3
Especificação Estatística da Dispersão dos Modos de Polarização em Cabos de Fibra Óptica

Teoria básica da especificação estatística da dispersão dos modos de polarização em cabos de fibras óptica discutida na referência 1, TIA/EIA TSB 107. Neste capítulo serão abordados os aspectos mais importantes da especificação estatística em enlaces ópticos.

3.1 Introdução

A aproximação através de especificação tradicional, isto é, através de uma determinação determinística, do valor da PMD tem sido questionada [1, 2] devido a o limite teórico da reprodutibilidade da medida ser da ordem de ±15% conforme Gisin demonstrou [3].

Uma redução estatística na distribuição de valores da PMD de enlaces concatenados, comparado com a distribuição de valores da PMD de seções de cabos individuais ocorre com a PMD devido ao processo de média. Como as medidas básicas não são individualmente confiáveis, torna-se ainda mais importante estipular alguns limites sobre o processo de distribuição geral. Por esta razão, a análise estatística é considerada a maneira adequada para o tratamento deste parâmetro, visto que este tipo de análise será mais representativo do fenômeno que ocorrerá no enlace óptico.

Outro aspecto importante a ser considerado é o fato de que o valor de PMD é dado em função da média dos valores de DGD numa determinada faixa de comprimento de onda. Isto é válido tanto para o enlace quanto para os cabos individuais. Para sistemas de altas taxas de transmissão e de longas distâncias, onde PMD é um fator particularmente importante, a falha induzida nos sistemas por causa da PMD em um determinado comprimento de onda e tempo, é dada somente pelo valor do DGD naquele comprimento de onda e tempo, e não pela média. Este valor de DGD é aleatório. Significa considerar este comportamento aleatório em qualquer mapa de funcionalidade.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116375/CA

A variação estocástica do DGD no tempo pode ser interpretada em termos da quantidade de tempo por ano que o DGD exceda um certo valor. O projetista do sistema pode considerar uma certa quantidade de DGD através da alocação de uma penalidade de potência na sensibilidade do receptor. Caso o valor do DGD em um determinado comprimento de onda exceda o valor considerado para a penalidade alocada ocorrerá uma queda do sistema (indisponibilidade do sistema). Para os sistemas multiplexação por comprimento de onda, WDM, uma indisponibilidade do sistema da ordem de 0,04 mim/ano/circuito tem sido sugerida. Isto corresponde a uma probabilidade de $1{,}3.10^{-7}$ de que o valor do DGD de todo o enlace (inclusive de componentes não-cabos) exceda o valor de projeto.

Medidas de DGD associadas a uma probabilidade muito baixa não podem ser realizadas. Por assim ser, o fator analisado é a distribuição da média do DGD, isto é: a distribuição do valor de PMD. No caso de projetos de sistemas, a distribuição estatística dos valores de PMD deve ser utilizada para se determinar o DGD.

Dois métodos podem ser utilizados para especificar a característica da distribuição da PMD:

- **Método 1:** abordado nesta dissertação, relaciona a variação do coeficiente de PMD de enlaces concatenados;
- **Método 2:** relaciona a variação no valor do DGD de enlaces concatenados.

Através de uma equivalência entre os métodos permite-se concluir que ao se atender os critérios do Método 1, os critérios do Método 2 serão também atendidos. Convenciona-se que o Método 1 seja utilizado mais para propósitos comerciais e o Método 2 em projetos de sistemas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116375/CA

3.2
Consideraçãoes Importantes

3.2.1
Concatenação pela Média Quadrática

O valor da PMD de um enlace é dado pela raiz quadrada da soma dos quadrados dos valores de PMD de cada cabo que é utilizado para compor o enlace. Isto conduz a uma relação similar entre o coeficiente de PMD do enlace e o coeficiente de PMD das seções dos cabos, contanto que uma certa suposição é feita com relação ao comprimento das seções dos cabos.

Define-se o valor de PMD do enlace como d_{enlace} e os valores de PMD dos N cabos usados para compor o enlace como d_i. A média quadrática d_{enlace} é:

$$d_{enlace} = \left(\sum_{i=1}^{N} d_i^2 \right)^{1/2} \tag{10}$$

Definido o comprimento do enlace, L_{enlace} , como a soma dos comprimentos dos cabos individuais, L_i. Assumindo-se que todos os cabos que compõe o enlace têm um comprimento menor que um valor comum L_{cabo} e, simultaneamente reduzindo-se o número de cabos que compõe o enlace para $M= L_{enlace} / L_{cabo}$ então:

$$d_{c-enlace} = \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} d_{c-i}^2 \right)^{1/2} \tag{11}$$

A Seção 3.3 fornece como valor padrão M = 20 cabos, o que é conservativo na maioria dos enlaces de interesse. A Seção 3.4 fornece um comprimento de cabo padrão de 10 Km, o que também é conservativo porque a grande maioria do comprimento das seções de cabos instalada é de 2 Km até 4 Km.

O termo mais a direita da Equação 11 é a média quadrática do coeficiente de PMD dos cabos. A redução em variabilidade do coeficiente de PMD do enlace concatenado, relativo a variação individual dos cabos, segue do processo de média. A suposição do comprimento do cabo implica em $M \leq N$, o que é conservativo, mas uma simplificação necessária.

3.2.2
Variação Maxwelliana do DGD

Para cabos de fibra óptica, a variação no valor do DGD no tempo e comprimento de onda pode ser descrita por uma distribuição de Maxwell, a qual tem somente um parâmetro, o valor de PMD.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116375/CA

A Figura 9 mostra a variação no valor do DGD versus comprimento de onda. A linha horizontal representa o coeficiente de PMD.

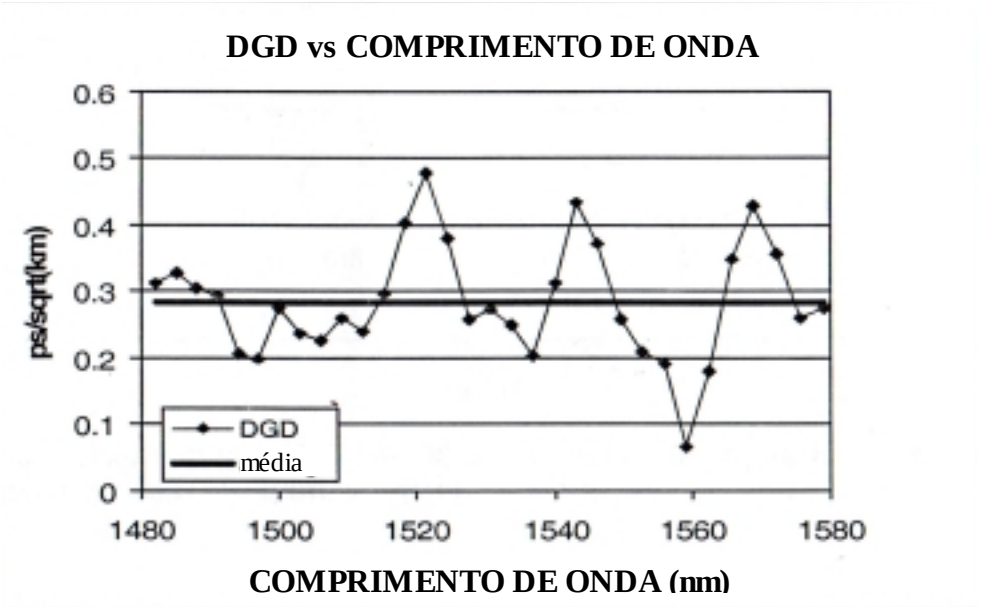

Figura 9 – DGD versus o comprimento de onda.

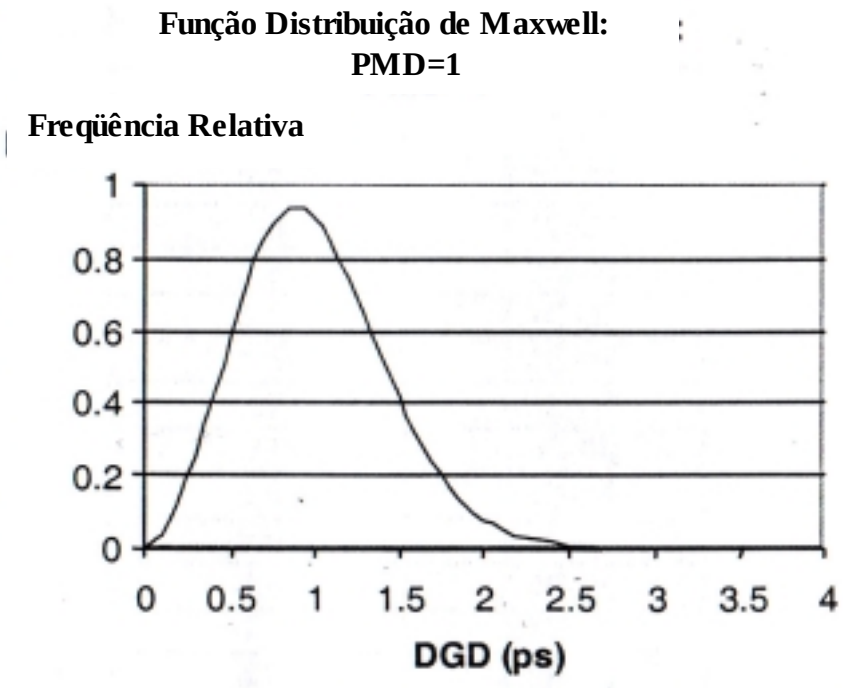

Figura 10 – Função de distribuição de Maxwell.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116375/CA

A Figura 10 mostra a função da densidade da probabilidade da distribuição de Maxwell para um valor de PMD de 1 ps. Quando a valor de PMD, d, é definido como uma média aritmética dos valores de DGD, D, esta função é definida como a equação 12:

$$f_{\max}(D;d) = 2\left(\frac{4}{\Pi d^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{D^2}{\Gamma(3/2)} \exp\left[-\frac{4}{\Pi}\left(\frac{D}{d}\right)^2\right] \tag{12}$$

A probabilidade no formato da Distribuição do DGD é de grande interesse. Pode ser calculado da distribuição Gama como:

$$\Pr(\Delta\tau \rangle D;d) = 1 - \int_0^{\frac{4}{\Pi}\left(\frac{D}{d}\right)^2} \frac{x^{3/2-1}}{\Gamma(3/2)} \exp(-x)dx \tag{13}$$

O fator de ajuste Maxwelliano, S, que é comumente usado para converter um valor máximo de PMD especificado para um valor máximo de DGD (definido em termos da probabilidade), é derivado da equação 5, assumindo d=1 e substituindo S por D.

$$P\max(S) = \Pr(\Delta\tau \rangle S;d=1) \tag{14}$$

Para encontrar o máximo DGD em um dado nível de probabilidade de um dado valor de PMD, d, deve-se computar o valor de S que satisfaz a equação 14 na probabilidade desejada e multiplique o valor de S vezes d para obter o máximo valor de DGD. A tabela seguinte tem alguns valores de S junto com as probabilidades associadas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116375/CA

Probabilidade baseada na média dos comprimentos de onda	
S	Probabilidade
3.0	4.2E-05
3.1	2.0E-05
3.2	9.2E-06
3.3	4.1E-06
3.4	1.8E-06
3.5	7.7E-07
3.6	3.2E-07
3.7	1.3E-07
3.775	6.5E-08
3.8	5.1E-08
3.9	2.0E-08
4.0	7.4E-09
4.1	2.7E-09
4.2	9.6E-10
4.3	3.3E-10
4.4	1.1E-10
4.5	3.7E-11

Tabela 1 – Valores de S com a probabilidade associada.

Observe que se o valor da PMD for definido como o valor da raiz da média quadrática (rms) dos valores de DGD, a constante $4/\pi$ deve ser substituída por 3/2 nas equações 12 e 13.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116375/CA

3.3
Definições e Cálculos para o Método 1

O máximo coeficiente de PMD do enlace para um dado processo de distribuição, PMD_Q, é definido em termos de um pequeno valor probabilístico, Q, e um número assumido de seções de cabos no enlace, M, de tal forma que $d_{c\text{-}enlace}$ seja um possível coeficiente de PMD do enlace:

$$Pr\ (d_{c\text{-}enlace} > PMD_Q) < Q \quad \text{para M ou mais cabos} \qquad (15)$$

Lê-se a expressão acima como: A probabilidade do coeficiente de PMD de um enlace ser maior que PMD_Q é menor que Q.

O requisito é expresso pela estipulação de M e Q e requisitando que PMD_Q seja menor que algum valor, $PMD_{máx}$. Os valores padrões são:

Q 100 ppm

M 20

$PMD_Q \leq PMD_{máx} = 0.5\ ps/\sqrt{Km}$

Para Q=100 ppm, PMD_Q é 99,99 por cento dos coeficientes de PMD do enlace.

Existem três técnicas que podem ser usadas para calcular PMD_Q, Monte Carlo Modelo Gama e o Teorema do Limite Central Generalizado [2].

A técnica de Monte Carlo não faz nenhuma suposição sobre a distribuição. Não pode contudo, ser usada para extrapolar além dos dados amostrados empiricamente. O Modelo Gama permite extrapolação usando um modelo que tem dois parâmetros que podem ser relacionados pela média e desvio padrão. O Modelo Gama é mais ajustado para as distribuições de PMD que a distribuição Gaussiana porque o modelo gama é deslocado para a direita e produz somente resultados não negativos.

O modelo do Teorema do Limite Central Generalizado tem três parâmetros que permitem o deslocamento ser ajustado independentemente da média e desvio padrão.

A escolha da técnica depende, em parte, da aplicação. Monte Carlo pode ser apropriado para testar as outras duas técnicas, ou para acessar o critério do

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116375/CA

método 2. Gama é útil na definição do projeto devido ter somente 2 parâmetros, escalas com M, e por ter uma base na teoria. Contudo, quando aplicar o Modelo gama para dados baseados em medidas que são limitadas por um valor mínimo mensurável, comum para os instrumentos de medida de PMD comercialmente disponíveis, alguns erros podem ser gerados porque o modelo vai até zero mas o dado não. O Teorema do Limite Central Generalizado, com três parâmetros, não é afetado pela questão do menor valor mensurável, é facilmente calculado, mas não é fácil usar em projetos ou para estabelecer equivalência por causa do três parâmetros.

3.3.1
Técnica de Monte Carlo

A amostra da distribuição de N coeficientes de PMD é representada por d_{c-i}, uma rotina de computador tomará aleatoriamente M valores de um universo de valores individuais medidos da distribuição e executará a média quadrática através da expressão 11, produzindo um coeficiente de PMD do enlace aleatório. Este processo será repetido K vezes pela rotina para produzir K valores aleatórios de coeficientes de PMD do enlace. O valor de K é determinado pela equação:

$$K \geq \frac{10}{Q} \tag{16}$$

Para q = 100 ppm, o valor mínimo de K é 100.000

Os K valores aleatórios do coeficiente de PMD do enlace são usados para formar um histograma de alta resolução, com tamanho das classes da ordem de 0,001ps/km¹/². Deixando d_{c-k} representar o limite superior da Késima classe, nk o número de repetições do valor nesta seção e $p_k=n_k/k$ a freqüência relativa na seção. Após o traçado do histograma estar completo podemos definir a função densidade cumulativa como:

$$c_m = \sum_{k=1}^{m} p_k \tag{17}$$

O valor de PMD_Q, é o primeiro valor, d_{c-m}, que satisfaça a condição

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116375/CA

$c_m \geq 1\text{-}Q$ conforme mostra a Figura 11.

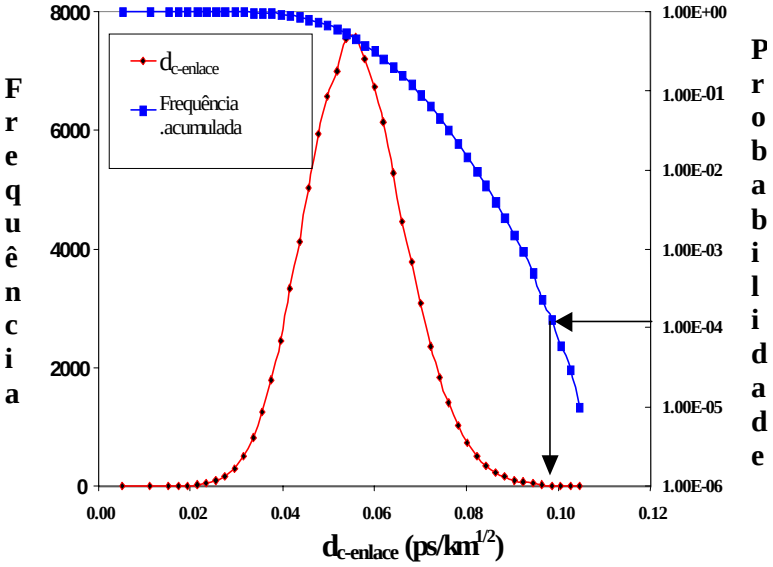

Figura 11 – Determinação de PMD_Q.

3.3.2
Técnica do Modelo Gama

O pressuposto do Modelo gama é: O quadrado dos coeficientes de PMD é distribuído como uma variável aleatória gama. Isto leva a uma escalabilidade com respeito à média quadrática e flexibilidade substancial em formas de distribuição. A função densidade de probabilidade é dada como:

$$f_r(d;\alpha,\beta,M) = 2\frac{(M\beta)^{M\alpha}}{\Gamma(M\alpha)} x^{2M\alpha-1}\exp\left[-M\beta d^2\right] \qquad (18)$$

Onde d representa os valores coeficiente de PMD para uma concatenação de M seções de cabos, α é o parâmetro da forma, e β é o parâmetro de escala.

Existem dois métodos de cálculo para a determinação de valores dos parâmetros da forma e escala: método dos momentos e cálculo da probabilidade máxima. Nesta dissertação somente será abordado o método dos momentos. Uma vez que os parâmetros tenham sido estimados, determine o valor, X_Q, o qual satisfaz a aproximação proposta pela IEC 61282-3 [2, 4]:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116375/CA

$$X_Q = 0{,}975 \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + 2{,}004 \cdot \frac{1}{\sqrt{N \cdot \beta}} \tag{19}$$

3.3.2.1
Método dos Momentos

Este método é baseado em uma pressuposição que Mα ≥ 5, e pode ser considerado como interativo porque os valores dos parâmetros devem ser estimados antes que esta desigualdade possa ser avaliada. Geralmente, contudo, deve-se fazer um Monte Carlo, Seção 3.3.1, para assegurar que a desigualdade é encontrada. Um valor α de 0,5 corresponderia a um quadrado da PMD sendo chi-quadrado de um grau de liberdade, o qual é um extremo. Um Monte Carlo na qual 20 seções de cabos são concatenadas produziria neste caso uma distribuição de valores de coeficiente da PMD para qual a desiguladade é satisfeita.

Deixe $d_{c\text{-}j}$ os K valores de Monte Carlo de um enlace concatenado de M seções de cabos. A provisão estima dos parâmetros são derivados da:

$$\frac{\alpha}{\beta} = v^2 = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K} d_{c-j}^{\,2} \tag{20}$$

$$\frac{1}{4M\beta} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K} \left[d_{c-j} - v \right]^2 \tag{21}$$

O número de enlaces de Monte Carlo, K, deve ser suficiente para estabilizar a estimação de v junto a precisão desejada, tipicamente menor que 0,001 ps/ raiz Km.

A raiz quadrada de 20 é média quadrática. A raiz quadrada de 21 é o desvio padrão sobre a média quadrática. Dado o valor de β, calculado de 21, calcula-se α da Equação 20 e verifique que Mα ≥ 5.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116375/CA

Se a desigualdade não é verificada, repete-se o Monte Carlo usando um maior valor de M.

3.3.3
Teorema do Limite Central Generalizado

Esta Técnica deve ser considerada como um "modelo independente" porque é derivada do Teorema do Limite Central, ajustado para incluir um termo inclinado. Deixe d_{c-i} ser N valores medidos das seções de cabos individuais.

Calcular os seguintes momentos:

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_{c-i}^{\,2} \tag{22}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(d_{c-i}^{\,2} - \mu_1\right)^2\right) \tag{23}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(d_{c-i}^{\,2} - \mu_1\right)^3\right) \tag{24}$$

Para obtermos o valor de PMD_Q, um artifício utilizado na norma TIA/EIA é de aproximar o valor de PMD_Q para:

$$PMD_Q \approx \left[\mu_1 + Z_Q\left(\frac{\mu_2}{M}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\mu_3}{6\mu_2 M}\left(Z_Q^2 - 1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{25}$$

Onde Z_Q deve satisfazer:

$$\Phi(z_Q) = 1 - Q \tag{26}$$

Note que para Q=100 ppm, Z_Q=3.72.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116375/CA