte paralelo de  $\gamma'(0)$  ao longo de  $\gamma|_{[0, a]}$  é  $\gamma'(a)$ .*

#### Exemplo 4.1.11 Conexão de Levi-Cività

*Seja  $P(M)$  o fibrado de referenciais ortonormais de uma variedade riemanniana  $M$ . Esse fibrado admite uma conexão chamada de conexão de Levi-Cività determinada unicamente pela métrica riemanniana (vide [9], p.55, e [7], p.158).*

Seja  $S$  uma superfície orientada com uma métrica riemanniana. Como  $SO(2)$  age simplesmente transitivamente em cada fibra de  $T^1S$ , podemos identificar  $T^1S$  com a componente conexa dos referenciais ortonormais positivos de  $S$ . Descrevemos, no que se segue, a conexão de Levi-Civita em  $T^1S$ . Na presença de uma métrica, o conceito de geodésica pode ser definido em função só desta métrica. Uma geodésica  $\gamma$  é uma curva que localmente minimiza distâncias e é tal que  $\|\gamma'(t)\|$  é constante (vide [10]). A noção de transporte paralelo pode ser obtida da seguinte forma. Seja uma geodésica

$$\gamma : [0, a] \rightarrow S, \quad \gamma(0) = x, \gamma(a) = y, a > 0.$$

Seja  $v \in T_xS$ , um vetor sobre  $x$ . Se  $\eta : TS \rightarrow S$  é a projeção natural, defina curva

$$\alpha_v : [0, a] \rightarrow TS, \quad \alpha_v(0) = v,$$

de forma que  $\alpha_v$  seja levantamento de  $\gamma$ , isto é,

$$\eta \circ \alpha_v(t) = \gamma(t),$$

e tal que

$$\|\alpha_v(t)\| = \|\alpha_v(0)\|$$

e

$$\alpha_v(t) \cdot \gamma'(t) = \alpha_v(0) \cdot \gamma'(0),$$

para todo  $t$ . Como  $S$  tem dimensão dois, essa curva está bem definida. O vetor  $\alpha_v(a)$  é o transporte paralelo de  $v$  ao longo de  $\gamma$ . Se considerarmos transportes paralelos de  $v \in T_xS$  por todas as geodésicas partindo de  $x$ , teremos uma superfície  $N_v$  definida numa vizinhança de  $v$ . Fazendo isso para cada  $x \in S$ , temos definida  $\tau$ , a conexão de *Levi-Civita* em  $T^1S$ , por

$$\tau_v := T_v(N_v) \cap T^1S.$$

As noções de transporte paralelo e geodésicas dessa conexão (*definições 4.1.9 e 4.1.10*) coincidem com as que acabamos de definir em função só da métrica. A métrica canônica em  $T^1S$  ([9], p.79) é definida de forma que  $\tau$  seja ortogonal às fibras e o produto interno de dois vetores em  $\tau_v$  coincida com o produto interno das suas projeções em  $T_{\eta(v)}S$ .

Passamos agora a definir a curvatura de uma conexão num fibrado principal. Seja  $(E, B, \eta)$  um fibrado principal  $G$  com conexão  $\tau$ . A curvatura de  $\tau$  é uma 2-forma diferencial  $\Omega$  no espaço base  $B$  com valores em  $\mathcal{G}$ , a álgebra de Lie de  $G$ , definida como se segue. Fixe  $b \in B$ . Sejam  $u, v \in T_b B$ . Podemos tomar extensões locais  $X$  e  $Y$  de  $u$  e  $v$  respectivamente tais que  $X$  e  $Y$  comutam. Levante  $X$  e  $Y$  a campos horizontais  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  em  $M$ , ou seja,  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  são campos horizontais tais que  $d\eta(\tilde{X}) = X$  e  $d\eta(\tilde{Y}) = Y$ . Como  $X$  e  $Y$  comutam, para qualquer  $p \in \eta^{-1}(b)$ , o colchete de Lie  $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p$  é tangente à fibra  $G$  e logo é identificado com um elemento de  $\mathcal{G}$ .

**Definição 4.1.12** *Defina a forma curvatura  $\Omega$  em  $p$  por*

$$\Omega_p(u, v) = -\frac{1}{2} [\tilde{X}, \tilde{Y}]_p \in \mathcal{G}.$$

Por resultado em [7], p.78, verifica-se que esta definição independe das extensões  $X$  e  $Y$  tomadas (veja também [17], p.168).

Dizemos que um campo de planos é integrável se é tangente a uma folheação de mesma dimensão. A integrabilidade de uma conexão está diretamente relacionada com a sua forma curvatura como mostra a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em [17], pp.177-178:

**Proposição 4.1.13** *Uma conexão em um fibrado principal é um campo de planos integrável se e só sua forma curvatura é identicamente nula.*

Uma conexão num fibrado por círculos ou retas sobre uma superfície é dita uma estrutura de contato se a sua forma curvatura nunca se anula. Outra propriedade da curvatura é que, se  $\alpha$  é uma curva fechada, homotopicamente trivial, na base  $B$  de um fibrado principal com conexão  $\tau$ , então a holonomia  $h_\alpha$  é determinada pela forma curvatura de  $\tau$ .

**Proposição 4.1.14** *Sejam  $(E, B, \eta)$  e  $(E', B, \eta')$  dois fibrados  $G$  principais com conexões  $\tau$  e  $\tau'$  respectivamente, com formas curvatura  $\Omega$  e  $\Omega'$  respectivamente. Suponha  $B$  simplesmente conexa. Se  $\Omega = \Omega'$  em cada ponto de  $B$ , então existe isomorfismo entre os dois fibrados que leva  $\tau$  em  $\tau'$ . Em particular,  $E$  é difeomorfo a  $E'$ .*

Construímos um isomorfismo  $\psi : E \rightarrow E'$  da seguinte forma. Fixe um ponto  $b \in B$ . Sejam  $E_b \subset E$  e  $E'_b \subset E'$  as fibras sobre  $b$ . Sejam

$$\phi : E_b \rightarrow E'_b$$

e

$$\phi' : E'_b \rightarrow G$$

difeomorfismos induzidos pelas trivializações dos respectivos fibrados. Então temos difeomorfismo

$$f = \phi'^{-1} \circ \phi : E_b \rightarrow E'_b.$$

Assim,

$$\phi' \circ f \circ \phi^{-1} : G \rightarrow G$$

é a identidade. Em outras palavras,

$$\begin{array}{ccc} E_b & \xrightarrow{f} & E'_b \\ & \searrow \phi & \swarrow \phi' \\ & & G \end{array}$$

comuta.

Seja  $x \in E$ . Queremos definir  $\psi(x)$ . Tome curva

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow B,$$

$\alpha(0) = b$ ,  $\alpha(1) = \eta(x)$ . Seja

$$\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow E$$

levantamento horizontal de  $\alpha$  em  $E$  tal que  $\tilde{\alpha}(1) = x$ . Então  $\tilde{\alpha}(0) \in E_b$ . Seja

$$\tilde{\alpha}' : [0, 1] \rightarrow E'$$

levantamento horizontal de  $\alpha$  em  $E'$  tal que  $\tilde{\alpha}'(0) = f(\tilde{\alpha}(0))$ . Defina

$$\psi(x) = \tilde{\alpha}'(1).$$

Veja a *Figura 4.1*. A independência da curva  $\alpha$  tomada vem do fato das formas curvatura  $\Omega$  e  $\Omega'$  serem iguais e de  $B$  ser simplesmente conexo. Deixamos essa parte a cargo do leitor (*Sugestão*: observe que, pela observação feita antes da proposição, laços homotopicamente triviais têm mesma holonomia em  $E$  e  $E'$ ).

Concluimos essa seção com o seguinte resultado:

**Teorema 4.1.15** *Seja  $S$  uma superfície orientada com métrica riemanniana de curvatura seccional constante igual a  $k$ . Seja  $\Omega$  a forma curvatura*

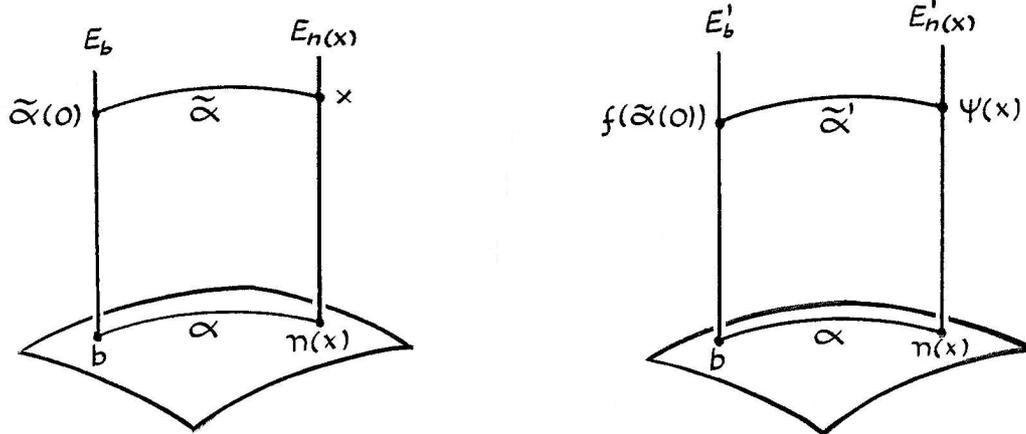


Figura 4.1: Construindo o isomorfismo  $\psi$  da *Proposição 4.1.14*.

da conexão de Levi-Civita em  $T^1S$  e  $\omega$  a forma volume em  $S$ . Então

$$\Omega = k\omega$$

Este é conhecido como o *Theorema Egregium* de Gauss (vide [7], p.204).

**4.2** $E^3$ 

Definimos o espaço euclidiano,  $E^n$ , como  $\mathbb{R}^n$  com métrica dada por

$$ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2,$$

dita a métrica euclidiana. A norma dada pela distância do ponto à origem é dita a norma euclidiana. A curvatura seccional de  $E^n$  é constante e igual a zero. Considerando a estrutura de espaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ , cada elemento de  $\text{Isom}(E^n)$  é da forma

$$v \mapsto Av + b,$$

onde  $b \in \mathbb{R}^n$  e  $A \in O(n)$ , o grupo dos isomorfismos lineares ortogonais de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $A = I$ , a identidade de  $\mathbb{R}^n$ , a isometria acima é uma translação pura. Mudando a origem de  $\mathbb{R}^n$  se necessário, podemos escrever cada elemento de  $\text{Isom}(E^n)$  que fixa algum ponto de  $E^n$  como  $v \mapsto Av$ . O grupo  $\text{Isom}(E^n)$  age transitivamente em  $E^n$  e com estabilizador de ponto  $O(n)$ , cuja componente conexa da identidade é  $SO(n) < O(n)$ , o subgrupo dos elementos que preservam orientação.

Uma variedade de dimensão  $n$  é dita euclidiana se é escrita como  $E^n/G$ , onde  $G < \text{Isom}(E^n)$ . Nesse caso,  $G$  é discreto e age livremente em  $E^n$ . É interessante, então, descrever as isometrias de  $E^3$  sem ponto fixo. Se  $g$  é uma tal isometria, temos três possibilidades:

- $g$  é uma translação pura;
- $g$  é uma translação seguida de uma reflexão por um plano paralelo à direção de translação;
- $g$  é uma translação seguida de uma rotação em um eixo paralelo à direção de translação.

É fácil classificar todas as variedades euclidianas compactas de dimensão dois: são elas o toro e a garrafa de Klein (vide [13], p.410). Em dimensão três isso é bem mais difícil e é feito em [17], pp.231-242, e em [13], pp.443-448. Verifica-se também que se  $G < \text{Isom}(E^3)$  é discreto, cocompacto e agindo livremente em  $E^3$ , existe uma direção, ou seja, uma família de retas paralelas em  $E^3$ , invariante pela ação de  $G$ . Além disso,  $\Gamma < G$ , o subgrupo das translações puras, tem índice finito em  $G$ , sendo portanto o grupo fundamental do toro  $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ . Então  $E^3/G$  é finitamente coberta por  $T^3 = E^3/\Gamma$ . Ambos os quocientes recebem folheações por círculos induzidas pela família de retas paralelas invariantes pela ação de  $G$  (vide

[13]). No caso de  $T^3$ , essa folheação induzida é a folheação produto  $S^1 \times T^2$ , onde  $T^2 = S^1 \times S^1$  é o toro de dimensão dois.

Logo, se  $M$  é uma variedade euclidiana compacta de dimensão três, temos estrutura  $(M, O, \eta)$  de fibrado de Seifert proveniente de uma família de retas paralelas em  $E^3$ . Como  $\chi(T^2) = 0$ , pelas *Proposições 2.6.3 e 2.6.4*,  $\chi(O) = 0$  e, pela *Proposição 3.4.6*,  $e(\eta) = 0$ .

## 4.3

 $S^3$ 

Definimos  $S^n$  como a esfera unitária com centro na origem de  $E^{n+1}$ , com a métrica induzida. A curvatura seccional de  $S^n$  é constante igual a um e  $\text{Isom}(S^n)$  é isomorfo a  $O(n+1)$ . As geodésicas (completas) de  $S^n$  são os círculos com centro na origem de  $E^{n+1}$ , cada um dado pela intersecção de  $S^n$  com um plano de dimensão dois que passa pela origem. A reflexão num plano  $\pi$  de dimensão  $n$  que passa pela origem induz uma isometria de  $S^n$ , dita uma reflexão na esfera  $\pi \cap S^n$  de dimensão  $n-1$  que, por sua vez, é dita uma esfera geodésica. Tais reflexões geram  $O(n+1)$ . Uma isometria importante de  $S^n$  é a aplicação antípoda

$$A : x \mapsto -x.$$

Esta isometria preserva orientação se e só se  $n$  é ímpar ( $n+1$  é par). O quociente  $S^n / \langle A \rangle$ , dito o espaço projetivo real de dimensão  $n$ ,  $P^n$ , recebe uma métrica induzida por  $S^n$  e é orientável se e só se  $n$  é ímpar. O seguinte lema nos será útil no futuro:

**Lema 4.3.1** *O único elemento de  $O(n+1)$  de ordem dois que age livremente em  $S^n$  é a aplicação antípoda.*

*Demonstração:* Seja  $g \in O(n+1)$  de ordem dois agindo livremente em  $S^n$ . Seja  $x \in S^n$ . Mostremos que  $g(x) = -x$ . Por hipótese,  $g(x) \neq x$ . Então, se  $g(x) \neq -x$ , temos um plano  $\pi$  de dimensão dois determinado por  $x$ ,  $g(x)$  e a origem de  $E^{n+1}$ . Logo,  $g$  preserva  $\pi$  e também a geodésica  $\gamma = \pi \cap S^n$ . Como  $g$  tem ordem dois,  $g^2(x) = x$ . Mas  $g$  não pode ser reflexão de  $\gamma$  por agir livremente em  $S^n$ . Logo, deve levar cada ponto de  $\gamma$  em seu antípoda. Portanto,  $g(x) = -x$ .  $\square$

Topologicamente,  $S^n$  é equivalente a  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  pela projeção estereográfica

$$P : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$$

que descrevemos no que se segue. Considere  $\mathbb{R}^{n+1}$  com base ortonormal canônica  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ . Seja o plano  $\sigma = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \approx \mathbb{R}^n$ . Construiremos homeomorfismo

$$P : S^n \rightarrow \sigma \cup \{\infty\} \approx \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}.$$

Seja  $x \in S^n$ . Queremos definir  $P(x)$ . Se  $x \neq e_{n+1}$ , tome a reta  $r_x$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  passando por  $x$  e  $e_{n+1}$ . Defina  $P(x) = r_x \cap \sigma$  (*Figura 4.2*). Para que

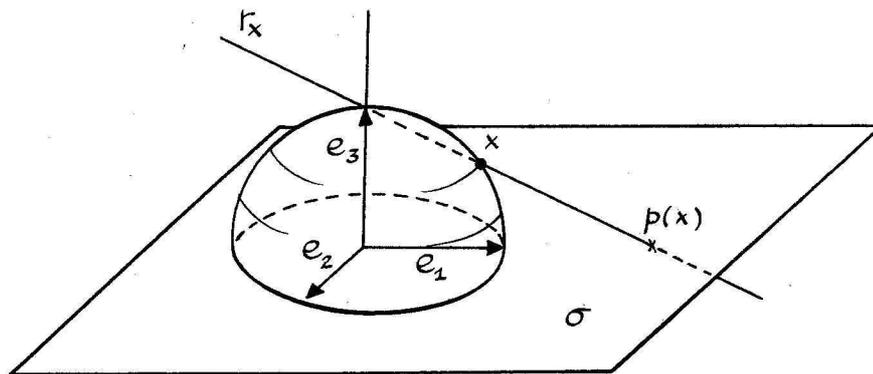


Figura 4.2: A projeção estereográfica.

$P$  seja homeomorfismo devemos definir  $P(e_{n+1}) = \infty$ , completando nossa definição. Em particular,  $P(-e_{n+1}) = 0$ .

Trataremos agora do caso  $n = 3$ , que mais nos interessa. Segue aqui um breve resumo do que faremos nesta seção. Inicialmente, daremos uma descrição da estrutura de anel em  $\mathbb{R}^4$  dada pelos quatérnios ( $\mathcal{H}$ ). As ações naturais à direita e à esquerda de  $S^3 \subset \mathcal{H}$  em  $\mathcal{H}$  são feitas por isometrias de  $E^4$  que preservam orientação. Logo, as ações induzidas correspondentes de  $S^3$  em  $S^3$  também são por isometrias de  $S^3$  que preservam orientação. Veremos também que podemos usar tais ações para redefinir os fibrados  $\eta_{1,1}$  (fibrado de Hopf) e  $\eta_{1,-1}$  do *Exemplo 3.1.2*, e para mostrar que  $SO(4)$ , a componente conexa que contém a identidade de  $O(4)$ , é isomorfa a  $S^3 \times S^3/C_2$ , onde  $C_2 = \langle (1, 1), (-1, -1) \rangle$  (*Corolário 4.3.5*). Outro resultado importante é a identificação

$$\mathbb{R}P^3 \approx S^3 / \langle \pm 1 \rangle \approx SO(3) \approx T^1 S^2$$

(*Proposição 4.3.4*) e a verificação de que o grupo de todas as isometrias de  $\mathbb{R}P^3$  que preservam orientação é isomorfo a  $SO(3) \times SO(3)$ . Este fato é usado em seguida na demonstração de que toda variedade elíptica, ou seja, escrita como quociente de  $S^3$  por um grupo de isometrias, é orientável e tem estrutura de fibrado de Seifert com característica de Euler não nula, sobre uma orbifold com característica de Euler positiva (*Teorema 4.3.8*). Finalmente, damos alguns exemplos de variedades elípticas. Passamos agora a descrever  $\mathcal{H}$ , o anel dos quatérnios.

O anel  $\mathcal{H}$  consiste-se de  $\mathbb{R}^4$ , com a sua estrutura de espaço vetorial, munido de um produto. A base  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  de  $\mathbb{R}^4$  é usualmente denotada

por  $\{1, i, j, k\}$  e o produto em  $\mathcal{H}$  fica definido por

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik.$$

O subespaço gerado por 1 é identificado com  $\mathbb{R}$  e seus elementos são chamados reais. Os elementos não nulos do subespaço  $\mathcal{P} = \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$  são chamados quatérnios puros. O subespaço  $\mathbb{R} + \mathbb{R}i$  é identificado com  $\mathbb{C}$  e o subespaço  $\mathbb{R}j + \mathbb{R}k$  é denotado por  $\mathbb{C}_j$ . O produto é associativo mas não comutativo e o centro de  $\mathcal{H}$  é  $\mathbb{R}$ . Observe que um quatérnio é puro se e só se seu quadrado for um real negativo. Se  $q = a + bi + cj + dk \in \mathcal{H}$  o seu conjugado é definido por

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk.$$

Assim,  $q\bar{q}$  é um real não negativo. Definimos então a norma de  $q$  como

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}},$$

a qual coincide com a norma euclideana. Então  $S^3 = \{q \in \mathcal{H}; |q| = 1\}$ . Defina  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \cap S^3$ , os quatérnios puros de norma um.

Todo quatérnio  $z$  pode ser escrito de forma única como  $z = a + bq$ ,  $q \in \mathcal{P}_1$ . Como  $|q| = 1$  e  $\mathcal{P} \perp \mathbb{R}$ , podemos escrever,

$$z = \lambda(\cos \alpha + q \sin \alpha), \quad \lambda = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

para algum  $\alpha \in S^1$ . Introduzimos então a notação  $z = \lambda e^{\alpha q}$ , que é uma extensão da notação análoga para os complexos. Com essa notação, todo elemento de  $S^3$  é escrito como  $e^{\alpha q}$ , para algum  $q \in \mathcal{P}$  e vale a propriedade

$$e^{\alpha q} \cdot e^{\beta q} = e^{(\alpha+\beta)q} = e^{(\beta+\alpha)q} = e^{\beta q} \cdot e^{\alpha q}.$$

Lembremos que na *Seção 3.1* definimos  $S^3$  como  $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z|^2 + |w|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$ .

**Proposição 4.3.2** *A aplicação*

$$\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathcal{H}$$

$$(z, w) \mapsto z + wj$$

*é bijetora e determina uma equivalência entre  $S^3$  como subespaço de  $\mathbb{C}^2$ , e  $S^3$ , como subespaço de  $\mathcal{H}$ .*

*Demonstração:* Se  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,

$$z + wj = (a + bi) + (c + di)j = a + bi + cj + dk,$$

ou seja, todo quatérnio pode ser escrito, de forma única, como  $z + wj$ , onde  $z, w \in \mathbb{C} \subset \mathcal{H}$ . Facilmente se verifica que esta aplicação preserva a norma. Logo, leva  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$  em  $S^3 \subset \mathcal{H}$ .  $\square$

É fácil ver que  $S^3 \subset \mathcal{H}$  age em  $\mathcal{H}$ , tanto por multiplicação à esquerda quanto à direita, por isometrias que preservam orientação. Assim, as respectivas ações induzidas de  $S^3$  em  $S^3$  também determinam isometrias de  $S^3$  que preservam orientação. O círculo unitário  $S^1 \subset \mathbb{C}$  age por multiplicação à esquerda em  $S^3 \subset \mathcal{H}$  dada por

$$e^{it} \cdot (z + wj) = e^{it}z + e^{it}wj,$$

que corresponde à ação em  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$  dada por

$$e^{it} \cdot (z, w) = (e^{it}z, e^{it}w).$$

No entanto, a ação por multiplicação à direita

$$(z + wj) \cdot e^{it} = e^{it}z + e^{-it}wj$$

corresponde à ação

$$(z, w) \cdot e^{it} = (e^{it}z, e^{-it}w).$$

Claramente, as duas ações comutam. Vimos no *Exemplo 3.1.2* que as órbitas da primeira e da segunda ação determinam, respectivamente, os fibrados  $\eta_{1,1}$  (de Hopf) e  $\eta_{1,-1}$ . A ação à esquerda determina rotações pelo ângulo  $t$  em torno da origem nos planos  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{C}_j$ , enquanto que a ação à direita determina rotações, por  $t$  em  $\mathbb{C}$  e por  $-t$  em  $\mathbb{C}_j$ . A *Figura 4.3* mostra o fibrado de Hopf sob a projeção estereográfica, escolhida de forma que  $P(1) = 0$ ,  $P(i) = e_3$ ,  $P(j) = e_1$  e  $P(k) = e_2$ , sem perda de generalidade.

**Exercício:** Trace na *Figura 4.3* o fluxo da ação à direita e mostre geometricamente que os dois fluxos comutam.

**Proposição 4.3.3** *Os fibrados  $\eta_{1,1}$  (de Hopf) e  $\eta_{1,-1}$  são fibrados principais  $S^1$  tais que  $S^3$  induz na base  $S^2$  a sua métrica canônica a menos de multiplicação por constante. Além disso, a conexão ortogonal às fibras de  $\eta_{1,1}$  e  $\eta_{1,-1}$  é uma estrutura de contato.*

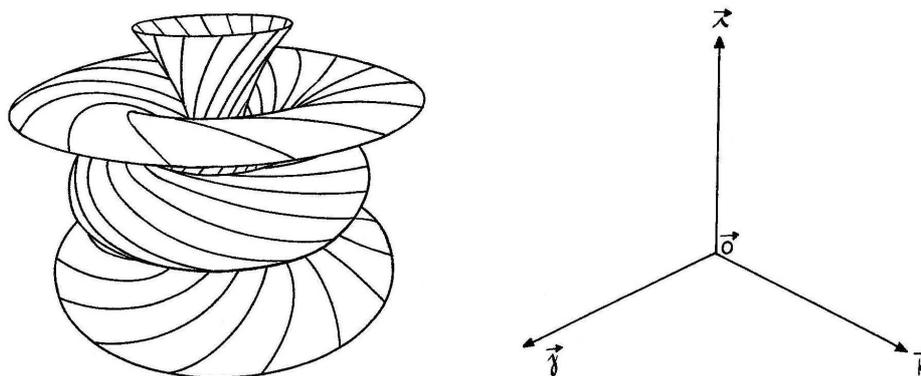


Figura 4.3: O fibrado de Hopf sob a projeção estereográfica.

*Demonstração:* Demonstraremos esta proposição para o caso do fibrado de Hopf. A demonstração para  $\eta_{1,-1}$  é análoga.

O fato de que o fibrado de Hopf é dado pela ação à esquerda  $e^{it} \cdot z$  implica facilmente que ele é um fibrado principal  $S^1$  sobre  $S^2$ . Para ver isto basta tomar um disco  $D \subset S^3$  que seja seção local e observar que o toro sólido  $\{e^{it} \cdot D; t \in \mathbb{R}\}$  é um produto  $S^1 \times D$  tal que a ação acima coincide com a ação canônica de  $S^1$  em  $S^1 \times D$  na primeira coordenada.

Como a ação que define  $\eta_{1,1}$ , o fibrado de Hopf, é feita por isometrias,  $\eta_{1,1}$  induz uma métrica riemanniana na sua base. O fato que esta métrica é, a menos de multiplicação por constante, a métrica canônica da esfera segue do fato que a ação por multiplicação à esquerda é transitiva e preserva as fibras. Assim,  $S^2$  com a métrica induzida tem curvatura constante. É fato básico de geometria riemanniana que, a menos de multiplicação por constante, essa métrica é a usual da esfera.

Seja  $\tau$  a conexão ortogonal às fibras. Então, como a ação à esquerda por isometrias que preservam as fibras é transitiva, a curvatura de  $\tau$  é constante. Esta constante é não nula porque, caso contrário, pela *Proposição 4.1.14*, o fibrado de Hopf seria isomorfo ao fibrado produto  $S^2 \times S^1$ . Mas  $S^2 \times S^1$ , por não ser simplesmente conexo, não é difeomorfo a  $S^3$ .  $\square$

**Proposição 4.3.4** *A ação por conjugação*

$$S^3 \times S^3 \rightarrow S^3$$

$$(z, x) \mapsto z x z^{-1}$$

define um homomorfismo sobrejetivo

$$\varphi : S^3 \rightarrow SO(3)$$

com núcleo  $\langle 1, -1 \rangle$ . Em particular,

$$\mathbb{R}P^3 \approx S^3 / \langle 1, -1 \rangle \approx SO(3).$$

*Demonstração:* Como a ação de  $S^3$  em  $S^3$  do enunciado é por isometrias que fixam o ponto 1, esta ação induz, pela derivada de seus elementos, uma ação de  $S^3$  na esfera unitária,  $S^2$ , no espaço tangente a  $S^3$  no ponto 1,  $T_1S^3$ . Como esta ação é por isometrias que preservam orientação, cada elemento de  $S^3$  determina um elemento de  $SO(3)$ . Não é difícil ver que isso define um homomorfismo

$$\varphi : S^3 \rightarrow SO(3).$$

Nos falta verificar a sobrejetividade de  $\varphi$  e determinar o seu núcleo.

Observe que  $i$  não tem nenhuma propriedade especial em relação aos outros elementos de  $\mathcal{P}_1$ . Dado  $q \in \mathcal{P}_1$ , podemos tomar outra base ortonormal positiva  $\{1, q, r, s\}$ , onde  $r, s \in \mathcal{P}_1$ . Observe que podemos escolher  $r$  como qualquer elemento de  $\mathcal{P}_1$  ortogonal a 1 e a  $q$ , e definir  $s = qr$ . Assim, podemos considerar mais geralmente a ação à esquerda de  $S^1 \subset \mathbb{R} + \mathbb{R}q$  em  $S^3$  por  $e^{qt} \cdot z = e^{qt} z$ , e observar que ela se consiste de rotações pelo ângulo  $t$  em  $\mathbb{R} + \mathbb{R}q$  e em  $\mathbb{R}r + \mathbb{R}s$  (As órbitas dessa ação determinam um fibrado de Seifert isomorfo, por uma isometria que preserva orientação, ao fibrado  $\eta_{1,1}$ ). A ação à direita de  $S^1 \subset \mathbb{R} + \mathbb{R}q$  em  $S^3$  por  $z \cdot e^{qt} = z e^{qt}$ , consiste-se de rotações por  $t$  em  $\mathbb{R} + \mathbb{R}q$  e por  $-t$  em  $\mathbb{R}r + \mathbb{R}s$  (as órbitas dessa ação determinam um fibrado de Seifert isomorfo, por uma isometria que preserva orientação, ao fibrado  $\eta_{1,-1}$ ). Dessa forma, a ação por conjugação de  $S^1$  em  $\mathcal{P}_1$  determina isometrias

$$z \mapsto e^{qt} z e^{-qt}$$

que fixam  $\mathbb{R} + \mathbb{R}q$  e são rotações por  $2t$  em  $\mathbb{R}r + \mathbb{R}s$ . Como vimos, suas derivadas induzem elementos de  $SO(3)$ . Escolhendo  $q \in \mathcal{P}_1$  apropriadamente, obtemos qualquer elemento de  $SO(3)$ .

Para verificar que o núcleo de  $\varphi$  é  $\langle 1, -1 \rangle$ , tome  $z \in S^3$  tal que  $\varphi(z) = I$ , o elemento identidade de  $SO(3)$ . Então,

$$zxz^{-1} = x, \quad \forall x \in S^3.$$

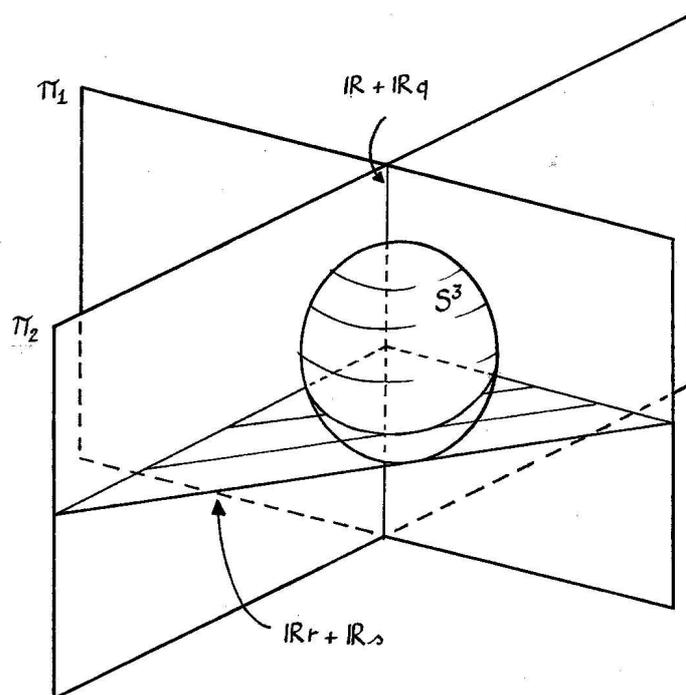


Figura 4.4: A isometria  $x \mapsto e^{tq} x e^{-tq}$  vista como uma composta de reflexões.

Em outras palavras,

$$zx = xz, \quad \forall x \in S^3,$$

ou seja,  $z$  pertence ao centro de  $S^3$ , que é  $\langle 1, -1 \rangle$ .  $\square$

Com as notações da demonstração acima, a isometria  $x \mapsto e^{tq} x e^{-tq}$ , sendo uma rotação por  $2t$  no plano  $\mathbb{R}r + \mathbb{R}s$ , translada a geodésica  $(\mathbb{R}r + \mathbb{R}s) \cap S^3 = \{ar + bs; |a|^2 + |b|^2 = 1\}$ . Diferentemente das translações em  $E^3$ , que transladam uma família toda de retas paralelas pelo mesmo comprimento, essa isometria fixa a geodésica  $(\mathbb{R} + \mathbb{R}q) \cap S^3 = \{e^{tq}; t \in \mathbb{R}\} = \{a + bq; |a|^2 + |b|^2 = 1\}$ . Uma outra forma de ver essa isometria é a seguinte. Considere planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  de dimensão três passando pela origem de  $E^4$  tal que o plano  $\pi_1 \cap \pi_2$ , de dimensão dois, é ortogonal a  $\mathbb{R}r + \mathbb{R}s$ , sendo portanto igual a  $\mathbb{R} + \mathbb{R}q$ . Sejam  $g_1$  e  $g_2$  reflexões pelos planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  respectivamente. Se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  fazem um ângulo  $t$  entre si,  $g_1 \circ g_2$  é uma rotação por  $2t$  no plano  $\mathbb{R}r + \mathbb{R}s$  e fixa o plano  $\pi_1 \cap \pi_2 = \mathbb{R} + \mathbb{R}q$ , sendo portanto a isometria em questão (Figura 4.4).

**Corolário 4.3.5** *A ação*

$$(S^3 \times S^3) \times S^3 \rightarrow S^3$$

$$((z, w), x) \mapsto z x w^{-1}$$

define um homomorfismo sobrejetivo

$$S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4)$$

com núcleo  $C_2 := \langle (1, 1), (-1, -1) \rangle$ . Em particular,  $SO(4)$  é isomorfo a  $S^3 \times S^3 / C_2$ .

*Demonstração:* Temos que mostrar a sobrejetividade. Para isso basta observar que  $S^3$  age transitivamente à esquerda (ou à direita) nele próprio. Logo, a ação de  $S^3 \times S^3$  em  $S^3$  do enunciado é transitiva. Por isso e pelo que vimos na demonstração da proposição anterior, esta ação tem estabilizador de ponto  $SO(3)$ , obtendo-se assim qualquer isometria que preserva orientação.

Para verificar que o núcleo do homomorfismo do enunciado é  $C_2$ , observe que se  $(z, w)$  pertence a este núcleo, então

$$z x w^{-1} = x, \forall x \in S^3.$$

Em particular, quando  $x = 1$ ,  $z w^{-1} = 1$ . Logo,  $z = w$  e caímos no caso da *Proposição 4.3.4*  $\square$

A aplicação  $\varphi : S^3 \rightarrow SO(3)$  da *Proposição 4.3.4* induz uma estrutura de fibrado de Seifert em  $SO(3)$  proveniente do fibrado  $\eta_{1,-1}$ . Cada fibra do fibrado  $\eta_{1,-1}$  é um recobrimento duplo de uma fibra em  $SO(3)$ . Temos a seguinte proposição:

**Proposição 4.3.6** *Com a estrutura de fibrado de Seifert induzida pelo fibrado  $\eta_{1,-1}$ ,  $SO(3) \approx \mathbb{R}P^3$  é isomorfo a  $T^1S^2$ , o fibrado tangente unitário de  $S^2$ .*

*Demonstração:* Com as notações da *Proposição 4.3.4*,  $\varphi(e^{it})$  é o elemento de  $SO(3)$  dado pela derivada de  $x \mapsto e^{it} x e^{-it}$ ,  $x \in \mathcal{P}_1$  em 1. Seja  $x_0$  um dos dois pontos fixos de  $\varphi(e^{it})$ . Fixe um vetor  $v_0 \in T^1S^2$  sobre  $x_0$ . A ação de  $SO(3)$  em  $T^1S^2$  pela derivada de seus elementos é simplesmente transitiva. Podemos então fazer a identificação  $SO(3) \approx T^1S^2$  pela aplicação seguinte:

$$\psi : SO(3) \rightarrow T^1S^2$$

$$f \mapsto df(v_0).$$

Mostremos que

$$\psi \circ \varphi : S^3 \rightarrow T^1 S^2$$

leva cada fibra do fibrado  $\eta_{1,-1}$  em fibra de  $T^1 S^2$ . Seja  $z \in S^3$ . Por definição,  $\psi \circ \varphi(z) = d(\varphi(z))v_0 \in T^1 S^2$ . Por construção do fibrado  $\eta_{1,-1}$ , para todo  $t$ ,  $z e^{ti}$  pertence à mesma fibra que  $z$ . Devemos mostrar que  $\psi \circ \varphi(z)$  e  $\psi \circ \varphi(z e^{ti})$  pertencem à mesma fibra de  $T^1 S^2$ . Como  $\varphi$  é homomorfismo,  $\varphi(z e^{ti}) = \varphi(z) \circ \varphi(e^{ti})$ . Logo,

$$\psi \circ \varphi(z e^{ti}) = d(\varphi(z))d(\varphi(e^{ti}))v_0.$$

Mas, como  $x_0$  é um ponto fixo de  $\varphi(e^{ti})$  e  $v_0$  é um vetor sobre  $x_0$ ,  $v_t = d(\varphi(e^{ti}))v_0$  também é um vetor sobre  $x_0$ . Logo,  $\psi \circ \varphi(z) = d(\varphi(z))v_0$  e  $\psi \circ \varphi(z e^{ti}) = d(\varphi(z))v_t$  pertencem à mesma fibra de  $T^1 S^2$ .  $\square$

**Proposição 4.3.7** *A ação*

$$(SO(3) \times SO(3)) \times \mathbb{R}P^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$$

$$((z, w), x) \mapsto z x w^{-1}$$

onde fazemos a identificação  $\mathbb{R}P^3 \approx SO(3)$ , induz um isomorfismo entre  $SO(3) \times SO(3)$  e  $\text{Isom}^+(\mathbb{R}P^3)$ .

*Demonstração:* A ação acima é transitiva e com estabilizador de ponto  $SO(3)$  pelo que já vimos.  $\square$

**Teorema 4.3.8** *Toda variedade elíptica  $M$  de dimensão três é orientável e possui uma estrutura de fibrado de Seifert  $(M, O, \eta)$  tal que  $e(\eta) \neq 0$  e  $\chi(O) > 0$ .*

*Demonstração:* Não é difícil mostrar que toda isometria de  $S^3$  livre de pontos fixos é homotópica à aplicação antípoda. Então ambas possuem o mesmo grau. Como observamos no início dessa seção, por 3 ser ímpar, a aplicação antípoda em  $S^3$  preserva orientação. Logo, toda isometria de  $S^3$  livre de pontos fixos também preserva orientação e, em consequência disso, toda variedade elíptica é orientável.

Mostremos a segunda afirmação do enunciado. Para isso mostraremos inicialmente que toda variedade  $M = \mathbb{R}P^3/H$ , onde  $H$  é subgrupo discreto de  $\mathbb{R}P^3$ , possui uma estrutura de fibrado de Seifert. Como  $H$  só contém elementos livres de pontos fixos, pelo que vimos no parágrafo anterior, todo

elemento de  $H$  preserva orientação. Logo, pela *Proposição 4.3.7*, podemos escrever  $H < SO(3) \times SO(3)$ . Sejam  $p_1$  e  $p_2$  as projeções de  $SO(3) \times SO(3)$  nas primeira e segunda coordenadas respectivamente. Thurston mostra em [17], p.246, que se  $\Gamma_i = p_i(H)$ ,  $i = 1, 2$ , então pelo menos um dos  $\Gamma_i$ 's é cíclico. A demonstração disso usa a classificação dos subgrupos finitos de  $SO(3)$  (vide [20], pp.83-87, ou [17], p.245-246). Usando esse fato podemos mostrar o seguinte lema:

**Lema 4.3.9** *Seja  $H < SO(3) \times SO(3)$  discreto e agindo livremente em  $\mathbb{R}P^3$ . Então  $SO(3) \times SO(3)$  possui um subgrupo  $H'$  que é isomorfo a  $SO(2)$  e comuta com a ação de  $H$  em  $\mathbb{R}P^3$ .*

*Demonstração do lema:* Suponha, sem perda de generalidade,  $\Gamma_2 < SO(3)$  cíclico. Então,  $\Gamma_2$  é gerado por uma rotação em torno de um certo eixo. Seja  $H' \approx SO(2)$  o conjunto das rotações neste eixo. Então todo elemento  $(1, g)$ ,  $g \in H'$  comuta com todos os elementos de  $SO(3) \times \Gamma_2$ . Mas  $SO(3) \times \Gamma_2$  contém  $H$ . Logo,  $\{1\} \times H'$ , que chamaremos também de  $H'$ , comuta com  $H$ .  $\square$  (*Lema*)

Observe que  $H'$  induz uma folheação por círculos em  $\mathbb{R}P^3$ . Como  $H'$  comuta com  $H$ , essa folheação induz uma folheação também por círculos em  $M = \mathbb{R}P^3/H$ . Como vimos no *Capítulo 3* (teorema devido a Epstein, [3]), por  $M$  ser compacta, esta folheação é um fibrado de Seifert.

Suponha agora que  $M$  seja uma variedade elíptica que não pode ser escrita como quociente de  $\mathbb{R}P^3$  por um grupo de isometrias. Então  $\pi_1(M) < O(4)$  não contem a aplicação antípoda,  $A$ . Como  $A$  comuta com todo elemento de  $O(4)$ , a ação de  $A$  em  $S^3$  desce a  $M$ . O lema seguinte implica que  $M$  possui estrutura de fibrado de Seifert.

**Lema 4.3.10** *Se  $M$  é uma variedade elíptica de dimensão três tal que  $\pi_1(M)$  não contem  $A$ , então  $M/ \langle A \rangle$  é uma variedade duplamente recoberta por  $M$ .*

*Demonstração:* Devemos mostrar que  $M/ \langle A \rangle$  é variedade. Para isso, basta mostrar que  $A$  não fixa nenhum ponto de  $M$ . Suponha por absurdo que  $A$  fixe algum ponto de  $M$ . Então existe  $g \in \pi_1(M)$  e  $x \in S^3$  tal que  $g(x) = -x$ . Logo,  $g^2(x) = x$  o que implica  $g^2 = id$ , já que  $\pi_1(M)$  age livremente. Mas, pelo *Lema 4.3.1*,  $g$  é a aplicação antípoda, contrariando o fato que  $\pi_1(M)$  não contem  $A$ .  $\square$  (*Lema*)

Para completar a demonstração do teorema, resta mostrar que se  $(M, O, \eta)$  é uma estrutura de fibrado de Seifert em uma variedade elíptica

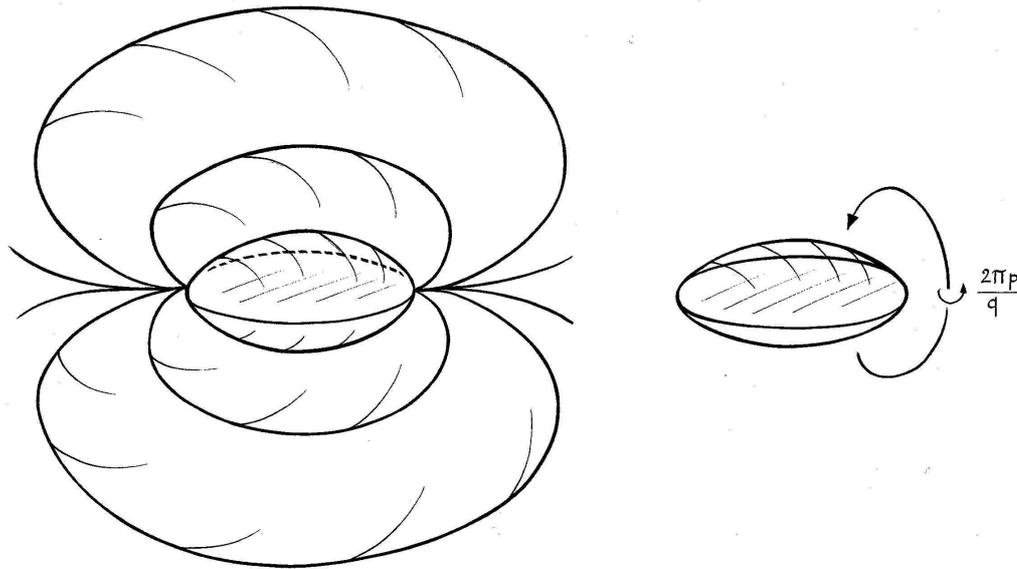


Figura 4.5: À esquerda, o espaço de lentes sob a projeção estereográfica. À direita, este mesmo espaço obtido pela identificação dos bordos de uma “lente”.

$M$ , então  $\chi(O) > 0$  e  $e(\eta) \neq 0$ . Observe que  $O$  tem como recobrimento universal uma orbifold fechada. Mas as únicas tais orbifolds são  $S^2$ ,  $S^2(p)$ ,  $p > 1$  e  $S^2(p, q)$ ,  $p, q > 1$  primos entre si. Então, pelo *Teorema 2.6.4*,  $\chi(O) > 0$ . Por outro lado, se tivéssemos  $e(\eta) = 0$ , pela *Proposição 3.4.6*, teríamos  $(M, O, \eta)$  finitamente recoberto pelo fibrado produto  $S^1 \times F$ , para alguma superfície fechada  $F$ . Mas isso é um absurdo porque  $S^3$  não é recobrimento de  $S^1 \times F$ . Isso conclui a demonstração do *Teorema 4.3.8*.  $\square$

#### Exemplo 4.3.11 Espaços de lentes

*Infinitas variedades elípticas podem ser obtidas da seguinte forma. Dados inteiros  $a, b > 0$ , primos entre si, defina*

$$\lambda_{a,b} = e^{\frac{2\pi a}{b} i}.$$

*Se identificarmos cada ponto  $(z, w) \in S^3 \subset \mathbb{C}$  com  $(\lambda_{1,q} z, \lambda_{p,q} w)$  temos um espaço de lentes (vide [17], pp.37-38). A variedade obtida pode ser vista como uma “lente” onde o bordo inferior é identificado com o superior por uma rotação pelo ângulo  $2\pi p/q$  (Figura 4.5).*

#### Exemplo 4.3.12 O espaço dodecaedral

*Se fizermos a identificação de faces opostas de um dodecaedro regular por uma translação radial seguida de uma rotação por  $1/10$  de volta num mesmo*

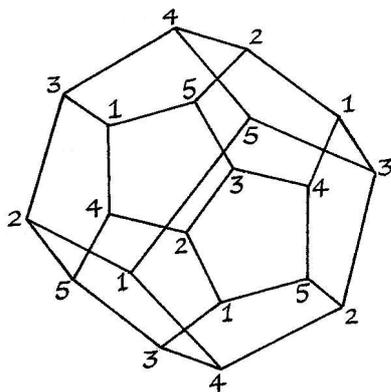


Figura 4.6: O espaço dodecaedral.

*sentido* (Figura 4.6), temos, conforme veremos a seguir, uma variedade elíptica, chamada de espaço dodecaedral ( $ED$ ).

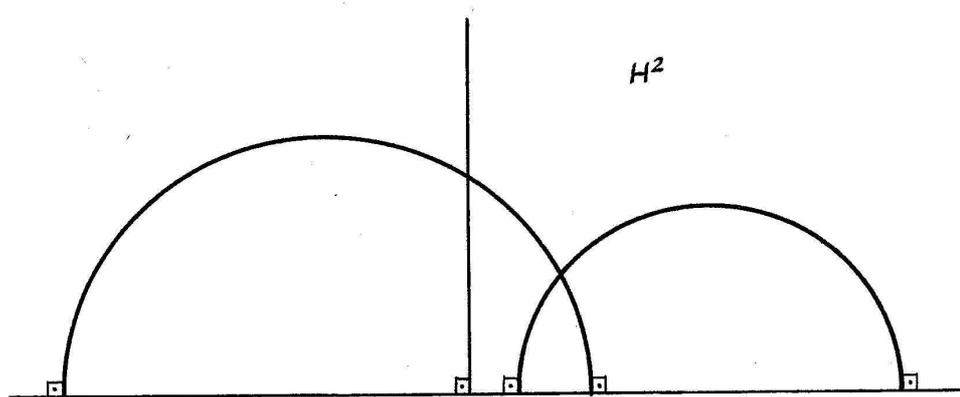
Usaremos o teorema de Seifert-Threlfall ([14], p.208) para mostrar que  $ED$  é realmente uma variedade. Esse teorema afirma que um espaço obtido pela identificação por pares de faces de um poliedro de forma a preservar orientação das arestas é uma variedade se e só se a característica de Euler desse espaço resultante é zero. As doze faces do dodecaedro são identificadas duas a duas, formando seis grupos de dois. Cada face do dodecaedro tem cinco arestas como bordo e cada uma dessas arestas é bordo de duas faces. Assim temos  $12 \cdot 5 / 2 = 30$  arestas identificadas em dez grupos de três. Pelo mesmo raciocínio temos  $12 \cdot 5 / 3 = 20$  vértices identificados em cinco grupos de quatro. Logo, a característica de Euler de  $ED$  é

$$5 - 10 + 6 - 1 = 0.$$

Nos falta agora dar uma estrutura elíptica a  $ED$ . Para isso precisaremos do conceito de poliedro elíptico regular ou poliedro em  $S^3$ . Um  $n$ -gono (polígono de  $n$  lados) elíptico regular é uma curva fechada dada pela união de  $n$  segmentos (ditos os lados, e cujos pontos extremos são ditos os vértices), de mesmo comprimento, de diferentes geodésicas de  $S^3$  delimitando uma superfície convexa que é parte de uma esfera geodésica. Um  $n$ -edro (poliedro de  $n$  faces) elíptico regular é uma união de  $n$  subconjuntos convexos de diferentes esferas geodésicas, ditos as faces, cujos bordos são polígonos elípticos regulares (e cujos vértices são ditos os vértices do poliedro), todos com o mesmo número de lados (ditos as arestas do poliedro) e mesmos comprimentos de lado, delimitando um subconjunto convexo de  $S^3$ . O centro de um poliedro regular é o ponto médio de seus vértices. Qualquer poliedro

regular (euclideo) conhecido pode ser construído em  $S^3$ . Dado  $x_0 \in S^3$  podemos facilmente construir um poliedro elíptico regular com centro  $x_0$ . Isso é deixado a cargo do leitor. Como sugestão, tome uma esfera  $S_r$  de raio  $r$ ,  $0 < r < \pi$ , em torno de  $x_0$  (conjunto dos pontos de  $S^3$  que distam  $r$  de  $x_0$ ) e escolha apropriadamente, em  $S_r$ , os vértices do poliedro elíptico. Assim, vê-se facilmente que o centro de um poliedro regular equidista de todos os seus vértices. Esta tal distância é dita o raio do poliedro. O poliedro com vértices em  $S_r$  tem raio  $r$ .

Quando o raio de um poliedro elíptico regular tende a zero, este poliedro se aproxima do euclideo. Sabemos que os ângulos diedrais do dodecaedro euclideo regular são menores do que  $2\pi/3$ . Quando o raio tende a  $\pi$ , o poliedro se aproxima de uma esfera geodésica. Assim, os ângulos diedrais do poliedro se aproximam de  $\pi$ . Então, por continuidade, podemos construir um dodecaedro elíptico regular com um raio tal que os ângulos diedrais deste poliedro sejam iguais a  $2\pi/3$ . Refletindo seguidamente este dodecaedro pelas suas faces (na realidade, pelas esferas geodésicas que contêm as suas faces), obtemos um ladrilhamento de  $S^3$  pelos subconjuntos convexos determinados pelos dodecaedros. Se  $\Gamma$  é o grupo gerado pelas reflexões pelas suas faces, temos  $ED = S^3/\Gamma$ .

Figura 4.7: As geodésicas de  $H^2$ .

#### 4.4

#### $H^3$

O espaço hiperbólico,  $H^3$ , representa a mais rica das oito geometrias. A maioria das variedades de dimensão três que admitem uma estrutura geométrica modelada por uma geometria modelo são hiperbólicas, ou seja, são escritas como quociente de  $H^3$  por um grupo discreto de isometrias. Devido à complexidade da geometria hiperbólica, nessa seção nos limitaremos a tratar de alguns fatos básicos. Para um estudo mais profundo do tema vide [17], pp.43-108, [18] e [2]. Começaremos nosso estudo por  $H^2$ , o plano hiperbólico. Daremos ênfase ao estudo dos grupos de isometrias de  $H^2$  e de  $H^3$  que preservam orientação. Identificamos o primeiro grupo com  $PSL(2, \mathbb{R})$  e o segundo com  $PSL(2, \mathbb{C})$ . Nas *Proposições 4.4.3 e 4.4.5* estudaremos a comutatividade dos elementos de  $PSL(2, \mathbb{R})$  e  $PSL(2, \mathbb{C})$  respectivamente.

O plano hiperbólico,  $H^2$ , é definido como o semi-plano  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$  com métrica dada por

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

A curvatura de  $H^2$  é constante igual a  $-1$ . As geodésicas (completas) de  $H^2$  são os semi-círculos com centro em  $\partial\bar{\mathbb{R}}_+^2 = \{(x, y); y = 0\}$  e as semi-retas verticais partindo de  $\partial\bar{\mathbb{R}}_+^2$  (*Figura 4.7*).

De forma geral, definimos  $H^n$  como o semi-espaço  $\mathbb{R}_+^n =$

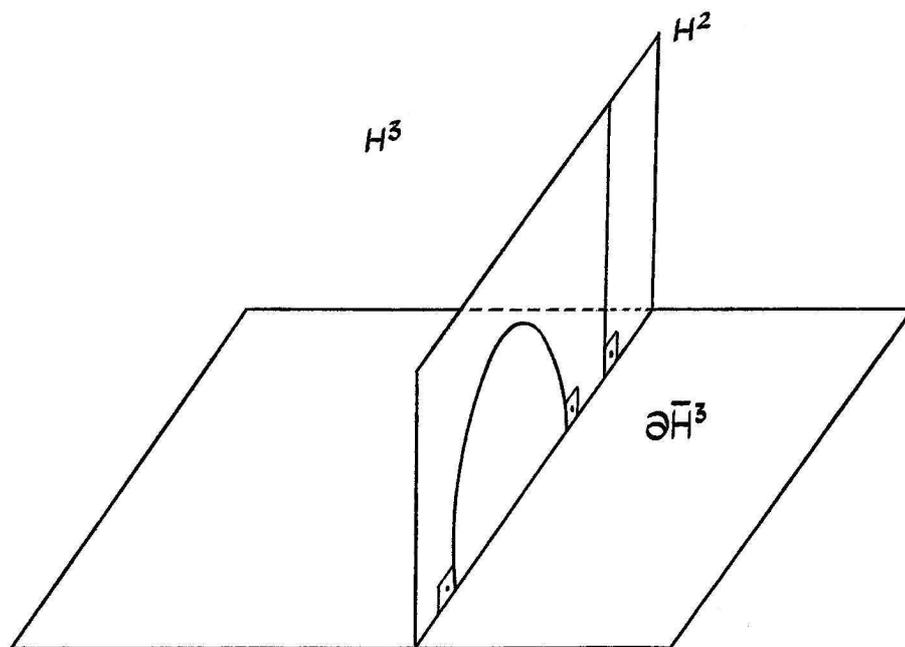


Figura 4.8: As geodésicas de  $H^3$ .

$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$  com métrica dada por

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2}.$$

Assim como no caso bi-dimensional, a curvatura seccional é constante igual a  $-1$ . Observe que qualquer plano vertical de dimensão dois em  $H^n$  é isométrico a  $H^2$ . Daí não é difícil ver que as geodésicas de  $H^n$  são os semi-círculos que interceptam  $\partial \bar{\mathbb{R}}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n = 0\}$  ortogonalmente, e as semi-retas verticais partindo de  $\partial \bar{\mathbb{R}}_+^n$  (Figura 4.8).

Por definição, o produto interno em  $T_p H^n$  é, a menos de constante multiplicativa, o produto interno da métrica euclideana. Assim, o ângulo entre dois vetores em  $T_p \mathbb{R}_+^n$  é o mesmo tanto com a métrica euclideana quanto com a hiperbólica.

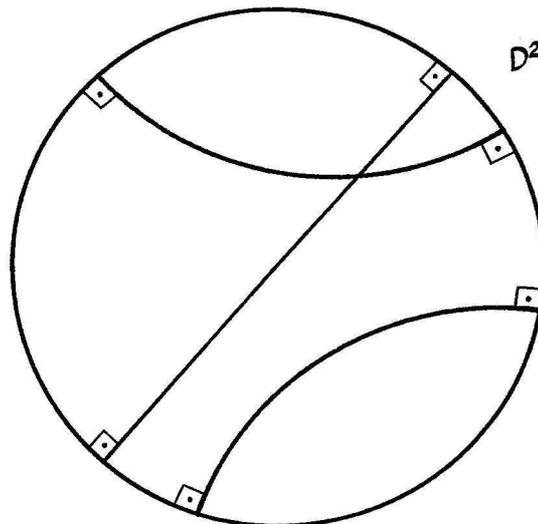


Figura 4.9: O disco de Poincaré de dimensão dois com suas geodésicas.

Um outro modelo para  $H^n$  é o disco de Poincaré, que se consiste do interior  $D^n$  do disco unitário, com métrica dada por

$$ds^2 = \frac{4}{[1 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)]^2} (dx_1^2 + \dots + dx_n^2).$$

As geodésicas desse modelo são arcos de círculos que interceptam ortogonalmente o bordo  $\partial \bar{D}^n$  e os diâmetros  $\partial \bar{D}^n$  (Figura 4.9). A constante multiplicativa 4 na expressão acima garante que  $D^n$  seja isométrico a  $H^n$  (vide [17], p.54). Sob essa correspondência,  $\partial \bar{D}^n$  corresponde a  $\partial \bar{H}^n = \partial \bar{\mathbb{R}}_+^n \cup \{\infty\}$ . Cada ponto de  $\partial \bar{H}^n$  é dito um ponto no infinito. Frequentemente nos referiremos a  $\bar{H}^n := H^n \cup \partial \bar{H}^n$ . Geodésicas serão vistas como um subconjunto de  $\bar{H}^n$  de forma natural e isometrias de  $H^n$  como aplicações de  $\bar{H}^n$  em  $\bar{H}^n$ . Observe que dois pontos em  $\partial \bar{H}^n$  determinam uma única geodésica de  $H^n$ .

**Definição 4.4.1** *Seja  $S \subset E^n$  a esfera de dimensão  $n - 1$ , raio  $r$  e centro  $O \in E^n$ . A aplicação*

$$f : E^n - \{O\} \rightarrow E^n$$

*é dita uma inversão em  $S$  se  $f$  leva cada ponto  $P \in E^n - \{O\}$  no ponto  $P'$  da semi-reta  $\overrightarrow{OP}$  tal que*

$$\|P - O\| \|P' - O\| = r^2.$$

Veja a Figura 4.10.

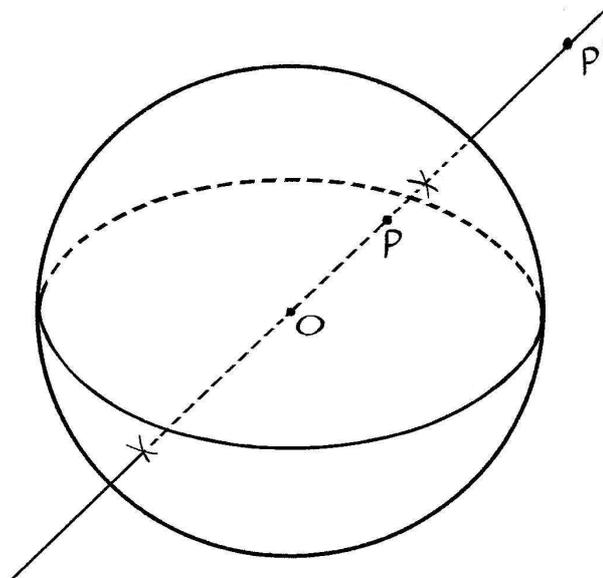


Figura 4.10: A inversão numa esfera de dimensão  $n - 1$  em  $E^n$ .

Essa aplicação fixa os pontos de  $S$  e leva o interior de  $S - \{O\}$  no exterior dessa esfera, e vice-versa. Além disso, pode-se mostrar que  $f$  preserva qualquer esfera que intercepta  $S$  ortogonalmente.

A restrição de uma inversão em uma esfera com centro em  $\partial\mathbb{R}_+^n$  ao semi-espaco  $\mathbb{R}_+^n$  define uma isometria de  $H^n$ . Qualquer reflexão por um plano vertical de dimensão  $n - 1$  em  $E^n$  também induz uma isometria de  $H^n$ . Este plano pode ser pensado como uma esfera de raio infinito. Assim, esta reflexão pode ser vista como uma inversão de tal esfera. Em razão disso, consideraremos aplicações de  $H^n$  induzidas por tais reflexões e por inversões de  $E^n$ , como sendo todas de um mesmo tipo, e chamaremos a esse tipo de reflexão de  $H^n$  (por um semi-plano ou por uma semi-esfera, conforme o caso). Observe que cada reflexão de  $H^n$ , vista como uma aplicação de  $\bar{H}^n$ , preserva  $\partial H^n$ . Uma reflexão por uma semi-esfera com centro em  $\partial\mathbb{R}_+^n$  leva o seu centro no ponto  $\infty$  e vice-versa. Já uma reflexão por um semi-plano, fixa  $\infty$ .

As reflexões de  $H^n$  geram  $\text{Isom}(H^n)$ . Começemos com o caso bi-dimensional. O grupo  $\text{Isom}^+(H^2)$  é identificado com  $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \langle I, -I \rangle$  (vide [2], p.24), onde  $SL(2, \mathbb{R})$  é o grupo das matrizes reais  $2 \times 2$  com determinante igual a um e  $I$  é a matriz identidade. A demonstração da proposição seguinte nos dá uma descrição geométrica do grupo  $\text{Isom}^+(H^2)$ .

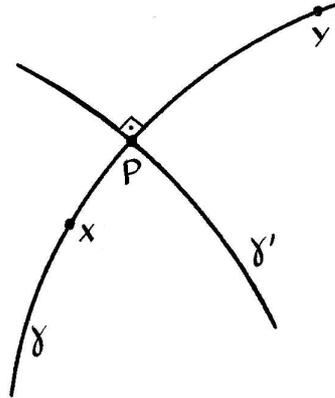


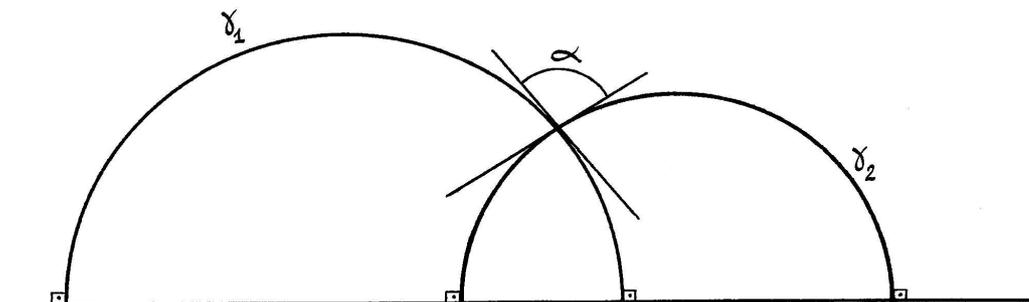
Figura 4.11: A transitividade da ação do grupo gerado pelas reflexões de  $H^2$ .

**Proposição 4.4.2** *Qualquer elemento de  $\text{Isom}(H^2)$  é composta de no máximo três reflexões. Qualquer elemento  $g \in \text{Isom}^+(H^2)$  é composta de no máximo duas reflexões e temos três possibilidades:*

- *$g$  tem um único ponto fixo,  $p$ , e esse ponto pertence a  $H^2$  (nesse caso  $g$  é dita uma isometria elíptica ou uma rotação em torno de  $p$ );*
- *$g$  tem um único ponto fixo e esse ponto pertence a  $\partial H^2$  (nesse caso  $g$  é dita uma isometria parabólica);*
- *$g$  tem somente dois pontos fixos,  $q_1$  e  $q_2$ , e esses pontos pertencem a  $\partial H^2$ . Além disso,  $g$  age por translação na geodésica  $\gamma$  determinada por  $q_1$  e  $q_2$  (nesse caso  $g$  é dita uma isometria hiperbólica ou uma translação ao longo de  $\gamma$ ).*

*Demonstração:* Seja  $G$  o grupo gerado pelas reflexões em  $H^2$ . Queremos ver que  $G = \text{Isom}(H^2)$ . Primeiro mostremos que a ação de  $G$  é transitiva. Dados dois pontos distintos  $x$  e  $y$  em  $H^2$ , é possível encontrar uma reflexão que leve  $x$  em  $y$  pelo que se segue. Seja  $\gamma$  a geodésica passando por  $x$  e  $y$ . Seja  $p$  o ponto médio entre  $x$  e  $y$ . Podemos tomar a geodésica  $\gamma'$  que passa por  $p$  e é ortogonal a  $\gamma$  (Figura 4.11). Assim, a reflexão por  $\gamma'$  (observe que, em dimensão dois, as semi-esferas e os semi-planos verticais são as geodésicas) leva  $x$  em  $y$ .

Se  $f \in \text{Isom}(H^2)$ , então  $f$  é determinada por  $df_x$ , a sua derivada em  $x$ . Então, basta mostrar que o estabilizador de  $x$  (e, por transitividade, de qualquer ponto de  $H^2$ ) pela ação de  $G$  é  $O(2)$ . Mas isso é evidente dado que qualquer reflexão de  $T_x H^2$  é induzida por uma reflexão de  $H^2$  que fixa

Figura 4.12: Uma isometria elíptica em  $H^2$ .

$x$ , e  $O(2)$  é gerado por reflexões. Na realidade, cada elemento de  $SO(2)$  é uma composta de duas reflexões e a cada elemento de  $O(2) - SO(2)$  é uma reflexão. Logo,  $G = \text{Isom}(H^2)$ . É fácil ver também que cada elemento de  $\text{Isom}^-(H^2)$ , o conjunto das isometrias de  $H^2$  que revertem orientação, é uma composta de no máximo três reflexões, e que cada elemento de  $\text{Isom}^+(H^2)$ , o grupo das isometrias de  $H^2$  que preservam orientação, é composta de no máximo duas reflexões.

Mostremos agora a última afirmação do enunciado, ou seja, a classificação dos elementos de  $\text{Isom}^+(H^2)$ . Sejam  $g_1$  e  $g_2$  reflexões por geodésicas distintas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  respectivamente. A única forma de  $g := g_1 \circ g_2$  fixar algum ponto de  $H^2$  é se  $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$ . Nesse caso,  $g$  fixa o único ponto  $p \in \gamma_1 \cap \gamma_2$  e  $g$  é chamada uma isometria elíptica ou uma rotação hiperbólica (Figura 4.12). A razão dessa denominação vem do seguinte fato. Seja  $\alpha$  o ângulo de interseção entre  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . As derivadas  $dg_1$  e  $dg_2$  em  $p$  são reflexões por retas  $T_p\gamma_1 \subset T_pH^2$  e  $T_p\gamma_2 \subset T_pH^2$  respectivamente. Como essas retas interceptam-se num ângulo  $\alpha$ ,  $dg = dg_1 \circ dg_2$  é uma rotação por  $2\alpha$  em  $T_pH^2$  e  $2\alpha$  é dito o ângulo de rotação de  $g$ .

Se  $\gamma_1$  intercepta  $\gamma_2$  em um ponto  $q \in \partial\bar{H}^2$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são ditas paralelas e, nesse caso,  $g_1 \circ g_2$  fixa  $q$ . Chamamos uma isometria desse tipo de parabólica (Figura 4.13).

Se  $\gamma_1$  não intercepta  $\gamma_2$  nem mesmo em  $\partial\bar{H}^2$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são ditas ultra-paralelas. Nesse caso, podemos encontrar uma única geodésica  $\gamma$  que intercepta  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  ortogonalmente. Então, tanto  $g_1$  quanto  $g_2$  preservam  $\gamma$ . Sejam  $p_1$  e  $p_2$  os pontos de intersecção de  $\gamma$  com  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  respectivamente. A distância  $d$  entre  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  é dada pelo segmento de  $\gamma$  entre  $p_1$  e  $p_2$ . É fácil ver que  $g$ , vista como uma aplicação de  $\bar{H}^2$  em  $\bar{H}^2$ , fixa os dois pontos de  $\gamma$  no infinito e translada  $p_2$  por  $2d$  na direção de  $\gamma$  e no sentido  $p_1$  para  $p_2$ .

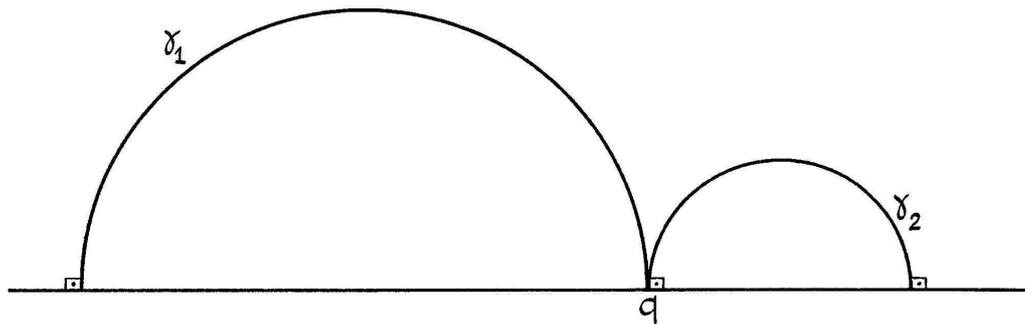


Figura 4.13: Uma isometria parabólica em  $H^2$ .

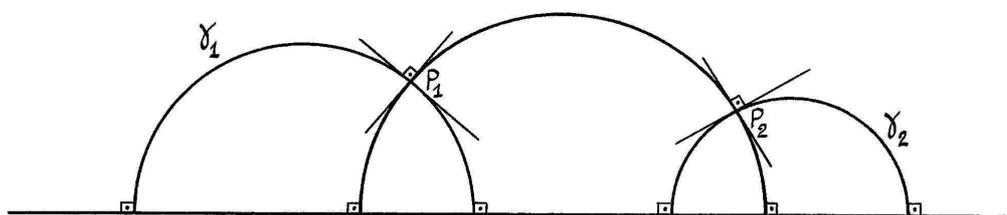


Figura 4.14: Uma isometria hiperbólica em  $H^2$ .

Logo, todo ponto de  $\gamma$  sofre uma tal translação. Uma isometria desse tipo é chamada de hiperbólica ou uma translação ao longo de  $\gamma$  (Figura 4.14).

Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  não são ultra-paralelas, não é possível encontrar uma geodésica ortogonal a  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  simultaneamente. Isso porque uma tal geodésica determinaria, juntamente com  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , um triângulo cuja soma dos ângulos seria maior ou igual a  $\pi$ . Mas todo triângulo em  $H^2$  tem soma dos seus ângulos menor do que  $\pi$  (vide [13], p.416). É fácil ver que sem uma tal geodésica não é possível que  $g$  fixe dois pontos no infinito.  $\square$

Se  $g \in \text{Isom}^+(H^2)$ , defina  $\text{Fix}(g)$  como o subconjunto de  $\bar{H}^2$  dos pontos fixos por  $g$ . Pelo visto acima,  $\text{Fix}(g)$  determina se  $g$  é uma isometria elíptica, parabólica, ou hiperbólica.

**Proposição 4.4.3** *Sejam  $g_1, g_2 \in \text{Isom}^+(H^2)$ . Então  $g_1$  e  $g_2$  comutam se e só se  $\text{Fix}(g_1) = \text{Fix}(g_2)$ . Além disso, o conjunto dos elementos de  $\text{Isom}^+(H^2)$  que comutam com  $g_1$  é um grupo abeliano isomorfo a  $S^1$  se  $g_1$  é rotação e a  $\mathbb{R}$  caso contrário.*

Deixamos a cargo do leitor a demonstração desta proposição (*Sugestão*: mostre que  $g_2(\text{Fix}(g_1)) = \text{Fix}(g_1)$ ).

Tratemos agora de  $H^3$ . O grupo  $\text{Isom}(H^3)$  é gerado por reflexões em semi-esferas com centro em  $\partial\bar{H}^3$ , onde os planos verticais são pensados como esferas. A demonstração desse fato é uma generalização do caso bi-dimensional demonstrado na *Proposição 4.4.2*.

Um eixo de  $g \in \text{Isom}(H^3)$  é uma geodésica preservada por  $g$ . Lembre que  $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / \langle I, -I \rangle$ , onde  $SL(2, \mathbb{C})$  é o grupo das matrizes complexas  $2 \times 2$  com determinante um e  $I$  é a matriz identidade. Temos a seguinte proposição:

**Proposição 4.4.4** *O grupo  $\text{Isom}^+(H^3)$  é isomorfo a  $PSL(2, \mathbb{C})$ . Se  $g \in \text{Isom}^+(H^3)$  temos as seguintes possibilidades:*

- *$g$  tem um único eixo  $\gamma$ , fixo ponto a ponto, e nenhum ponto fixo fora de  $\gamma$  (nesse caso  $g$  é dita uma isometria elíptica ou uma rotação em  $\gamma$ );*
- *$g$  tem um único eixo  $\gamma$  e age em  $\gamma$  por translação. Os únicos pontos fixos de  $g$  são os dois pontos de  $\gamma \cap \partial\bar{H}^3$  (nesse caso  $g$  é dita uma isometria hiperbólica);*
- *$g$  não tem eixo e tem somente um ponto fixo, que pertence a  $\partial\bar{H}^3$  (nesse caso  $g$  é dita uma isometria parabólica).*

Para uma demonstração dessa proposição vide [2], pp.24, 31, [13], pp.448-449 ou [17], pp.86-87, 98-99.

Vamos dar uma descrição das isometrias elípticas, hiperbólicas e parabólicas em termos de compostas de reflexões. Sejam  $g_1$  e  $g_2$  reflexões em semi-esferas  $S_1$  e  $S_2$  respectivamente. Se essas esferas interceptam-se em  $H^3$ ,  $g_1 \circ g_2$  é uma rotação no eixo  $\gamma = S_1 \cap S_2$  (*Figura 4.15*). Se  $S_1$  e  $S_2$  interceptam-se em um único ponto de  $\partial\bar{H}^3$ ,  $g_1 \circ g_2$  é parabólica (*Figura 4.16*). Se  $S_1$  e  $S_2$  não se interceptam em  $\bar{H}^3$ ,  $g_1 \circ g_2$  preserva a única geodésica  $\gamma'$  perpendicular a  $S_1$  e  $S_2$  simultaneamente e age em  $\gamma'$  por translação. Então  $g_1 \circ g_2$  é hiperbólica (*Figura 4.17*). Se compusermos  $g_1 \circ g_2$  com uma rotação em  $\gamma'$ , ainda temos uma isometria hiperbólica. Pode-se verificar que todas as isometrias elípticas, parabólicas e hiperbólicas podem ser obtidas como acima.

Se  $g \in \text{Isom}^+(H^3)$ , defina  $\text{Fix}(g)$  como o conjunto dos pontos fixos por  $g$  em  $\partial\bar{H}^3$ . Como no caso bi-dimensional,  $\text{Fix}(g)$  determina se  $g$  é uma isometria elíptica, hiperbólica ou parabólica. Temos o seguinte resultado, cuja demonstração é análoga à da *Proposição 4.4.3*.

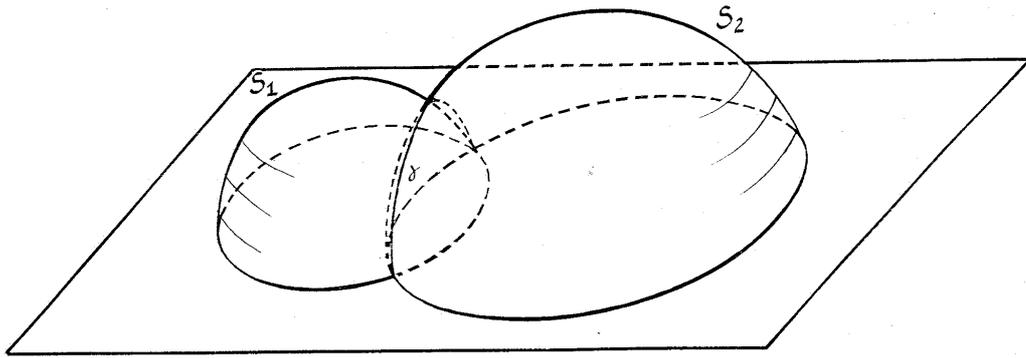


Figura 4.15: Uma isometria elíptica em  $H^3$ .

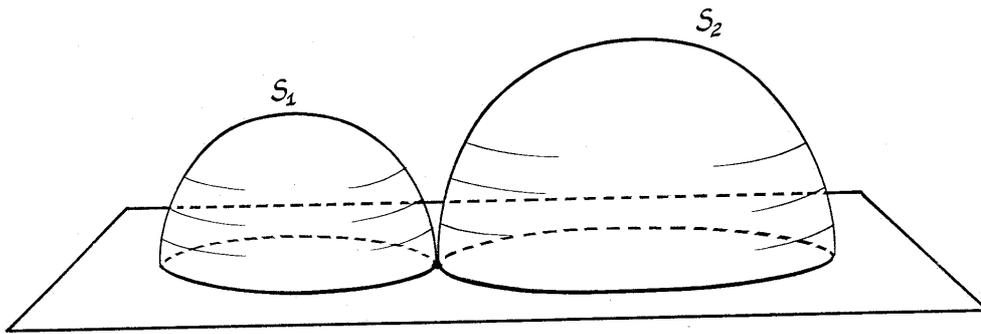


Figura 4.16: Uma isometria parabólica em  $H^3$ .

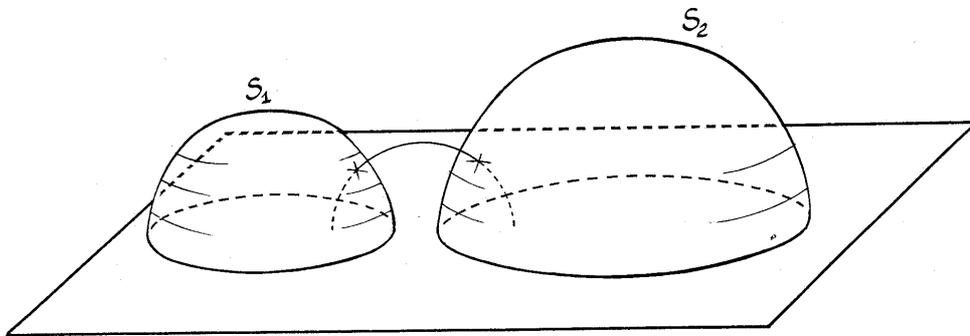


Figura 4.17: Uma isometria hiperbólica em  $H^3$ .

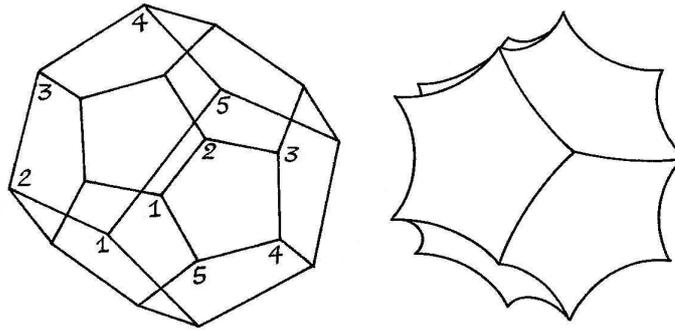


Figura 4.18: À esquerda, o espaço dodecaedral de Seifert-Weber. À direita, um dodecaedro hiperbólico.

**Proposição 4.4.5** *Sejam  $g_1, g_2 \in \text{Isom}^+(H^3)$ . Então  $g_1$  e  $g_2$  comutam se e só se  $\text{Fix}(g_1) = \text{Fix}(g_2)$ . Além disso, o conjunto dos elementos de  $\text{Isom}^+(H^3)$  que comutam com  $g_1$  é um grupo abeliano isomorfo a  $\mathbb{R}^2$  se  $g_1$  é uma isometria parabólica ou a  $S^1 \times \mathbb{R}$  caso contrário.*

O que ocorre é que se  $\gamma$  é o eixo de uma isometria  $g$ , elíptica ou hiperbólica, o subconjunto de  $\text{Isom}^+(H^3)$  dos elementos que comutam com  $g$  é o subconjunto de  $\text{Isom}^+(H^3)$  dos elementos que tem  $\gamma$  como eixo. Temos dois parâmetros para esse subconjunto: o ângulo da rotação em  $\gamma$ , dado por um elemento de  $S^1$ , e o comprimento da translação em  $\gamma$ , dado por um elemento de  $\mathbb{R}$ . Se  $g$  é parabólica com ponto fixo  $p \in \partial \bar{H}^3$ , o subconjunto de  $\text{Isom}^+(H^3)$  dos elementos que comutam com  $g$  é o subconjunto de  $\text{Isom}^+(H^3)$  dos elementos que tem  $p$  como único ponto fixo. É deixado ao leitor verificar que esse subconjunto é identificado com  $\mathbb{R}^2$  (*Sugestão*: suponha, sem perda de generalidade, que  $p = \infty$  de forma que  $g$  é uma composta de duas reflexões em planos verticais paralelos).

#### Exemplo 4.4.6 O espaço dodecaedral de Seifert-Weber

*Se fizermos a identificação de faces opostas de um dodecaedro por translação radial seguida de uma rotação por  $3/10$  de volta no sentido horário (Figura 4.18), temos, conforme veremos a seguir, uma variedade chamada de espaço dodecaedral de Seifert-Weber (SW).*

Lembremos que o espaço dodecaedral (*Exemplo 4.3.12*) foi obtido fazendo-se a identificação acima com um rotação por  $1/10$  de volta e encontrou-se uma estrutura elíptica para esse espaço. No caso do espaço dodecaedral de Seifert-Weber, essa estrutura será hiperbólica. Novamente, usaremos o teorema de Seifert-Threlfall ([14], p.208) para mostrar que SW

é realmente uma variedade. As trinta arestas agora são identificadas em seis grupos de cinco. Todos os vinte vértices são identificados. Logo, a característica de Euler de  $SW$  é

$$1 - 6 + 6 - 1 = 0.$$

Para dar uma estrutura hiperbólica a  $SW$ , definimos o conceito de poliedro hiperbólico regular de forma análoga ao de poliedro elíptico regular (seção anterior). As faces de um poliedro hiperbólico são partes de semi-planos verticais com bordo em  $\partial\bar{H}^3$  ou semi-esferas com centro em  $\partial\bar{H}^3$  (*Figura 4.18*). De forma análoga à feita para  $ED$  na seção anterior, escolhemos um dodecaedro em  $H^3$  de raio tal que os seus ângulos diedrais sejam  $2\pi/6$  e, usando reflexões por suas faces, obtemos um ladrilhamento de  $H^3$ . Então, se  $\Gamma$  é o grupo gerado por tais reflexões,  $SW = H^3/\Gamma$ .

## 4.5

 $S^2 \times E$ 

Definimos  $S^2 \times E$  como  $S^2 \times \mathbb{R}$  com a métrica produto usual. Assim,  $\text{Isom}(S^2 \times E) = \text{Isom}(S^2) \times \text{Isom}(E)$ . Estamos interessados em variedades escritas como  $M = S^2 \times E/G$ , onde  $G < \text{Isom}(S^2 \times E)$  é um subgrupo discreto agindo livremente. Nesta seção, investigaremos as possibilidades para  $G$ , assim como as folheações na variedade  $M$  induzidas pelas folheações produto  $S^2 \times \{t\}$  e  $\{x\} \times E$ . Usaremos as seguintes notações:

- $I$  será sempre a aplicação identidade de  $E$  ou de  $S^2$ ;
- $A$  será sempre a aplicação antípoda de  $S^2$ ;
- $\rho$  será sempre uma rotação em  $S^2$ ;
- $R$  será sempre uma reflexão em  $S^2$ ;
- $T$  será sempre uma translação de  $E$ .

Seja  $\Gamma$  a projeção de  $G$  em  $\text{Isom}(E)$ . Então  $\Gamma$  é discreto, podendo ser o grupo trivial,  $\{I\}$ ,  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}$  ou o grupo diedral de ordem infinita,  $D_\infty$ , gerado por duas reflexões em dois pontos distintos de  $E$ . Temos as seguintes possibilidades:

$$\Gamma = \{I\} :$$

Então  $G = \langle (I, I) \rangle$  ou  $G = \langle (A, I) \rangle$ . No segundo caso,  $M = P^2 \times E$ , onde  $P^2$  é o plano projetivo real  $S^2 / \langle A \rangle$ .

$$\Gamma = \mathbb{Z}_2 :$$

Então  $G = \langle (A, -I) \rangle$ . Nesse caso,  $M$  fibra sobre  $P^2$  com fibra  $\mathbb{R}$  e sobre a orbifold  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}_2$  com fibra  $S^2$ .

$$\Gamma = \mathbb{Z} :$$

Temos quatro possibilidades:

1.  $G = \langle (I, T) \rangle$ : Nesse caso,  $M = S^2 \times S^1$ .
2.  $G = \langle (\rho, T) \rangle$ : Se  $\rho$  é uma rotação por  $2\pi p/q$ ,  $q \neq 0$ ,  $p$  e  $q$  inteiros primos entre si, então  $M$  é um fibrado de Seifert sobre  $S^2/\mathbb{Z}_q$ , onde  $\mathbb{Z}_q = \langle \rho \rangle$ . Nesse caso, temos duas fibras sobre os pontos fixos de  $\rho$  com invariantes de órbita não normalizados  $(q, p)$  e  $(q, -p)$  cada uma. Se  $\rho$  é uma rotação por um ângulo irracional, então  $M$  herda uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão um que não é um fibrado de Seifert. Todas as folhas de  $\mathcal{F}$  são retas, exceto as duas sobre os pontos fixos de  $\rho$ , que são círculos, mas  $M$  ainda é difeomorfa a  $S^2 \times S^1$ .

3.  $G = \langle (R, T) \rangle$ : Nesse caso,  $M$  é um fibrado de Seifert sobre a orbifold  $S^2/\mathbb{Z}_2$ , onde  $\mathbb{Z}_2 = \langle R \rangle$ .
4.  $G = \langle (R \circ \rho, T) \rangle$ : Nesse caso,  $M$  é difeomorfa à garrafa de Klein de dimensão três. Se  $\rho$  é uma rotação racional,  $M$  é um fibrado de Seifert sobre a orbifold  $S^2/\langle R \circ \rho \rangle$ . Se  $\rho$  é uma rotação irracional, então  $M$  herda uma folheação tal que todas as folhas são retas, exceto duas, que são círculos.

Nas quatro possibilidades,  $M$  fibra sobre  $S^1$  com fibra  $S^2$ .

$\Gamma = D_\infty$  :

Temos duas possibilidades:

1.  $G = \langle (I, T), (A, -I) \rangle$ . Nesse caso,  $M$  fibra sobre  $P^2$  com fibra  $S^1$  e sobre a orbifold  $S^1/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}/D_\infty$  com fibra  $S^2$ . Podemos ver  $M$  como o quociente por  $\langle (I, T) \rangle$  das estruturas obtidas em  $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ .
2.  $G = \langle (\rho, T), (A, -I) \rangle$ , onde a rotação  $\rho$  é por um ângulo  $2\pi p/q$ , com  $p$  e  $q$  primos entre si e  $q$  é um número ímpar. Nesse caso,  $M$  é um fibrado de Seifert sobre a orbifold  $S^2/\langle A, \rho \rangle = P^2/\langle \rho \rangle$  e fibra sobre  $S^1/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}/D_\infty$  com fibra  $S^2$ . É deixado ao leitor verificar que, quando  $q$  é par,  $G$  contem um ponto fixo.

**Exercício:** Verifique que essas são as únicas possibilidades para  $G < \text{Isom}(S^2 \times E)$  discreto e agindo livremente (*Sugestão:* veja o que acontece quando incluímos novos elementos de  $\text{Isom}(S^2 \times E)$  nos grupos acima apresentados).

Concluimos esta seção observando que, em todos os casos em que  $M$  é compacta, esta variedade admite uma folheação por círculos, nem sempre provinda do produto  $S^2 \times \mathbb{R}$ , sendo portanto, devido a Epstein ([3]), um fibrado de Seifert.

**4.6**

$H^2 \times E$

Definimos  $H^2 \times E$  como o produto cartesiano de  $H^2$  por  $E$ , com a métrica produto. Assim,  $\text{Isom}(H^2 \times E) = \text{Isom}(H^2) \times \text{Isom}(E)$ . Logo, toda variedade da forma  $F \times S^1$ , onde  $F$  é uma superfície hiperbólica, ou seja, dada pelo quociente de  $H^2$  por um grupo discreto de isometrias, é dada pelo quociente de  $H^2 \times E$  por um grupo discreto de isometrias. Além disso, se  $G$  é um grupo de isometrias discreto agindo livremente em  $H^2 \times E$ ,  $G$  preserva as folheações naturais  $\{x\} \times E$  e  $H^2 \times \{t\}$ . Nesta seção, demonstraremos o seguinte resultado:

**Proposição 4.6.1** *Seja  $M = (H^2 \times E)/G$  uma variedade compacta, onde  $G < \text{Isom}(H^2 \times E)$  é um subgrupo discreto agindo livremente. Então a folheação  $\{x\} \times E$  induz uma folheação por círculos em  $M$  de forma que  $M$  tem uma estrutura  $(M, O, \eta)$  de fibrado de Seifert. Além disso,  $\chi(O) < 0$  e  $e(\eta) = 0$ .*

*Demonstração:* Identifique  $\text{Isom}(E)$  com  $\{id\} \times \text{Isom}(E)$ , onde  $id$  é a identidade de  $H^2$  e  $\text{Isom}(H^2)$  com  $\text{Isom}(H^2) \times \{id\}$ , onde  $id$  é a identidade de  $E$ . Seja  $\Gamma$  a projeção de  $G$  em  $\text{Isom}(H^2)$ . Temos então a seqüência exata

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

onde  $K = G \cap \text{Isom}(E)$  é um subgrupo de  $\text{Isom}(E)$  discreto, cocompacto (vide [17], pp.278-279) e livre de pontos fixos. Logo  $K = \mathbb{Z}$  e  $M$  recebe uma folheação por círculos induzida pela folheação  $\{x\} \times E$  em  $H^2 \times E$ . Pelo visto no *Capítulo 3* (teorema devido a Epstein em [3]), por ser  $M$  compacta de dimensão três, essa folheação determina uma estrutura  $(M, O, \eta)$  de fibrado de Seifert.

É fácil ver que  $O = H^2/\Gamma$ . Como  $O$  é compacta, pelo *Teorema 2.6.4*,  $\chi(O) < 0$ . Para mostrar que  $e(\eta) = 0$ , observe que, pelo *Teorema 2.6.5*,  $O$  tem um recobrimento finito  $p : S \rightarrow O$ , onde  $S$  é uma superfície. Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} H^2 \times E & \longrightarrow & \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{p}} & M \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{\eta} & & \downarrow \eta \\ H^2 & \longrightarrow & S & \xrightarrow{p} & O \end{array}$$

onde  $\tilde{M}$  é o pull-back de  $M$  por  $p$  e  $\tilde{\eta}$  é a projeção de  $\tilde{M}$  sobre  $S$ . Logo  $(\tilde{M}, \tilde{p})$  é um recobrimento finito de  $M$ . Então, pela *Proposição 3.4.3* basta mostrar que  $e(\tilde{\eta}) = 0$ .

Temos a seqüência exata

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \pi_1(\widetilde{M}) \longrightarrow \pi_1(S) \longrightarrow 1$$

Sejam

$$a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$$

geradores de  $\pi_1(S)$ . Tome

$$\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{a}_g, \tilde{b}_g$$

elementos de  $\pi_1(\widetilde{M})$  que são projetados em  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  respectivamente.

Observe que

$$\prod [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i] = k^{e(\eta)},$$

onde  $k$  é um gerador de  $K$ . Mas, como  $\pi_1(\widetilde{M}) \subset \text{Isom}(H^2) \times \text{Isom}(E)$ , cada elemento  $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i \in \pi_1(\widetilde{M})$  é uma composta de uma isometria de  $H^2$  com uma isometria de  $E$ , com estas comutando entre si. É fácil ver, portanto, que  $[\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$  é projetado na identidade de  $\text{Isom}(E)$ . Logo  $e(\eta) = 0$ .  $\square$

**4.7** $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ 

Nesta seção, definiremos a variedade riemanniana  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ , cujo grupo de isometrias descreveremos brevemente. Como variedade,  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  é equivalente a  $\mathbb{R}^3$ . Também é um fibrado principal por retas sobre  $\mathbb{R}^2$ . Veremos que o campo ortogonal às fibras determina uma estrutura de contato e que o espaço base herda métrica hiperbólica. Assim, podemos dizer que  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  fibra sobre  $H^2$ . Também veremos que se  $M$  é uma variedade fechada escrita como quociente de  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  por um grupo discreto de isometrias, então o fibrado acima induz uma estrutura  $(M, O, \eta)$  de fibrado de Seifert tal que  $e(\eta) \neq 0$  e  $\chi(O) < 0$ . Ao longo das demonstrações, serão usados alguns resultados de [13].

Considere  $T^1H^2$  com a conexão de Levi-Civita e a métrica usual de fibrado tangente unitário (Seção 4.1; veja também [9], p.79). Pelo teorema Egregium de Gauss (Teorema 4.1.15), como a curvatura seccional de  $H^2$  é constante igual a  $-1$ , esta conexão define uma estrutura de contato. Conforme mencionamos na Seção 4.4, o grupo das isometrias de  $H^2$  que preservam orientação é identificado com o grupo de Lie  $PSL(2, \mathbb{R})$ . Então, temos uma ação simplesmente transitiva de  $PSL(2, \mathbb{R})$  em  $T^1H^2$  definida por

$$g \cdot (x, v) = (g(x), dg_x(v)).$$

Logo,  $T^1H^2$  é identificado com  $PSL(2, \mathbb{R})$ . Defina  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  como o recobrimento universal de  $PSL(2, \mathbb{R}) \approx T^1H^2$  com a métrica induzida e seja  $p : \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$  a aplicação de recobrimento. Então  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  herda uma estrutura  $(\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}), H^2, \eta)$  de fibrado principal  $\mathbb{R}$  e uma estrutura de contato ortogonal às fibras. Além disso,  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  recebe uma estrutura induzida de grupo de Lie (vide [19]).

**Proposição 4.7.1** *A ação à esquerda*

$$PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$$

*é feita por isometrias. Logo, a ação à esquerda*

$$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \times \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$$

*também é por isometrias. Em particular,*

$$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) < \text{Isom}(\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})).$$

Esta proposição vem do fato que, se  $S$  é uma superfície com uma métrica  $g$  e  $f$  é uma isometria de  $S$ , então

$$df : T^1S \rightarrow T^1S$$

$$(x, v) \mapsto (f(x), df_x(v))$$

é uma isometria de  $T^1S$  com a métrica usual de fibrado tangente unitário. Deixamos a demonstração desse fato a cargo do leitor (*Sugestão*: veja o que acontece com uma curva horizontal  $(\gamma, \gamma')$ , onde  $\gamma$  é uma geodésica, e com uma curva vertical contida em uma fibra).

Daqui para frente,  $e$  será a identidade de  $PSL(2, \mathbb{R})$  e  $\tilde{e}$  a identidade de  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ .

**Proposição 4.7.2** *Seja*

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}),$$

$\alpha(0) = e$ , um laço tal que  $[\alpha]$  gera  $\pi_1(PSL(2, \mathbb{R})) \approx \mathbb{Z}$ . Se

$$\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$$

é o levantamento de  $\alpha$  (ou seja,  $\tilde{\alpha}$  é tal que  $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ ) tal que  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{e}$ , então  $\tilde{g} = \tilde{\alpha}(1)$  é tal que  $\langle \tilde{g} \rangle \approx \mathbb{Z}$  é o centro de  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ . Além disso,

$$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) / \langle \tilde{g} \rangle = PSL(2, \mathbb{R}).$$

*Demonstração*: Mostremos inicialmente que  $\langle \tilde{g} \rangle$  está contido no centro de  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ . Dado  $\tilde{h} \in \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ , queremos ver que  $\tilde{g}\tilde{h} = \tilde{h}\tilde{g}$ . Sejam curvas

$$\tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}),$$

$$\tilde{\beta}(0) = \tilde{e}, \tilde{\beta}(1) = \tilde{h}, \text{ e}$$

$$p \circ \tilde{\beta} = \beta : [0, 1] \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}).$$

Então  $\beta(0) = e$  e  $\beta(1) = h = p(\tilde{h})$  (*Figura 4.19*). Considere  $_*_$  a operação produto de caminhos. Observe que  $\tilde{g}\tilde{h} = \tilde{g}\tilde{\beta}(1)$  e  $\tilde{h}\tilde{g} = \tilde{h}\tilde{\alpha}(1)$  são os pontos finais de  $\tilde{\alpha} * (\tilde{g}\tilde{\beta})$  e  $\tilde{\beta} * (\tilde{h}\tilde{\alpha})$ , respectivamente. Mas essas curvas são levantamentos das curvas homotópicas  $\alpha * \beta$  e  $\beta * (h\alpha)$ . Logo, também são homotópicas e, em particular, têm os mesmos pontos finais.

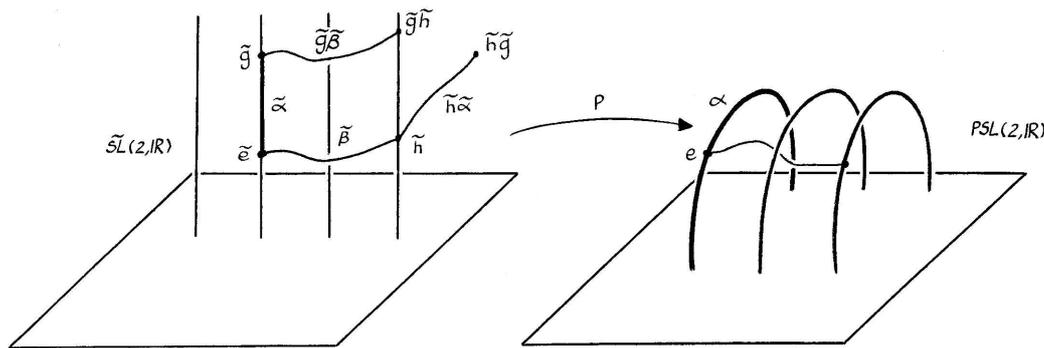


Figura 4.19: Demonstrando a Proposição 4.7.2.

Assim, mostramos que  $\tilde{g}\tilde{h} = \tilde{h}\tilde{g}, \forall \tilde{h} \in \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ , ou seja,  $\langle \tilde{g} \rangle$  está contido no centro de  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ . Para ver que  $\langle \tilde{g} \rangle$  é o centro todo, basta observar que  $PSL(2, \mathbb{R})$  tem centro trivial, já que não existe elemento de  $Isom^+(H^2) \approx PSL(2, \mathbb{R})$  que comute com todos os outros (Proposição 4.4.3). Por fim, a última afirmação do enunciado é clara visto que  $\tilde{g} \in p^{-1}(e)$ .  $\square$

Observe que o elemento  $\tilde{g} \in \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  da proposição acima translada cada fibra de  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  pelo comprimento da fibra imagem em  $PSL(2, \mathbb{R})$ . Temos seqüência exata

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow 1,$$

onde  $\mathbb{Z}$  é identificado com  $\langle \tilde{g} \rangle$ . Se considerarmos todas as translações rígidas das fibras de  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  por um comprimento fixo temos um grupo a um parâmetro de isometrias de  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  que estende  $\mathbb{Z}$  e é identificado com  $\mathbb{R}$ . Observe que  $\mathbb{R} \cap \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) = \mathbb{Z}$  já que não existe elemento de  $Isom^+(H^2) \approx PSL(2, \mathbb{R})$  que translade todas as fibras de  $T^1H^2 \approx PSL(2, \mathbb{R})$  por um mesmo comprimento não nulo. Então,  $\langle \mathbb{R}, \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \rangle$  é um subgrupo de dimensão quatro de  $Isom(\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}))$ . P. Scott mostra em [13], p.465, que  $\langle \mathbb{R}, \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \rangle$  é a componente conexa de  $Isom(\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}))$  que contem a identidade e que  $Isom(\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}))$  tem exatamente duas componentes. Os elementos da outra componente são provenientes de isometrias de  $H^2$  que revertem orientação. Como essas isometrias também revertem as orientações das fibras, elas preservam a orientação de  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ . Logo, todo elemento de  $Isom(\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}))$  preserva orientação. Então, toda variedade escrita como quociente de  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  por um grupo discreto de isometrias é orientável.

O que acabamos de ver nos leva a construir a seguinte seqüência exata:

$$1 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \text{Isom}(\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})) \longrightarrow \text{Isom}(H^2) \longrightarrow 1.$$

Se  $G < \text{Isom}(\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}))$  é discreto, cocompacto e age livremente em  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ , temos seqüência exata

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1,$$

onde  $\Gamma < \text{Isom}(H^2)$  e  $K < \mathbb{R}$  são, respectivamente, a imagem e o núcleo da projeção de  $G$  em  $\text{Isom}(H^2)$ . Então  $K$  é discreto, cocompacto (vide [13], pp.465-466), e age livremente em  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ , sendo portanto isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

**Teorema 4.7.3** *Se  $M$  é uma variedade compacta escrita como quociente de  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  por um grupo discreto de isometrias, então  $M$  recebe uma estrutura  $(M, O, \eta')$  de fibrado de Seifert proveniente do fibrado  $(\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}), H^2, \eta)$ . Além disso,  $e(\eta') \neq 0$  e  $\chi(O) < 0$ .*

*Demonstração:* A primeira afirmação é clara pelo fato de  $K$ , na observação imediatamente anterior ao teorema, ser isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Mostremos que  $e(\eta') \neq 0$  e  $\chi(O) < 0$ .

Se tivéssemos, por absurdo,  $e(\eta') = 0$ ,  $(M, O, \eta')$  seria finitamente recoberto pelo produto  $F \times S^1$  para alguma superfície fechada  $F$  (*Proposição 3.4.6*). Nesse caso,  $\text{Isom}(\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}))$  conteria um subgrupo isomorfo a  $\pi_1(F)$ . Mas Scott mostra em [13], p.466, que  $\text{Isom}(\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}))$  não contem subgrupo isomorfo ao grupo fundamental de uma superfície fechada.

Para verificar que  $\chi(O) < 0$ , basta observar que, escrevendo  $M = \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})/G$ ,  $G < \text{Isom}(\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}))$ , então  $O = H^2/\Gamma$ , onde  $\Gamma$  é a projeção de  $G$  em  $\text{Isom}(H^2)$ . O resultado então segue do *Teorema 2.6.4*.

□

**Exemplo 4.7.4** *Algumas variedades compactas escritas como quociente de  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  por um grupo discreto de isometrias podem ser obtidas da seguinte forma. Seja  $F$  uma superfície hiperbólica orientável. Então  $\pi_1(F)$  é um subgrupo de  $PSL(2, \mathbb{R})$  e age à esquerda em  $T^1H^2$ . Tome  $M = T^1H^2/\pi_1(F)$ .*

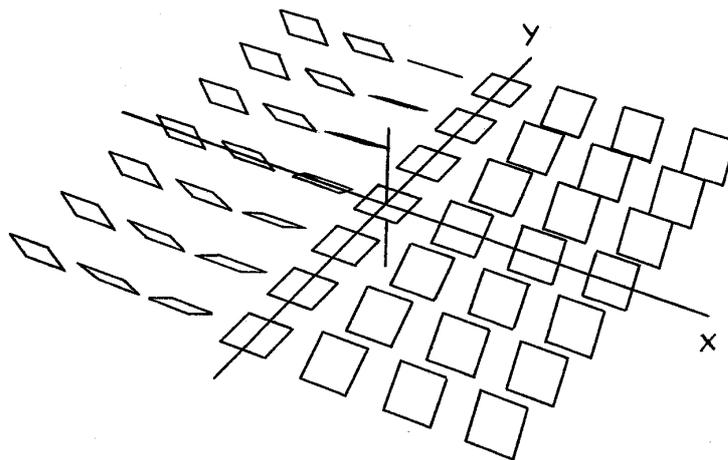


Figura 4.20: A estrutura de contato em  $\mathbb{R}^3$  definida por  $\omega$ .

## 4.8

### *Nil*

Seja  $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \eta)$  o fibrado produto. Descreveremos, nesta seção, o grupo de Lie *Nil*, que se consiste de  $\mathbb{R}^3 \approx \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  com uma certa estrutura de grupo de Lie e uma certa métrica riemanniana invariante por multiplicação à esquerda. Além disso, *Nil* possui uma estrutura de contato ortogonal às fibras de  $\eta$ , definida pelo núcleo da 1-forma  $\omega = x dy + dz$ .

Considere a estrutura de contato acima, ou seja, o campo  $\tau = \ker(\omega)$  (Figura 4.20). O espaço total  $\mathbb{R}^3$  tem uma métrica riemanniana  $g$  unicamente definida pelas seguintes propriedades:

1. quando restrita às fibras,  $g$  é a métrica usual de  $\mathbb{R}$ ;
2. o campo  $\tau$  é ortogonal às fibras;
3. a projeção de  $g$  por  $\eta$  induz a métrica euclideana em  $\mathbb{R}^2$ , que passa a ser denotado por  $E^2$ .

A estrutura de grupo de Lie dada a  $\mathbb{R}^3$  vem do grupo de Heisenberg, o grupo das matrizes  $3 \times 3$  triangulares superiores da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

com a multiplicação usual de matrizes. Este grupo possui álgebra de Lie nilpotente e, por esta razão, também é conhecido como o grupo Nilpotente de

dimensão três. Chamaremos simplesmente de *Nil* a este grupo identificado naturalmente com  $\mathbb{R}^3$  por

$$\begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto (x, y, z)$$

e com a métrica riemanniana  $g$ . Sob esta identificação, a multiplicação em *Nil*, tem a seguinte expressão:

$$(x, y, z)(x', y', z) = (x + x', y + y', z + z' + xy').$$

Verifica-se então que a multiplicação à esquerda preserva tanto  $\tau$  quanto as fibras de  $\eta$ . Além disso,  $\eta$  induz na base  $E^2$  a sua estrutura usual de grupo de Lie, ou seja, a dada pela estrutura de espaço vetorial de  $\mathbb{R}^2$ . Logo, a métrica  $g$  é invariante por multiplicação à esquerda. Então, como  $g$  coincide com a métrica euclideana em  $(0, 0, 0)$ ,  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ,  $g$  é unicamente definida como sendo a métrica invariante por multiplicação à esquerda tal que, em  $(0, 0, 0)$  é dada por  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ . Explicitamente, em cada ponto  $(x, y, z)$ ,  $g$  é dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - x dy)^2.$$

A multiplicação à esquerda induz uma translação na base  $E^2$ , de  $\eta$ . Na realidade, para cada isometria de  $E^2$ , temos uma única, a menos de translação vertical, isometria de *Nil* que nela se projeta. O exercício seguinte indica como isso é visto:

**Exercício:**

(a) Mostre que a diferença de altura entre o ponto inicial e o ponto final do levantamento  $\tilde{\alpha}$  de uma curva  $\alpha$  ( $\alpha = \eta \circ \tilde{\alpha}$ ) em  $E^2$  é igual à área determinada por  $\alpha$  (*Sugestão*: Ligue os pontos inicial e final de  $\tilde{\alpha}$  por um segmento vertical e aplique o teorema de Stokes à forma  $\omega$ ).

(b) Mostre que se  $f$  é uma isometria de  $E^2$ , então existe uma única, a menos de translação vertical, isometria  $\tilde{f}$  de *Nil* que levanta  $f$  (ou seja,  $f = \eta \circ \tilde{f}$ ). (*Sugestão*: Sejam  $F_0$  e  $F_{f(0)}$  as fibras sobre 0 e  $f(0)$  respectivamente. A isometria  $g = \tilde{f}|_{F_0} : F_0 \rightarrow F_{f(0)}$  é unicamente definida a menos de translação. Queremos definir  $\tilde{f}(v, x)$ , onde  $(v, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ . Seja a curva  $\alpha(t) = tx$ ,  $t \in [0, 1]$  em  $E^2$  e  $(0, x_0)$  o ponto inicial do levantamento de  $\alpha$  com ponto final  $(v, x)$ . Defina  $\tilde{f}(v, x)$  como o ponto final do levantamento

de  $f \circ \alpha$  com ponto inicial  $(f(0), g(x_0))$ . Use **(a)** para mostrar que  $\tilde{f}$  está bem definida.)

**(c)** Conclua que  $\text{Isom}(\text{Nil})$  tem duas componentes conexas: uma é composta por elementos que se projetam a isometrias de  $E^2$  que preservam orientação e a outra por elementos que se projetam a isometrias que revertem orientação.

Enquanto  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  é o recobrimento universal de  $T^1H^2$  com a métrica induzida pela métrica usual de fibrado tangente unitário (Seção 4.1),  $\text{Nil}$ , apesar de ser o recobrimento universal de  $T^1E^2 = E^2 \times S^1$ , não possui métrica induzida por este produto, já que a conexão de Levi-Civita de  $T^1E^2$ , que é ortogonal às fibras, é integrável, não podendo portanto induzir a estrutura de contato ortogonal às fibras de  $(\text{Nil}, E^2, \eta)$ .

**Exemplo 4.8.1** *Sejam  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1) \in \text{Nil}$ . O quociente  $\text{Nil} / \langle e_3 \rangle$  é um fibrado produto  $E^2 \times S^1$  e tem métrica e conexão induzidas. Essa conexão novamente é uma estrutura de contato e tem curvatura constante. Observe que  $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  é o subgrupo de  $\text{Nil}$  das matrizes com coeficientes inteiros. Então  $\text{Nil} / \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  é uma variedade compacta e tem estrutura de fibrado de Seifert induzida por  $(\text{Nil}, E^2, \eta)$ .*

Analogamente ao caso  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ , se  $M$  é uma variedade compacta escrita como quociente de  $\text{Nil}$  por um grupo discreto de isometrias,  $M$  recebe uma estrutura  $(M, O, \eta')$  de fibrado de Seifert induzida pela estrutura de fibrado  $(\text{Nil}, E^2, \eta)$  (vide [13], p.469). É claro que  $\chi(O) = 0$ , já que  $O$  possui estrutura parabólica (Teorema 2.6.4). Além disso,  $e(\eta') \neq 0$  (vide [13], p.469), ou seja, temos o seguinte resultado:

**Proposição 4.8.2** *Se  $M$  é uma variedade compacta escrita como quociente de  $\text{Nil}$  por um grupo discreto de isometrias, então  $M$  recebe uma estrutura  $(M, O, \eta')$  de fibrado de Seifert induzida pelo fibrado  $(\text{Nil}, E^2, \eta)$  em  $\text{Nil}$ . Além disso,  $e(\eta') \neq 0$  e  $\chi(O) = 0$ .*

**4.9***Sol*

Definimos *Sol*, ou o grupo solúvel de dimensão três, como o grupo dos difeomorfismos de  $\mathbb{R}^3$  da forma

$$g_{x_0, y_0, z_0} : (x, y, z) \mapsto (x_0 + e^{-z_0} x, y_0 + e^{z_0} y, z_0 + z).$$

Temos uma identificação natural de *Sol* com  $\mathbb{R}^3$  por

$$(x_0, y_0, z_0) \mapsto g_{x_0, y_0, z_0}.$$

A razão dessa denominação é que *Sol* tem álgebra de Lie solúvel. Sob essa identificação, a multiplicação em *Sol* é dada por

$$(x, y, z) (x', y', z') = (x + e^{-z} x', y + e^z y', z + z').$$

É fácil ver que *Sol* age simplesmente transitivamente à esquerda nele próprio. A métrica de *Sol* é a métrica invariante à esquerda dada em  $(0, 0, 0)$  pela euclideana,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Explicitamente, essa métrica é dada em  $(x, y, z)$  por

$$ds^2 = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + dz^2.$$

Então *Sol* age à esquerda nele próprio por isometrias. Temos também as seguintes isometrias, que geram o grupo diedral de ordem oito,  $D_8$ :

$$(x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$$

$$(x, y, z) \mapsto (y, x, -z).$$

O grupo  $\text{Isom}(Sol)$  é dado por  $\langle Sol, D_8 \rangle$ . Assim, vê-se que o estabilizador de ponto deste grupo é  $D_8$ .

**Exemplo 4.9.1** *Sejam  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1) \in Sol$ . O quociente  $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \backslash Sol$  é uma variedade compacta que pode ser vista da seguinte forma. A ação, por multiplicação à esquerda, de  $e_3$  em *Sol* identifica  $\mathbb{R}_2 \times \{0\}$  com  $\mathbb{R}_2 \times \{1\}$  pelo difeomorfismo*

$$(x, y, z) \mapsto (e^{-1} x, e y, z + 1).$$

*Já  $e_1$  e  $e_2$  agem, por multiplicação à esquerda, por translações unitárias horizontais, garantindo a compacidade da variedade obtida.*